ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 32 Записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества 1966

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Лазебный

Оптическая анизотропия в потоке вязкой жидкости характеризуется следующей зависимостью тензора диэлектрической проницаемости $\check{E}$ от тензора скоростей деформации $\check{V}$ [1]:

$$\check{E} = [\varepsilon_1 + f_1(I_1, I_2, I_3)]\cdot I + f_2(I_1, I_2, I_3)\cdot \check{V} + f_3(I_1 I_2, I_3)\, V^2, \tag{1}$$

где I_1, I_2, I_3 — главные инварианты тензора $\check{V}$, причем для несжимаемой жидкости $I_1 = v_{ii} = 0$.

При рассмотрении оптических явлений в ламинарных потоках можно ограничиться линейным приближением по $\check{V}$ и его компонентам в соотношении (1) [1].

$$\check{E} = \varepsilon_1 I + \lambda \check{V}. \tag{2}$$

Однако, после потери устойчивости и наступления турбулентного режима в зависимости $\check{E}$ от $\check{V}$ необходимо учитывать члены более высоких порядков по $\check{V}$. Так, учитывая члены второго порядка по $\check{V}$, имеем из (1):

$$\check{E} = (\varepsilon_1 + \mu_1 I_2)\cdot I + \mu_2 \check{V} + \mu_3 \check{V}^2 \tag{3}$$

или в компонентах

$$\varepsilon_{ik} = (\varepsilon_1 + \mu_1 I_2)\, \delta_{ik} + \mu_2 v_{ik} + \mu_3 v_{ie} v_{ek}, \tag{4}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — динамооптические постоянные, а $I_2 = v_{ik}\cdot v_{ik}$.

При турбулентном режиме движения жидкости $\check{V}$, а, значит, и $\check{E}$ являются случайными тензорными полями и поэтому при электродинамическом исследовании турбулентных потоков можно построить или усредненную оптическую картину потока, или найти вероятностные характеристики электродинамических и оптических величин.

Построение усредненной оптической картины сводится к нахождению $\bar{\check{E}}$ (черта сверху означает усреднение) и последующему решению уравнений Максвелла с диэлектрическим тензором $\bar{\check{E}}$ при соответствующих граничных условиях.

Для того, чтобы найти $\check{E}$, усредним соотношение (4), тогда

$$\overline{\varepsilon_{ik}} = (\varepsilon_1 = \mu_1 \overline{v_{ik}\cdot v_{ik}})\,\delta_{ik} + \mu_2 \overline{v}_{ik} + \mu_3 \overline{v_{ie}\cdot v_{ek}}.$$

Рассмотрим, как обычно, пульсации скорости

$$v_i = \overline{v}_i + v_i' \; (v_{em} = \overline{v}_{em} + \overline{v}_{em}').$$

Тогда

$$\overline{\varepsilon}_{ik} = (\varepsilon_1 + \mu_1 \overline{v}_{ik}\cdot\overline{v}_{ik} + \mu_1 \overline{v_{ik}'\cdot v_{ik}'})\,\delta_{ik} + $$

$$+ \mu_2 \overline{v}_{ik} + \mu_3 \overline{v}_{ie}\cdot\overline{v}_{lk} + \mu_3 \overline{v_{il}'\cdot v_{lk}'}.$$

Пренебрегая корреляциями производных компонент пульсаций скорости, получим

$$\overline{\varepsilon}_{ik} = (\varepsilon_1 + \mu_1 \overline{v}_{ik}\cdot\overline{v}_{ik})\,\delta_{ik} + \mu_2 \overline{v}_{ik} + \mu_3 \overline{v}_{ie}\cdot\overline{v}_{lk}. \tag{5}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении зависимость $\check{E}$ от $\check{V}$ получается такая же, как и при построении $\check{E}(\check{V})$ по формуле (3).

Для турбулентного куэттовского потока между коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 (с вращающимся внутренним цилиндром, угловая скорость его вращения Ω) выражение для $\check{V}$ имеет вид [2]

$$\check{V} = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r-\beta R_1}} & 0 \\ -\dfrac{\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r-\beta R_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

где α и β — безразмерные эмпирические параметры.

По известному $\check{V}$ находим $\check{\varepsilon}$:

$$\check{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 + \dfrac{\lambda_2\Omega^2 R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)} & -\dfrac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}} & 0 \\ -\dfrac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}} & \varepsilon_1 + \dfrac{\lambda_2\Omega^2 R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

где $\lambda_1 = \mu_2$, $\lambda_2 = \mu_1 + \mu_3$.

При нормальном падении электромагнитной волны на поток (с направлением распространения вдоль оси цилиндров z) система уравнений Максвелла имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2E_r}{dz^2} + \dfrac{\omega}{c^2}\left[\left(\varepsilon_1 + \dfrac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}\right)E_r - \dfrac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}E_\theta\right] = 0 \\ \dfrac{d^2E_\theta}{dz^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\left[-\dfrac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}E_r + \left(\varepsilon_1 + \dfrac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}\right)E_\theta\right] = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Как и в случае ламинарного куэттовского потока [1] введем

$$E^{\pm} = E_\theta \pm \dot{E}_r.$$

Тогда для $E^{\pm}$ уравнения разделяются

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2E^+}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon_1-\frac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}+\frac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}\right]E^+=0\\
&\frac{d^2E^-}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon_1+\frac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}+\frac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}\right]E^-=0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Так как уравнения (7), (8) совпадают по форме с уравнениями для $\vec{E}$ в случае ламинарного куэттовского потока и подробно рассмотрены в работе [1], то можно сразу выписать соответствующие выражения для компонент поля

$$
\begin{aligned}
E_\theta&=\frac{1}{2}e^{i\omega t}\left[C_1^+e^{-ik_1z}+C_2^+e^{ik_1z}+C_1^-e^{-ik_2z}+C_2^-e^{ik_2z}\right]\\
E_r&=\frac{1}{2}e^{i\omega t}\left[C_1^+e^{-ik_1z}+C_2^+e^{ik_1z}-C_1^-e^{-ik_2z}-C_2^-e^{ik_2z}\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
k_1^2&=\frac{\omega^2}{c^2}n_1^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon_1-\frac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}+\frac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}\right];\\
k_2^2&=\frac{\omega^2}{c^2}n_2^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon_1+\frac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}+\frac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}\right];\\
C_1^+&=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}+n_1}-\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\varepsilon_0}-n_1)e^{-ik_1l}}{[\sqrt{\varepsilon_0}+n_1][(\sqrt{\varepsilon_0}-n_1)^2e^{-ik_1l}-(\sqrt{\varepsilon_0}+n_1)^2e^{ik_1l}]};\\
C_2^+&=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\varepsilon_0}-n_1)e^{-ik_1l}}{(\sqrt{\varepsilon_0}-n_1)^2e^{-ik_1l}-(\sqrt{\varepsilon_0}-n_1)^2e^{ik_1l}};\\
C_1^-&=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}+n_2}-\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\varepsilon_0}-n_2)e^{-ik_2l}}{[\sqrt{\varepsilon_0}+n_2][(\sqrt{\varepsilon_0}-n_2)^2e^{-ik_2l}-(\sqrt{\varepsilon_0}+n_2)^2e^{ik_2l}]};\\
C_2^-&=\frac{2\sqrt{\varepsilon_0}(\sqrt{\varepsilon_0}-n_2)e^{-ik_2l}}{(\sqrt{\varepsilon_0}-n_2)^2e^{-ik_2l}-(\sqrt{\varepsilon_0}+n_2)^2e^{ik_2l}};
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Отметим, что, как и в случае ламинарного потока, компоненты поля E_r и E_θ являются суммой двух нормальных волн, каждая из которых характеризуется соответствующей фазовой скоростью

$$
\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1-\dfrac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}+\dfrac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}}}\quad\text{или}\quad\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1+\dfrac{\lambda_1\Omega\sqrt{R_2}}{\alpha\sqrt{r_0-\beta R_1}}+\dfrac{\lambda_2\Omega^2R_2}{\alpha^2(r_0-\beta R_1)}}}
$$

и поляризацией — обе нормальные волны линейно поляризованы. Поле в потоке, как видно из (9) и (10), эллиптически поляризовано в плоскости (r,Θ); поля отраженной и прошедшей поток волн также эллиптически поляризованы.

Явные выражения для угла ориентации осей эллипса поляризации и угла гашения не выписаны ввиду их громоздкости, однако, в первом приближении (при малых $\Lambda_1=\lambda_1\Omega$ и $\Lambda_2=\lambda_2\Omega^2$) выражение для угла гашения согласуется с экспериментальными данными Вейланда для центра зазора.

Рассмотрим теперь кратко возможный способ построения вероятностных характеристик электромагнитного поля. Найдем уравнение для характеристического функционала, который полностью описывает вероятностные свойства электромагнитного поля.

Запишем систему уравнений Максвелла в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} (\overset{\vee}{E}{}^{-1} \cdot \vec{D}), \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \vec{H}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\overset{\vee}{E}{}^{-1} \cdot \vec{D}$ — диадное произведение, а $\overset{\vee}{E}{}^{-1} \cdot \check{E} = I$ (I — единичный тензор).

При турбулентном режиме движения жидкости $\check{E}(\check{V})$ является случайным тензорным полем, поэтому $\vec{D}$ и $\vec{H}$ представляют собой случайные векторные поля. Рассмотрим характеристический функционал шестимерного вектора $\vec{f}(\vec{r}, t) = (H_1, H_2, H_3, D_1, D_2, D_3)$

$$\Phi_t [\vec{g}] = \left\langle \exp [i (\vec{g} \cdot \vec{f})] \right\rangle \tag{12}$$

где $\vec{g}(\vec{r})$ — шестимерный неслучайный вектор, а скалярное произведение $(\vec{g} \cdot \vec{f})$ определяется следующим образом

$$(\vec{g} \cdot \vec{f}) = \int g_i (\vec{r}) f_i (\vec{r}, t) dV = \int g_\alpha (\vec{r}) H_\alpha (\vec{r}, t)\, dV +$$

$$+ \int g_\beta (\vec{r}) D_\beta (\vec{r}, t)\, dV \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1,\ 2,\ 3 \\ \beta = 4,\ 5,\ 6 \end{pmatrix}$$

(скобки $\langle \cdots \rangle$ означают усреднение по фазовому пространству [3] — [6]).

Продифференцировав (12) по t и воспользовавшись уравнениями «движения» (11), получим:

$$\frac{\partial \Phi_t [\vec{g}]}{\partial t} = i c \varepsilon_{kn}^{\beta} \int g_\beta (\vec{r}) \left\langle \frac{\partial H_k}{\partial x_n} \exp [i (\vec{g} \vec{f})] \right\rangle dN -$$

$$- i c \varepsilon_{lm}^{\alpha} \int g_\alpha (\vec{r}) \left\langle \frac{\partial (\varepsilon_{e\gamma}^{-1} D_\gamma)}{\partial x_m} \exp [i (\vec{g} (\vec{f})] \right\rangle dN, \tag{13}$$

где ε_{ik}^{β} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга.

Представим $\check{E}^{-1}$ в виде

$$\check{E}^{-1} = \check{P} = \bar{\check{P}} + \check{P}', \tag{14}$$

где $\check{P}'$ — „пульсационная" часть тензора $\check{E}^{-1}$ (здесь для удобства введено обозначение $\check{E}^{-1} = \check{P}$). В компонентах выражение (14) запишется следующим образом:

$$p_{ik} = \bar{p}_{ik} + p'_{ik} = \bar{p}_{ik} \left(1 + \frac{p'_{ik}}{\bar{p}_{ik}} \right). \tag{15}$$

Предположим, что $\frac{p_{ik}}{\overline{p}_{ik}} \ll 1$ для $i, k = 1, 2, 3$, тогда уравнение (13) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \Phi_t [\vec{g}]}{\partial t} = ic\varepsilon^{\beta}_{kn} \int g_{\beta}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\delta \Phi_t [\vec{g}]}{\delta g_k} \right) dV -$$

$$- ic\varepsilon^{\alpha}_{em} \int g_{\alpha}(\vec{r}) \overline{p}_{e\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\delta \Phi_t [\vec{g}]}{\delta g_{\gamma}} \right) dV -$$

$$- ic\varepsilon^{\alpha}_{em} \int g_{\alpha}(\vec{r}) \frac{\partial \overline{p}_{e\gamma}}{\partial x_m} \frac{\delta \Phi_t [\vec{g}]}{\delta g_{\gamma}} dV. \qquad (16)$$

Уравнение (16) представляет собой аналог Ф-уравнения Хопфа в теории турбулентности [3]. Отметим, что такой подход возможен и при рассмотрении корреляционной теории электромагнитных полей, особенно при нахождении корреляционных моментов высоких порядков, так как по известному характеристическому функционалу можно определить корреляционные моменты любых порядков [7—8].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Герман и А. А. Лазебный. Оптический метод исследования потоков вязкой несжимаемой жидкости. См. статью в настоящем сборнике.
2. W. Squire. Appl. Sci. Res., s. A, v. 10, p. 439, 1961.
3. E. Hopf. I. Ration. Mech. Anal., v. 1, p. 87, 1952.
4. G. Rozen. Phys. of Fluids, v. 3, № 4, 1960 (p. I).
5. G. Rozen. Phys. of Fluids, v. 3, № 4, 1960. (p. II).
6. Новиков. ЖЭТФ, т. 47, в. 5, 1964 г.
7. P. Roman, E. Wolf. Nuovo Cimento, v. XVII, № 4, p. I, 1960.
8. P. Roman, E. Wolf. Nuovo Cimento, v. XVII, № 4, p. II, 1960.