

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
магістра

на тему: "О деяких афінних лінійчастих гіперповерхнях з пласкою
зв'язністю"

Роботу виконала:
студентка групи М-162
II курсу другого (магістерського)
рівня
спеціальності 111 Математика
Геращенко Анна В'ячеславівна

Керівник:
доцент ЗВО
к.ф.-м.н. Шугайло О. О.

Рецензент:
пров. науковий співробітник
д.ф.-м.н. Горькавий В. О.

Харків - 2023

"О деяких афінних лінійчастих гіперповерхнях з пласкою зв'язністю"

Анотація

В роботі розглянуто афінні занурення лінійчастих поверхонь, базою яких є пласка або просторова крива, в $\mathbb{R}^3$ та $\mathbb{R}^4$. Базова крива береться в натуральній параметризації, в якості трансверсальних векторних полів лінійчастої поверхні обираються еквафінні нормалі (та бінормалі) базової кривої. Знайдено нерегулярну параметризацію афінного занурення лінійчастої гіперповерхні з пласкою зв'язністю, яка не є графіком або циліндром. Отримано параметризацію занурення повної регулярної лінійчастої поверхні ковимірності два. Отримано властивості трансверсального розподілу з еквафінних нормалей (та бінормалей) базової кривої для афінного занурення лінійчастої поверхні з пласкою зв'язністю.

"On some affine ruled hypersurfaces with flat connections"

Abstract

We consider affine immersions of ruled submanifolds in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ with a plane or a space base curve. The base curve has the affine arclength parameterization, transversal vector fields of the ruled submanifolds are equiaffine normals (and binormals) of the base curve. We find the irregular parametrization of an affine ruled hypersurface with flat connection that is not a graph or a cylinder. We obtain the parametrization of a complete regular ruled affine submanifold of codimension two. For an affine immersion of ruled submanifolds with flat connections we obtain properties of the transversal distribution of the equiaffine normals (and binormals) of the base curve.

Зміст

Вступ	3
1 Афінні занурення. Основні факти	4
1.1 Загальне визначення афінного занурення	4
1.2 Фундаментальні рівняння	7
1.3 Афінне занурення гіперповерхні	8
2 Лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^3$ з пласкою зв'язністю	10
2.1 Загальні властивості лінійчастої поверхні в $\mathbb{R}^3$	10
2.2 Еквіафінна теорія кривих	10
2.3 Лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^3$ з пласкою зв'язністю	11
2.3.1 Лінійчаста поверхня над параболою	14
2.3.2 Випадок $\mu(u) \equiv 0$	15
3 Лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^4$ з пласкою зв'язністю	16
3.1 2-лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^4$ з пласкою зв'язністю	16
3.2 Еквіафінна теорія кривих в $\mathbb{R}^3$	21
3.3 1-лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^4$ з пласкою зв'язністю	23
3.3.1 Випадок $\lambda_3(u) \equiv 0$	26
Висновок	27
Література	28

Вступ

Термін «афінні перетворення» відноситься до часів Ейлера (1707 - 1789 р.). Згодом для виявлення властивостей афінних перетворень багато чого зробив А.Ф. Мьобіус (1790 - 1898 р.). У 1827 році з'явилась його книга «Баріцентричне обчислення», що стала основоположною у афінній геометрії. Назву «афінна геометрія» розділу геометрії, у якому розглядаються властивості, які зберігаються при афінних перетвореннях, дав Клейн. В 1872 році в Ерлангенській програмі він розповів ідею про те, що різним видам перетворень відповідають різні види геометрії. Пізніше він писав: «Теорія інваріантів афінних перетворень, або афінна геометрія – це особливий вид геометрії».

Засновником афінної диференціальної геометрії є Бляшке. З 1916 року в Лейпцігських відомостях почали з'являтися під рубрикою «Про афінну геометрію» праці Бляшке та інших представників його школи. В 1919 році Бляшке підвів підсумок першим працям, що стосуються афінної геометрії. Слід відзначити, що у вищезазначених працях розвивалася *еквіафінна* диференціальна геометрія.

Подальший розвиток афінної геометрії йшов у напрямку більш повного дослідження еквіафінної теорії, побудови теорії центроафінних гіперповерхонь та вивчення афінних підмноговидів більш високої ковимірності.

Дана робота присвячена вивченню будови деяких лінійчастих поверхонь з пласкою зв'язністю. Існує класифікація повних регулярних гіперповерхонь в $\mathbb{R}^{n+1}$ з пласкою зв'язністю: це або гіперплощина, або гіперциліндр, або графік деякої функції n змінних. Отже, повна лінійчаста гіперповерхня з пласкою зв'язністю може бути лише графіком або циліндром, тому ми вивчаємо локальну будову такої поверхні.

У випадку афінного занурення ковимірності 2 існує класифікація лінійчастих поверхонь рангу 2 в залежності від типу точок бази, яка є двовимірною поверхнею в чотиривимірному афінному просторі. Ми розглянемо лінійчасті поверхні в чотиривимірному просторі, базою яких є пласка або просторова крива, та знайдемо за яких умов на базову криву та напрямок прямолінійних твірних, лінійчаста поверхня буде мати пласку зв'язність.

1 Афінні занурення. Основні факти

1.1 Загальне визначення афінного занурення

У даній роботі будемо розглядати афінні занурення многовидів за К. Номідзу, Т. Сасаки [2]. Нехай (M^n, ∇) – афінний n -вимірний многовид зі зв'язністю ∇ без кручення. Будемо розглядати занурення в афінний простір $\mathbb{R}^m$ зі стандартною зв'язністю D . Позначимо $k = m - n$. В даній роботі будемо розглядати випадки $k = 1$ та $k = 2$, тобто занурення гіперповерхонь та підмноговидів ковимірності 2.

Нехай $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ – множина всіх векторних полів на M .

Визначення 1.1. Диференційоване занурення $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ називається афінним зануренням, якщо виконана наступна умова: існує k -вимірний диференційований розподіл Q вздовж $f : x \in M^n \rightarrow Q_x$, такий що підпростір $T_{f(x)}(\mathbb{R}^{n+k})$ є прямою сумою:

$$T_{f(x)}(\mathbb{R}^{n+k}) = f_*(T_x(M)) \oplus Q_x, \quad (1)$$

та такий, що для усіх $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, отримуємо

$$D_X f_*(Y)_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + (h(X, Y))_x, \quad (2)$$

де $h(X, Y)_x \in Q_x$ у кожній точці $x \in M$. Таким чином (2) дає розкладання $(D_X, Y)_x$ на дотичну компоненту та компоненту в Q_x згідно з (1).

У випадку, коли $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ – занурення многовида M в евклідов простір $\mathbb{R}^{n+k}$ зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ми можемо обрати нормальний простір у кожній точці, а саме:

$$N_x = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+k} : \langle \xi, X \rangle = 0\}, \text{ для будь-якого } X \in T_x(M).$$

Для підмноговидів в евклідовому просторі ми визначаємо першу та другу фундаментальні форми. В афінному випадку аналога першої фундаментальної форми немає, а аналогом другої фундаментальної форми є афінна фундаментальна форма.

Визначення 1.2. Симметричне білінійне відображення, що визначається з (2), $h : T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow Q_x$ називається афінною фундаментальною формою.

Припустимо, що диференційований многовид M не наділений конкретною афінною зв'язністю ми занурюємо у $(\mathbb{R}^{n+k}, D)$. Якщо ми визначимо

розподіл трансверсальних підпросторів N_x (1), то можемо отримати афінну зв'язність ∇ без кручення з (2) у якості визначного рівняння. Можна сказати, що зв'язність ∇ визначається як дотична складова у розкладанні (2) і називається *індукованою зв'язністю*.

Оскільки даний розподіл $x \in M \mapsto Q_x$ – диференційований, в кожній точці x можна задати локальний базис, а саме систему k диференційованих векторних полів $\xi_1, \dots, \xi_k$ в околі U точки x , який породжує Q_y у кожній точці $y \in U$. Цей розподіл можна розглядати як розшарування трансверсальних k -підпросторів.

Таким чином з базисом трансверсального розподілу $\xi_1, \dots, \xi_k$ ми маємо афінний аналог розкладання Гауса

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h^\alpha(X, Y)\xi_\alpha, \quad (3)$$

де h^α – компоненти афінної фундаментальної форми відносно базиса трансверсального розподілу $\xi_1, \dots, \xi_k$. Також маємо афінний аналог формули Вейнгартена для всіх $X \in \mathcal{X}(M)$:

$$D_X \xi_\alpha = -f_*(S_\alpha X) + \tau_\alpha^\beta(X)\xi_\beta, \quad (4)$$

де S_α – оператори Вейнгартена, τ_β^α – форми трансверсальної зв'язності відносно базиса трансверсального розподілу $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Зафіксуємо деякий паралельний елемент об'єму $\tilde{\omega}$ в $\mathbb{R}^{n+k}$ (найчастіше це звичайний детермінант). Для афінного занурення $M^n \mapsto \mathbb{R}^{n+k}$ з базисом трансверсального розподілу $\xi_1, \dots, \xi_k$ індукований елемент об'єму θ на M^n визначається наступним чином:

$$\theta(X_1, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(f_*(X_1), \dots, f_*(X_n), \xi_1, \dots, \xi_k), \quad (5)$$

У випадку $\nabla\theta = 0$ трансверсальний розподіл називається *еквіафінним*. Таким чином, ми маємо *еквіафінну структуру* (∇, θ) на M^n . Занурення $f : (M, \nabla, \theta) \mapsto \mathbb{R}^{n+k}$ з еквіафінною структурою називається *еквіафінним зануренням*.

Приклад 1.1. *Обрати трансверсальний розподіл та знайти основні афінні характеристики афінного занурення $\vec{r}(u, v) = \{\cos u, \sin u, uv, v\}$.*

Знайдемо дотичні вектори:

$$\vec{r}_u = \{-\sin u, \cos u, v, 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0, 0, u, 1\}.$$

Оберемо вектори $\vec{\xi}_1$ і $\vec{\xi}_2$ таким чином, щоб визначник, який складається з дотичних векторів $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ та $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$, не дорівнював 0. Наприклад, нехай

$$\vec{\xi}_1 = \{\cos u, \sin u, 0, 0\}, \quad \vec{\xi}_2 = \{0, 0, 1, 0\}.$$

$$\det(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = \begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & v & 0 \\ 0 & 0 & u & 1 \\ \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Знайдемо розкладання Гаусса $\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + h_{ij}^\alpha \vec{\xi}_\alpha$:

$$\vec{r}_{uu} = \{-\cos u, -\sin u, 0, 0\} = -\vec{\xi}_1; \quad \vec{r}_{uv} = \{0, 0, 1, 0\} = \vec{\xi}_2; \quad \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Випишемо символи Кристофеля та компоненти афінної зв'язності для даної поверхні:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k; \quad h_{11}^1 = -1, \quad h_{11}^2 = 0; \quad h_{12}^1 = 1, \quad h_{12}^2 = 0; \quad h_{22}^1 = 0, \quad h_{22}^2 = 0.$$

Тобто матриці афінних фундаментальних форм мають наступний вигляд:

$$h^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо розкладання Вейнгартена:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial u} = \{-\sin u, \cos u, 0, 0\} = \vec{r}_u - v \vec{\xi}_2, \quad \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial v} = \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial v} = \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial u} = \vec{0}.$$

Оператори Вейнгартена та форми трансверсальної зв'язності мають наступний вигляд:

$$S_1(e_1) = -e_1, \quad S_1(e_2) = S_2(e_1) = S_2(e_2) = 0;$$

$$\tau_1^2(e_1) = -v, \quad \tau_1^1(e_1) = \tau_2^1(e_1) = \tau_2^2(e_1) = 0, \quad \tau_\alpha^\beta(e_2) = 0, \quad \forall \alpha, \beta.$$

В даному випадку трансверсальний розподіл є еквафінним.

Приклад 1.2. Знайти основні афінні характеристики поверхні, що задана радіусом-вектором $\vec{r}(u, v) = \{\cos u, \sin u, \operatorname{ch} v, \operatorname{sh} v\}$.

Спочатку знайдемо дотичні вектори:

$$\vec{r}_u = \{-\sin u, \cos u, 0, 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0, 0, \operatorname{sh} v, \operatorname{ch} v\}.$$

Оберемо вектори $\vec{\xi}_1$ і $\vec{\xi}_2$ таким чином, щоб визначник, який складається з дотичних векторів $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ та $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ не дорівнював 0. Наприклад, нехай

$$\vec{\xi}_1 = \{-\cos u, -\sin u, -\operatorname{ch} v, -\operatorname{sh} v\}, \quad \vec{\xi}_2 = \{0, 0, \operatorname{ch} v, \operatorname{sh} v\}.$$

Знайдемо розкладання Гауса даної поверхні $\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_k + h_{ij} \vec{\xi}$:
 $\vec{r}_{uu} = \{-\cos u, -\sin u, 0, 0\} = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2$, $\vec{r}_{uv} = \{0, 0, 0, 0\} = \vec{0}$,
 $\vec{r}_{vv} = \{0, 0, \text{ch } v, \text{sh } v\} = \vec{\xi}_2$.

Випишемо символи Кристофеля та компоненти афінної зв'язності для даної поверхні:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k; \quad h_{11}^1 = -1, \quad h_{11}^2 = 1; \quad h_{12}^1 = 0, \quad h_{12}^2 = 0; \quad h_{22}^1 = 0, \quad h_{22}^2 = 1.$$

Тобто матриці афінної фундаментальної форми мають наступний вигляд:

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо розкладання Вейнгартена:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial u} = \{\sin u, -\cos u, 0, 0\} = -\vec{r}_u', \quad \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial v} = \{0, 0, -\text{sh } v, -\text{ch } v\} = -\vec{r}_v',$$

$$\frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial u} = \{0, 0, 0, 0\} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial v} = \{0, 0, \text{sh } v, \text{ch } v\} = \vec{r}_v'.$$

Оператори Вейнгартена та форми трансверсальної зв'язності мають наступний вигляд:

$$S_1(e_1) = e_1, \quad S_1(e_2) = e_2, \quad S_2(e_1) = 0, \quad S_2(e_2) = -e_2; \quad \tau \equiv 0.$$

1.2 Фундаментальні рівняння

Розглянемо занурення $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ у випадку, коли не задано певну зв'язність. Добре відомі фундаментальні рівняння афінного занурення [2], [4], які забезпечують афінний аналог основної теореми теорії поверхонь.

Теорема 1.1. *Для занурення $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ з довільним трансверсальним розподілом Q з базисом $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ індукована зв'язність ∇ , компоненти афінної фундаментальної форми, оператори Вейнгартена і форми трансверсальної зв'язності задовольняють наступним рівнянням:*
рівняння Гауса

$$R(X, Y)Z = h^\alpha(Y, Z)S_\alpha X - h^\alpha(X, Z)S_\alpha Y, \quad (6)$$

рівняння Кодацці для h

$$(\nabla_X h^\alpha)(Y, Z) + \tau_\beta^\alpha(X)h^\beta(Y, Z) = (\nabla_Y h^\alpha)(X, Z) + \tau_\beta^\alpha(Y)h^\beta(X, Z), \quad (7)$$

рівняння Кодаци для S

$$(\nabla_X S_\alpha)(Y) - \tau_\alpha^\beta(Y) S_\beta X = (\nabla_Y S_\alpha)(X) - \tau_\alpha^\beta(Y) S_\beta X, \quad (8)$$

рівняння Річчі

$$\begin{aligned} h^\alpha(X, S_\beta Y) - h^\alpha(Y, S_\beta X) = \\ = X(\tau_\beta^\alpha(Y)) + \tau_\beta^\gamma(X) \tau_\gamma^\alpha(Y) - Y(\tau_\beta^\alpha(X)) + \tau_\beta^\gamma(Y) \tau_\gamma^\alpha(X) - \tau_\beta^\alpha([X, Y]). \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, що трансверсальний розподіл для афінного занурення обирається не єдиним чином. Зв'язок між афінними характеристиками афінного занурення при різних трансверсальних розподілах дає наступна лема [4].

Лема 1.1. *Нехай для занурення $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ маємо два трансверсальних розподіли $Q = \text{Lin}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ та $\bar{Q} = \text{Lin}\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k\}$, що пов'язані наступним чином $\bar{\xi}_\alpha = \Phi_\alpha^\beta \xi_\beta + f_*(Z_\alpha)$, де Z_α – дотичні векторні поля на M^n , $\Phi = [\Phi_\alpha^\beta]_{k \times k}$ – невідроджена матриця з гладких функцій. Тоді основні афінні характеристики афінного занурення з трансверсальними розподілами Q та $\bar{Q}$ пов'язані наступним чином:*

$$\bar{h}^\alpha(X, Y) = [\Phi^{-1}]_\beta^\alpha h^\beta(X, Y) \quad (10)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - [\Phi^{-1}]_\beta^\alpha h^\beta(X, Y) Z_\alpha \quad (11)$$

$$\bar{S}_\alpha(X) = \Phi_\alpha^\beta S_\beta(X) - \nabla_X Z_\alpha + \bar{\tau}_\alpha^\beta(X) Z_\beta \quad (12)$$

$$\bar{\tau}_\alpha^\beta(X) = [\Phi^{-1}]_\gamma^\beta \{ \tau_\delta^\gamma(X) \Phi_\alpha^\delta + h^\gamma(X, Z_\alpha) + X(\Phi_\alpha^\gamma) \} \quad (13)$$

Зокрема, з формули (10) випливає, що ранг афінної фундаментальної форми $h_x : T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow Q_x$ не залежить від вибору трансверсального розподілу, що робить коректним визначення *точкової ковимірності* занурення.

Визначення 1.3. *Точковою ковимірністю афінного занурення називається ранг його афінної фундаментальної форми.*

1.3 Афінне занурення гіперповерхні

Розглянемо основні визначення і рівняння занурення гіперповерхні. Нехай (M^n, ∇) – n -вимірний многовид з афінною зв'язністю ∇ . Занурення $f : M \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ називається *афінним зануренням*, якщо існує трансверсальне векторне поле ξ на M^n , таке що виконується рівняння:

$$D_X(f)_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi \quad (14)$$

Симметрична білінійна функція h називається *афінною фундаментальною формою*.

Для всіх $X \in \mathcal{X}(M^n)$ справедлива *формула Вейнгартена*:

$$D_X \xi = -f_*(SX) + \tau(X)\xi, \quad (15)$$

де S – тензор типу $(1,1)$, який називається *оператором Вейнгартена*, τ називається *формою трансверсальної зв'язності*.

Для кожної точки $x_0 \in M$ оберемо локальний розподіл трансверсальних векторів $\xi : x \in U \mapsto \xi_x$, де U – окіл точки x .

Трансверсальність у цьому випадку означає, що

$$T_{f(x)}(\mathbb{R}^{n+1}) = f_*(T_x(M)) + \text{Lin}(\xi),$$

де $\text{Lin}(\xi)$ означає 1-вимірний підпростір натянутий на ξ_x .

Для гіперповерхневого занурення $f : M \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$, трансверсальне векторне поле ξ називається *еквіафінним*, якщо $D_X \xi$ є дотичним до M для кожного $X \in T_x(M)$, $x \in M$. Ця умова еквівалентна умові $\tau \equiv 0$ [2, с.31].

Лема 1.2. *Нехай для занурення $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ маємо два трансверсальних векторних поля ξ та $\bar{\xi}$, що пов'язані наступним чином $\bar{\xi} = \phi\xi + f_*(Z)$, де Z – дотичне векторне поле на M , ϕ – невідроджена гладка функція відмінна від нуля в кожній точці. Тоді афінна фундаментальна форма, індукована зв'язністю, форма трансверсальної зв'язності і оператор Вейнгартена замінюються наступним чином:*

$$\bar{h}(X, Y) = \frac{1}{\phi} h(X, Y) \quad (16)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{\phi} h(X, Y) Z \quad (17)$$

$$\bar{\tau}(X) = \tau(X) + \frac{1}{\phi} h(Z, X) + X(\ln \phi) \quad (18)$$

$$\bar{S}(X) = \phi S(X) - \nabla_X Z + \bar{\tau}(X) Z \quad (19)$$

Найбільш вивченими афінними зануреннями є занурення гіперповерхонь. Ще сто років тому Бляшке розвивав теорію еквіафінних занурень невідроджених гіперповерхонь з афінною фундаментальною формою в якості метрики. Існує також класифікація афінних гіперповерхонь з пласкою зв'язністю [3]: повне регулярне афінне занурення гіперповерхні може бути лише або афінним підпростором, або гіперциліндром, або зануренням графіка деякої функції n змінних. Також вивчалися афінні занурення з додатковою умовою на оператор Вейнгартена (омбілічні занурення).

2 Лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^3$ з пласкою зв'язністю

2.1 Загальні властивості лінійчастої поверхні в $\mathbb{R}^3$

Розглянемо лінійчасту поверхню в $\mathbb{R}^3$, яка побудована над кривою $\vec{\rho}(u)$ та має напрямки прямолінійних твірних $\vec{a}(u)$. Така поверхня задається радіусом-вектором $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Лінійчата поверхня не буде торсом або циліндром, якщо виконується умова $\det(\vec{\rho}'(u), \vec{a}(u), \vec{a}'(u)) \neq 0$. Оскільки дотичні вектори мають наступний вигляд $\vec{r}'_u = \vec{\rho}'(u) + v\vec{a}'(u)$, $\vec{r}'_v = \vec{a}(u)$, то трансверсальне векторне поле може бути обране наступним чином $\xi = \vec{a}'(u)$.

Випишемо розкладання Гауса:

$$\vec{r}_{uu} = \vec{\rho}''(u) + v\vec{a}''(u) = \Gamma_{11}^k \vec{r}'_k + h_{11}\xi, \quad \vec{r}_{uv} = \vec{a}'(u) = \xi, \quad \vec{r}_{vv} = \vec{0}.$$

Тобто індукована зв'язність та матриця афінної фундаментальної форми h мають наступний вигляд:

$$\nabla_{e_1} e_1 = \Gamma_{11}^k e_k, \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0; \quad h = \begin{pmatrix} h_{11} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для даної поверхні $\det h = -1$, тобто всі точки є точками гіперболічного типу, отже є сідловими точками. Дана поверхня є сідловою поверхнею.

Отже, лінійчата поверхня загального вигляду, що не є торсом або циліндром, є сідловою поверхнею. Звичайно, не всі сідлові поверхні лінійчаті, наприклад катеноїд є сідловою не лінійчатою поверхнею.

2.2 Еквіафінна теорія кривих

Еквіафінне відображення – це відображення, при якому не змінюється елемент об'єму, а детермінант матриці перетворення дорівнює одиниці.

На афінній площині всі еліпси еквівалентні одиничному колу. На еквіафінній площині всі еліпси еквівалентні колу з такою ж самою площею.

Еквіафінна геометрія – це розділ геометрії, що вивчає властивості геометричних об'єктів, що інваріантні відносно еквіафінних перетворень.

Геометрично можна вважати, що дан паралелограм з площею 1. Система координат називається допустимою, якщо паралелограм, визначений векторами $(1, 0)$ і $(0, 1)$, має площу, яка дорівнює 1.

Розглянемо гладку криву у двовимірному просторі, яку задано параметрично $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$. За визначенням в [2, с.2] крива називається *невиродженою*, якщо

$$|\vec{r}'_t, \vec{r}''_t| \neq 0.$$

Визначення 2.1. Параметр σ називається параметром афінної довжини дуги, якщо

$$|\vec{\rho}'_\sigma, \vec{\rho}''_\sigma| \equiv 1. \quad (20)$$

Отже, маємо зв'язок [2, с.3] між параметром афінної довжини дуги та довільним параметром:

$$\sigma'_t = |\vec{r}'_t, \vec{r}''_t|^{\frac{1}{3}}, \quad \sigma(t) = \int |\vec{r}'_t, \vec{r}''_t|^{\frac{1}{3}} dt. \quad (21)$$

Продиференціюємо тотожність (20) по σ , та отримаємо

$$|\vec{\rho}'_\sigma, \vec{\rho}'''_\sigma| = 0.$$

Тобто $\vec{\rho}'''_\sigma$ лінійно залежить від $\vec{\rho}'_\sigma$. Маємо розкладання

$$\vec{\rho}'''_\sigma = -k(\sigma)\vec{\rho}'_\sigma, \quad (22)$$

яке визначає афінну кривину $k(\sigma)$ [2, с.3].

Визначення 2.2. Функція $k(\sigma)$, яка визначається розкладанням (22), де σ є параметром афінної довжини дуги, називається афінною кривиною.

Афінний аналог основної теореми теорії плоских кривих [2, с.3]:

Теорема 2.1. Нехай $k(\sigma)$ – гладка функція, що задана на інтервалі J , тоді існує плоска крива з параметром афінної довжини дуги σ та афінною кривиною $k(\sigma)$. Така крива єдина з точністю до еквіафінного перетворення площини.

Також існує класифікація плоских кривих з постійною афінною кривиною [2, с.4] $k(\sigma) = k = \text{const}$. На відміну від евклідового випадку, де крива з нульовою кривиною є прямою, а крива з додатною постійною кривиною є колом, в афінному випадку крива з постійною афінною кривиною є кривою другого порядку. У випадку $k = 0$ це парабола, $k > 0$ – еліпс, $k < 0$ – гіпербола.

2.3 Лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^3$ з плоскою зв'язністю

Будемо розглядати лінійчасту поверхню в $\mathbb{R}^3$, що задається радіусом вектором $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$, яка побудована над плоскою кривою $\vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), 0\}$ (де u – афінний натуральний параметр довжини дуги) та має напрямки прямолінійних твірних $\vec{a}(u) = \{a_1(u), a_2(u), 1\}$.

Знайдемо дотичні вектори:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}'_u + v\vec{a}'_u, \quad \vec{r}'_v = \vec{a}.$$

Знайдемо другі похідні

$$\vec{r}''_{uu} = \vec{\rho}''_{uu} + v\vec{a}''_{uu}, \quad \vec{r}''_{uv} = \vec{a}'_u, \quad \vec{r}''_{vv} = \vec{0}.$$

Оскільки u – афінний натуральний параметр довжини дуги для пласкої кривої $\vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), 0\}$, то ми маємо наступну властивість

$$\vec{\rho}''' = -k(u)\vec{\rho}',$$

де $k(u)$ – афінна кривина пласкої кривої $\vec{\rho}(u)$.

Вектори $\vec{\rho}'(u)$, $\vec{\rho}''(u)$ утворюють базис площини, в якій розташована крива $\vec{\rho}(u)$, а також вектор $\vec{a}'(u) = \{a'_1(u), a'_2(u), 0\}$. Тож ми можемо виписати розкладання

$$\vec{a}'_u = \lambda(u)\vec{\rho}'_u + \mu(u)\vec{\rho}''_{uu} \quad (23)$$

В якості трансверсального векторного поля будемо обирати $\xi = \vec{\rho}''$.

Для того, щоб виписати розкладання Гауса знайдемо зв'язок між векторами $\vec{\rho}'(u)$ та $\vec{r}'(u)$:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}'_u + v(\lambda\vec{\rho}'_u + \mu\vec{\rho}''_{uu}) = \vec{\rho}'_u + v(\lambda\vec{\rho}'_u + \mu\xi).$$

$$(1 + v\lambda)\vec{\rho}'_u = \vec{r}'_u - v\mu\xi.$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}''_{uv}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}''_{uv} = \vec{a}'_u &= \lambda(u)\vec{\rho}'_u + \mu(u)\vec{\rho}''_{uu} = \\ &= \frac{\lambda}{1 + v\lambda}(\vec{r}'_u - v\mu\xi) + \mu\xi = \frac{\lambda}{1 + v\lambda}\vec{r}'_u + \frac{\mu}{1 + v\lambda}\xi. \end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda}{1 + v\lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad h_{12} = \frac{\mu}{1 + v\lambda}.$$

Оскільки $\vec{a}'_u(u) = \lambda(u)\vec{\rho}'_u + \mu(u)\vec{\rho}''_{uu}$, то маємо

$$\begin{aligned} \vec{a}''_{uu} &= \lambda'\vec{\rho}' + \lambda\vec{\rho}'' + \mu'\vec{\rho}'' + \mu\vec{\rho}''' = \lambda'\vec{\rho}' + \lambda\vec{\rho}'' + \mu'\vec{\rho}'' - \mu k(u)\vec{\rho}' = \\ &= \vec{\rho}'(\lambda' - k\mu) + \xi(\lambda + \mu') \end{aligned}$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}_{uu}'$:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{uu}' &= \vec{\rho}_{uu}' + v\vec{a}_{uu}' = \vec{\rho}' + v\vec{\rho}'(\lambda' - k\mu) + v\xi(\lambda + \mu') = \\ &= \xi + \frac{v}{1+v\lambda}(\lambda' - k\mu)(\vec{r}_u' - v\mu\xi) + v\xi(\lambda + \mu') = \\ &= \frac{v(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda}\vec{r}_u' + \xi\left(1 + v\lambda + v\mu' - \frac{v^2\mu(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda}\right)\end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{v(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad h_{11} = 1 + v\lambda + v\mu' - \frac{v^2\mu(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda}.$$

Оскільки $\vec{r}_{vv}' = \vec{0}$, то ми маємо наступну зв'язність:

$$\nabla_{e_1}e_1 = \frac{v(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda}e_1, \quad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{\lambda}{1+v\lambda}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_2 = 0.$$

В даному випадку маємо наступне розкладання Вейнгартена:

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial u} = \vec{\rho}''' = -k(u)\vec{\rho}' = \frac{-k(u)}{1+v\lambda}(\vec{r}_u' - v\mu\xi), \quad \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial v} = \vec{0}.$$

Оператори Вейнгартена та форми трансверсальної зв'язності мають наступний вигляд:

$$S(e_1) = \frac{k}{1+v\lambda}e_1; \quad S(e_2) = 0;$$

$$\tau(e_1) = \frac{kv\mu}{1+v\lambda}, \quad \tau(e_2) = 0.$$

В загальному випадку трансверсальний розподіл не є еквіафінним.

Підрахуємо тензор кривини:

$$\begin{aligned}R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 = \\ &= \nabla_{e_1}(0) - \nabla_{e_2}\left(\frac{\lambda}{1+v\lambda}e_1\right) = \frac{\lambda^2}{(1+v\lambda)^2}e_1 - \frac{\lambda}{1+v\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1+v\lambda}e_1 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 = \\
&= \nabla_{e_1} \left(\frac{\lambda}{1+v\lambda} e_1 \right) - \nabla_{e_2} \left(\frac{v(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda} e_1 \right) = \\
&= \frac{\lambda'(1+v\lambda) - \lambda v \lambda'}{(1+v\lambda)^2} e_1 + \frac{\lambda}{1+v\lambda} \cdot \frac{v(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda} e_1 - \\
&\quad - \frac{(\lambda' - k\mu)(1+v\lambda) - v(\lambda' - k\mu)\lambda}{(1+v\lambda)^2} e_1 - \frac{v(\lambda' - k\mu)}{1+v\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1+v\lambda} e_1 = \\
&= \frac{e_1}{(1+v\lambda)^2} (\lambda' - \lambda' - v\lambda\lambda' + k\mu + k\mu v\lambda + v\lambda\lambda' - vk\mu\lambda) = \frac{k\mu}{(1+v\lambda)^2} e_1
\end{aligned}$$

Таким чином, тензор кривини може дорівнювати нулю у двох випадках:

- 1) афінна кривина базової кривої дорівнює нулю, тобто крива є параболою;
- 2) функція $\mu(u) \equiv 0$ у розкладанні (23).

Очевидно, що в обох випадках трансверсальний розподіл буде мати властивість $\tau \equiv 0$ і буде еквафінним.

Розглянемо ці два випадки докладніше.

2.3.1 Лінійчаста поверхня над параболою

Розглянемо випадок, коли афінна кривина базової кривої $k = 0$, тобто крива $\vec{\rho}(u)$ є параболою.

Отже, маємо наступну параметризацію лінійчастої поверхні

$$\vec{r}(u) = \begin{pmatrix} u \\ \frac{u^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a_1(u) \\ a_2(u) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для параболи маємо:

$$\vec{\rho} = \{u, \frac{u^2}{2}, 0\}, \quad \vec{\rho}' = \{1, u, 0\}, \quad \vec{\rho}'' = \{0, 1, 0\} = \xi.$$

Отже, в даному випадку трансверсальне векторне поле є постійним і поверхня після перепараметризації є графіком деякої функції двох змінних. Знайдемо дотичні вектори:

$$\vec{r}'_u = \{1 + va'_1, u + va'_2, 0\}, \quad \vec{r}'_v = \{a_1, a_2, 1\}.$$

Очевидно, що у випадку параболи у розкладанні (23) функція $\lambda(u) = a'_1(u)$. Оскільки

$$\det(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v, \xi) = 1 + v\lambda(u),$$

то очевидно, що занурення буде повним і регулярним лише у випадку $\lambda(u) \equiv 0$ ($a_1 = \text{const}$). В цьому випадку гіперповерхня (без перепараметризації) є зануренням графіка функції двох змінних.

Якщо ми розглядаємо занурення локально і не вимагаємо регулярності в кожній точці, то вектор, що задає напрямок прямолінійних твірних, може бути довільною гладкою вектор-функцією. В цьому випадку розкладання Гауса має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\vec{r}''_{uu} &= \{va''_1, 1 + va''_2, 0\} = \frac{va''_1}{1 + va'_1}\vec{r}'_u + \left(1 + va''_2 - \frac{va''_1(u + va'_2)}{1 + va'_1}\right)\xi, \\ \vec{r}''_{uv} &= \{a'_1, a'_2, 0\} = \frac{a'_1}{1 + va'_1}\vec{r}'_u + \left(a'_2 - \frac{a'_1(u + va'_2)}{1 + va'_1}\right)\xi, \\ \vec{r}''_{vv} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Отже, маємо наступну зв'язність:

$$\nabla_{e_1}e_1 = \frac{va''_1}{1 + va'_1}e_1, \quad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{a'_1}{1 + va'_1}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_2 = 0.$$

Тензор кривини:

$$\begin{aligned}R(e_1, e_2)e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_1}\left(\frac{a'_1}{1 + va'_1}e_1\right) - \\ &- \nabla_{e_2}\left(\frac{va''_1}{1 + va'_1}e_1\right) = \frac{a''_1(1 + va'_1) - a'_1va''_1}{(1 + va'_1)^2}e_1 + \frac{a'_1va''_1}{(1 + va'_1)^2}e_1 - \\ &- \frac{a''_1(1 + va'_1) - va''_1a'_1}{(1 + va'_1)^2}e_1 - \frac{va''_1a'_1}{(1 + va'_1)^2}e_1 = 0.\end{aligned}$$

2.3.2 Випадок $\mu(u) \equiv 0$

В цьому випадку розкладання (23) має наступний вигляд: $\vec{a}'_u = \lambda(u)\vec{\rho}'_u$. Дотичні вектори лінійчастій поверхні $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}'_u + v\vec{a}'_u = (1 + v\lambda(u))\vec{\rho}'_u, \quad \vec{r}'_v = \vec{a}.$$

Очевидно, що занурення буде повним і регулярним лише у випадку $\lambda(u) \equiv 0$. А це означає, що $\vec{a}$ є вектором з постійними координатами. В цьому випадку лінійчаста поверхня є циліндром.

Приклад 2.1. Лінійчаста поверхня, що задана радіусом-вектором

$$\vec{r}(u, v) = \{e^u + \frac{1}{2}ve^{2u}, \frac{1}{2}e^{-u} - \frac{1}{2}uv, v\}.$$

Ця лінійчаста поверхня побудована над кривою $\vec{\rho}(u) = \{e^u, \frac{1}{2}e^{-u}, 0\}$. Для даної кривої

$$\vec{\rho}'(u) = \{e^u, -\frac{1}{2}e^{-u}, 0\}, \quad \vec{\rho}''(u) = \{e^u, \frac{1}{2}e^{-u}, 0\}.$$

Отже, $|\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}''(u)| \equiv 1$, u – афінний натуральний параметр довжини дуги. Оскільки $\vec{\rho}''(u) = \{e^u, -\frac{1}{2}e^{-u}, 0\} = \vec{\rho}'(u)$, то афінна кривина $k = -1$, крива є гіперболою ($xy = -1/2$).

Напрямок прямолінійних твірних цієї лінійчастої поверхні задається вектором $\vec{a}(u) = \{\frac{1}{2}e^{2u}, -\frac{1}{2}u, 1\}$. При цьому $\vec{a}'(u) = \{e^{2u}, -\frac{1}{2}, 0\} = e^u \vec{\rho}'(u)$, отже $\lambda(u) = e^u$. Це неповна лінійчаста поверхня з пласкою зв'язністю.

3 Лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^4$ з пласкою зв'язністю

3.1 2-лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^4$ з пласкою зв'язністю

Будемо розглядати лінійчасту поверхню в $\mathbb{R}^4$, що задається радіусом вектором $\vec{r}(u, v, w) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u) + w\vec{b}(u)$, яка побудована над пласкою кривою $\vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), 0, 0\}$ (де u – афінний натуральний параметр довжини дуги) та має напрямки двох прямолінійних твірних $\vec{a}(u) = \{a_1(u), a_2(u), 1, 0\}$ та $\vec{b}(u) = \{b_1(u), b_2(u), 0, 1\}$.

Знайдемо дотичні вектори:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}'_u + v\vec{a}'_u + w\vec{b}'_u, \quad \vec{r}'_v = \vec{a}, \quad \vec{r}'_w = \vec{b}.$$

Знайдемо другі похідні

$$\vec{r}''_{uu} = \vec{\rho}''_{uu} + v\vec{a}''_{uu} + w\vec{b}''_{uu}, \quad \vec{r}''_{uv} = \vec{a}'_u, \quad \vec{r}''_{uw} = \vec{b}'_u, \quad \vec{r}''_{vv} = \vec{r}''_{vw} = \vec{r}''_{ww} = \vec{0}.$$

Оскільки u – афінний натуральний параметр довжини дуги для пласкої кривої $\vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), 0, 0\}$, то ми маємо наступну властивість

$$\vec{\rho}''' = -k(u)\vec{\rho}',$$

де $k(u)$ – афінна кривина пласкої кривої $\vec{\rho}(u)$.

Вектори $\vec{\rho}'(u), \vec{\rho}''(u)$ утворюють базис площини, в якій розташована крива $\vec{\rho}(u)$, а також наступні вектори: $\vec{a}'(u) = \{a'_1(u), a'_2(u), 0, 0\}$ та $\vec{b}'(u) = \{a'_1(u), a'_2(u), 0, 0\}$. Тож ми можемо виписати розкладання

$$\vec{a}'_u = \lambda_1(u)\vec{\rho}'_u + \lambda_2(u)\vec{\rho}''_{uu} \tag{24}$$

$$\vec{b}'_u = \mu_1(u)\vec{\rho}'_u + \mu_2(u)\vec{\rho}''_{uu} \quad (25)$$

В якості трансверсального векторного поля візьмемо $\xi = \vec{\rho}''$.

Для того, щоб виписати розкладання Гауса знайдемо зв'язок між векторами $\vec{\rho}'(u)$ та $\vec{r}'(u)$:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_u &= \vec{\rho}'_u + v(\lambda_1\vec{\rho}'_u + \lambda_2\xi) + w(\mu_1\vec{\rho}'_u + \mu_2\xi), \\ (1 + v\lambda_1 + w\mu_1)\vec{\rho}'_u &= \vec{r}'_u - (v\lambda_2 + w\mu_2)\xi. \end{aligned}$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}''_{uv}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}''_{uv} &= \vec{a}'_u = \lambda_1(u)\vec{\rho}'_u + \lambda_2(u)\vec{\rho}''_{uu} = \\ &= \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} (\vec{r}'_u - (v\lambda_2 + w\mu_2)\xi) + \lambda_2\xi = \\ &= \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} \vec{r}'_u + \frac{\lambda_2 + w(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} \xi. \end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad h_{12} = \frac{\lambda_2 + w(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1}.$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}''_{uw}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}''_{uw} &= \vec{b}'_u = \mu_1(u)\vec{\rho}'_u + \mu_2(u)\vec{\rho}''_{uu} = \\ &= \frac{\mu_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} (\vec{r}'_u - (v\lambda_2 + w\mu_2)\xi) + \mu_2\xi = \\ &= \frac{\mu_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} \vec{r}'_u + \frac{\mu_2 + v(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} \xi. \end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{\mu_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1}, \quad \Gamma_{13}^2 = 0, \quad h_{13} = \frac{\mu_2 + v(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1}.$$

Оскільки $\vec{a}'_u(u) = \lambda_1(u)\vec{\rho}'_u + \lambda_2(u)\vec{\rho}''_{uu}$, то маємо

$$\begin{aligned} \vec{a}''_{uu} &= \lambda'_1\vec{\rho}' + \lambda_1\vec{\rho}'' + \lambda'_2\vec{\rho}'' + \lambda_2\vec{\rho}''' = \lambda'_1\vec{\rho}' + \lambda_1\vec{\rho}'' + \lambda'_2\vec{\rho}'' - \lambda_2k(u)\vec{\rho}' = \\ &= \vec{\rho}'(\lambda'_1 - k\lambda_2) + \xi(\lambda_1 + \lambda'_2) \end{aligned}$$

Аналогічно оскільки $\vec{b}'_u(u) = \mu_1(u)\vec{\rho}'_u + \mu_2(u)\vec{\rho}''_{uu}$, то маємо

$$\begin{aligned} \vec{a}''_{uu} &= \mu'_1\vec{\rho}' + \mu_1\vec{\rho}'' + \mu'_2\vec{\rho}'' + \mu_2\vec{\rho}''' = \mu'_1\vec{\rho}' + \mu_1\vec{\rho}'' + \mu'_2\vec{\rho}'' - \mu_2k(u)\vec{\rho}' = \\ &= \vec{\rho}'(\mu'_1 - k\mu_2) + \xi(\mu_1 + \mu'_2) \end{aligned}$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}_{uu}'$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{uu}' &= \vec{\rho}_{uu}' + v\vec{a}_{uu}'' + w\vec{b}_{uu}'' = \\
&= \xi + v\vec{\rho}'(\lambda_1' - k\lambda_2) + v\xi(\lambda_1 + \lambda_2') + w\vec{\rho}'(\mu_1' - k\mu_2) + w\xi(\mu_1 + \mu_2') = \\
&= \xi + \frac{v(\lambda_1' - k\lambda_2) + w(\mu_1' - k\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} (\vec{r}_u' - (v\lambda_2 + w\mu_2)\xi) + v\xi(\lambda_1 + \lambda_2') + \\
&\quad + w\xi(\mu_1 + \mu_2') = \frac{v(\lambda_1' - k\lambda_2) + w(\mu_1' - k\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} \vec{r}_u' + \\
&+ \xi \left(1 + v(\lambda_1 + \lambda_2') + w(\mu_1 + \mu_2') - \frac{v(\lambda_1' - k\lambda_2) + w(\mu_1' - k\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} (v\lambda_2 + w\mu_2) \right)
\end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{v(\lambda_1' - k\lambda_2) + w(\mu_1' - k\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$h_{11} = 1 + v(\lambda_1 + \lambda_2') + w(\mu_1 + \mu_2') - \frac{v(\lambda_1' - k\lambda_2) + w(\mu_1' - k\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} (v\lambda_2 + w\mu_2).$$

Оскільки $\vec{r}_{vv}'' = \vec{r}_{vw}'' = \vec{r}_{ww}'' = \vec{0}$, то ми маємо наступну зв'язність:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= \frac{v(\lambda_1' - k\lambda_2) + w(\mu_1' - k\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} e_1, \\
\nabla_{e_1} e_3 &= \frac{\mu_1}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} e_1, \quad \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{aligned}$$

В даному випадку маємо наступне розкладання Вейнгартена:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial u} &= \vec{\rho}''' = -k(u)\vec{\rho}' = \frac{-k(u)}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} (\vec{r}_u' - (v\lambda_2 + w\mu_2)\xi), \\
\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial v} &= \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial w} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Оператори Вейнгартена та форми трансверсальної зв'язності мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
S(e_1) &= \frac{k}{1 + v\lambda_1 + w\mu_1} e_1, \quad S(e_2) = 0, \quad S(e_3) = 0; \\
\tau(e_1) &= \frac{k(v\lambda_2 + w\mu_2)}{1 + v\lambda_1 + \mu_1}, \quad \tau(e_2) = 0, \quad \tau(e_3) = 0.
\end{aligned}$$

В загальному випадку трансверсальний розподіл не є еквафінім.

Підрахуємо тензор кривини:

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_1}(0) - \nabla_{e_2}\left(\frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = \\ &= \frac{\lambda_1^2}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_1}(0) - \nabla_{e_2}\left(\frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = \\ &= \frac{\lambda_1\mu_1}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(e_1, e_3)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_1}(0) - \nabla_{e_3}\left(\frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = \\ &= \frac{\lambda_1\mu_1}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1} \cdot \frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(e_1, e_3)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_1}(0) - \nabla_{e_3}\left(\frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = \\ &= \frac{\mu_1^2}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1} \cdot \frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(e_2, e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1 = \\ &= \nabla_{e_2}\left(\frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}\right) - \nabla_{e_3}\left(\frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 = \\
&= \nabla_{e_1}\left(\frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) - \nabla_{e_2}\left(\frac{v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2)}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = \\
&= \frac{\lambda'_1(1+v\lambda_1+w\mu_1)-\lambda_1(v\lambda'_1+w\mu'_1)}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 + \lambda_1\frac{v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2)}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \\
&\quad - \frac{(\lambda'_1-k\lambda_2)(1+v\lambda_1+w\mu_1)-(v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2))\lambda_1}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \\
&\quad - \frac{v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2)}{1+v\lambda_1+w\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1 = \\
&= \frac{e_1}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}(\lambda'_1+w\lambda'_1\mu_1-w\lambda_1\mu'_1-\lambda'_1-v\lambda'_1\lambda_1-w\lambda'_1\mu_1+ \\
&\quad +k\lambda_2+k\lambda_2v\lambda_1+k\lambda_2w\mu_1+v\lambda'_1\lambda_1-vk\lambda_2\lambda_1+w\mu'_1\lambda_1-wk\mu_2\lambda_1) = \\
&= \frac{k(\lambda_2+w\lambda_2\mu_1-w\lambda_1\mu_2)}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_3)e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 = \\
&= \nabla_{e_1}\left(\frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) - \nabla_{e_3}\left(\frac{v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2)}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1\right) = \\
&= \frac{\mu'_1(1+v\lambda_1+w\mu_1)-\mu_1(v\lambda'_1+w\mu'_1)}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 + \mu_1\frac{v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2)}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \\
&\quad - \frac{(\mu'_1-k\mu_2)(1+v\lambda_1+w\mu_1)-(v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2))\mu_1}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1 - \\
&\quad - \frac{v(\lambda'_1-k\lambda_2)+w(\mu'_1-k\mu_2)}{1+v\lambda_1+w\mu_1} \cdot \frac{\mu_1}{1+v\lambda_1+w\mu_1}e_1 = \\
&= \frac{e_1}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}(\mu'_1+v\mu'_1\lambda_1-v\mu_1\lambda'_1-\mu'_1-v\mu'_1\lambda_1-w\mu'_1\mu_1+ \\
&\quad +k\mu_2+k\mu_2v\lambda_1+k\mu_2w\mu_1+v\lambda'_1\mu_1-vk\lambda_2\mu_1+w\mu'_1\mu_1-wk\mu_2\mu_1) = \\
&= \frac{k(\mu_2+v\lambda_1\mu_2-v\lambda_2\mu_1)}{(1+v\lambda_1+w\mu_1)^2}e_1
\end{aligned}$$

Таким чином, тензор кривини дорівнює нулю у двох випадках:

- 1) афінна кривина базової кривої дорівнює нулю, тобто крива є параболою;
- 2) для будь-яких значень параметрів v , w виконується система рівно-

стей:

$$\begin{aligned}\lambda_2 + w\lambda_2\mu_1 - w\lambda_1\mu_2 &= 0, \\ \mu_2 + v\lambda_1\mu_2 - v\lambda_2\mu_1 &= 0,\end{aligned}$$

що можливо лише у випадку $\lambda_2(u) \equiv 0$ та $\mu_2(u) \equiv 0$ у розкладаннях (24), (25).

Очевидно, що в обох випадках трансверсальний розподіл буде мати властивість $\tau \equiv 0$ і буде еквафінним.

Аналогічно афінному зануренню лінійчастої поверхні в тривимірний простір:

1) у випадку повної регулярної лінійчастої поверхні над параболою ми маємо занурення графіка деякої функції 3 змінних ($k(u) \equiv 0$);

2) у випадку $\lambda_2(u) \equiv 0$ та $\mu_2(u) \equiv 0$ повна регулярна лінійчаста поверхня може бути лише циліндром.

Отже, нетривіальна параметризація лінійчастої гіперповерхні з пласкою зв'язністю може бути лише локальною, визначений вище трансверсальний розподіл в даному випадку буде еквафінним.

3.2 Еквафінна теорія кривих в $\mathbb{R}^3$

Розглянемо просторову криву в $\mathbb{R}^3$, що задається формулою:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) = \{\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t)\}.$$

Крива називається *невиродженою*, якщо

$$|\vec{\rho}'_t, \vec{\rho}''_t, \vec{\rho}'''_t| \neq 0.$$

Параметр σ називається *афінний натуральний параметром довжини дуги*, якщо

$$|\vec{\rho}'_\sigma, \vec{\rho}''_\sigma, \vec{\rho}'''_\sigma| \equiv 1.$$

Зв'язок між афінним натуральним параметром та звичайним:

$$\vec{\sigma}'_t = |\vec{\rho}'_t, \vec{\rho}''_t, \vec{\rho}'''_t|^{\frac{1}{6}} \quad (26)$$

Продиференціюємо $(|\vec{\rho}'_\sigma, \vec{\rho}''_\sigma, \vec{\rho}'''_\sigma| \equiv 1)'_\sigma$, то отримаємо $|\vec{\rho}'_t, \vec{\rho}''_t, \vec{\rho}^{IV}_t| = 0$. В результаті маємо розкладання

$$\vec{\rho}^{IV}_\sigma = -k_1\vec{\rho}'_\sigma - k_2\vec{\rho}''_\sigma, \quad (27)$$

де k_1, k_2 називаються *афінними кривинами* просторової кривої.

Приклад 3.1. Задано криву у просторі $\vec{\rho} = \{t, e^{2t}, e^t\}$. Знайти афінні кривини k_1, k_2 .

Спочатку знайдемо першу другу і третю похідні щоб дізнатися чи вивроджена крива:

$$\vec{\rho}' = \{1, 2e^{2t}, e^t\}, \vec{\rho}'' = \{0, 4e^{2t}, e^t\}, \vec{\rho}''' = \{0, 8e^{2t}, e^t\}$$

Обчислимо детермінант $|\vec{\rho}', \vec{\rho}'', \vec{\rho}'''|$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2e^{2t} & e^t \\ 0 & 4e^{2t} & e^t \\ 0 & 8e^{2t} & e^t \end{vmatrix} = -4e^{3t} \neq 0.$$

Отже, крива невивроджена.

Проінтегрувавши рівність (26), знайдемо параметр σ :

$$\sigma = \int 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{t}{2}} dt = 2^{\frac{4}{3}} e^{\frac{t}{2}}.$$

Зробимо перепараметризацію, виражаючи t через σ :

$$e^{\frac{t}{2}} = 2^{-\frac{4}{3}} \sigma, e^t = 2^{-\frac{8}{3}} (\sigma)^2, t = 2 \ln \sigma - \frac{8}{3} \ln 2.$$

Тоді отримає натуральну параметризацію кривої:

$$\vec{\rho}(\sigma) = \{2 \ln \sigma - \frac{8}{3} \ln 2, 2^{-\frac{16}{3}} \sigma^4, 2^{-\frac{8}{3}} \sigma^2\}.$$

Знайдемо першу, другу і третю похідні і перевіримо правильність параметризації:

$$\vec{\rho}'_{\sigma} = \left\{ \frac{2}{\sigma}, 2^{-\frac{10}{3}} \sigma^3, 2^{-\frac{5}{3}} \sigma \right\}; \vec{\rho}''_{\sigma} = \left\{ -\frac{2}{\sigma^2}, 2^{-\frac{10}{3}} 3\sigma^2, 2^{-\frac{5}{3}} \right\}; \vec{\rho}'''_{\sigma} = \left\{ \frac{4}{\sigma^3}, 2^{-\frac{7}{3}} 3\sigma, 0 \right\}$$

$$|\vec{\rho}'_{\sigma}, \vec{\rho}''_{\sigma}, \vec{\rho}'''_{\sigma}| = 1.$$

Тепер знайдемо четверту похідну:

$$\vec{\rho}^{IV}_{\sigma} = \left\{ -\frac{12}{\sigma^4}, 2^{-\frac{7}{3}} 3, 0 \right\}.$$

Її можна виразити через першу і другу похідні як

$$\vec{\rho}^{IV}_{\sigma} = -\frac{3}{\sigma^3} \vec{\rho}'_{\sigma} + \frac{3}{\sigma^2} \vec{\rho}''_{\sigma}$$

отже $k_1 = \frac{3}{\sigma^3}$, $k_2 = -\frac{3}{\sigma^2}$, де $\sigma = 2^{\frac{4}{3}} e^{\frac{t}{2}}$.

3.3 1-лінійчасті поверхні в $\mathbb{R}^4$ з пласкою зв'язністю

Будемо розглядати двовимірну лінійчасту поверхню в $\mathbb{R}^4$, що задається радіусом вектором $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$, яка побудована над простою кривою $\vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), \rho_3(u), 0\}$ (де u – афінний натуральний параметр довжини дуги) та має напрямок прямолінійних твірних $\vec{a}(u) = \{a_1(u), a_2(u), a_3(u), 1\}$.

Знайдемо дотичні вектори:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}'_u + v\vec{a}'_u, \quad \vec{r}'_v = \vec{a}.$$

Знайдемо другі похідні

$$\vec{r}''_{uu} = \vec{\rho}''_{uu} + v\vec{a}''_{uu}, \quad \vec{r}''_{uv} = \vec{a}'_u, \quad \vec{r}''_{vv} = \vec{0}.$$

Вектори $\vec{\rho}'(u)$, $\vec{\rho}''(u)$, $\vec{\rho}'''(u)$ утворюють базис простору, в якому розташована крива $\vec{\rho}(u)$, а також вектор $\vec{a}'(u) = \{a'_1(u), a'_2(u), a'_3(u), 0\}$. Тож ми можемо виписати розкладання

$$\vec{a}'_u = \lambda_1(u)\vec{\rho}'(u) + \lambda_2(u)\vec{\rho}''(u) + \lambda_3(u)\vec{\rho}'''(u). \quad (28)$$

В якості базисних трансверсальних векторних полів будемо обирати

$$\xi_1 = \vec{\rho}'', \quad \xi_2 = \vec{\rho}'''.$$

Для того, щоб виписати розкладання Гауса знайдемо зв'язок між векторами $\vec{\rho}'(u)$ та $\vec{r}'(u)$:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}' + v(\lambda_1\vec{\rho}' + \lambda_2\vec{\rho}'' + \lambda_3\vec{\rho}''') = \vec{\rho}'_u + v(\lambda_1\vec{\rho}' + \lambda_2\xi_1 + \lambda_3\xi_2).$$

$$(1 + v\lambda_1)\vec{\rho}'_u = \vec{r}'_u - v(\lambda_2\xi_1 + \lambda_3\xi_2).$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}''_{uv}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}''_{uv} = \vec{a}'_u &= \lambda_1\vec{\rho}' + \lambda_2\vec{\rho}'' + \lambda_3\vec{\rho}''' = \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1} (\vec{r}'_u - v\lambda_2\xi_1 - v\lambda_3\xi_2) + \lambda_2\xi_1 + \lambda_3\xi_2 = \\ &= \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1}\vec{r}'_u + \frac{\lambda_2}{1 + v\lambda_1}\xi_1 + \frac{\lambda_3}{1 + v\lambda_1}\xi_2. \end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad h_{12}^1 = \frac{\lambda_2}{1 + v\lambda_1}, \quad h_{12}^2 = \frac{\lambda_3}{1 + v\lambda_1}.$$

Оскільки u – афінний натуральний параметр довжини дуги для просторової кривої $\vec{\rho}(u) = \{\rho_1(u), \rho_2(u), \rho_3(u), 0\}$, то ми маємо наступну властивість

$$\vec{\rho}^{IV} = -k_1(u)\vec{\rho}' - k_2(u)\vec{\rho}'',$$

де $k_1(u), k_2(u)$ – афінні кривина просторової кривої $\vec{\rho}(u)$.

Оскільки $\vec{a}_u' = \lambda_1(u)\vec{\rho}'(u) + \lambda_2(u)\vec{\rho}''(u) + \lambda_3(u)\vec{\rho}'''(u)$, то маємо

$$\begin{aligned}\vec{a}_{uu}'' &= \lambda_1'\vec{\rho}' + \lambda_1\vec{\rho}'' + \lambda_2'\vec{\rho}'' + \lambda_2\vec{\rho}''' + \lambda_3'\vec{\rho}''' + \lambda_3\vec{\rho}^{IV} = \\ &= \lambda_1'\vec{\rho}' + \lambda_1\vec{\rho}'' + \lambda_2'\vec{\rho}'' + \lambda_2\vec{\rho}''' + \lambda_3'\vec{\rho}''' + \lambda_3(-k_1\vec{\rho}' - k_2\vec{\rho}'') = \\ &= \vec{\rho}'(\lambda_1' - k_1\lambda_3) + \xi_1(\lambda_1 + \lambda_2' - k_2\lambda_3) + \xi_2(\lambda_2 + \lambda_3')\end{aligned}$$

Знайдемо розкладання Гауса для $\vec{r}_{uu}''$:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{uu}'' &= \vec{\rho}_{uu}'' + v\vec{a}_{uu}'' = \vec{\rho}'' + v\vec{\rho}'(\lambda_1' - k_1\lambda_3) + v\xi_1(\lambda_1 + \lambda_2' - k_2\lambda_3) + v\xi_2(\lambda_2 + \lambda_3') = \\ &= \xi_1 + \frac{v}{1 + v\lambda_1}(\lambda_1' - k_1\lambda_3)(\vec{r}_u' - v\lambda_2\xi_1 - v\lambda_3\xi_2) + \\ &+ v\xi_1(\lambda_1 + \lambda_2' - k_2\lambda_3) + v\xi_2(\lambda_2 + \lambda_3') = \frac{v(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1}\vec{r}_u' + \\ &+ \xi_1\left(1 + v\lambda_1 + v\lambda_2' - vk_2\lambda_3 - \frac{v^2\lambda_2(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1}\right) + \\ &+ \xi_2\left(v\lambda_2 + v\lambda_3' - \frac{v^2\lambda_3(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1}\right)\end{aligned}$$

Отже, з цього розкладання маємо наступні афінні компоненти:

$$\Gamma_{11}^1 \frac{v(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$h_{11}^1 = 1 + v\lambda_1 + v\lambda_2' - vk_2\lambda_3 - \frac{v^2\lambda_2(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1},$$

$$h_{11}^2 = v\lambda_2 + v\lambda_3' - \frac{v^2\lambda_3(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1}$$

Оскільки $\vec{r}_{vv}'' = \vec{0}$, то ми маємо наступну зв'язність:

$$\nabla_{e_1}e_1 = \frac{v(\lambda_1' - k_1\lambda_3)}{1 + v\lambda_1}e_1, \quad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{\lambda_1}{1 + v\lambda_1}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_2 = 0.$$

В даному випадку маємо наступне розкладання Вейнгартена:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial u} = \vec{\rho}''' = \xi_2, \quad \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial v} = \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial v} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial u} = \vec{\rho}^{IV} = -k_1(u)\vec{\rho}' - k_2(u)\vec{\rho}'' = \frac{-k_1(u)}{1+v\lambda_1} (\vec{r}'_u - v\lambda_2\xi_1 - v\lambda_3\xi_2) - k_2(u)\xi_1.$$

Оператори Вейнгартена та форми трансверсальної зв'язності мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} S_2(e_1) &= \frac{k_1}{1+v\lambda_1}e_1, \quad S_2(e_2) = 0, \quad S_1 \equiv 0; \\ \tau_1^1(e_1) &= 0, \quad \tau_1^2(e_1) = 1, \quad \tau_\alpha^\beta(e_2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \\ \tau_2^1(e_1) &= \frac{k_1v\lambda_2}{1+v\lambda_1} - k_2, \quad \tau_2^2(e_1) = \frac{k_1v\lambda_3}{1+v\lambda_1}. \end{aligned}$$

В загальному випадку трансверсальний розподіл не є еквафінним.

Підрахуємо тензор кривини:

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 = \\ &= \nabla_{e_1}(0) - \nabla_{e_2}\left(\frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1}e_1\right) = \frac{\lambda_1^2}{(1+v\lambda_1)^2}e_1 - \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1}e_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 = \\ &= \nabla_{e_1}\left(\frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1}e_1\right) - \nabla_{e_2}\left(\frac{v(\lambda'_1 - k_1\lambda_3)}{1+v\lambda_1}e_1\right) = \\ &= \frac{\lambda'_1(1+v\lambda_1) - \lambda_1v\lambda'_1}{(1+v\lambda_1)^2}e_1 + \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1} \cdot \frac{v(\lambda'_1 - k_1\lambda_3)}{1+v\lambda_1}e_1 - \\ &- \frac{(\lambda'_1 - k_1\lambda_3)(1+v\lambda_1) - v(\lambda'_1 - k_1\lambda_3)\lambda_1}{(1+v\lambda_1)^2}e_1 - \frac{v(\lambda'_1 - k_1\lambda_3)}{1+v\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{1+v\lambda_1}e_1 = \\ &= \frac{e_1}{(1+v\lambda - 1)^2}(\lambda'_1 - \lambda'_1 - v\lambda_1\lambda'_1 + k_1\lambda_3 + k_1\lambda_3v\lambda_1 + v\lambda_1\lambda'_1 - vk_1\lambda_3\lambda_1) = \\ &= \frac{k_1\lambda_3}{(1+v\lambda_1)^2}e_1 \end{aligned}$$

Таким чином, тензор кривини може дорівнювати нулю у двох випадках:

- 1) афінна кривина $k_1(u)$ базової кривої дорівнює нулю;
- 2) функція $\lambda_3(u) \equiv 0$ у розкладанні (28).

Очевидно, що в обох випадках трансверсальний розподіл буде задовольняти умові $\tau_1^1 + \tau_2^2 \equiv 0$, що як відомо, є умовою еквафінності трансверсального розподілу.

В першому випадку ($k_1(u) \equiv 0$) оператори Вейнгартена нульові, що означає, що занурення афінно еквівалентно зануренню графіка функції двох змінних [4].

Розглянемо докладніше другий випадок.

3.3.1 Випадок $\lambda_3(u) \equiv 0$

В даному випадку маємо наступні дотичні вектори:

$$\vec{r}'_u = \vec{\rho}'_u(1 + v\lambda_1) + v\lambda_2\xi_1, \quad \vec{r}'_v = \vec{a}.$$

Занурення буде повним регулярним лише у випадку $\lambda_1 \equiv 0$. Ми маємо наступне розкладання для вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}' = \lambda_2(u)\vec{\rho}', \quad \vec{a} = \int \lambda_2(u)\vec{\rho}' du.$$

Отже, ми отримали параметризацію повної регулярної 1-лінійчастої поверхні в $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v \int \lambda(u)\vec{\rho}'(u) du.$$

В даному випадку маємо наступні основні афінні характеристики. Символи Кристофеля та компоненти афінної зв'язності для даної поверхні:

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k; \quad h_{11}^1 = 1 + v\lambda', \quad h_{11}^2 = v\lambda; \quad h_{12}^1 = \lambda, \quad h_{12}^2 = 0; \quad h_{22}^1 = 0, \quad h_{22}^2 = 0.$$

Тобто матриці афінних фундаментальних форм мають наступний вигляд:

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 + v\lambda' & v\lambda \\ v\lambda & 0 \end{pmatrix}; \quad h^2 = \begin{pmatrix} v\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператори Вейнгартена та форми трансверсальної зв'язності мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} S_2(e_1) &= k_1 e_1, \quad S_2(e_2) = 0, \quad S_1 \equiv 0; \\ \tau_1^1(e_1) &= 0, \quad \tau_1^2(e_1) = 1, \quad \tau_\alpha^\beta(e_2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \\ \tau_2^1(e_1) &= k_1 v\lambda - k_2, \quad \tau_2^2(e_1) = 0. \end{aligned}$$

В даному випадку трансверсальний розподіл є еквіафінним.

Висновок

В роботі розглянуто афінні занурення лінійчастих поверхонь, базою яких є пласка або просторова крива, в $\mathbb{R}^3$ та $\mathbb{R}^4$. Базова крива береться в натуральній параметризації, в якості трансверсальних векторних полів лінійчастої поверхні обираються еквіафінні нормалі (та бінормалі) базової кривої. Отримані умови на базову криву та напрямки прямолінійних твірних, які забезпечують пласку зв'язність такої поверхні.

Отримано ще одне підтвердження того факта, що афінне занурення повної регулярної гіперповерхні з пласкою зв'язністю може бути лише графіком або циліндром. Знайдено нерегулярну параметризацію афінного занурення лінійчастої гіперповерхні з заданими властивостями.

Отримано параметризацію занурення повної регулярної лінійчастої поверхні ковимірності два.

З'ясовано, що трансверсальний розподіл з еквіафінних нормалей (та бінормалей) базової кривої для афінного занурення лінійчастої поверхні з пласкою зв'язністю завжди є еквіафінним.

Література

- [1] Magid M. Flat affine surfaces in $\mathbb{R}^4$ with flat normal connection / M. Magid, L. Vrancken // Geometriae Dedicata. – 2000. – № 81. – p. 19-31.
- [2] Nomizu K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge University Press, 1994. – 264 p.
- [3] Nomizu K. On the Geometry of Affine Immersions / K. Nomizu, U. Pinkall // Mathematische Zeitschrift. – 1987. – № 195. – p. 165-178.
- [4] Shugailo O.O. On affine immersions with flat connections / O. O. Shugailo // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – V. 8, № 1. – p. 90-105.