

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики і інформатики
(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра фундаментальної математики
(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Кваліфікаційна робота

магістр
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: Властивості розв'язків

задачі термодинаміки вищого порядку.

Виконала: студентка групи М-161 II курсу
другого (магістерського) рівня
111 Математика
(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)

Косонова А.Є.
(прізвище та ініціали)
Керівник: к.ф.-м.н., доц. Фастовська Т.Б.
(прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ	1
1 Постановка задачі.	4
2 Енергетична рівність.	5
3 Існування стискаючої напівгрупи.	7
4 Спектральні властивості генератора.	10
5 Поліноміальна стійкість.	16
Література	19

Вступ

У роботі вивчається задача отримання раціональних оцінок на швидкість рівномірного спадання енергії до нуля для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описує термопружну динаміку пластини вищого порядку; ця модель з'являлася в літературі в тій чи іншій формі (див., наприклад, [7]). Ця система описує динаміку пружної пластини Кірхгофа з тепловими ефектами, що моделюються рівняннями гіперболічного типу.

Основною метою роботи є дослідження існування стискаючої напівгрупи, яка породжена задачею термопружності вищого порядку, вивчення спектральних властивостей її генератора, та оцінки спадання енергії, коли час прямує до нескінченності. Для досягнення останньої мети застосовується метод Борічева-Томілова оцінок резольвенти генератора (див., наприклад [4]).

В розділі 1 формулюється постановка задачі.

В розділі 2 знаходиться вигляд енергетичної рівності для системи (1)-(4), яка знадобиться для подальших міркувань. Разом з енергетичною рівністю знаходиться також вигляд фазового простотру H .

В розділі 3 досліджується існування стискаючої напівгрупи. Основним інструментом в дослідженні є теорема Люмера-Філіпса [6], а також теорема Лакса-Мільграма (див., наприклад [5]).

Розділ 4 присвячений спектральному аналізу генератора породженої стискаючої C_0 -напівгрупи. В ньому вивчаються деякі властивості генератора, які необхідні для доведення основного результату, а саме Теореми 5.2.

Розділ 5 роботи присвячений поліноміальній стійкості. В цьому розділі досліджується швидкість наближення розв'язків системи (1)-(4) до нуля, коли $t \rightarrow +\infty$. Виконується це дослідження за допомогою використання теореми Борічева-Томілова [4].

1 Постановка задачі.

Розглядається система рівнянь термопружності вищого порядку в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ з гладкою границею $\partial\Omega$

$$u_{tt} + \kappa \Delta^2 u + \gamma \Delta \tilde{\theta} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\tilde{\theta}_{tt} - \alpha \Delta \tilde{\theta}_t - \beta \Delta \tilde{\theta} - \gamma \Delta u_{tt} = 0, \quad (2)$$

з граничними умовами

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \tilde{\theta} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (3)$$

та початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \tilde{\theta}(x, 0) = \tilde{\theta}_0(x), \\ \tilde{\theta}_t(x, 0) = \tilde{\theta}_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Метою роботи є доведення існування та єдиності слабких розв'язків та дослідження їх властивостей.

В роботі [7] було розглянуто подібну задачу термопружності вищого порядку з хвильовим рівнянням

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g * \Delta u + \nabla v = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v_{tt} - \Delta v_t - \Delta v + \operatorname{div} u_{tt} = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ v = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & (x, t) \in \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial v} - g * \frac{\partial u}{\partial v} + H(u_t) = 0 & (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (5)$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \\ v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

де Ω - обмежена область в R^n з гладкою границею $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Було встановлено результат про асимптотичні властивості глобальних розв'язків та існування глобального атрактора.

2 Енергетична рівність.

Формально знайдемо вигляд енергетичної рівності. Всі перетворення можуть бути обґрунтовані за допомогою сильних розв'язків та граничного переходу. Зробимо заміну

$$\theta(x, t) = \int_0^t \tilde{\theta}(x, s) ds + \chi(x), \quad (7)$$

де функцію $\chi(x)$ буде визначено пізніше. Тоді

$$\theta_t = \tilde{\theta} \quad (8)$$

та

$$\tilde{\theta}_t = \theta_{tt}. \quad (9)$$

Проінтегруємо рівняння (2) від 0 до t . Отримаємо

$$\tilde{\theta}_t - \alpha \Delta \tilde{\theta} - \beta \int_0^t \Delta \tilde{\theta} dt - \gamma \Delta u_t - \tilde{\theta}_t(0) + \alpha \Delta \tilde{\theta}(0) + \gamma \Delta u_t(0) = 0. \quad (10)$$

Тоді з (7)–(9) випливає

$$\theta_{tt} - \alpha \Delta \theta_t - \beta \Delta \theta + \beta \Delta \chi(x) - \gamma \Delta u_t - \tilde{\theta}_t(0) + \alpha \Delta \tilde{\theta}(0) + \gamma \Delta u_t(0) = 0.$$

Обираючи $\chi(x) \in H_0^1(\Omega)$ так, що

$$\beta \Delta \chi(x) = \tilde{\theta}_t(0) - \alpha \Delta \tilde{\theta}(0) - \gamma \Delta u_t(0),$$

отримаємо

$$\theta_{tt} - \alpha \Delta \theta_t - \beta \Delta \theta - \gamma \Delta u_t = 0.$$

Задачу (1)–(4) тоді можна переписати у вигляді

$$u_{tt} + \kappa \Delta^2 u + \gamma \Delta \theta_t = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$\theta_{tt} - \alpha \Delta \theta_t - \beta \Delta \theta - \gamma \Delta u_t = 0, \quad (12)$$

з граничними умовами

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \theta = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (13)$$

та початковими умовами

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \\ \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Для того, щоб отримати енергетичну рівність помножимо формально рівняння (11) на u_t та проінтегруємо за Ω та від 0 до T

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx dt + k \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 u u_t dx dt + \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \theta u_t dx dt \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_t^2 - k \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \nabla \Delta u u_t dx dt - \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla u_t dx dt \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_t^2 + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} (\Delta u)^2 - \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla u_t dx dt. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_t(T)\|^2 + \frac{k}{2} \|\Delta u(T)\|^2 - \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla u_t dx dt \\ = \frac{1}{2} \|u_t(0)\|^2 + \frac{k}{2} \|\Delta u(0)\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Помножимо (11) на θ_t та проінтегруємо за Ω та від 0 до T та проінтегруємо частинами

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \theta_{tt} \theta_t dx dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \theta_t \theta_t dx dt - \beta \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \theta \theta_t dx dt - \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_t \theta_t dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \theta_t^2 + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \theta_t)^2 dx dt + \beta \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla \theta_t dx dt + \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla \theta_t dx dt. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\theta_t(T)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\nabla \theta(T)\|^2 + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \theta_t|^2 dx dt + \gamma \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla \theta_t dx dt \\ = \frac{1}{2} \|\theta_t(0)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\nabla \theta(0)\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Додамо рівняння (15) та (16) і отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t(T)\|^2 + \frac{k}{2}\|\Delta u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_t(T)\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\nabla\theta(T)\|^2 + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla\theta_t|^2 dx dt \\ = \frac{1}{2}(\|u_t(0)\|^2 + k\|\Delta u(0)\|^2 + \|\theta_t(0)\|^2 + \beta\|\nabla\theta(0)\|^2). \end{aligned}$$

Таким чином ми знайшли енергетичний функціонал

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2 + k\|\Delta u(t)\|^2 + \|\theta_t(t)\|^2 + \beta\|\nabla\theta(t)\|^2)$$

та отримали енергетичну рівність

$$E(T) + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla\theta_t)^2 dx dt = E(0).$$

Звідси знаходимо фазовий простір

$$H = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

3 Існування стискаючої напівгрупи.

Означення 3.1. Генератором напівгрупи називається оператор

$$\begin{aligned} A : X \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow X \\ A_\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t \varphi - \varphi}{t}, \varphi \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

де область визначення $\mathcal{D}(A)$ визначається, як множина елементів, що дана границя існує.

Означення 3.2. Напівгрупа T_t називається стискаючою C_0 - напівгрупою, якщо виконуються наступні умови:

$$1. \lim_{t \rightarrow s} \|T_t \varphi - T_s \varphi\|_X = 0,$$

$$2. \|T_t\| \leq 1.$$

Надалі будемо позначати C довільну додатну константу.

Позначимо $U(t) = (u(t), u_t(t), \theta(t), \theta_t(t))$, $U_0 = (u_0, u_1, \theta_0, \theta_1)$. Тоді задачу (11)–(14) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= AU, \\ U(0) &= U_0,\end{aligned}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -k\Delta^2 & 0 & 0 & -\gamma\Delta \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \gamma\Delta & \beta\Delta & \alpha\Delta \end{pmatrix}.$$

Застосуємо теорему Люмера-Філіпса [6]. Для цього потрібно довести три пункти даної теореми.

1. Щільність області визначення генератора $\mathcal{D}(A)$ в H .

Випишемо область визначення A .

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) &= \{U \in H : AU \in H\} = \{U = \{u_1, u_2, \theta_1, \theta_2\} \in H : \\ &\quad u_2 \in H_0^2(\Omega), \theta_2 \in H_0^1(\Omega), \\ &\quad -k\Delta^2 u_1 - \gamma\Delta\theta_2 \in L_2(\Omega), \alpha\Delta\theta_2 + \gamma\Delta u_2 + \beta\Delta\theta_1 \in L_2(\Omega)\}.\end{aligned}$$

Очевидно, $\mathcal{D}(A)$ щільно в H .

2. Дисипативність A .

Потрібно довести, що $Re(AU, U)_H \leq 0$.

$$Au = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -k\Delta^2 & 0 & 0 & -\gamma\Delta \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \gamma\Delta & \beta\Delta & \alpha\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -k\Delta^2 u_1 - \gamma\Delta\theta_2 \\ \theta_2 \\ \gamma\Delta u_2 + \beta\Delta\theta_1 + \alpha\Delta\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}Re(AU, U)_H &= kRe(\Delta u_2, \Delta u_1) + Re(-k\Delta^2 u_1 - \gamma\Delta\theta_2, u_2) + \beta Re(\nabla\theta_2, \nabla\theta_1) \\ &\quad + Re(\gamma\Delta u_2 + \beta\Delta\theta_1 + \alpha\Delta\theta_2, \theta_2) = kRe(\Delta u_2, \Delta u_1) + \beta Re(\nabla\theta_2, \nabla\theta_1) \\ &\quad - kRe(\Delta u_2, \Delta u_1) + \gamma Re(\nabla\theta_2, \nabla u_2) - \gamma Re(\nabla u_2, \nabla\theta_2) - \beta Re(\nabla\theta_2, \nabla\theta_1) \\ &\quad - \alpha Re(\nabla\theta_2, \nabla\theta_2) = -\alpha \|\nabla\theta_2\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

3. Максимальність A .

Потрібно довести, що для будь-якого $F \in H$ існує $U \in \mathcal{D}(A)$ таке, що $(I - A)U = F$.

Розглянемо рівняння

$$(I - A)U = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ k\Delta^2 u_1 + u_2 + \gamma\Delta\theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \\ -\gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 + \theta_2 - \alpha\Delta\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \in H$$

або

$$\begin{cases} u_2 = u_1 - f_1 \\ \theta_2 = \theta_1 - f_3 \\ k\Delta^2 u_1 + u_1 + \gamma\Delta\theta_2 = f_2 + f_1 + \gamma\Delta f_3 \\ -\gamma\Delta u_1 - \beta\Delta\theta_1 + \theta_1 - \alpha\Delta\theta_1 = f_4 - \gamma\Delta f_1 - \alpha\Delta f_3 \end{cases} \quad (17)$$

Домножимо третє та четверте рівняння на $\tilde{u}_1$ і $\tilde{\theta}_1$ відповідно та додамо їх

$$\begin{aligned} & k(\Delta u_1, \Delta \tilde{u}_1) + (u_1, \tilde{u}_1) + (\alpha + \beta)(\nabla\theta_1, \nabla\tilde{\theta}_1) - \gamma(\nabla u_1, \nabla\tilde{u}_1) \\ & + \gamma(\nabla\theta_1, \nabla\tilde{\theta}_1) + (\theta_1, \tilde{\theta}_1) = (f_2, \Delta\tilde{u}_1) + (f_1, \tilde{u}_1) + \alpha(\nabla f_3, \nabla\tilde{\theta}_1) \\ & - \gamma(\nabla f_3, \nabla\tilde{u}_1) + \gamma(\nabla f_1, \nabla\tilde{\theta}_1) + (f_4, \tilde{\theta}_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Для того, щоб довести максимальність, скористаємось теоремою Лакса-Мільграма [5] та перевіримо кожен з її пунктів.

(а) Неперервність форми

$$\begin{aligned} B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}\right) &= k(\Delta u_1, \Delta \tilde{u}_1) + (u_1, \tilde{u}_1) + (\alpha + \beta)(\nabla\theta_1, \nabla\tilde{\theta}_1) - \\ & - \gamma(\nabla u_1, \nabla\tilde{u}_1) + \gamma(\nabla\theta_1, \nabla\tilde{\theta}_1) + (\theta_1, \tilde{\theta}_1). \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} |B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}\right)| &\leq C(\|\Delta u_1\| \|\Delta \tilde{u}_1\| + \|u_1\| \|\tilde{u}_1\| + \\ & + \|\nabla\theta_1\| \|\nabla\tilde{\theta}_1\| + \|\nabla\theta_1\| \|\nabla\tilde{u}_1\| + \|u_1\| \|\nabla\tilde{\theta}_1\| + \|\theta_1\| \|\tilde{\theta}_1\|) \\ &\leq C(\|\Delta u_1\| + \|\nabla\theta_1\|)(\|\Delta \tilde{u}_1\| + \|\nabla\tilde{\theta}_1\|) \\ &\leq C\|(u_1, \theta_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1} \|(\tilde{u}_1, \tilde{\theta}_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1}. \end{aligned} \quad (20)$$

(б) Еліптичність форми

$$\begin{aligned} Re B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}\right) &= k\|\Delta u_1\|^2 + \|u_1\|^2 + \\ & + (\alpha + \beta)\|\nabla\theta_1\|^2 \geq C\|(u_1, \theta_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1}^2. \end{aligned} \quad (21)$$

(в) Неперервність функціонала

$$F(\tilde{u}_1, \tilde{\theta}_1) = (f_2, \Delta \tilde{u}_1) + (f_1, \tilde{u}_1) + \\ + \alpha(\nabla f_3, \nabla \tilde{\theta}_1) - \gamma(\nabla f_3, \nabla \tilde{u}_1) + \gamma(\nabla f_1, \nabla \tilde{\theta}_1) + (f_4, \tilde{\theta}_1).$$

$$|(f_2, \Delta \tilde{u}_1) + (f_1, \tilde{u}_1) + \alpha(\nabla f_3, \nabla \tilde{\theta}_1) - \gamma(\nabla f_3, \nabla \tilde{u}_1) + \gamma(\nabla f_1, \nabla \tilde{\theta}_1) + \\ + (f_4, \tilde{\theta}_1)| \leq \|f_2\| \|\tilde{u}_1\| + \|f_1\| \|\tilde{u}_1\| + \alpha \|\nabla f_3\| \|\nabla \tilde{\theta}_1\| + \gamma \|\nabla f_3\| \|\nabla \tilde{u}_1\| \\ + \gamma \|\nabla f_1\| \|\nabla \tilde{\theta}_1\| + \|f_4\| \|\tilde{\theta}_1\| \leq C \|f\|_H (\tilde{u}_1, \tilde{\theta}_1)_{H_0^2 \times H_0^1}. \quad (22)$$

За теоремою Лакса-Мільграма існує розв'язок $(u_1, \theta_1) \in H_0^2 \times H_0^1$, тоді $u_2 = u_1 - f_1 \in H_0^2$ та $\theta_2 = \theta_1 - f_3 \in H_0^1$. Тоді $u \in \mathcal{D}(A)$, звідки за теоремою Люмера-Філіпса e^{At} — стискаюча $-C_0$ напівгрупа, тобто (11)–(14) має розв'язок в H .

4 Спектральні властивості генератора.

Теорема 4.1. *Генератор $A : \mathcal{D}(A) \in H \rightarrow H$ має обмежений зворотний оператор, тобто $\lambda = 0$ належить резольвентній множині A .*

Доведення. При доведенні будемо використовувати підхід представлений, наприклад в [2].

Розглянемо $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in H$. Необхідно знайти $U = (u_1, u_2, \theta_1, \theta_2)$ таке, що $U \in \mathcal{D}(A)$ та виконується рівняння

$$AU = F, \quad (23)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -k\Delta^2 & 0 & 0 & -\gamma\Delta \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \gamma\Delta & \beta\Delta & \alpha\Delta \end{pmatrix}.$$

Перепишемо рівняння (23) в матричній формі

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -k\Delta^2 & 0 & 0 & -\gamma\Delta \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \gamma\Delta & \beta\Delta & \alpha\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 \\ -k\Delta^2 u_1 - \gamma\Delta\theta_2 \\ \theta_2 \\ \gamma\Delta u_2 + \beta\Delta\theta_1 + \alpha\Delta\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \in H$$

або

$$\begin{cases} u_2 = f_1 \\ -k\Delta^2 u_1 - \gamma\Delta\theta_2 = f_2 \\ \theta_2 = f_3 \\ \gamma\Delta u_2 + \beta\Delta\theta_1 + \alpha\Delta\theta_2 = f_4. \end{cases} \quad (24)$$

З системи (24) отримаємо, що $u_2 = f_1$ та $\theta_2 = f_3$.
Підставимо ці рівності у систему (24)

$$\begin{cases} u_2 = f_1 \\ -k\Delta^2 u_1 - \gamma\Delta f_3 = f_2 \\ \theta_2 = f_3 \\ \gamma\Delta f_1 + \beta\Delta\theta_1 + \alpha\Delta f_3 = f_4. \end{cases} \quad (25)$$

Тоді

$$\begin{cases} k\Delta^2 u_1 = -f_2 - \gamma\Delta f_3 \\ -\beta\Delta\theta_1 = -f_4 + \gamma\Delta f_1 + \alpha\Delta f_3. \end{cases} \quad (26)$$

Застосуємо теорему Лакса-Мільграма та доведемо існування розв'язків системи (26). Домножимо друге та четверте рівняння в (26) на $\tilde{u}_1$ і $\tilde{\theta}_1$ відповідно та додамо їх.

$$\begin{aligned} k(\Delta u_1, \Delta \tilde{u}_1) + \beta(\nabla\theta_1, \nabla\tilde{\theta}_1) &= -(f_2, \tilde{u}_1) - \gamma(\nabla f_3, \nabla\tilde{u}_1) - (f_4, \tilde{\theta}_1) \\ &\quad + \gamma(\nabla f_1, \nabla\tilde{\theta}_1) + \alpha(\nabla f_3, \nabla\tilde{\theta}_1). \end{aligned} \quad (27)$$

(а) Доведемо неперервність форми

$$B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}\right) = k(\Delta u_1, \Delta \tilde{u}_1) + \beta(\nabla\theta_1, \nabla\tilde{\theta}_1). \quad (28)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} |B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}\right)| &\leq C(\|\Delta u_1\| \|\Delta \tilde{u}_1\| + \|\nabla\theta_1\| \|\nabla\tilde{\theta}_1\|) \\ &\leq C(\|\Delta u_1\| + \|\nabla\theta_1\|)(\|\Delta \tilde{u}_1\| + \|\nabla\tilde{\theta}_1\|) \\ &\leq C\|(u_1, \theta_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1} \|(\tilde{u}_1, \tilde{\theta}_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1}. \end{aligned} \quad (29)$$

(б) Доведемо еліптичність форми В.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}\right) &= k\|\Delta u_1\|^2 + \beta\|\nabla \theta_1\|^2 \\ &\geq C\|(u_1, \theta_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

(в) Перевіримо неперервність функціонала.

$$\begin{aligned} F(\tilde{u}_1, \tilde{\theta}_1) &= -(f_2, \tilde{u}_1) - \gamma(\nabla f_3, \nabla \tilde{u}_1) - (f_4, \tilde{\theta}_1) \\ &\quad + \gamma(\nabla f_1, \nabla \tilde{\theta}_1) + \alpha(\nabla f_3, \nabla \tilde{\theta}_1). \\ |-(f_2, \tilde{u}_1) - \gamma(\nabla f_3, \nabla \tilde{u}_1) - (f_4, \tilde{\theta}_1) + \gamma(\nabla f_1, \nabla \tilde{\theta}_1) + \alpha(\nabla f_3, \nabla \tilde{\theta}_1)| \\ &\leq \|f_2\|\|\tilde{u}_1\| + \gamma\|\nabla f_3\|\|\nabla \tilde{u}_1\| + \|f_4\|\|\tilde{\theta}_1\| + \gamma\|\nabla f_1\|\|\nabla \tilde{\theta}_1\| \\ &\quad + \alpha\|\nabla f_3\|\|\tilde{\theta}_1\| \leq C\|f\|_H\|(\tilde{u}_1, \tilde{\theta}_1)\|_{H_0^2 \times H_0^1}. \end{aligned} \quad (31)$$

За теоремою Лакса-Мільграма існує єдиний розв'язок (26).

$(u_1, \theta_1) \in H_0^2 \times H_0^1$, тоді $u_2 = u_1 - f_1 \in H_0^2$ та $\theta_2 = \theta_1 - f_3 \in H_0^1$.

Тоді $U = (u_1, u_2, \theta_1, \theta_2) \in \mathcal{D}(A)$, що впливає зі структури рівнянь (24). $\square$

Теорема 4.2. *Нехай $\sigma(A)$ -спектр оператора A . Тоді $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \emptyset$.*

Доведення. Доведемо, що $ib \in \rho(A)$, $b \neq 0$.

Розглянемо $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in H_0^2 \times H_0^1$.

(а) Доведемо, що ib не належить точковому спектру.

Розглянемо рівняння

$$ibU = AU. \quad (32)$$

Перепишемо рівняння (32) в матричній формі

$$\begin{pmatrix} ibu_1 - u_2 \\ k\Delta^2 u_1 + ibu_2 + \gamma\Delta\theta_2 \\ ib\theta_1 - \theta_2 \\ -\gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 + ib\theta_2 - \alpha\Delta\theta_2 \end{pmatrix} = 0$$

або

$$\begin{cases} u_2 = ibu_1 \\ k\Delta^2 u_1 + ibu_2 + \gamma\Delta\theta_2 = 0 \\ \theta_2 = ib\theta_1 \\ -\gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 + ib\theta_2 - \alpha\Delta\theta_2 = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Візьмемо скалярний добуток (33) в H з $U = (u_1, u_2, \theta_1, \theta_2)$.

$$\begin{aligned} ib\|U\|_H^2 &= (AU, U)_H = k(\Delta u_2, \Delta u_1) - k(\Delta u_1, \Delta u_2) + \gamma(\nabla \theta_2, \nabla u_2) \\ &\quad - \gamma(\nabla u_2, \nabla \theta_2) + \beta(\nabla \theta_2, \nabla \theta_1) - \beta(\nabla \theta_1, \nabla \theta_2) - \alpha(\nabla \theta_2, \nabla \theta_2) = \\ &= 2ki\text{Im}(\Delta u_2, \Delta u_1) + 2i\gamma\text{Im}(\nabla \theta_2, \nabla u_2) + \\ &\quad + 2i\beta\text{Im}(\theta_2, \nabla \theta_1) - \alpha\|\nabla \theta_2\|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Звідси отримаємо, що $\alpha\|\nabla \theta_2\|^2 = 0$, тоді відповідно $\theta_2 = \text{const}$.

Використаємо граничні умови (3) та отримаємо, що $\theta_2 = 0$, а оскільки $ib\theta_1 = \theta_2$, то $\theta_1 = 0$.

Підставимо знайдені значення в четверте рівняння системи (33) і отримаємо

$$\Delta u_2 = 0. \quad (35)$$

Домножимо (35) скалярно на u_2 і отримаємо $(\Delta u_2, u_2) = 0$.

Тоді $\|\nabla u_2\| = 0$. Тоді $u_2 = \text{const}$, але оскільки ми приймаємо до уваги граничні умови, то отримуємо $u_2 = 0$.

Далі підставимо знайдені значення в друге рівняння системи (33) і отримаємо

$$\Delta^2 u_1 = 0. \quad (36)$$

Домножимо (36) скалярно на u_1 і отримаємо $(\Delta^2 u_1, u_1) = 0$.

Тоді $(\Delta u_1, \Delta u_1) = 0$, далі діємо аналогічно випадку для u_2 і спираючись на граничні умови прийшли до висновку, що $u_1 = 0$. Таким чином, приходимо до висновку, що $U = 0$ і не може бути власним вектором.

(б) Доведемо, що ib не належить залишковому спектру A .

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ k\Delta^2 & 0 & 0 & \gamma\Delta \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & -\gamma\Delta & -\beta\Delta & \alpha\Delta \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{U \in H : AU \in H\} = \{U = \{u_1, u_2, \theta_1, \theta_2\} \in H :$$

$$u_2 \in H_0^2(\Omega), \theta_2 \in H_0^1(\Omega),$$

$$k\Delta^2 u_1 + \gamma\Delta\theta_2 \in L_2(\Omega), \alpha\Delta\theta_2 - \gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 \in L_2(\Omega)\}$$

Ми прагнемо довести, що $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) \neq \emptyset$. Враховуючи, що $b \in \mathbb{R} \setminus 0$, якщо ib знаходиться в залишковому спектрі, то обов'язково ib буде знаходитись в точковому спектрі $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H \rightarrow H$ (див., наприклад [3]).

В цьому випадку, враховуючи вигляд та область визначення A^* в (37), будемо діяти аналогічно до першого кроку, щоб прийти до висновку, що $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \emptyset$.

(в) Доведемо, що ib не належить неперервному спектру A .

Розглянемо $U_n = (u_{1n}, u_{2n}, \theta_{1n}, \theta_{2n})$ і $F_n = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n})$, де $U_n \in \mathcal{D}(A)$ а $F_n \in H$ з умовами, а саме $\|U_n\|_H = 1$ та $\|F_n\|_H \leq \frac{1}{n}$, для яких виконується рівняння

$$(ib - A)U_n = F_n. \quad (38)$$

Перепишемо рівняння (38) в матричному вигляді.

$$\begin{pmatrix}ibu_{1n} - u_{2n} \\ k\Delta^2 u_{1n} +ibu_{2n} + \gamma\Delta\theta_{2n} \\ ib\theta_{1n} - \theta_{2n} \\ -\gamma\Delta u_{2n} - \beta\Delta\theta_{1n} + ib\theta_{2n} - \alpha\Delta\theta_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_{1n} \\ f_{2n} \\ f_{3n} \\ f_{4n} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Помножимо (38) скалярно на U_n .

Отримаємо,

$$ib\|U_n\|_H^2 - (F_n, U_n)_H = (AU_n, U_n)_H. \quad (40)$$

Скалярний добуток справа було знайдено раніше у (34), тому скористаємось цим результатом.

$$\begin{aligned} Re(ib\|U_n\|_H^2 - (F_n, U_n)_H) &= -Re(F_n, U_n)_H = \\ &= Re(AU_n, U_n)_H = -\alpha\|\nabla\theta_{2n}\|^2. \end{aligned}$$

Приймемо до уваги, що $\|U_n\|_H = 1$ і отримаємо

$$\|\nabla\theta_{2n}\| \leq C\|U_n\|_H\|F_n\|_H \leq \frac{C}{n},$$

тому приходимо до висновку, що

$$\nabla\theta_{2n} \rightarrow 0, \text{ сильно в } H_0^1, \text{ коли } n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Перейдемо до третього рівняння системи (39)

$$\theta_{2n} = ib\theta_{1n} - f_{3n}. \quad (42)$$

Домножимо цей вираз скалярно на θ_{1n} . Для будь-якого $\epsilon \geq 0$

$$b\|\nabla\theta_{1n}\|^2 \leq C(\|\nabla\theta_{1n}\|\|\nabla\theta_{2n}\| + \|f_{3n}\|\|\nabla\theta_{1n}\|) \leq C_\epsilon(\|\nabla\theta_{2n}\|^2 + \|\nabla f_{3n}\|^2) + \epsilon\|\nabla\theta_{1n}\|^2.$$

Отримуємо, що

$$\|\nabla\theta_{1n}\|^2 \leq C(\|\nabla\theta_{2n}\|^2 + \|\nabla f_{3n}\|^2) \leq \frac{C}{n}.$$

Таким чином робимо висновок, що

$$\nabla\theta_{1n} \rightarrow 0, \text{ сильно в } H_0^1, \text{ коли } n \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Далі розглянемо четверте рівняння системи (39)

$$\gamma\Delta u_{2n} = -\beta\Delta\theta_{1n} + ib\theta_{2n} - \alpha\Delta\theta_{2n} - f_{4n}. \quad (44)$$

Помножимо його скалярно на u_{2n} та проінтегруємо частинами

$$\gamma\|\nabla u_{2n}\|^2 \leq C(\|\nabla\theta_{1n}\|\|\nabla u_{2n}\| + \|\theta_{2n}\|\|u_{2n}\| + \|\nabla\theta_{2n}\|\|\nabla u_{2n}\| + \|f_{4n}\|\|u_{2n}\|) \leq C_\epsilon(\|\nabla\theta_{1n}\|^2 + \|\theta_{2n}\|^2 + \|\nabla\theta_{2n}\|^2 + \|f_{4n}\|^2) + \epsilon\|u_{2n}\|^2.$$

Тоді

$$\|\nabla u_{2n}\|^2 \leq C(\|\nabla\theta_{1n}\|^2 + \|\theta_{2n}\|^2 + \|f_{4n}\|^2) \leq \frac{C}{n}.$$

Тому робимо висновок, що

$$u_{2n} \rightarrow 0, \text{ сильно в } L_2, \text{ коли } n \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Далі виконаємо аналогічні дії відносно другого рівняння системи (40)

$$k\Delta^2 u_{1n} = -ibu_{2n} - \gamma\Delta\theta_{2n} + f_{2n}. \quad (46)$$

Домножимо його скалярно на u_{1n} .

$$k\|\Delta u_{1n}\|^2 \leq C(\|u_{2n}\|\|u_{1n}\| + \|\nabla\theta_{2n}\|\|\nabla u_{1n}\| + \|f_{2n}\|\|u_{1n}\|) \leq C_\epsilon(\|u_{2n}\|^2 + \|\nabla\theta_{2n}\|^2 + \|f_{2n}\|^2) + \epsilon\|u_{1n}\|^2.$$

Тоді

$$\|\Delta u_{1n}\|^2 \leq C(\|u_{2n}\|^2 + \|\nabla\theta_{2n}\|^2 + \|f_{2n}\|^2) \leq \frac{C}{n}.$$

Приходимо до висновку, що

$$u_{1n} \rightarrow 0, \text{ сильно в } L_2, \text{ коли } n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

З (41), (43), (45), (47) випливає, що $U_n = 0$, що протирічить тому, що $\|U_n\|_H = 1$, тому ib не належить неперервному спектру.

□

5 Поліноміальна стійкість.

Для дослідження швидкості наближення розв'язків задачі (1)-(4) до нуля, коли $t \rightarrow +\infty$. Будемо спиратися на класичний результат Борічева-Томілова.

Теорема 5.1. (*[4]*) *Нехай $(T(t))_{t \geq 0}$ -обмежена C_0 -напівгрупа в гільбертовому просторі H з генератором A таким, що $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Тоді для фіксованого $\alpha > 0$ наступні умови є еквівалентними:*

$$\begin{aligned} (i.) \quad & R(is, A) = O(|s|^\alpha), \quad |s| \rightarrow \infty; \\ (ii.) \quad & \|T(t)x\|_H = o(t^{-1/\alpha})\|x\|_{\mathcal{D}(A)}, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Сформулюємо основний результат про поліноміальну стійкість розв'язків задачі (11)-(14).

Теорема 5.2. *Для початкових умов $(u_0, u_1, \theta_0, \theta_1) \in \mathcal{D}(A)$, для розв'язку (11)-(14) виконується наступна оцінка для достатньо великих t :*

$$\|(u, u_t, \theta, \theta_t)\|_H \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|(u_0, u_1, \theta_0, \theta_1)\|_{\mathcal{D}(A)}.$$

Доведення. Розглянемо рівняння

$$(ib - A)U = F, \quad (48)$$

де $U = (u_1, u_2, \theta_1, \theta_2)$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -k\Delta^2 & 0 & 0 & -\gamma\Delta \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \gamma\Delta & \beta\Delta & \alpha\Delta \end{pmatrix}.$$

Перепишемо рівняння (48) в матричній формі

$$(ib - A)U = \begin{pmatrix} ibu_1 - u_2 \\ k\Delta^2 u_1 + ibu_2 + \gamma\Delta\theta_2 \\ ib\theta_1 - \theta_2 \\ -\gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 + ib\theta_2 - \alpha\Delta\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \in H$$

або

$$\begin{cases} u_2 - ibu_1 = f_1 \\ k\Delta^2 u_1 + ibu_2 + \gamma\Delta\theta_2 = f_2 \\ \theta_2 - ib\theta_1 = f_3 \\ -\gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 + ib\theta_2 - \alpha\Delta\theta_2 = f_4. \end{cases} \quad (49)$$

Візьмемо скалярний добуток (48) в H з $U = (u_1, u_2, \theta_1, \theta_2)$.

$$((ib - A) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix})_H = ib\|U\|_H^2 - (AU, U)_H. \quad (50)$$

Чому рівне $(AU, U)_H$, відомо з (34), використаємо цей результат.

$$\begin{aligned} ((ib - A)U, U)_H &= ib\|U\|_H^2 + \alpha(\nabla\theta_2, \nabla\theta_2) + 2ki\text{Im}(\Delta u_2, \Delta u_1) + \\ &\quad + 2i\gamma\text{Im}(\nabla\theta_2, \nabla u_2) + 2i\beta\text{Im}(\theta_2, \nabla\theta_1) \end{aligned} \quad (51)$$

або

$$\begin{aligned} ib\|U\|_H^2 + \alpha\|\nabla\theta_2\|^2 + 2ki\text{Im}(\Delta u_2, \Delta u_1) + 2i\gamma\text{Im}(\nabla\theta_2, \nabla u_2) + \\ + 2i\beta\text{Im}(\theta_2, \nabla\theta_1) = (F, U)_H. \end{aligned} \quad (52)$$

Звідси отримуємо

$$\alpha\|\nabla\theta_2\|^2 = \text{Re}(F, U)_H. \quad (53)$$

Перейдемо до третього рівняння системи (49)

$$\theta_2 - ib\theta_1 = f_3. \quad (54)$$

Помножимо цей вираз скалярно на θ_1 , в $H_0^1(\Omega)$.

$$\|b\nabla\theta_1\|^2 \leq C(\|\nabla f_3\|^2 + \|\nabla\theta_2\|^2) \leq C(\|\nabla f_3\|^2 + |\text{Re}(F, U)_H|).$$

Отримуємо оцінку для θ_1

$$\|b\nabla\theta_1\|^2 \leq C(\|\nabla f_3\|^2 + |\text{Re}(F, U)_H|). \quad (55)$$

Далі розглянемо четверте рівняння системи (49)

$$-\gamma\Delta u_2 - \beta\Delta\theta_1 + ib\theta_2 - \alpha\Delta\theta_2 = f_4. \quad (56)$$

Помножимо його скалярно на u_2 та проінтегруємо частинами.

Для будь-якого $\epsilon \geq 0$

$$\|\nabla u_2\|^2 \leq C_\epsilon(\|\nabla\theta_1\|^2 + b^2\|\theta_2\|^2 + \|\nabla\theta_2\|^2 + \|f_4\|^2) + \epsilon\|\nabla u_2\|^2.$$

Використаємо (53) та (55) та отримаємо оцінку для u_2

$$\|\nabla u_2\|^2 \leq C_\epsilon(\|\nabla f_3\|^2 + \|f_4\|^2 + b^2|Re(F, U)_H|). \quad (57)$$

Нарешті перейдемо до другого рівняння системи (49)

$$k\Delta^2 u_1 + ibu_2 + \gamma\Delta\theta_2 = f_2. \quad (58)$$

З першого рівняння системи (49) виразимо u_2 та підставимо у (58) і отримаємо

$$k\Delta^2 u_1 - b^2 u_1 + \gamma\Delta\theta_2 = f_2 - ibf_1.$$

Помножимо його скалярно на u_1 та проінтегруємо частинами.

$$k\|\Delta u_1\|^2 \leq C(b^2\|u_1\|^2 + \|\nabla\theta_2\|^2 + \|f_2\|^2 + \|f_1\|^2) \leq C(\|f_2\|^2 + \|\nabla f_1\|^2 + \|\nabla f_3\|^2 + \|f_4\|^2 + b^2|Re(U, F)_H|).$$

Отримуємо оцінку для u_1

$$\|\Delta u_1\|^2 \leq C(\|f_2\|^2 + \|\nabla f_1\|^2 + \|\nabla f_3\|^2 + \|f_4\|^2 + b^2|Re(U, F)_H|). \quad (59)$$

З (53), (55), (57), (59) випливає оцінка для U

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &\leq C(\|F\|_H^2 + b^2|Re(U, F)_H|) \leq \\ &\leq C(\|F\|^2 + \epsilon\|U\|_H^2 + C_\epsilon b^4\|F\|^2) \end{aligned} \quad (60)$$

або

$$\|U\|_H^2 \leq Cb^4\|F\|_H^2. \quad (61)$$

Тоді

$$\|U\|_H \leq Cb^2\|F\|_H. \quad (62)$$

Тоді за Теоремою 5.1

$$\|T(t)U\|_H \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|U\|_{\mathcal{D}(A)},$$

де $T(t) = e^{At}$ - напівгрупа, що породжується оператором A . $\square$

Література

- [1] Avalos G., Bucci F. *Exponential Decay Properties of a Mathematical Model for a Certain Fluid-Structure Interaction. Springer INdAM Series*. Cham, 2014. P. 49–78.
- [2] Avalos G., Bucci F. *Rational rates of uniform decay for strong solutions to a fluid-structure PDE system. Journal of Differential Equations*. 2015. Vol. 258, no. 12. P. 4398–4423.
- [3] Bernard F. *Principles and techniques of applied mathematics*. New York : Dover Publications, 1990. P. 315.
- [4] Borichev A., Tomilov Y. *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. Mathematische Annalen*. 2009. Vol. 347, no. 2. P. 455–478.
- [5] Lax P. D., Milgram A. N. IX. *Parabolic Equations. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. (AM-33)*. Princeton, 1955. P. 167–190.
- [6] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York : Springer-Verlag, 1983. P. 279.
- [7] Qin Y., Ma Z. *Energy Decay and Global Attractors for Thermoviscoelastic Systems. Acta Applicandae Mathematicae*. 2011. Vol. 117, no. 1. P. 195–214.