

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему «*Комплексні та гіперкомплексні
структури на чотиривимірних многовидах*»

Виконав: студент групи М162 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 111
“Математика”
освітньо-професійної програми
“Математика”

Подуст Г.М.

Керівник: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
фундаментальної математики
Фаворов С.Ю.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
прикладної математики
Ігнатович С.Ю.

Харків — 2023 рік

Анотації

Подуст Г.М. Комплексні та гіперкомплексні структури на чотиривимірних многовидах

У цій роботі ми надамо стисле введення у теорію комплексних многовидів, виділимо основні схожості та відмінності порівняно з диференційованими многовидами. Ми дослідимо техніки та методи, які часто використовуються для вивчення комплексних многовидів. Крім того, ми детально розглядаємо поверхню Гопфа та її властивості, а також, скориставшись теорією накриттів та кватерніонів, поглибимось у важливий для подальшого вивчення та класифікації факт теорії представлень та алгебр Лі.

Podust H.M. Complex and hypercomplex structures on four dimensional manifolds

In this paper we will give a brief introduction to the theory of complex manifolds, We will highlight the main similarities and differences compared to differentiable manifolds. We will explore techniques and methods that are often used to study complex manifolds. In addition, we take a closer look at the Hopf surface and its properties, and, using the theory of covers and quaternions, we will delve into an important for further study and classification fact of representation theory and Lie algebras.

Зміст

Анотації	2
Вступ	4
1. Основні означення та спостереження	7
2. Гопфова поверхня	11
3. Про накриття $SU(2, \mathbb{C}) \times SU(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(4, \mathbb{R})$	15
4. Більш глибокі означення та методології	19
4.1. Комплексні та майже комплексні багатовиди	19
4.2. Ермітові та Келерові структури	20
4.3. Когомології	21
Висновки	22
Список використаних джерел	24

Вступ

Теорія комплексних многовидів - це фундаментальний розділ математики що вивчає геометричні структури, породжені голоморфними функціями. Цей математичний апарат забезпечує потужну основу для вивчення та розуміння складних математичних об'єктів. У цьому вступі ми заглибимося у основні поняття та досягнення в теорії комплексних многовидів, а також згадаємо видатних постатей, які вплинули на розвиток цієї галузі та деякі сучасні проблеми, які продовжують захоплювати дослідників.

Початок складання математичного уявлення та розуміння комплексних многовидів можна простежити ще у 19 столітті, коли математики почали досліджувати аналітичні властивості функцій визначених на комплексних многовидах. Фундаментальна робота Огюстена-Луї Коші та Бернгарда Рімана в галузі комплексного аналізу заклали основу для подальшого розвитку комплексних многовидів. Спираючись на це, італійський математик Луїджі Б'янккі зробив значний внесок у теорію на початку 20-го століття.

Один з проривів у теорії комплексних многовидів стався завдяки розвитку поняття голоморфних функцій. На початку 20-го століття французький математик Анрі Картан представив концепцію голоморфних відображень і встановив фундаментальні принципи теорії комплексних многовидів. Його робота забезпечила основу для вивчення комплексних многовидів і проклала шлях для майбутніх досягнень у цій галузі.

Іншою важливою віхою в теорії комплексних многовидів стала теорема про уніформізацію, сформульована Анрі Пуанкаре та Феліксом Клейном наприкінці 19-го та на початку 20-го століть. Ця теорема, у певному сенсі, встановлює зв'язок між ріманановими поверхнями, які є одновимірними

комплексними многовидами, та найпростішими рімановими поверхнями, а саме сферою Рімана $\hat{\mathbb{C}}$, комплексною площиною $\mathbb{C}$ та відкритим одиничним диском $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Теорема про уніформізацію відіграла вирішальну роль у розумінні глобальних властивостей комплексних многовидів і мала далекосяжні наслідки в різних галузях математики.

У сучасній теорії комплексних многовидів дослідники займаються вирішенням безлічі актуальних та інтригуючих проблем. Однією з важливих областей дослідження є класифікація комплексних многовидів. Теорема про класифікацію, запропонована Жан-П'єром Серром та Куніхіко Кодайрою в середині 20-го століття, має на меті класифікувати комплексні многовиди з точністю до бігоморфної еквівалентності. Ця проблема залишається в центрі уваги дослідників і призвела до тісних зв'язків з алгебраїчною геометрією та диференціальною геометрією.

Важливим аспектом теорії комплексних многовидів є вивчення Келерових многовидів. Це комплексні многовиди з трьома взаємосумісними структурами - комплексною структурою, симплектичною формою та рімановою метрикою, що зберігає певні геометричні властивості. Розуміння геометрії та топології Келерових многовидів - це важлива в сучасній математиці область досліджень, яка пов'язана з іншими галузями такими як алгебраїчна геометрія, математична фізика та теорія струн.

Теорія комплексних многовидів продовжує розвиватися, і зараз тривають дослідження таких тем, як голоморфна симплектична геометрія, простори модулів та дзеркальна симетрія (важливе поняття з області теорії струн). Взаємозв'язок між комплексним аналізом, диференціальною геометрією та алгебраїчною геометрією робить цю галузь багатогранною та відкритою для подальшого дослідження, приваблюючи математиків, пов'язаних з різними напрямками.

Головною метою цієї роботи було деяке покращення результату класифікації гіпер ермітових многовидів розмірності 4, отриманого Чарльзом Бойєром в 1988 році (див. [1]). Для цього в розділі 1 було наведено основні означення теорії комплексних многовидів, а також, приклади комплексних многовидів. В розділі 2 було більш детально розглянуто гофрові поверхні - один з класів конформної еквівалентності, встановлених у [1], а в розділі 3 було наведено доведення важливого факту теорії накриттів, який є ключовим для подальшої роботи над покращенням оригінального результату. В розділі 4 наведені більш тонкі означення та методології, що будуть використані в подальшій роботі.

Розділ 1

Основні означення та спостереження

Комплексні многовиди - це топологічні простори, які локально представляються, як відкриті полідиски $B \subset \mathbb{C}^n$ з голоморфними функціями переходу. Комплексні многовиди тісно пов'язані з диференційовними многовидами, але все ж дуже відрізняються у багатьох аспектах. Ці подібності та відмінності впливають, у певному сенсі, з відповідних подібностей та відмінностей між диференційовними та голоморфними функціями. Насправді, оскільки будь-який комплексний многовид є також і диференційовним многовидом, виявляється, що властивість бути комплексним многовидом забезпечує більш багату геометричну структуру. Тепер введемо більш формальне означення (див. [3] с.4):

Означення 1.1. Комплексний многовид - це пара $(M, \mathfrak{J})$, що складається з гладкого, дійсного многовиду дійсної розмірності $2n$ та максимального атласу, функції переходу якого лежать у псевдогрупі біголоморфних відображень (що значить, що композиція двох біголоморфізмів, якщо вона визначена, є біголоморфізмом, див. [3] с.4) між відкритими підмножинами $\mathbb{C}^n$ - коротко, голоморфного атласу.

Зауваження 1.2. Наведене вище визначення фактично повторює визначення диференційовного многовиду (див. [3] с.4). І дійсно, ми могли б визначити комплексний многовид як Гаусдорфів, локально евклідів топологічний простір, що задовольняє другій аксіомі зліченності, з голоморфною структурою на ньому.

Не кожен парновимірний многовид має голоморфний атлас, але, неочікувано, у деяких випадках надзвичайно важко визначити, чи має певний парновимірний дійсний многовид голоморфну структуру чи ні (наприклад, досі не з'ясовано, чи існує комплексна структура многовиду на шестивимірній сфері). Також, так само, як і у дійсному випадку, один гладкий многовид може допускати багато нееквівалентних голоморфних атласів.

Наступним кроком, як і у випадку дійсних многовидів, ми введемо поняття функції, що діє між двома многовидами:

Означення 1.3. Відображення між двома комплексними многовидами називається голоморфним, якщо індуковане відображення є голоморфним відносно довільних локальних карт (див. [3] с.4).

Зауваження 1.4. Безпосереднім наслідком добре відомого з комплексного аналізу принципу максимуму є той факт, що кожна голоморфна функція на зв'язному компактному комплексному многовиді є сталою: модуль функції повинен мати максимальне значення в силу компактності, отже, функція є локально сталою за принципом максимуму, а значить, постійна і на всьому многовиді, оскільки многовид є зв'язним. Таким чином, якщо $M \subset \mathbb{C}^n$ є комплексним підмноговидом, то всі координатні функції, обмежені на M , стають глобально голоморфними функціями на M . Тобто не існує голоморфного аналога теореми Вітні про вкладення (теорема Вітні про вкладення стверджує, що кожний гладкий многовид розмірності m може бути гладко вкладено в евклідов простір розмірності $2m$). І єдиний приклад компактного комплексного многовиду, який голоморфно вкладається в $\mathbb{C}^n$ - це точка.

Наведемо декілька прикладів:

Приклад 1.5. Евклідов простір $\mathbb{C}^n$ є найтривіальнішим прикладом комплексного многовиду.

Приклад 1.6. Відкрити підмножини $\mathbb{C}^n$.

Приклад 1.7. Фактор-простір $\mathbb{C}^n/\Lambda$, де Λ - це ґратка (тобто скінченно породжена дискретна підгрупа). Якщо Λ породжений $\mathbb{R}$ -базисом в $\mathbb{C}^n$, то отриманий фактор простір є компактным многовидом, який називається компактным комплексним тором. Незважаючи на те, що відповідний комплексному тору диференціальний многовид є дифеоморфним до дійсного $2n$ -вимірного тора, комплексно-аналітичні властивості компактного комплексного тора залежать від алгебраїчних властивостей ґратки.

Приклад 1.8. Комплексний проєктивний простір $\mathbb{CP}^n$.

Приклад 1.9. Ріманова поверхня, тобто, зв'язний комплексний многовид комплексної розмірності один. Ріманові поверхні також можна описати як дійсні многовиди дійсної розмірності два, які є орієнтовними та метризованими.

Приклад 1.10. Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$ - довільне комплексне число з модулем більшим за 1. Розглянемо дію $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, яка задається

$$\forall k \in \mathbb{Z} : z \mapsto \alpha^k z.$$

Зрозуміло, що для будь-якого цілого числа k описане вище відображення відображає $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ у $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Виявляється, що фактор простір за цим відображенням є комплексним многовидом. Цей многовид називається го-пфовою поверхнею.

Примітка: Гопфова поверхня є частковим випадком більш загальної ситуації, а саме якщо G - комплексна група Лі, яке діє на комплексному многовиді M за допомогою бігоморфізмів вільно та власно (див. [2] с.59),

то M/G має природну структуру комплексного многовиду, що робить фактор відображення $M \rightarrow M/G$ голоморфним (див. [2] с.61).

Розділ 2

Гопфова поверхня

Теорема 2.1. *Гопфова поверхня - це комплексний многовид, а відповідний йому диференційовний многовид є дифеоморфним до $S^1 \times S^3$ (див. [2] с.61).*

Доведення. В доведенні ми будемо спиратися на наступну широко відому теорему (див. [2] с.60):

Якщо Γ - дискретна група, що діє гладко на комплексний многовид M і дія є власною та вільною, то фактор простір M/Γ має єдину структуру комплексного многовиду, що робить проєкцію $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ голоморфним регулярним накриттям.

Зокрема, група $\mathbb{Z}$ є дискретною. Позначемо групу, що відповідає α як Γ . Її дія є гладкою, оскільки комплексне множення є гладким. Для того, щоб переконатися у тому, що дія дискретної групи Γ на многовиді M є власною достатньо встановити, що Γ_K скінченна для будь-якої компактної $K \subset M$ (тут $\Gamma_K = \{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$). Оскільки $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ є метричним простором, компактність еквівалентна секвенційній компактності, тож ми бачимо, що компактні підмножини $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ є нічим іншим, як замкненими, обмеженими підмножинами які не мають точку 0 за свою граничну точку, тобто $A \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ є компактною, якщо A замкнена і міститься у множині $\{z \in \mathbb{C}^n | r \leq |z| \leq R\}$ з деякими $r, R > 0$. Тепер, для довільного компактного $K \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ обмеженого за модулем знизу та зверху числами r_K та R_K відповідно, маємо, що існує $n \in \mathbb{Z}$ - додатне, таке, що $r |\alpha|^n > R$ та існує

$m \in \mathbb{Z}$ - від'ємне, такого, що $R|\alpha|^m < r$, що означає, що перетин $\alpha^z K \cap K$ може бути непорожнім лише для скінченної кількості елементів $\mathbb{Z}$, а саме для z таких, що $m \leq z \leq n$. Таким чином, дія є власною.

І, нарешті, дія є вільною, оскільки $\forall p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $\alpha^z p = p$ означає, що $\alpha^z = 1 \Leftrightarrow z = 0$. Таким чином, застосовуючи наведену вище теорему, ми отримуємо, що фактор простір дійсно є гладким многовидом.

Тепер ми покажемо, що гофова поверхня дифеоморфна до $S^1 \times S^3$. Позначимо гофову поверхню, що відповідає α як X_α . Ми покажемо існування відображення $\tilde{f} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$, такого, що наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \times S^3 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X_\alpha & \xrightarrow{f} & S^1 \times S^3 \end{array}$$

є комутативною, тобто виконується умова

$$\forall p', p'' \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \pi_1(p') = \pi_1(p'') : \pi_2(\tilde{f}(p')) = \pi_2(\tilde{f}(p'')).$$

Тут $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \Gamma_\alpha = X_\alpha$ - канонічна проекція, яка вище була позначена як просто π , і $\pi_2 : \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times S^3 = S^1 \times S^3$ - це проекція, що діє як канонічна проекція $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ за першою координатою і як тотожність за другою координатою.

Означення 2.2. Для $n \in \mathbb{Z}$ будемо називати $[n, n+1)$ -частиною $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ відносно α підмножину

$$\left\{ p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} : |\alpha|^n \leq |p| < |\alpha|^{n+1} \right\}.$$

Також $[0, 1)$ -частину ми будемо називати канонічною частиною $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ відносно α , а $\{p : |p| = |\alpha|^n\}$ - основою частини.

Зрозуміло, що кожна $[n, n + 1)$ -частина містить рівно одного представника класу еквівалентності відносно Γ і що множення на α^z є бієкцією з $[n, n + 1)$ -частини на $[n + m, n + m + 1)$ -частину для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Також якщо розглянути відображення $\hat{f} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, задане як $p \mapsto \log_{|\alpha|} |p|$, то наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi'_2 \\ X_\alpha & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

є комутативною, тобто виконується умова

$$\forall p', p'' \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \pi_1(p') = \pi_1(p'') : \pi'_2(\hat{f}(p')) = \pi'_2(\hat{f}(p'')).$$

Отже, ми можемо взяти $\hat{f}$ у якості першої координати $\tilde{f}$.

Розглянемо спочатку випадок $\alpha \in \mathbb{R}$. У цьому випадку другу компоненту $\tilde{f}$ можна обрати наступним чином: $p \mapsto p_0$, де $p_0 \in S^3$, так що $p = \rho p_0$. Тобто, $\tilde{f}$ задано як $p \mapsto (\log_\alpha |p|, p_0)$.

При спробі узагальнення цього підходу у випадку $\alpha \notin \mathbb{R}$, оскільки $\alpha = re^{i\theta}$, виникає проблема, яка полягає у тому, як однозначно ототожнити точку $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ з точкою на S^3 . Зрозуміло, як ми ототожнюємо точки основи, оскільки такі точки є результатом множення (ділення) точки з S^3 (яка є 0-осною) на α і для цього нам не потрібне поняття комплексного кореня. Далі, помітимо, що відображення $p \mapsto \alpha^t p = r^t e^{it\theta} p$ змінює модуль експоненційно відносно t , у той час як зміна кута є лінійною. Ідея полягає в тому, щоб лінеаризувати зміну модуля (що було зроблено вище), а потім описати, як ми пов'язуємо вершини частини з її основою не в термінах α (що може вимагати введення поняття комплексного кореня), а в термінах

кутів. Поєднуючи ці ідеї, ми виводимо формулу для $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(p) = \left(\log_{|\alpha|} |p|, e^{-i(\log_{|\alpha|} |p|)\theta} \frac{p}{|p|} \right).$$

Перевіримо, чи дійсно $\tilde{f}$ задовольняє необхідну властивість:

$\forall p', p'' \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \pi_1(p') = \pi_1(p'')$, тобто, $\exists z \in \mathbb{Z} : p' = \alpha^z p''$, маємо, що

$$\begin{aligned} 1. \quad & \log_{|\alpha|} |p'| = \log_{|\alpha|} |\alpha^z p''| = \log_{|\alpha|} |\alpha^z| |p''| = z + \log_{|\alpha|} |p''|. \\ 2. \quad & \frac{e^{-i(\log_{|\alpha|} |p'|)\theta} p'}{|p'|} = \frac{e^{-i(\log_{|\alpha|} |\alpha^z p''|)\theta} \alpha^z p''}{|\alpha^z p''|} = \frac{e^{-i(\log_{|\alpha|} |p''|)\theta} e^{-iz\theta} e^{iz\theta} p''}{|p''|} = \\ & \frac{e^{-i(\log_{|\alpha|} |p''|)\theta} p''}{|p''|}. \end{aligned}$$

І нарешті, $\tilde{f}$ є гладкою як комбінація гладких відображень та елементарних операцій.

□

Зауваження 2.3. Гопфова поверхня є одним з гопфових многовидів. Гопфові многовиди визначаються аналогічним чином, а саме як фактор простори $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, всі вони дифеоморфні до $S^1 \times S^{2n-1}$ (див. [2] с.61).

Розділ 3

Про накриття

$$SU(2, \mathbb{C}) \times SU(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(4, \mathbb{R})$$

В цьому розділі ми дослідимо універсальне накриття групи $SO(4, \mathbb{R})$. Для цього нам знадобиться розглянути простір кватерніонів $\mathbb{H}$, надати описання групі $SU(2, \mathbb{C})$ та дослідити деякий зв'язок між ними. Основну теорему буде сформульовано нижче.

Розглянемо $\mathbb{H}$ - простір кватерніонів. Як векторний простір він ізоморфний $\mathbb{R}^4$: кватерніони мають вигляд $a + bi + cj + dk$, де a, b, c, d - дійсні числа, а $1, i, j, k$ - базисні вектори. Кватерніони утворюють асоціативну, але не комутативну алгебру над полем дійсних чисел, таблиця множення якої має вигляд

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Виведемо формулу оберненого елемента. Аналогічно комплексному випадку, введемо операцію кватерніонного спряження

$$(a + bi + cj + dk) \mapsto (a - bi - cj - dk).$$

Як і в комплексному випадку, спряжений до p кватерніон ми будемо позначати $\bar{p}$. Тепер, для довільного кватерніону $p = a + bi + cj + dk$ розглянемо добуток $p\bar{p}$

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 - abi - acj - adk + bai - b^2i^2 - bck + bdj + caj + cbk - c^2j^2 - cdi + dak - dbj + dci - d^2k^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Зауважимо, що отриманий вираз збігається з квадратом евклідової норми p на $\mathbb{R}^4$. Таким чином, на $\mathbb{H}$ існує норма, яка задається наступним чином $\|p\| = \sqrt{p\bar{p}}$ (також звернемо увагу на те, що хоча алгебра кватерніонів не є комутативною, але оскільки $\bar{\bar{p}} = p$, ми маємо, що $p\bar{p} = \bar{p}p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$). Це дозволяє нам записати явну формулу для оберненого елемента, а саме $p^{-1} = \frac{\bar{p}}{\|p\|^2}$ – і цей вираз є коректно означеним для всіх $p \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Таким чином $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ і наведений вище вираз дійсно визначає мультиплікативну обернену до p , оскільки, $p\bar{p} = |p|^2$. Отже, для одиничних елементів $\mathbb{H}$, а саме для $p \in S_{\mathbb{H}} = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$, маємо, що $p^{-1} = \bar{p}$. Легко перевірити, що для довільних $p, q \in \mathbb{H} : \|pq\| = \|p\|\|q\|$. Таким чином ми робимо висновок, що $S_{\mathbb{H}}$ є групою відносно кватерніонного множення. Тепер ми введемо групи $SU(2, \mathbb{C})$ і $SO(4, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} SU(2, \mathbb{C}) &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : A^*A = I, \det A = 1\}, \\ SO(4, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(4, \mathbb{R}) : A^T A = I, \det A = 1\}. \end{aligned}$$

Опишемо групу $SU(2, \mathbb{C})$ у більш зручний спосіб. Покажемо, що

$$SU(2, \mathbb{C}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ з } \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1.$$

Дійсно, якщо розглядати елемент $SU(2, \mathbb{C})$ як два вектори (записані у вигляді рядків $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$) з комплексними координатами, отримуємо наступне: нехай v_1 дорівнює $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$, тоді з умови $A^*A = I$ випливає, що $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1$ і що $v_1 \perp v_2$ (так як, зокрема, $\langle v_i, v_j \rangle_H = \delta^{ij}$). Таким чином, v_2 має вигляд $\begin{pmatrix} -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. Тепер, оскільки

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = c(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) = c,$$

отримуємо, що $c = 1$ і, таким чином, твердження доведено.

Тепер, якщо у цьому представленні ми замінимо α і β їх повними формами, то отримаємо, що елемент $SU(2, \mathbb{C})$ також можна подати у вигляді

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

кожна з цих матриць має вигляд, описаний вище, і, крім того, ці матриці задовольняють кватерніонну таблицю множення, тому можна розглядати відображення $SU(2, \mathbb{C}) \rightarrow S_{\mathbb{H}}$, яке діє наступним чином

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mapsto a + bi + cj + dk.$$

Якщо позначити елемент $SU(2, \mathbb{C})$ як A , а його образ під дією цього відображення як q , то отримаємо, що $\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \det A = 1$, тобто образ $SU(2, \mathbb{C})$ дійсно знаходиться всередині $S_{\mathbb{H}}$. Ця ж рівність встановлює сюр'єктивність цього відображення. Це відображення є ін'єктивним завдяки єдиності такого представлення елемента з множини $SU(2, \mathbb{C})$. Легко перевірити, що це відображення зберігає множення. Отже, воно є встановлює ізоморфізм груп.

Група $SO(4, \mathbb{R})$, у свою чергу, має натуральне представлення $SO(4, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, що задається стандартним множенням матриць.

Теорема 3.1. $SU(2, \mathbb{C}) \times SU(2, \mathbb{C})$ - простір накриття порядку 2 групи $SO(4, \mathbb{R})$.

Доведення. Розглянемо наступне відображення $SU(2, \mathbb{C}) \times SU(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} SO(4, \mathbb{R})$, дія якого задається $(p, q) \mapsto (v \mapsto pvq^{-1})$, де $p, q \in S_{\mathbb{H}}$, а $SU(2, \mathbb{C})$ ототожнено з $S_{\mathbb{H}}$ як у показано вище. Перше, що ми відзначимо, це те, що отримане перетворення є лінійним завдяки дистрибутивності

кватерніонного множення. Також зрозуміло, що воно зберігає кватерніонну норму (оскільки норма добутку є добутком та $\|p\| = \|q^{-1}\| = 1$). Таким чином, це відображення визначає ортогональне перетворення $\mathbb{R}^4$, що означає, що образ $SU(2, \mathbb{C}) \times SU(2, \mathbb{C})$ під дією ψ дійсно знаходиться в $SO(4, \mathbb{R})$. Це відображення є гладким в силу гладкості кватерніонного множення. Це гомоморфізм груп: $\psi((p_2 \circ p_1, q_2 \circ q_1)) = (v \mapsto p_2 p_1 v q_1^{-1} q_2^{-1})$. Обчислимо його ядро: те, що пара (p, q) знаходиться у $\ker \psi$ означає, що для довільного $v \in \mathbb{H}$, маємо $p v q^{-1} = v$, що еквівалентно $p v = v q$. Поклавши у цьому виразі $v = 1$, отримаємо $p = q$. Таким чином, ми шукаємо такі $p \in \mathbb{H}$, що $p v = v p, \forall v \in \mathbb{H}$, тобто центр $\mathbb{H}$. Легко бачити, що жоден елемент з ненульовою чисто кватерніонною частиною не належить центру, з іншого боку, всі скалярні кватерніони належать центру. Таким чином, отримуємо що $\ker \psi \subset \{(p, p) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} : p \in \mathbb{R}, p \in S_{\mathbb{H}}\} = \{(1, 1), (-1, -1)\}$. Легко помітити що обидва ці елементи лежать у центрі. У термінах груп ми отримали, що $\ker \psi = \{(Id, Id), (-Id, -Id)\}$. Тепер, оскільки ми знаємо, що обидва $SU(2, \mathbb{C}) \times SU(2, \mathbb{C})$ і $SO(4, \mathbb{R})$ є 6-вимірними компактними та зв'язними многовидами, то робимо висновок, що ψ є накриттям порядку 2. Зауважимо також, що $\ker \psi$ ізоморфний до $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Розділ 4

Більш глибокі означення та методології

4.1. Комплексні та майже комплексні многовиди

Означення 4.1. Для m -вимірному дійсного векторного простору V комплексною структурою на V є оператор $J : V \rightarrow V$ з $J^2 = -I$ (див. [4] с.8-9).

Звичайно, є сенс розглядати поняття мультилінійної та/або зовнішньої алгебри починаючи з самого V , але виявляється, що якщо ми почнемо з комплексіфікації V , то комплексна структура дасть нам більш багату структуру для роботи, а саме J дозволяє розкласти $V_{\mathbb{C}}$ на $\pm i$ -власні простори, це, у свою чергу, дозволяє розглядати $\Lambda^r V_{\mathbb{C}}$ як $\bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$.

Наступним кроком є узагальнення цієї концепції з поточної перспективи на тензорні розшарування над диференційовними многовидами.

Означення 4.2. Майже комплексний многовид - це диференційовний многовид M разом з гладким ендоморфізмом $J : TM \rightarrow TM$, що задовольняє $J_x^2 = -I_x$, для всіх $x \in M$ (див. [4] с.8-9).

Введену вище лінійну алгебру можна застосувати поточно до дотичного розшарування M . Розкладення дотичних просторів дозволяють розкласти зовнішню похідну на M в $\partial, \bar{\partial}, \mu, \bar{\mu}$, з $\partial : \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda^{p+1,q} V_{\mathbb{C}}$, $\bar{\partial} : \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda^{p,q+1} V_{\mathbb{C}}$, $\mu : \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda^{p+2,q-1} V_{\mathbb{C}}$ і $\bar{\mu} : \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda^{p-1,q+2} V_{\mathbb{C}}$. Це дає зручний апарат для вивчення майже складної структури M і є особливо корисним у випадку, коли M є комплексним многовидом.

Наступне, на що слід звернути увагу - це той факт, що кожен комплексний многовид має індуковану майже комплексну структуру. Тож має сенс поставити питання, які є додаткові властивості майже комплексних структур, які виникають з голоморфного атласу. Можна очікувати, що необхідна деяка диференціальна властивість J оскільки J є алгебраїчним об'єктом, а голоморфний атлас містить аналітичну інформацію. І справді, тензор Ніденгайса, який пов'язує J з дужкою Лі, використовується для встановлення необхідних (і достатніх) умов, за яких існує голоморфний атлас на M . Точніше кажучи, тензор Ніденгайса на J задається через

$$N_J(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]),$$

а умова, що має виконуватись - це

$N_J(X, Y) = 0$ для будь-яких X, Y - векторних полів (див. [4] с.12-13).

4.2. Ермітові та Келерові структури

Ермітовою метрикою на майже комплексному многовиді (M, J) називається ріманова метрика h , яка сумісна з J у тому сенсі, що $h(X, Y) = h(JX, JY)$, для всіх $X, Y \in TM$. Як наслідок, ми визначаємо *фундаментальну форму* ермітової метрики за формулою $\Omega(X, Y) = h(JX, Y)$. *Келерова метрика* на комплексному многовиді M є ермітовою метрикою, фундаментальна 2-форма якої є замкненою. Многовид, на якому можна означити ермітову/келерову метрику, називається *ермітовим/келеровим многовидом*. Здається, що для того, щоб встановити, чи є заданий ермітовий многовид Келеровим, потрібно визначити, чи є його тензор Ніденгайса тотожно нульовим і чи є його фундаментальна форма замкненою. Але виявляється, що у цьому випадку існує значне спрощення: ми можемо не тільки описати достатню умову інтегровності в термінах зв'язку Леві-Чівіта,

але й сформулювати умову, за якої ермітова метрика на комплексному многовиді стає келеровою. Введення поняття оператора Лапласа на Келерових многовидах дає змогу глибше дослідити ці поняття. Одним з помітних результатів на цьому шляху є те, що всі непарні числа Бетті компактного келерового многовида є парними, а всі парні числа Бетті є ненульовими (див. [4] с.52). Зокрема, з цього випливає, що на вищезгаданій Гопфовій поверхні не можливо означити келерову метрику, оскільки її перше число Бетті дорівнює одиниці.

4.3. Когомології

Як ми вже згадували, комплексні многовиди мають більш багату геометричну структуру, тому на комплексних многовидах існує багато різних когомологій. Зокрема, найбільш простою є когомологія Долбо, яка є аналогом когомології Де Рама, визначеної для випадку, коли M - комплексний многовид. Розглянемо $\bar{\partial}$ з уже згаданого розкладу зовнішньої похідної. Визначимо групи когомологій Долбео наступним чином (див. [4] с.51)

$$H^{p,q}M = \frac{Ker(\bar{\partial} : \Lambda^{p,q}V_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda^{p,q+1}V_{\mathbb{C}})}{Im(\bar{\partial} : \Lambda^{p,q-1}V_{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda^{p,q}V_{\mathbb{C}})}.$$

Але на відміну від когомології де Рама, когомологія Долбо не є топологічним інваріантом - вона сильно залежить від комплексної структури.

Висновки

В заключенні, можемо констатувати, що дослідження теорії комплексних многовидів відкриває багатий і захоплюючий напрямок математики. Від своїх витоків у 19 столітті з фундаментальних робіт Коші та Рімана до сучасних розробок - класифікаційних теорем, многовидів Калабі-Яу, теорія комплексних многовидів доводить свою актуальність та необхідність для сучасної математики.

Вивчення комплексних многовидів не тільки розкриває елегантність математичних структур, визначених голоморфними функціями, але й демонструє взаємозв'язок різних математичних напрямків. Внесок таких постатей, як Картан, Серре та Кодайра, сформував напрямок розвитку цієї галузі, забезпечивши основи та теореми, які продовжують надихати та спрямовувати сучасні дослідження.

Більш детальне вивчення гоффової поверхні встановило явний дифеоморфізм з більш простим та фундаментальним многовидом, а детальне поглиблення в теорію накриттів і кватерніонів, виявляє важливий аспект, пов'язаний з теорією представлення та алгебрами Лі. Це не тільки підкреслює глибину і застосовність теорії комплексних многовидів, але й вказує на перспективні шляхи для подальшого дослідження і класифікації.

Коли ми занурюємося у теорії голоморфної симлектичної геометрії, фактор просторів та дзеркальної симетрії, стає очевидним, що теорія комплексних многовидів - це не просто історичний артефакт, а жива галузь, що розвивається. Взаємозв'язок між комплексним аналізом, диференціальною геометрією та алгебраїчною геометрією відкриває двері до нових ідей та досліджень.

результатами данної роботи є встановлення явного дифеоморфізму між гоффовою поверхнею та $S^1 \times S^3$, а також, опис та дослідження накриття та накриваючого простору групи $SO(4, \mathbb{R})$. Ці результати є важливими для подальшої роботи над покращенням класифікації гіпер ермітових многовидів розмірності 4.

Список використаних джерел

- [1] Charles Boyer. A note on hyperhermitian four-manifolds. American Mathematical Society. 1988. V. 102(1). P. 157-164.
- [2] Daniel Huybrechts. Complex Geometry an introduction. Berlin. Springer. 2005
- [3] Andrew D. Hwang, Complex Manifolds and Hermitian Differential Geometry. Toronto. Univetsity of Toronto. 1997
- [4] Andrei Moroianu. Lectures on Kähler Geometry. London. Cambridge University Press. 2007