

В. Я. ВИНАРСКИЙ

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РАЗМЕЩЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

При решении ряда задач оптимизации планировки технологического оборудования, проектирования многогнездных литейных пресс-форм, раскрое монокристаллов ювелирного корунда широко пользуются методом геометрического проектирования [1]. Интересным и плодотворным направлением геометрического проектирования является так называемое регулярное размещение геометрических объектов [2], в частности — периодическое размещение объектов в ортогональных областях плоскости [3].

Несмотря на многочисленные работы по периодическому размещению плоских объектов, остается малоисследованным вопрос периодического размещения пространственных тел [4]. В данной статье описан метод оптимального (плотнейшего) двухрядного периодического размещения набора трехмерных многогранников произвольной конфигурации в неограниченном параллелепипеде евклидова пространства R^3 .

Осуществим математическую постановку оптимизационной задачи многорядного периодического размещения.

Пусть имеется конечный набор $\{T_i\}_{i=\overline{1,n}}$ компактных многогранных тел $T_i \subset R^3$. Следуя терминологии работы [5], под n -рядным периодическим размещением набора $\{T_i\}_{i=\overline{1,n}}$ в области $\Omega \subset R^3$ с ортогональным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ будем понимать систему

$$\Lambda = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k e_k \mid \forall k j_k \in \{0, \pm 1, \dots\}, \right. \\ \left. \left(\bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k e_k \right) \subset \Omega \right\},$$

для которой выполнены условия взаимного непересечения

$$\forall j_k^1 \neq j_k^2 \text{ int} \left(\bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k^1 e_k \right) \cap \text{int} \left(\bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k^2 e_k \right) = \emptyset, \\ \forall i_1 \neq i_2 \text{ int}(T_{i_1} + r_{i_1}) \cap \text{int}(T_{i_2} + r_{i_2}) = \emptyset$$

и условия рядности

$$\exists k_1 \in \{1, 2, 3\} \|e_{k_1}\| \geq H \bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i)(e_{k_1}),$$

где $\text{int } \bar{T}$ — внутренняя часть тела $\bar{T}$, «+» — символ операции трансляции [6], $\|\cdot\|$ — евклидова норма пространства R^3 , $H_T(e)$ — функция ширины [6] тела T в направлении вектора e , $r_i \in R^3$ — параметры размещения [2] тел T_i .

Основная оптимизационная задача многорядного периодического размещения набора $\{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ трехмерных многогранников T_i в области $\Omega \subset R^3$ имеет следующую постановку.

Для заданного набора $\{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ многогранных тел $T_i \subset R^3$ и области $\Omega \subset R^3$ необходимо найти параметры размещения $\{r_1, \dots, r_n\}$, $r_i \in R^3$, и ортогональный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ многорядного периодического размещения

$$\Lambda = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k e_k \right\}$$

набора $\{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ тел в области Ω , доставляющие максимум коэффициенту заполнения $k_\Lambda(\{r_i\}_{i=1, \dots, n}, e_1, e_2, e_3)$. Иными словами, необходимо решить оптимизационную задачу

$$k_\Lambda(r_1, \dots, r_n, e_1, e_2, e_3) \xrightarrow{(\{r_i\}_{i=1, \dots, n}, e_1, e_2, e_3) \in D} \max, \quad (1)$$

где $D = \{(r_1, \dots, r_n, e_1, e_2, e_3) \in R^{3n+3} | \forall j_k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}\}$

$$\left(\bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k e_k \subset \Omega, \forall j_k \neq j_k^* \text{ int } \left(\bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k^* e_k \right) \cap \text{int } \left(\bigcup_{i=1}^n (T_i + r_i) + \sum_{k=1}^3 j_k e_k \right) = \emptyset, \forall i_1 \neq i_2, \right.$$

$$\text{int } (T_{i_1} + r_{i_1}) \cap \text{int } (T_{i_2} + r_{i_2}) = \emptyset, \exists k_1 \in \{1, 2, 3\} \|e_{k_1}\| \geq$$

$$\geq H \prod_{i=1}^n (e_{k_1}) \} - \text{область допустимых решений оптимизационной задачи (1).}$$

Рассмотрим далее аналитическую модель и метод решения оптимизационной задачи (1) для случая двухрядного размещения набора $\{T_1, T_2\}$ многогранников пространства R^3 в неограниченном параллелепипеде $\Pi = \Omega = [0, l_x] \times R^1 \times [0, l_z]$ заданных размеров l_x, l_z .

Функцию цели k_Λ этой задачи представим в виде

$$k_\Lambda(r, e_1, e_2, e_3) = n_{e_1}(r) n_{e_3}(r) (V(T_1) + V(T_2)) V_0^{-1},$$

где $v_0 = l_x l_z t(r)$ — объем основного параллелепипеда [5]; $t(r) = \|e_2\|$ — период размещения по оси OY ; $V(T)$ — объем тела T ; $n_{e_i}(r)$ — количество слоев размещения по направлению вектора e_i . При этом

$$n_{e_1}(r) = [l_x H_{T_1 \cup T_2}^{-1}(r)(e_1)] = [l_x (\max(x_1, x_2) + x) -$$

$$- \min (x^1, x^2 + x)^{-1} = [l_x (k_x^1 x + k_x^2)^{-1}];$$

$$n_{e_3}(r) = [l_x H_{T_1 \cup T_2(r)}^{-1}(e_3)] = [l_z \max(\bar{z}^1, \bar{z}^2, + z) - \\ - \min(\bar{z}^1, \bar{z}^2 + z)^{-1}] = [l_z (k_z^1 z + k_z^2)^{-1}];$$

$$t(r) = f_{T_1 \cup T_2(r)}(e_2) = \max \{ \max(f_{T_1}(e_2), f_{T_2}(e_2));$$

$$\max(f_{T_1, T_2(r)}(e_2), f_{T_2(r), T_1}(e_2)) \} = s_x x + s_y y + s_z z + s_0,$$

где $r = (x, y, z)$, $[\cdot]$ — целая часть выражения в квадратных скобках; $\bar{x}^i = \max \Pr_{e_1} T_i$; $x^i = \min \Pr_{e_1} T_i$; $\bar{z}^i = \max \Pr_{e_3} T_i$;

$\bar{z}^i = \min \Pr_{e_3} T_i$, $i = 1, 2$; $\Pr_{e_i}$ — ортопроектор на подпространство $\{e_i\}$, порожденное базисным вектором e_i , $f_{T_1, T_2(e)} = \min \{ \lambda | \text{int } T_1 \cap \text{int } (T_2 + \lambda \|e\|^{-1} e = \emptyset) \}$ — функция плотного размещения [2] тела T_2 относительно T_1 , $f_{T_1}(e) = f_{T_1, T_1}(e)$, (k_x^1, k_x^2) ,

(k_z^1, k_z^2) , (s_x, s_e, s_z, s_0) — кусочно-постоянные коэффициенты [4].

Учитывая приведенные выше формулы, запишем аналитическую модель рассматриваемой оптимизационной задачи

$$[l_x (k_x^1 x + k_x^2)^{-1}]^{-1} [l_z (k_z^1 z + k_z^2)^{-1}]^{-1} (s_x x + s_y y + s_z z + s_0) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Анализ оптимизационной задачи (2) позволяет сделать следующие выводы.

1. Задача (2) имеет кусочно-линейную функцию цели, терпящую разрывы либо на поверхности $\gamma = \text{Fr}(T_1 \oplus T_2)$, либо на областях вида

$$D_{ij} = \{(x, y, z) | [l_x (k_x^1 x + k_x^2)^{-1}] = i\} \vee \{l_z (k_z^1 z + k_z^2)^{-1} = j\}, \\ i = 1, 2, \dots, [l_x \rho^{-1}(0, \gamma)], j = 1, 2, \dots, [l_z \rho^{-1}(0, \gamma)]\}, \quad (3)$$

где $\text{Fr}T$ — топологическая граница множества T ; « $\oplus$ » — символ сложения Минковского [6]; $\rho(\cdot)$ — евклидова метрика в R^3 .

2. Задача (2) многоэкстремальна, количество локальных экстремумов определяется количеством граней поверхности γ и количеством плоскостей разрывности выражений $[l_x(\cdot)]$, $[l_z(\cdot)]$, $(s_x x + s_y y + s_z z + s_0)$.

3. В силу кусочной линейности функции цели глобальный минимум достигается на вершинах многоугольников, образованных пересечением граней поверхности γ с плоскостями разрывности коэффициентов (k_x^1, k_x^2) , (k_z^1, k_z^2) , (s_x, s_y, s_z, s_0) .

4. Решение задачи (2) сводится к формированию множества $\bigcup_{ij} \text{Fr } D_{ij}$ крайних точек областей постоянства $(D_{ij} \cap \gamma)$ функции цели в соответствии с (3) и решению дискретной оптимизационной задачи (2) на найденном множестве.

Список литературы: 1. Стоян Ю. Г., Винарский В. Я. Некорректные задачи геометрического проектирования // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1964. — № 4. — С. 135—137. 2. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов. — К.: Наук. думка, 1975. — 240 с. 3. Стоян Ю. Г., Панасенко А. А. Периодическое размещение геометрических объектов. — К.: Наук. думка, 1978. — 176 с. 4. Винарский В. Я. Периодическое размещение трехмерных геометрических объектов. — Х., 1984. — 36 с. Деп. в ВИНТИ, № 4571. 5. Роджерс К. Укладка и покрытия. — М.: Мир, 1968. — 134 с. 6. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966. — 416 с.

Поступила в редколлегию 25.10.85

УДК 517.9:538.566.2

А. И. БОЛТОНОСОВ, В. Г. СОЛОГУБ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА ДВУХ ЛЕНТАХ

Введение

В настоящей работе для задачи рассеяния волн на двух идеально проводящих лентах, лежащих в одной плоскости, получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции, с точностью до множителя совпадающей с плотностью поверхностного тока на лентах. Для ядра интегрального уравнения получено представление, которое делает уравнение удобным при численном исследовании задачи рассеяния. Соответствующий уравнению интегральный оператор вполне непрерывен в некотором функциональном пространстве и в длинноволновом случае имеет «малую» норму, что позволяет применить для решения уравнения метод последовательных приближений. С использованием этого метода получены главные члены асимптотического длинноволнового разложения для диаграммы направленности и поперечного сечения рассеяния, а также для плотности поверхностного тока.

В п. 1 рассматривается метод регуляризации уравнения первого рода, заданного на двух конечных интервалах вещественной оси. Исследуемое уравнение является типичным для задач рассеяния волн плоскими экранами (в электромагнитном случае — для H -поляризованных волн, в скалярном — для задачи Неймана). Метод регуляризации основан на решении краевой задачи Римана-Гильберта для функций, аналитических вне контура $\mathcal{L}$, представляющего собой объединение двух отрезков вещественной оси, с суммой предельных значений на контуре из пространства $L_{q_0}(\mathcal{L})$ при $1 < q_0 < 2$.

В результате регуляризации получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода на всей оси, определяющее вполне непрерывный оператор в $L_p(-\infty, \infty)$, $p \geq 1$. Доказаны существование и единственность его решения при любых допустимых

параметрах задачи и выяснено, при каких правых частях уравнения (1) это имеет место.

Следует отметить, что впервые такой подход был использован при решении уравнения первого рода в работе [1], в том случае, когда контур $\mathcal{L}$ состоит из одного конечного интервала.

Результаты п. 1 применяются в п. 2 при исследовании задачи рассеяния плоской H -поляризованной электромагнитной волны на двух лентах различной ширины, лежащих в одной плоскости. В работе [2] с помощью аналогичного подхода рассматривалась задача о рассеянии волн одной лентой, в [3] — двумя лентами одинаковой ширины, в [4] — системой лент, расположенных в одной плоскости и имеющих плоскость симметрии. Результаты исследований, проведенных нами, являются продолжением и обобщением результатов перечисленных выше работ.

1. О регуляризации одного интегродифференциального уравнения первого рода

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение первого рода

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{\mathcal{L}} \rho(s) H_0^{(1)}(k \sqrt{(x-s)^2 + y^2}) ds = f(x), x \in \mathcal{L}, \quad (1)$$

в котором контур интегрирования состоит из двух отрезков вещественной оси: $\mathcal{L} = (-b, -a) \cup (a, 1)$, $0 \leq a \leq b \leq 1$; $H_0^{(1)}(s)$ — функция Ханкеля первого рода; k — вещественный параметр, $k > 0$; $f(x)$ — заданная на $\mathcal{L}$ функция, свойства которой будут указаны ниже. Решение уравнения (1) будем искать в классе непрерывных функций, имеющих производные, принадлежащие пространству $L_{q_0}(\mathcal{L})$ при некотором $1 < q_0 < 2$. В этом случае преобразование Фурье функции $\rho(s)$, продолженной нулем вне контура $\mathcal{L}$:

$$X(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \rho(s) e^{-i\mu s} ds$$

является целой функцией экспоненциального типа, принадлежит пространству $L_1(-\infty, \infty)$, а следовательно, и любому $L_p(-\infty, \infty)$ при $p > 1$. Кроме того, функция $Y(\mu) = \mu X(\mu)$ принадлежит пространству $L_p(-\infty, \infty)$ при любом $p \geq p_0 = q_0/(q_0 - 1) > 2$.

Используя равенство Парсеваля и определение функции $X(\mu)$, из (1) получим относительно $X(\mu)$ систему парных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) \sqrt{k^2 - \mu^2} e^{i\mu \xi} d\mu = -\frac{1}{2} f(\xi), \xi \in \mathcal{L};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) e^{i\mu \xi} d\mu = 0, \xi \in \bar{\mathcal{L}}, \quad (2)$$

эквивалентную уравнению (1). Под $\sqrt{k^2 - \mu^2}$ в системе (2) понимается аналитическая ветвь функции $\sqrt{k^2 - \mu^2}$, для которой $\text{Im}(\sqrt{k^2 - \mu^2}) > 0$ при $|\mu| \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси. Покажем, что эта система имеет единственное решение в классе функций $X(\mu)$ таких, что $X(\mu) \in L_p(-\infty, \infty)$ при всех $p \geq 1$, а $\mu X(\mu) \in L_{p_0}(-\infty, \infty)$ при $p_0 > 2$. Действительно, пусть $\tilde{X}(\mu)$ — решение соответствующей однородной системы из этого класса. Замечая, что функция $\tilde{X}(\mu) \cdot \sqrt{k^2 - \mu^2} \in L_{p_0} \times \times(-\infty, \infty)$, и, записывая равенство Парсеваля для $\tilde{X}(\mu)$ и $\tilde{X}(\mu) \sqrt{k^2 - \mu^2}$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(\mu)|^2 V \sqrt{k^2 - \mu^2} d\mu = 0,$$

откуда следует, что $\tilde{X}(\mu) \equiv 0$.

Для того, чтобы свести задачу решения системы парных уравнений (2) к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, перепишем ее относительно функции $Y(\mu)$ в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} e^{i\mu\xi} d\mu = F(\xi), \quad \xi \in \mathcal{L}; \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\mu) e^{i\mu\xi} d\mu = 0, \quad \xi \in \bar{\mathcal{L}},$$

где

$$F(\xi) = \frac{i}{2} f(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) \varepsilon(\mu) e^{i\mu\xi} d\mu,$$

$\varepsilon(\mu) = |\mu| + i \sqrt{k^2 - \mu^2}$. Очевидно, что $\varepsilon(\mu) = O(|\mu|^{-1})$ при $|\mu| \rightarrow \infty$.

Система (3) будет эквивалентна уравнениям системы (2), если потребовать, чтобы функция $Y(\mu)$ удовлетворяла условиям

$$Y(0) = 0; \quad (4); \quad \int_{-\infty}^{\infty} Y(\mu) \frac{d\mu}{\mu} = 0, \quad (5)$$

первое из которых следует из свойств функции $X(\mu)$, а второе — из второго уравнения системы (2).

Ясно, что задача отыскания решения уравнения (1) эквивалентна задаче определения функции $Y(\mu)$ из пространства

$L_{p_0}(-\infty, \infty)$ при $p_0 > 2$, удовлетворяющей парной системе интегральных уравнений (3) и условиям (4), (5). Покажем, что последняя задача однозначно разрешима в указанном классе функций, если $F(\xi) \in L_{q_0}(\mathcal{L})$. Для доказательства этого утверждения предположим, что у функции $Y(\mu)$ существует преобразование Фурье из класса $L_{p'}(-\infty, \infty)$ при некотором $1 < p' < 2$, и введем в рассмотрение две вспомогательные функции

$$\tilde{Y}^+(t) = \int_0^\infty Y(\mu) e^{i\mu t} d\mu, \quad \tilde{Y}^-(t) = - \int_{-\infty}^0 Y(\mu) e^{i\mu t} d\mu.$$

Они являются аналитическими функциями от t в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, убывающими на бесконечности в областях их аналитичности. Из второго уравнения системы (3) следует, что функция

$$\tilde{Y}(t) = \begin{cases} \tilde{Y}^+(t), & \text{Im } t > 0; \\ \tilde{Y}^-(t), & \text{Im } t < 0 \end{cases}$$

является аналитической функцией от t всюду вне контура $\mathcal{L}$, убывающей на бесконечности и принадлежащей пространству $L_{p'}(-\infty, \infty)$, $1 < p' < 2$. Сумма предельных значений функции $\tilde{y}(t)$ из верхней и нижней полуплоскостей на контуре $\mathcal{L}$ равна заданной функции: $\tilde{Y}^+(t) + \tilde{Y}^-(t) = F(t)$, что следует из первого уравнения системы (3).

Таким образом, задача определения функции $Y(\mu) \in L_{p_0}(-\infty, \infty)$, $p_0 > 2$, удовлетворяющей парной системе уравнений (3), сведена к задаче Римана—Гильберта о нахождении аналитической всюду вне контура $\mathcal{L}$, убывающей на бесконечности функции $\tilde{Y}(t) \in L_{p'}(-\infty, \infty)$, $1 < p' < 2$, по заданной сумме ее предельных значений на этом контуре из верхней и нижней полуплоскостей, принадлежащей пространству $L_q(\mathcal{L})$, при любом $1 < q \leq q_0$. Известно, что общее решение этой задачи имеет вид [5]:

$$\tilde{Y}(t) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{R(t)}} \int_{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{R(\tau)} F(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{C_1 t + C_0}{\sqrt{R(t)}},$$

где C_0, C_1 — константы; $R(t) = (t+b)(t^2-a^2)(t-1)$, а для функции $\sqrt{R(t)}$ выбирается ветвь, для которой в разрезанной вдоль $\mathcal{L}$ плоскости верно разложение: $\sqrt{R(t)} = t^2 + o(t^2)$ при $|t| \rightarrow \infty$, интегрирование ведется по верхнему берегу раз-

реза. Учитывая предельные при $t \rightarrow \xi \in \mathcal{L}$ свойства функции $\sqrt{R(t)}$, мы получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\mu) e^{i\mu\xi} d\mu = \frac{1}{\pi i \sqrt{R(\xi)}} \int_{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{R(\tau)} F(\tau)}{\tau - \xi} d\tau + 2 \frac{C_1 \xi + C_0}{\sqrt{R(\xi)}}, \quad \xi \in \mathcal{L}. \quad (6)$$

Правая часть этого соотношения принадлежит пространствам $L_q(\mathcal{L})$, $1 < q \leq q_0$, и так как функция $Y(\mu)$ удовлетворяет (6) и второму уравнению системы (3), то $Y(\mu) \in L_p(-\infty; \infty)$ при $p \geq q_0/(q_0 - 1)$ и может быть определена с помощью следующего выражения:

$$Y(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\nu) W_{\mu}^{\nu} d\nu + \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{C_0 + C_1 \xi}{\sqrt{R(\xi)}} e^{-i\mu\xi} d\xi, \quad (7)$$

где

$$\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} F(\xi) e^{-i\mu\xi} d\xi;$$

$$W_{\mu}^{\nu} = -\frac{1}{2\pi^2 i} \int_{\mathcal{L}} \frac{e^{-i\mu\xi}}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi \int_{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{R(\tau)} e^{i\nu\tau}}{\tau - \xi} d\tau.$$

Остается определить константы C_0 и C_1 , для чего необходимо использовать условия (4), (5). Первое из них, очевидно, дает $C_1 = 0$, а второе — выражение для C_0 . Подставив его в (7) и вернувшись к функции $X(\mu)$, после простых преобразований получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции

$$X(\mu) - \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \varepsilon(\nu) U_{\mu}^{\nu} d\nu = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) U_{\mu}^{\nu} d\nu, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad (8)$$

в котором

$$U_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{\mu} W_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{2\mu\nu} S(\mu) \left\{ \frac{p_3}{2} S^{(I)}(-\nu) + S^{(II)}(-\nu) - E \cdot S(-\nu) \right\};$$

$$S(\mu) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{e^{-i\mu\xi}}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi; \quad G(\mu) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{e^{-i\mu\xi}}{\sqrt{|R(\xi)|}} d\xi, \quad (9)$$

$$E = \left\{ \frac{p_3}{2} G^{(I)}(0) + G^{(II)}(0) \right\} / G(0);$$

p_m — коэффициенты полинома $R(i\xi)$, а функция $\tilde{f}(\nu)$ — преобразование Фурье функции $f(\xi)$, продолженной нулем вне контура $\mathcal{L}$:

$$\tilde{f}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} f(\xi) e^{-i\nu\xi} d\xi.$$

Ясно, что интегральное уравнение (8) эквивалентно системе парных уравнений (2), а соответствующий ему интегральный оператор является вполне непрерывным в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ при любом $p \geq 1$ (очевидно, что правая часть уравнения (8) принадлежит этим пространствам), поэтому из доказанной для системы (2) теоремы единственности следует разрешимость нашей задачи в пространствах $L_p(-\infty, \infty)$ при $\forall p \geq 1$.

Таким образом доказано утверждение: Если функция $f(x) \in L_{q_0}(\mathcal{L})$, $1 < q_0 < 2$, то существует единственное решение парной системы уравнений (2), принадлежащее пространству $L_p(-\infty, \infty)$, при $\forall p \geq 1$, которое может быть найдено как решение интегрального уравнения (8). Функция $\rho(s)$, построенная по этому решению с помощью формулы

$$\rho(s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) e^{i\mu s} d\mu, \quad s \in \mathcal{L},$$

является решением уравнения (1), а ее производная принадлежит пространству $L_{q_0}(\mathcal{L})$.

Итак, мы свели задачу определения решения уравнения (1) к задаче определения решения уравнения Фредгольма второго рода (8), которое, как было показано, имеет единственное решение при любых значениях параметра k и всегда может быть получено с помощью численных методов. Остановимся более подробно на свойствах функции U_{μ}^{ν} , определяющей ядро и правую часть уравнения (8), с целью получения такого ее представления, которое было бы удобно при численном решении этого уравнения.

Отметим сначала некоторые свойства функции $S(\mu)$, определенной равенством (9): являясь аналитической функцией экспоненциального типа, она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$S^{(IV)}(\mu) + \sum_{m=0}^3 \left\{ p_m + \frac{m+1}{2\mu} p_{m+1} \right\} S^{(m)}(\mu) = 0$$

и обращается в нуль при $\mu=0$. Разложение $S(\mu)$ в степенной ряд имеет вид

$$S(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^{k-1} s_{k-1}}{k!} \mu^k,$$

где s_k — коэффициенты разложения функции $\xi^2/\sqrt{R(\xi)}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Учитывая определение функции W_μ^ν и перечисленные свойства $S(\mu)$, можно показать, что для W_μ^ν верно представление

$$W_\mu^\nu = \frac{1}{2(\nu - \mu)} \left\{ \sum_{m=2}^4 p_m \sum_{k=0}^{m-2} \left(k + 1 - \frac{m}{2} \right) S^{(k)}(\mu) S^{(m-2-k)}(-\nu) + \right. \\ \left. + \mu \sum_{m=1}^4 p_m \sum_{k=0}^{m-1} S^{(k)}(\mu) S^{(m-1-k)}(-\nu) \right\}.$$

Таким образом, удалось выразить функцию U_μ^ν через функцию $S(\mu)$ и ее производные, что позволяет свести вычисление ядра уравнения (2) к вычислению $S(\mu)$, которое может быть выполнено или с помощью указанного разложения в ряд или по квадратурным формулам Гаусса наивысшей алгебраической степени точности.

В том случае, когда контур $\mathcal{L}$ состоит из двух отрезков равной длины ($b=1$), функция U_μ^ν совпадает с соответствующей функцией, приведенной в работе [3]. Когда же контур $\mathcal{L}$ сводится к одному отрезку ($a=0$), функция U_μ^ν принимает следующий вид:

$$U_\mu^\nu = -\frac{l}{2} e^{id(\nu-\mu)} \{J_0(l\mu) J_1(l\nu) - J_0(l\nu) J_1(l\mu)\} / (\mu - \nu),$$

где $l = (1+b)/2$, $d = (1-b)/2$; $J_0(\mu)$ и $J_1(\mu)$ — функции Бесселя. Это выражение при $b=1$ совпадает с функцией V_μ^ν в работе [2].

Наконец, отметим еще одно интересное свойство функции U_μ^ν : пусть функция $\bar{U}_\mu^\nu$ определяется контуром $\mathcal{L}$, а функция U_μ^ν — контуром $\mathcal{L}$, и пусть контур $\mathcal{L}$ переводится в контур $\mathcal{L}$ с помощью линейного преобразования $\xi = \sigma\xi + D$, тогда функции $\bar{U}_\mu^\nu$ и U_μ^ν связаны друг с другом следующим соотношением:

$$\bar{U}_\mu^\nu = \sigma^2 e^{-iD(\mu-\nu)} U_\mu^\nu.$$

2. Рассеяние плоской волны на двух лентах. Длинноволновое приближение

В качестве применения изложенной теории рассмотрим задачу о рассеянии плоской волны на двух идеально проводящих бесконечных лентах. Пусть система координат (x, y, z) выбрана таким образом, что ленты лежат в плоскости $y=0$ и их ребра параллельны оси z , а в плоскости $z=0$ ленты определяются отрезками $(-m, -n)$ и (n, l) , причем $0 \leq n \leq m \leq l$.

Перейдем в нормированную систему координат $\xi = x/L, \eta = y/L, \zeta = z/L$, в которой ленты определяются отрезками $\mathcal{L}_1 = (-c, -a)$ и $\mathcal{L}_2 = (a, b)$, где $c = m/L, b = l/L, a = n/L, L = (l+m)/2, \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Падающая плоская волна имеет единственную отличную от нуля составляющую магнитного поля $H_\zeta^0(\xi, \eta) = e^{i\kappa(a\xi + \beta\eta) - i\omega t}$, где $\alpha = \sin \psi; \beta = \cos \psi; \psi$ — угол, определяющий направление распространения плоской волны и отсчитываемый от положительного направления оси η по ходу часовой стрелки; $\kappa = kL; k = \omega/c; \omega$ — круговая частота; c — скорость света. Как известно, в этом случае рассеянное поле можно представить в виде

$$H_\zeta^s(\xi, \eta) = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\mathcal{L}} \rho(\xi') H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{(\xi - \xi')^2 + \eta^2}) d\xi',$$

где неизвестная функция $\rho(\xi)$ является плотностью поверхностного тока на лентах. Условия равенства нулю на лентах тангенциальных компонент электрического поля приводят нас к уравнению (1), в котором необходимо заменить параметр k на κ , а функция $f(\xi)$ имеет вид $f(\xi) = \kappa \beta e^{i\alpha \xi}$. Очевидно, что все условия п. 1 выполняются, поэтому решение задачи рассеяния сводится к решению интегрального уравнения (8). Интеграл в правой части уравнения (8) при данной функции $f(\xi)$ вычисляется в явном виде, поэтому окончательно уравнение (8) принимает вид

$$X(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \varepsilon(\nu) U_\mu^\nu d\nu - i\kappa \beta U_\mu^{\alpha\kappa}, \quad -\infty < \mu < \infty. \quad (10)$$

Отметим, что для выполнения условия на ребре функция $X(\mu)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mu)|^2 \sqrt{\kappa^2 - \mu^2} d\mu < \infty,$$

которое, поскольку $X(\mu) \in L_1(-\infty, \infty)$, очевидно имеет место. Будем искать решение уравнения (10) в пространстве

$D(-\infty, \infty)$ бесконечно дифференцируемых на вещественной оси функций с нормой

$$\|X\|_D = \sup_{-\infty < \mu < \infty} \{(|\mu| + 1)|X(\mu)|\},$$

при этом мы, очевидно, не выйдем из допустимого класса решений, так как из уравнения (10) следует, что при $|\mu| \rightarrow \infty$ $X(\mu) = O(\mu^{-3/2})$.

Можно показать, что интегральный оператор K , соответствующий уравнению (10), как оператор, действующий из $D(-\infty, \infty)$ в $D(-\infty, \infty)$, вполне непрерывен, причем имеет место оценка $\|K\| < \text{const} \cdot \kappa^{3/2}$. Отсюда следует, что в случае малости параметра κ , т. е. когда ширина каждой ленты и расстояние между ними малы по сравнению с длиной волны, уравнение (10) может быть решено методом последовательных приближений. Энергетические характеристики рассеянного поля, диаграмма направленности $P(\varphi)$ и поперечное сечение рассеяния Q , выражаются через функцию $X(\mu)$ без дополнительных квадратур:

$$P(\varphi) = \pi L \kappa \cos^2 \varphi |X(\kappa \sin \varphi)|^2; \quad Q = 2\pi L \beta \operatorname{Re} X(\kappa \alpha),$$

поэтому, в условиях применимости метода последовательных приближений, получим для них с точностью $O(\kappa^4)$ выражения:

$$P(\varphi) = \frac{\pi}{4} L \kappa^3 \beta^2 \cos^2 \varphi \cdot I^2, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad Q = \frac{\pi^2}{4} L \kappa^3 \beta^2 I^2,$$

где $I = d_1 d_2 - (h_1^2 + h_2^2)/2 - E$; $h_1 = (c - a)/2$; $h_2 = (b - a)/2$

$$d_1 = -(c + a)/2; \quad d_2 = (b + a)/2.$$

Отметим, что из этих выражений получаются соответствующие главные члены длинноволновых асимптотических разложений для случаев рассеяния на двух лентах одинаковой ширины ($m=l$) и на одной ленте ($n=0$). Так, для одной ленты $\mathcal{L} = (-m, l)$, для поперечного сечения рассеяния из предыдущей формулы получим

$$Q = \frac{\pi^2}{256} L \kappa^3 \beta^2 (b + c)^4.$$

Это выражение при $m=l$ совпадает с классическим приближением [6].

Для плотности поверхностного тока $\rho(\xi)$ с точностью $O(\kappa^2)$ имеем при $\xi \in \mathcal{L}_j$, $j = 1, 2$

$$\rho(\xi) = 4i\kappa\beta \int_{\mathcal{L}_j, \xi} \frac{\xi^2 - (d_1 + d_2)\xi + E}{V[R(\xi)]} d\xi, \quad (11)$$

где контуры интегрирования $\mathcal{L}_{j,\xi}$, $j=1, 2$ определяются следующим образом: $\mathcal{L}_{1,\xi} = (\xi, -a)$, $\mathcal{L}_{2,\xi} = (a, \xi)$. Известно, что в случае H -поляризации плотность поверхностного тока при приближении к ребру ленты должна стремиться к нулю как корень квадратный из расстояния до ребра. В соответствии с этим общим фактом, выражение (11), например при $\xi \rightarrow -a$, дает нам

$$\rho(\xi) = 2i\kappa\beta \sqrt{\frac{\xi+a}{\xi-a}} \left\{ E - \xi \left(\sqrt{\frac{\xi+c}{b-\xi}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+c}} \right) \right\} + o(\sqrt{\xi+a}).$$

Встречающиеся в представлении функции U_μ^ν и в некоторых последующих выражениях значения функции $G(\mu)$ и ее первой и второй производных в нуле простым образом выражаются через эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

Как уже отмечалось, в том случае, когда метод последовательных приближений неприменим, интегральное уравнение (10) может эффективно решаться численными методами.

Данный способ исследования задач рассеяния непосредственно распространяется, во-первых, на задачи с другим способом возбуждения, а во-вторых, на задачи с большим количеством лент, например, на задачу о рассеянии волн на двух парах лент, лежащих в разных плоскостях, необязательно параллельных. В последнем случае исследование сводится к решению системы из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Список литературы: 1. Сологуб В. Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования//Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1971. — 11, № 4. — С. 837—854. 2. Борзенков А. В., Сологуб В. Г. Об одном методе численного исследования задачи о дифракции на полосе//Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика. — 1982. — № 113, вып. 39. — С. 73—84. 3. Борзенков А. В., Сологуб В. Г. Исследование задач о дифракции на двух параллельных лентах с помощью интегрального уравнения Фредгольма//VI Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн, Ереван, 1973. — Т. 1. С. 413—417. 4. Сологуб В. Г. Об одном методе исследования задачи о дифракции на конечном числе лент, расположенных в одной плоскости//Докл. АН УССР. — 1975. — № 6. — С. 550—554. 5. Хведелидзе Б. В. О линейных сингулярных интегральных уравнениях с особым ядром Коши//Докл. АН СССР. — 1951. — 76, № 3. — С. 367—370. 6. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 428 с.

Поступила в редколлегию 15.06.85

Л. Н. ПОЛТАВСКИЙ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ
СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ

В линейных нестационарных задачах гидродинамики приходится рассматривать уравнение типа Абеля и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений их аппроксимирующие. Получена асимптотика решений этих бесконечных систем и указаны связи с соответствующими задачами гидродинамики.

§ 1. Асимптотика решений бесконечных систем
специального вида

Рассмотрим систему

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k^* \lambda_{n-k} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Будем предполагать, что последовательность $\{\lambda_n\}$ монотонно $\rightarrow 0$ и выпукла, $\lambda_n > 0$; величины λ_k^* — неизвестные.

Функция $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$ будет аналитической при $|z| < 1$.

Функцию $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^* z^k$ будем называть сопряженной к функции $F(z)$, если она удовлетворяет уравнению

$$G(z) F(z) = \frac{1}{1-z}. \quad (2)$$

Очевидно, что задачи (1) и (2) эквивалентны. Докажем, что функция $G(z)$ будет аналитической при $|z| < 1$.

Действительно, из (2) следует $(1-z)G(z)F(z) = 1$. Приравняв коэффициенты в тейлоровских разложениях левой и правой частях, получим

$$\begin{cases} \lambda_0 \lambda_0^* = 1 \\ \lambda_n^* \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \Delta \lambda_i \lambda_{n-i}^* = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3)$$

где $\Delta \lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$. Из (3) следует, что $\lambda_i^* > 0 \forall i$. Также просто доказывается, что $\lambda_i^* < \lambda_0 \forall i \geq 1$. Отсюда следует, что $G(z)$ аналитична при $|z| < 1$.

Лемма 1. Функция $F(z)$ существует всюду при $|z| < 1$, кроме, может быть, $z=1$, и $F(z) \neq 0 \forall z$ таких, что $|z| < 1$.

Доказательство. Функция $F(z) \neq 0 \forall z, |z| < 1$, так как существует аналитическая при $|z| < 1$ сопряженная функция $G(z)$, удовлетворяющая уравнению (2).

Рассмотрим $F(z)$ на окружности $|z| = 1, z = e^{i\varphi}$,

$$F(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e^{ik\varphi} = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos k\varphi + i \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin k\varphi.$$

Известно (см. [1]), что оба ряда

$$\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos k\varphi \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin k\varphi$$

сходятся равномерно при $\varepsilon \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) для любой последовательности $\{\lambda_k\}, \lambda_k \searrow 0$. Кроме того, если $\{\lambda_k\}$ строго

выпукла, то ряд $\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos k\varphi$ сходится к положительной

интегрируемой функции, $0 < \varphi < 2\pi$, что и требовалось доказать.

$$\text{Пусть теперь } \lambda_k = \frac{1}{(k+1-\theta)^2}; \quad 0 \leq \theta < 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Из теории гамма функции известна формула

$$\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} = \frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + O_1(1)n^{\beta-2},$$

где $0 < \beta < 1, |O_1(1)| < C$.

Отсюда для коэффициентов разложения функции $(1-z)^{-\beta}$ в ряд Маклорена получим $d_k = \frac{k^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{O_1(1)}{k^{2-\beta}}$. Положив $\beta = 1 - \alpha$,

$0 < \alpha < 1$, получим, что

$$\lambda_k = \Gamma(1-\alpha)d_k + \frac{O_2(1)}{(1+k)^{1+\alpha}}, \quad (4)$$

где $|O_2(1)| < C_2$.

Из (4) следует, что

$$F(z) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-z)^{1-\alpha}} + F^*(z),$$

где

$$F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* z^k, \quad |b_k^*| < \frac{C_2}{(1+k)^{1+\alpha}}.$$

Рассмотрим функции $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $p_k \geq 0$ для всех k . Тогда, если $|a_k| \leq p_k$ для любых k , то, как известно, $P(z)$ называют мажорантой $A(z)$ и записывают $A(z) \ll P(z)$.

Пусть функции $A_1(z)$ и $A_2(z)$ имеют мажорантами соответственно

$$P_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_1}{(1+k)^{\gamma}} z^k \text{ и } P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_2}{(1+k)^{\beta}} z^k.$$

Лемма 2. Если $\gamma > 1$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, $\gamma > \beta$, то

$$A_1(z) A_2(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{C}_1}{(1+k)^{\beta}} z^k.$$

Если $\gamma > 1$, $\beta = 1$, или $\gamma = 1$, $\beta = 1$,

$$A_1(z) A_2(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{C}_1 \ln(k+2)}{(1+k)} z^k.$$

Если $\gamma < 1$, $\beta < 1$, то

$$A_1(z) A_2(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{C}_1}{(1+k)^{\gamma+\beta-1}} z^k.$$

Доказательство леммы производится при помощи неравенства

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{2}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right),$$

где $a_k > 0$ монотонно возрастают, а $b_k > 0$ монотонно убывают. При этом используются другие несложные рассуждения

Теорема 1. Функция $\psi(z) = \frac{1}{(1-z)^{1-\alpha} F(z)}$ раскладывается

в абсолютно сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = (1-z)^{1-\alpha} F(z) = \Gamma(1-\alpha) + F^*(z) (1-z)^{1-\alpha}.$$

Отсюда из леммы 1 следует, что $\varphi(z) \neq 0$, $\forall z$, $|z| \leq 1$.

Из леммы 2 вытекает соотношение

$$F^*(z) (1-z)^{1-\alpha} \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{(k+1)^{\alpha_0}} z^k,$$

где $\alpha_0 = \min \{1 + \alpha, 2 - \alpha\}$. Функция $\varphi(z)$ нигде не обращается в ноль. Поэтому по теореме Винера об абсолютно сходящихся рядах функция $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ раскладывается в абсолютно сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ ч. т. д.

Лемма 3. Для функции $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ имеет место

$$\psi(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_1}{(1+k)^{2-\beta}} z^k, \quad 0 < \beta < 1.$$

Доказательство. Из леммы 2 вытекают соотношения

$$(1-z)^{-\alpha} F^*(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{(1+k)^{1-\alpha}} z^k;$$

$$(1-z)^{1-\alpha} F^*(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{(1+k)^{\alpha}} z^k.$$

Отсюда

$$\varphi'(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{(1+k)^{\alpha_0}} z^k, \quad \alpha_0 = \min \{1 - \beta, \alpha\};$$

$$[\varphi'(z)]^2 \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{(1+k)^{2\alpha_0-1}} z^k. \quad (5)$$

Далее из леммы 2 получим

$$(1-z)^{-1-\alpha} F^*(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} C (k+1)^{\alpha} z^k;$$

$$(1-z)^{-\alpha} F^{*'}(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} C z^k; \quad (6)$$

$$(1-z)^{1-\alpha} F^{*''}(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} C (1+k)^{1-\alpha} z^k.$$

Из (6) следует

$$\varphi''(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} C (1+k)^{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \max [\alpha, 1 - \alpha]. \quad (7)$$

Из (5), (7) вытекает

$$\psi''(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} C (1+k)^{\beta} z^k, \quad \text{где } \beta = \max \{1 - 2\alpha_0, \gamma_0\}.$$

Отсюда запишем

$$\psi(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_1}{(1+k)^{2-\beta}} z^k, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Используя теорему 1 и лемму 3, можно аналогично доказать следующие утверждения.

Лемма 4. Для функции $1/F(z) = (1-z) G(z)$ имеет место соотношение

$$(1-z) G(z) \ll \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{(1+k)^{2-\alpha}} z^k.$$

Теорема 2. Для коэффициентов λ_k^* функции $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^* z^k$ имеют место асимптотические оценки.

$$1. \text{ При } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\lambda_k^* = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1+k)^{1-\alpha}} + \frac{O(1)}{(1+k)^{2-\beta}}, \quad 0 < \beta < 1. \quad (8)$$

$$2. \text{ При } \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

$$\lambda_k^* = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1+k)^{1-\alpha}} + \frac{O(1)}{(1+k)^{2(1-\alpha)}}, \quad |O(1)| < C.$$

Рассмотрим последовательность

$$\lambda_{k-1} = \int_{k-1}^k \frac{d\tau}{\tau^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}]. \quad (9)$$

Для указанной последовательности выполняется $\lambda_k = \frac{1}{(1+k)^\alpha} + \frac{O(1)}{(1+k)^{1+\alpha}}, |O(1)| < C$. Поэтому для нее выполняются все вышеуказанные результаты. Но при $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ второй член асимптотики (8) может быть уточнен, а именно:

$$\lambda_k^* = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1+k)^{1-\alpha}} + \frac{O(1) \ln(k+2)}{1+k} \quad (10)$$

имеет место также

$$\sum_{k=0}^n \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \lambda_k^* = \frac{(n+1)^\alpha}{\alpha} + \frac{O(1) \ln(n+2)}{(1+n)^{1-\alpha}}, \quad (11)$$

где $|O(1)| < C$.

Рассмотрим последовательность $\left\{ \lambda_k = \frac{1}{(k+1-\theta)^\alpha} \right\}$, $0 < \theta < 1$, $\alpha > 1$. Легко проверить, что для последовательности $\{\lambda_k\}$ выполняется условие

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_{k-1} & \lambda_{i-1} \\ \lambda_k & \lambda_i \end{vmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Лемма 5. Если $\lambda_k > 0$, $\forall k \geq 0$, $\alpha_{ik} < 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, то $\Delta_k^* < 0 \forall k \geq 1$, где $\Delta_k^* = \lambda_k^* - \lambda_{k-1}^*$.

Доказательство. Приравнявая коэффициенты в тейлоровских разложениях левой и правой части соотношения $F(z) [(1-z)G(z)] = 1$, получим $\lambda_0 \Delta_1^* + \lambda_1 \lambda_0^* = 0$, отсюда имеем $\Delta_1^* < 0$.

Предположим, что доказано $\Delta_1^* < 0$, $\Delta_2^* < 0$, ..., $\Delta_{n-1}^* < 0$, тогда рассмотрим равенство

$$(\lambda_{n-1} - \lambda_n z) F(z) [(1-z)G(z)] = \lambda_{n-1} - \lambda_n z. \quad (12)$$

Приравнявая коэффициенты при z^n левой и правой части соотношения (12), получаем

$$\lambda_{n-1} \sum_{k=0}^n \lambda_k \Delta_{n-k}^* - \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Delta_{n-k+1}^* = 0,$$

или $\lambda_{n-1} \lambda_0 \Delta_n^* + \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} \Delta_{n-k}^* = 0$. Из условий леммы и последнего соотношения следует, что $\Delta_n^* < 0$, что и требовалось доказать.

Из леммы (5) следует, что λ_n^* монотонно убывает и, значит, существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^* = s$. Согласно работе [2], если последовательности положительных чисел удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_0 + \dots + \lambda_k} &= 0; \quad \text{б) } \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^* s, \quad \text{то} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_0^* \lambda_k + \lambda_1 \lambda_{k-1} + \dots + \lambda_k^* \lambda_0}{\lambda_0 + \dots + \lambda_k} &= s. \end{aligned}$$

Из (1) вытекает $\lambda_0^* \lambda_k + \dots + \lambda_k^* \lambda_0 = 1$, поэтому

$$s = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k}. \quad (13)$$

Используя теорему (1) и соотношение (13), легко получить асимптотику

$$\lambda_k^* = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k} + \frac{O(1)}{(1+k)^{\alpha-1}}, \quad (14)$$

где $|O(1)| < C$.

§ 2. Некоторые квадратурные формулы

Рассмотрим последовательность $\left\{ \lambda_{k-1} = h^{1-\alpha} \int_{k-1}^k \frac{d\tau}{\tau^\alpha} \right\}$. Ис-

пользуя результаты § 1, несложно получить соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \lambda_i &= \frac{1}{1-\alpha} [(n+1)h]^{1-\alpha}; \\ \sum_{i=0}^n \lambda_i^* h^\alpha &= \frac{[(n+1)h]^\alpha}{\alpha} + O_n h^\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

где $O_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, функция $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^* h^\alpha z^k$ удовлетворяет соотношению

$$G(z) F(z) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{1-z}; \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k.$$

Пусть $\varphi(t) \in H_\gamma$ на отрезке $[0, T]$. Разобьем отрезок $[0, T]$ равномерно с шагом $h = T/n$, тогда имеют место оценки

$$\left| \int_0^{(k+1)h} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{[(k+1)h - \tau]^\alpha} - \sum_{i=0}^k \lambda_{k-1}^* h^\alpha \varphi[(i+1)h] \right| \leq Ch^\gamma T^\alpha +$$

$$+ C_1 \left\{ \max_{\tau \in [0, T]} |\varphi(\tau)| \right\}.$$

$$\sum_{i=0}^k \frac{\ln(i+2)}{i+1} h^\alpha; \quad (16)$$

$$\left| \int_0^{(k+1)h} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{[(k+1)h - \tau]^\alpha} - \sum_{i=0}^k \lambda_{k-i} \varphi[(i+1)h] \right| < \\ < Ch^\gamma \frac{1}{1-\alpha} [(k+1)h]^{1-\alpha}. \quad (17)$$

Для последовательности $\left\{ \lambda_k = \frac{1}{(k+1-\theta)^\alpha} h^{1-\alpha} \right\}$ запишем аналогичные оценки

$$\left| \int_0^{(k+1)h} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{[(k+1)h - \tau]^\alpha} - \sum_{i=0}^k \lambda_{k-i} \varphi[(i+1)h] \right| \leq \\ \leq Ch^\gamma \frac{[(k+1)h]^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_1 \max_{\tau \in [0, T]} |\varphi(\tau)| h^{1-\alpha}; \quad (18)$$

$$\left| \int_0^{(k+1)h} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{[(k+1)h - \tau]^{1-\alpha}} - \sum_{i=0}^k \lambda_{k-i}^* h^\alpha \varphi[(i+1)h] \right| \leq \\ \tilde{C} h^\gamma T^\alpha + \tilde{C}_1 \max_{\tau \in [0, T]} |\varphi(\tau)| h^{1-\alpha}, \quad (19)$$

где $1/2 < \alpha < 1$:

$$\left| \int_0^{(k+1)h} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{[(k+1)h - \tau]^{1-\alpha}} - \sum_{i=0}^k \lambda_{k-i}^* h^\alpha \varphi[(i+1)h] \right| \leq \\ \tilde{C} h^\gamma T^\alpha + \tilde{C}_1 \max_{\tau \in [0, T]} |\varphi(\tau)| h^\alpha \text{ при } 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (20)$$

§ 3. Приближенное решение уравнения

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \int_0^t \varphi(\tau) K(t, \tau) d\tau = f(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (21)$$

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = f(t). \quad (22)$$

Как известно, точное решение (22) имеет вид $\varphi(t) =$

$$= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right], \text{ если } f(t) \text{ имеет ограниченную пер-}$$

вую производную.

Разобьем числовую полуось $[0, \infty]$ равномерно с шагом h . Приближенное решение $\varphi_h(ih)$ ищем из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=0}^k \frac{\varphi_h[(i+1)h] h}{h^\alpha (k+1-i)^\alpha} = f[(k+1)h], \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

СЛАУ (23) эквивалентна уравнению для аналитических функций

$$F(z) \psi(z) h^{1-\alpha} = A(z), \quad (24)$$

где $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[(k+1)h] z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_h[(k+1)h] z^k -$

неизвестная функция.

Предполагаем, что $f'(t) \in H_\gamma$ на отрезке $[0, T]$.

Решение уравнения (24) имеет вид

$$\psi(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{1}{h^{1-\alpha}} (1-z) A(z) G(z), \quad (25)$$

где $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^* z^k$ удовлетворяет уравнению

$$F(z) G(z) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \frac{1}{1-z}.$$

Из (25) следует

$$\varphi_h[(k+1)h] = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{i=0}^k \Delta f[(i+1)h] \frac{\lambda_{k-i}^*}{h^{1-\alpha}}. \quad (26)$$

После преобразований (26) получим

$$\varphi_h[(k+1)h] = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{\lambda_k^* f(0)}{h^{1-\alpha}} + \sum_{i=0}^k f'[(i+1)h - \theta_i h] \lambda_{k-i}^* h^\alpha \right]. \quad (27)$$

Из (19), (20) и теоремы (2) следует из предположения $f'(t) \in H_\gamma$, что при $f(0)=0$ приближенное решение $\varphi_h[(k+1)h]$ рав-

номерно сходится к точному решению уравнения (22) на $[0, T]$. Если же $f(0) \neq 0$, то приближенное решение сходится равномерно к точному на $[\varepsilon, T]$ для любого ε , $0 < \varepsilon < T$. Приближенное решение будет также сходиться к точному в метрике L на $[0, T]$.

Перейдем теперь к построению приближенного решения уравнения (21). Будем предполагать для простоты изложения, что $K(t, t) = 0$, а функция $K'_t(t, \tau) \in H_\beta$ по двум переменным, $f'(t) \in H_\gamma$ на $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq t$.

При указанных предположениях уравнение (21) равносильно уравнению

$$\varphi(t) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^t \varphi(s) \left\{ \int_0^s \frac{k'_t(\tau, s) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right\} ds = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \quad (28)$$

Приближенные решения уравнений (21) и (28) будем искать соответственно из систем

$$\sum_{i=0}^k \frac{\varphi_k[(i+1)h]h}{h^\alpha(k+1-\theta-i)^\alpha} + \sum_{i=0}^k \varphi_h[(i+1)h] K[(k+1)h, (i+1)h] h =$$

$$= f[(k+1)h], \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (29)$$

$$\tilde{\varphi}_h(h) = \psi(h);$$

$$\tilde{\varphi}_h[(k+1)h] + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\varphi}_h[(i+1)h] B[kh, (i+1)h] h = \psi[(k+1)h], \quad (30)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$\text{где } \psi(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}; \quad B(t, s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_s^t \frac{K'_t(\tau, s) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Применяя формулу (27) к СЛАУ (29), после несложных преобразований имеем

$$\varphi_h[(k+1)h] + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{i=1}^{k-1} [\varphi_h[(i+1)h] \left\{ \sum_{p=i}^{k-1} K'_\tau[(p+1)h + \right.$$

$$+ \tilde{\theta}_p h, (i+1)h] \lambda_{k-p-1}^* h^\alpha \left. \right\} h = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{\lambda_k^* f(0)}{h^{1-\alpha}} + \sum_{i=0}^k f'[(i+1)h] - \right.$$

$$\left. - \theta_i h \right] \lambda_{k-i}^* h^\alpha, \quad (31)$$

$$\text{где } 0 < \tilde{\theta}_p < 1, \quad 0 < \theta_i < 1.$$

Известно, что при $f(0) = 0$ приближенное решение $\varphi_h[(k+1)h]$ системы (30) сходится равномерно при $h \rightarrow 0$ к точному решению уравнения (28).

Рассмотрим семейство банаховых пространств $C_n(h)$ с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\|x\| = \max |x_i|$, $nh \leq T$. Для каждого $C_n(h)$ заданы линейные операторы A_n и B_n , определяемые соотношениями (30) и (31). Линейный оператор A_n очевидно, обратим и равномерно ограничен при $h < h_0$, $nh \leq T$. Из формул (19), (20) следует оценка

$$\|A_n - B_n\| = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=0}^{k-1} B[kh, (i+1)h] - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} K'_p[(p+1)h + \tilde{\theta}_p h, (i+1)h] \lambda_{k-p-1}^* h^\alpha \right| \leq M h^{\gamma_0}, \quad (32)$$

где $\gamma_0 = \min\{\beta, 1 - \alpha\}$, $1/2 < \alpha < 1$; $\gamma_0 = \min\{\beta, \alpha\}$, $0 < \alpha < 1/2$.

Из оценки (32) следует, что при $h \rightarrow 0$ $\|A_n - B_n\| \rightarrow 0$ для всех банаховых пространств $C_n(h)$, для которых $nh \leq T$. Более того, так как A_n равномерно ограничен, то по известной теореме функционального анализа $\|B_n^{-1} - A_n^{-1}\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ во всех банаховых пространствах, для которых $nh \leq T$. Следовательно, при $h \rightarrow 0$ приближенное решение $\varphi_h[(k+1)h]$ системы (29) равномерно сходится к точному решению уравнения (21) при выполнении условия $f(0) = 0$.

Если $f(0) \neq 0$, исследование уравнения (21) достаточно провести для $f(t) = 1$. Сделав замену

$$\varphi(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{1}{t^{1-\alpha}} + y(t)$$

и ее дискретные аналоги для систем (29), (30), повторим рассуждения для случая $f(0) = 0$. В результате получим следующий результат.

Теорема 3. Если для увеличения (21) $K'_i(t, \tau) \in H_\beta$ по двум переменным, $f'(t) \in H_\gamma$ на $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq t$, то при $f(0) \neq 0$ приближенное решение системы (29) сходится к точному решению (21) в $L[0, T]$ и равномерно на $[\varepsilon, T]$ при $0 < \varepsilon < T$; при $f(0) = 0$ приближенное решение сходится равномерно к точному на $[0, T]$.

Теорема 3 допускает различные обобщения. Полученные результаты служат аппаратом для обоснования метода дискретных вихрей в линейной нестационарной задаче аэродинамики.

Список литературы: 1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965. — Т. 1. — 230 с. 2. Поля Г., Сесе Г. Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1978. — 290 с.

Поступила в редколлегию 10.01.86

УДК 517.938

Т. А. АХИЕЗЕР

СХОДИМОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕРАСТЯГИВАЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

1. Пусть X — выпуклый компакт в банаховом пространстве, $V: X \rightarrow X$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой L , т. е.

$$\|Vx_1 - Vx_2\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (x_1, x_2 \in X).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Vx - x. \quad (1)$$

Уравнение (1) определяет в X динамическую систему при $t \geq 0$, поскольку поле смещений $Vx - x$ на границе компакта, направлено внутрь или вдоль границы.

Уравнение (1) можно рассматривать как континуальный аналог дискретной динамической системы $x_{n+1} = Vx_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) (смещение за один шаг заменяется производной $x_{n+1} - x_n = V(x_n - x_n)$). Такой подход, в частности, используется в математической генетике*.

В адекватных моделях динамики популяций время дискретно, но эти модели сложнее, чем их континуальные аналоги.

Пусть V — нерастягивающее отображение, т. е. $L=1$. Тогда итерации могут расходиться. Примером этого служит поворот V_α двумерного диска на любой угол α ($0 < \alpha < 2\pi$). Однако в примере траектории системы (1) сходятся. Ю. И. Любич высказал гипотезу о том, что для любого нерастягивающего отображения V траектории системы (1) сходятся, и подтвердил ее в некоторых частных случаях. В настоящей статье гипотеза доказывается в общем виде и устанавливается некоторая оценка скорости стремления к нулю производной $\dot{x}(t)$.

2. Заметим прежде всего, что для любого начального условия $x_0 \in X$ задача Коши

$$\dot{x} = Vx - x, \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

* Свирежев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. — М.: Наука, 1982. — 512 с.

имеет единственное решение, определенное при всех $t \geq 0$. Действительно, задача (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{s-t} Vx(s) ds \quad (t \geq 0).$$

Возьмем произвольное $T > 0$ и обозначим через B банахово пространство непрерывных функций на отрезке $[0; T]$ со значениями в исходном банаховом пространстве. Рассмотрим подмножество $C \subset B$, состоящее из функций со значениями в X . Очевидно, что C — выпуклое, ограниченное, замкнутое множество. Для любого $x(t) \in C$ положим

$$(Fx)(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{s-t} Vx(s) ds \quad (t \in [0; T]).$$

Оператор F не выводит из C , поскольку $(Fx)(t)$ при любом $t \in [0; T]$ является континуальной выпуклой комбинацией точек из X . Кроме того, F вполне непрерывен. В силу принципа Шаудера, в C существует неподвижная точка оператора F , которая и является решением задачи (2).

Поскольку поле смещений $Vx - x$ удовлетворяет условию Липшица, то решение задачи (2) на интервале $[0; T]$ единственно. Следовательно, решение задачи (2) определено при всех $t \geq 0$ и единственно.

3. Пусть $x(t), y(t)$ — два решения уравнения (1), тогда

$$e^t [x(t) - y(t)] = x(0) - y(0) + \int_0^t e^s [Vx(s) - Vy(s)] ds \quad (t > 0). \quad (3)$$

Отсюда следует, что $e^t \|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\| +$

$$+ L \int_0^t e^s \|x(s) - y(s)\| ds.$$

Применив лемму Гронуолла, получим

$$\|x(t) - y(t)\| \leq e^{(L-1)t} \|x(0) - y(0)\|. \quad (4)$$

Из (4) вытекают следующие утверждения:

1) Если V — нестягивающее отображение ($L = 1$), то $\|x(t) - y(t)\|$ не возрастает, поэтому существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\|$.

В частности, полагая $y(t) \equiv \bar{x}$, где $\bar{x}$ — неподвижная точка отображения V , получаем, что $\|x(t) - \bar{x}\|$ не возрастает и существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\|$.

2) Если V — равномерное сжатие ($0 < L < 1$), то неподвижная точка единственна и все траектории сходятся к ней с экспоненциальной скоростью.

Теорема. Если V — нерастягивающее отображение, то каждая траектория $x(t) (t \geq 0)$ системы (1) сходится, причем имеет место оценка

$$\|\dot{x}(t)\| = O\left(\frac{1}{\ln t}\right). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $x(t) (t \geq 0)$ — траектория системы (1). Если в ω — предельном множестве Ω траектории $x(t)$ есть особая точка $\bar{x}$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$ и траектория сходится к этой точке.

Предположим, что в Ω нет особых точек. Возьмем произвольную точку $y_0 \in \Omega$. Существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что $y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$. Рассмотрим траекторию $y(t) (t \geq 0)$ с начальным условием $y(0) = y_0$. Эта траектория целиком лежит в Ω : $y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k) (t \geq 0)$.

Выберем $h > 0$ так, чтобы $y(h) \neq y(0)$, и положим $z(t) = y(t + h) - y(t)$. Тогда

$$\|z(t)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + h + t_k) - x(t + t_k)\| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|x(\tau + h) - x(\tau)\|.$$

Таким образом, кривая $z(t) (t \geq 0)$ принадлежит некоторой сфере $S_r = \{\xi: \|\xi\| = r\} (r > 0)$.

Покажем, что любая хорда этой кривой также принадлежит сфере S_r . Ограничимся для простоты записи хордами вида $[z(0), z(t)] (t > 0)$. Аналогично (3)

$$z(t) = e^{-t} z(0) + \int_0^t e^{s-t} [Vy(s+h) - Vy(s)] ds. \quad (6)$$

Фиксируя t , введем обозначения

$$e^{-t} z(0) = u, \quad \int_0^t e^{s-t} [Vy(s+h) - Vy(s)] ds = v.$$

Тогда $z(t) = u + v$. Имеем $\|u\| = e^{-t} r$, $\|v\| \leq r(1 - e^{-t})$, $\|u + v\| = r \geq \|u\| + \|v\|$, следовательно,

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|. \quad (7)$$

Очевидно, u , v и $u + v$ — ненулевые векторы. Обозначим их орты через e_u , e_v и e_{u+v} соответственно. Из (7) получаем, что e_{u+v} является нетривиальной выпуклой комбинацией ортов e_u и e_v :

$$e_{u+v} = \frac{\|u\|}{\|u\| + \|v\|} e_u + \frac{\|v\|}{\|u\| + \|v\|} e_v. \quad (8)$$

Следовательно, весь отрезок $[e_u, e_v]$ принадлежит единичной сфере. Но тогда и его часть $[e_u, e_{u+v}]$ принадлежит единичной сфере. Поэтому $[z(0), z(t)] \subset S_r$.

Покажем, что замыкание выпуклой оболочки кривой $z(t)$ ($t \geq 0$) принадлежит S_r . Достаточно рассмотреть выпуклые комбинации любого конечного числа точек. Для двух точек утверждение уже доказано. Рассуждая по индукции, предположим, что для некоторого $k \geq 2$ выпуклая оболочка любых k точек кривой принадлежит S_r . Рассмотрим выпуклую комбинацию $k+1$ точек

$$\sum_{i=0}^k p_i z(t_i) \quad (p_i > 0, \sum_{i=0}^k p_i = 1, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k).$$

Примем $t_0 = 0$. Имеем

$$\sum_{i=0}^k p_i z(t_i) = p_0 z(0) + (1 - p_0) \sum_{i=1}^k q_i z(t_i),$$

где $q_i = \frac{p_i}{1 - p_0} > 0$ ($i = 1, \dots, k$). Поскольку $\sum_{i=1}^k q_i = 1$, то

$$\sum_{i=1}^k q_i z(t_i) \in S_r. \quad \text{В силу (6)}$$

$$z(t_i) = e^{-t_i} z(0) + \int_0^{t_i} e^{s-t_i} [Vy(s+h) - Vy(s)] ds \quad (i = 1, \dots, k).$$

Положим

$$u = z(0) \sum_{i=1}^k q_i e^{-t_i}, \quad v = \sum_{i=1}^k q_i \int_0^{t_i} e^{s-t_i} [Vy(s+h) - Vy(s)] ds$$

тогда $u + v = \sum_{i=1}^k q_i z(t_i)$. Как и ранее,

$$\|u\| = r \sum_{i=1}^k q_i e^{-t_i}, \quad \|v\| \leq r \left(1 - \sum_{i=1}^k q_i e^{-t_i} \right), \quad \|u + v\| = r.$$

Следовательно, для рассматриваемых векторов u и v снова выполняется равенство (7) и в аналогичных обозначениях — (8). Поэтому

$$\|\lambda z(0) + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k q_i z(t_i)\| = r \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Отсюда при $\lambda = p_0$ получаем требуемый результат:

$$\left\| \sum_{i=0}^k p_i z(t_i) \right\| = r.$$

Обозначим теперь через N замыкание выпуклой оболочки кривой $z(t)$ ($t \geq 0$). Рассмотрим среднее

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z(kh) \in N.$$

Поскольку $N \subset S_r$, то $\left\| \sum_{k=0}^{n-1} z(kh) \right\| = nr$ — неограниченно возрастает с ростом n . С другой стороны, сумма $\sum_{k=0}^{n-1} z(kh) = y(nh) - y(0)$ ограничена. Полученное противоречие доказывает сходимость всех траекторий системы (1).

Докажем оценку (5). Рассмотрим разностное отношение

$$a_h(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Выберем h_0 так, что $a_h(t) \neq 0$ при $0 < h < h_0$, $t \geq 0$. Достаточно доказать, что

$$\|a_h(t)\| \leq \frac{K}{\ln t} \quad (0 < h < h_0, K = \text{const}), \quad (9)$$

начиная с некоторого t . Зафиксируем произвольное h ($0 < h < h_0$) и будем для простоты писать $a(t)$ вместо $a_h(t)$. По доказанному, $\|a(t)\|$ убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $0 \leq s < t$. Оценим $a(t)$ с помощью соотношения

$$(e^{t-s} - 1) a(t) = \int_s^t a(\tau) d\tau + \int_s^t (e^{\tau-s} - 1) [a(\tau) + a'(\tau)] d\tau. \quad (10)$$

Имеем

$$\left\| \int_s^t a(\tau) d\tau \right\| + \frac{1}{h} \left\| \int_t^{t+h} x(\tau) d\tau - \int_s^{s+h} x(\tau) d\tau \right\| \leq c, \quad (11)$$

где $c = 2 \max \|x(\tau)\|$ не зависит от s, t и h . Далее

$$\|a(\tau) + a'(\tau)\| = \frac{1}{h} \|Vx(\tau+h) - Vx(\tau)\| \leq \|a(\tau)\| \quad (\tau \geq 0). \quad (12)$$

Из (10) — (12) следует, что

$$(e^{t-s} - 1) \|a(t)\| \leq c + \int_s^t (e^{\tau-s} - 1) \|a(\tau)\| d\tau$$

и так как $\|a(\tau)\|$ убывает, то

$$\|a(t)\| \leq \|a(s)\| - \frac{\|a(s)\| (t-s) - c}{e^{t-s} - 1}. \quad (13)$$

Определим последовательность $\{t_n\}_0^\infty$ рекуррентно:

$$t_0 = 0; \quad t_{n+1} = t_n + b_n, \quad \text{где } b_n = 1 + \frac{c}{a_n}, \quad a_n = |a(t_n)|.$$

Очевидно, $a_n \searrow 0$ и, следовательно, $b_n \nearrow \infty$. В силу (13)

$$a_{n+1} \leq a_n - \frac{a_n(t_{n+1} - t_n) - c}{e^{t_{n+1} - t_n} - 1} = a_n - \frac{a_n}{e^{b_n} - 1} < a_n(1 - e^{-b_n}),$$

откуда

$$1 < \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} e^{b_n} = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1} - 1} e^{b_n}.$$

Следовательно,

$$t_{n+1} - t_n < b_n \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1} - 1} e^{b_n} < B e^{b_n} (b_{n+1} - b_n) \quad (B = \text{const}).$$

Суммируя эти оценки, получаем для любого натурального n :

$$t_n < B \sum_{i=0}^{n-1} e^{b_i} (b_{i+1} - b_i) < B \int_{b_0}^{b_n} e^s ds = B (e^{b_n} - e^{b_0}).$$

Следовательно, последовательность $\{a_n \ln t_n\}_1^\infty$ ограничена сверху некоторой константой K_1 .

Возьмем произвольное $K > K_1$ и покажем, что оценка (9) выполняется при всех достаточно больших t . Имеем

$$\|a(t)\| \leq \frac{K_1}{\ln t_n} \quad (t \geq t_n).$$

Далее $\frac{K_1}{\ln t_n} \leq \frac{K}{\ln t}$ при $t \in (1, t_n^{\frac{K}{K_1}}]$. Таким образом, при $t \in]t_n, t_n^{\frac{K}{K_1}}]$ выполняется (9). Поэтому если $t_{n+1} \leq t_n^{\frac{K}{K_1}}$, то на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ выполняется (9).

Пусть $t_{n+1} > t_n^{\frac{K}{K_1}}$. Тогда

$$a_n < \frac{c}{t_n^{\frac{K}{K_1}} - t_n - 1}.$$

Для любой постоянной $c_1 > c$ существует N такое, что при $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\frac{c}{t_n^{\frac{K}{K_1}} - t_n - 1} < \frac{c_1}{t_n^{\frac{K}{K_1}}}. \quad (14)$$

Таким образом, $\|a(t)\| < c_1 \frac{K}{t_n^{K_1}} (t \geq t_n, n \geq N)$.

Зафиксируем $n \geq N$ и положим $\lambda = \frac{K}{c_1}$, $f(\xi) = e^{\lambda \xi}$. Можно считать $\lambda > 1$ ввиду произвола в выборе K .

Неравенство $\frac{c_1}{t_n^{K_1}} \leq \frac{K}{\ln t}$ выполняется при $t \in (1, f(t_n^{K_1}))$, следовательно, при $t \in [t_n, f(t_n^{K_1})]$ выполняется (9). Покажем, что (9) выполняется при $t \in [t_n, t_{n+1}]$. В случае, когда $t_{n+1} \leq f(t_n^{K_1})$, требуемое утверждение доказано.

Пусть $t_{n+1} > f(t_n^{K_1})$. Рассмотрим итерации $f^{p+1}(\xi) = f(f^p(\xi))$ ($p = 1, 2, \dots$). Очевидно, что $f^p(\xi) \nearrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in [0, \infty)$. Поэтому существует такое p , что

$$f^p(t_n^{K_1}) < t_{n+1} \leq f^{p+1}(t_n^{K_1}).$$

Тогда

$$a_n < \frac{c}{f^p(t_n^{K_1}) - t_n - 1}.$$

Из (14) вытекает, что

$$\frac{c}{f^p(t_n^{K_1}) - t_n - 1} < \frac{c_1}{f^p(t_n^{K_1})},$$

откуда

$$\|a(t)\| < \frac{c_1}{f^p(t_n^{K_1})} (t \geq t_n).$$

Неравенство

$$\frac{c_1}{f^p(t_n^{K_1})} < \frac{K}{\ln t}$$

выполняется при $t \in (1, f^{p+1}(t_n^{K_1}))$. Следовательно, при $t \in [t_n, f^{p+1}(t_n^{K_1})]$ и, в частности, на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ выполняется (9). Итак, оценка (9) доказана при всех $t \geq t_N$.

Автор благодарит Ю. И. Любича и В. Г. Дринфельда за постановку задачи и полезные обсуждения.

Поступила в редколлегию 20.03.86

В. М. КИРЖНЕР, Ю. И. ЛЮБИЧ

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ,
ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕТИКЕ

Эволюционный оператор в одном диаллельном локусе, сцепленном с X-хромосомой, может быть записан в следующем виде [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} p'_f &= \left(\lambda_1 p_f p_m + \frac{1}{2} \lambda_3 (p_m q_f + p_f q_m) \right) / W; \\ q'_f &= \left(\lambda_2 q_f q_m + \frac{1}{2} \lambda_3 (p_m q_f + p_f q_m) \right) / W; \\ p'_m &= \mu_1 p_f / \omega; \quad q'_m = \mu_2 q_f / \omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$W = \lambda_1 p_f p_m + \lambda_3 (p_m q_f + p_f q_m) + \lambda_2 q_f q_m;$$

$$\omega = \mu_1 p_f + \mu_2 q_f.$$

Здесь p_f и p_m — частоты гена A в отделах популяции гамет соответственно женского и мужского происхождения; q_f и q_m — частоты в тех же отделах аллельного гена a . Поэтому $p_f + q_f = 1$, $p_m + q_m = 1$, $0 \leq p_f, p_m, q_f, q_m \leq 1$. Параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — коэффициенты выживаемости под действием отбора женских зигот с генотипами AA, aa и Aa соответственно. Аналогично параметры μ_1 и μ_2 — коэффициенты выживаемости мужских зигот с генотипами A и a соответственно. Очевидно, $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \leq 1$.

Исследование системы (1) упрощается, если перейти к переменным $x = p_f / q_f$ и $y = \mu_1 p_m / \mu_2 q_m$. При этом получим

$$x' = \frac{2\lambda_1 \mu_1 x y + \lambda_3 (\mu_2 x + \mu_1 y)}{2\lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 (\mu_2 x + \mu_1 y)}, \quad y' = x. \quad (2)$$

Новые переменные очевидно удовлетворяют неравенству $0 \leq x, y \leq \infty$. Положим $\alpha = \lambda_3 (\mu_1 + \mu_2) - 2\lambda_1 \mu_1$, $\beta = \lambda_3 (\mu_1 + \mu_2) - 2\lambda_2 \mu_2$. Система (2) имеет по крайней мере две неподвижные точки: $(0, 0)$ и (∞, ∞) , отвечающие вырождению одного из аллельных генов. Точка $(0, 0)$ — притягивающая при $\beta < 0$, точка (∞, ∞) — притягивающая при $\alpha < 0$. Далее, если $Q = \beta / \alpha > 0$, то существует еще одна неподвижная точка $x = y = Q$. Эта точка — притягивающая при $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Если $\alpha = \beta = 0$, то все точки луча $y = x > 0$ — неподвижные.

Исследование локальной устойчивости неподвижных точек системы (2) было проведено в [1]. Целью настоящей работы является доказательство сходимости траекторий системы (2) к одной из неподвижных точек. Доказательство основано на определенном свойстве монотонности траекторий, которое устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть (x, y) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — два состояния популяции, причем $\tilde{x} \geq x$, $\tilde{y} \geq y$. Тогда в следующем поколении состояния (x', y') и $(\tilde{x}', \tilde{y}')$ будут удовлетворять таким же неравенствам $\tilde{x}' \geq x'$, $\tilde{y}' \geq y'$.

Доказательство. Неравенство

$$\frac{2\lambda_1\mu_1xy + \lambda_3(\mu_2x + \mu_1y)}{2\lambda_2\mu_2 + \lambda_3(\mu_2x + \mu_1y)} \leq \frac{2\lambda_1\mu_1\tilde{x}\tilde{y} + \lambda_3(\mu_2\tilde{x} + \mu_1\tilde{y})}{2\lambda_2\mu_2 + \lambda_3(\mu_2\tilde{x} + \mu_1\tilde{y})}$$

равносильно неравенству

$$4\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(xy - \tilde{x}\tilde{y}) + 2\lambda_2\lambda_3\mu_2(\mu_2x - \mu_2\tilde{x} + \mu_1y - \mu_1\tilde{y}) + \\ + 2\lambda_1\lambda_3\mu_1(\mu_2x\tilde{x}(y - \tilde{y}) + \mu_1y\tilde{y}(x - \tilde{x})) \leq 0,$$

выполнение которого при данных условиях очевидно.

Докажем теперь сходимость траекторий при начальных условиях вида $x=y$.

Лемма 2. При любом $c \geq 0$ траектория с начальным состоянием (c, c) сходится к неподвижной точке (l, l) , где

$$l = l(\alpha, \beta; c) = \begin{cases} c & \alpha^2 + \beta^2 = 0 \\ 0 & \alpha \geq 0, \beta \leq 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\ \infty & \alpha \leq 0, \beta \geq 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\ Q & \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & c < Q \\ \infty & c > Q \end{cases} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \alpha < 0, \beta < 0 \quad (7)$$

Доказательство. Если $x=y=c$, то

$$x' = \frac{2\lambda_1\mu_1c^2 + c\lambda_3(\mu_1 + \mu_2)}{2\lambda_2\mu_2 + c\lambda_3(\mu_1 + \mu_2)}, \quad y' = c.$$

Знак разности $x' - c$ совпадает со знаком числа $\rho = \beta - \alpha$. В случае (3) ρ обращается в ноль и точка (c, c) является неподвижной при любом неотрицательном значении c . В случае (4) ρ отрицательно, следовательно, $x' \leq x$, $y' \leq y$, и согласно лемме 1 траектория с начальным состоянием $x=y=c$ моно-

тонно убывает, стремясь, очевидно, к неподвижной точке $(0, 0)$. В случае (5) доказательство сходимости траектории с начальным состоянием (c, c) к бесконечности проводится аналогично.

В случае (6) при $c_1 < Q$ ρ больше нуля, т. е. $x' \geq x$, $y' \geq y$ и траектория с начальным состоянием (c_1, c_1) согласно лемме 1 монотонно возрастает. При $a_2 > Q$ значение ρ отрицательно, следовательно, $x' \leq x$, $y' \leq y$ и траектория с начальным состоянием (c_2, c_2) монотонно убывает. Так как $c_1 < c_2$, то согласно лемме 1 обе эти траектории взаимно ограничивают друг друга и, очевидно, стремятся к неподвижной точке (Q, Q) . В случае (7) доказательство сходимости траекторий с начальным состоянием (c, c) проводится аналогично предыдущему. Лемма доказана.

В случае (7), в отличие от остальных, популяция имеет две притягивающие и одну отталкивающую точку. Для доказательства сходимости траекторий при любом начальном условии в этом случае понадобится следующая лемма.

Лемма 3. Если $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и для двух последовательных состояний популяции (x, y) и (x', y') выполняются неравенства $(x - Q)(y - Q) < 0$, $(x' - Q)(y' - Q) < 0$, то $|x' - y'| < |x - y|$.

Доказательство. Если $x < Q < y$, то $x' > Q > y' = x$. В этом случае достаточно показать, что $y > x'$, т. е.

$$\frac{2\lambda_1\mu_1xy + \lambda_3(\mu_2x + \mu_1y)}{2\lambda_2\mu_2 + \lambda_3(\mu_2x + \mu_1y)} - y < 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$[2\lambda_1\mu_1y + \lambda_3\mu_2(1 - y)]x - 2\lambda_2\mu_2y + \lambda_3\mu_1y(1 - y) < 0. \quad (8)$$

Это неравенство достаточно проверить на концах интервала изменения $x \in (0, Q)$. При $x = 0$ из (8) получаем $y(-2\lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_1 - \lambda_3\mu_1y)$, что очевидно для всех значений $y > 0$, так как из условия леммы $\beta < 0$ следует, что $-2\lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_1 < 0$. При $x = Q$ получаем из (8)

$$y^2 + y \frac{(2\lambda_1\mu_1 - \lambda_3\mu_2)\beta + (\lambda_3\mu_1 - 2\lambda_2\mu_2)\alpha}{-\lambda_3\mu_1\alpha} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta}{\alpha} > 0. \quad (9)$$

Левая часть (9) обращается в ноль при $y = -\mu_2/\mu_1$ и $y = Q$. Так как по предположению $y \in (Q, \infty)$, то неравенство (9) выполняется и, следовательно, верно неравенство (8). Случай $x > Q > y$ может быть рассмотрен аналогично.

Теорема. Все траектории динамической системы (2) сходятся.

Доказательство. Рассмотрим траекторию с любым начальным состоянием (x_0, y_0) . В случае (3) с учетом равенств

$\alpha = \beta = 0$ эволюционный оператор (2) может быть приведен к виду

$$x' = \frac{xy + \tilde{\mu}_2 x + \tilde{\mu}_1 y}{1 + \tilde{\mu}_2 x + \tilde{\mu}_1 y}, \quad y' = x,$$

где $\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = 1$, $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \geq 0$. Тогда $x' - y' = (y - x)(\tilde{\mu}_2 x + \tilde{\mu}_1) / (1 + \tilde{\mu}_2 x + \tilde{\mu}_1 y)$, откуда легко следует, что $|x' - y'| < |x - y|$.

Теперь ясно, что в рассматриваемом случае траектория с любым начальным состоянием стремится к неподвижной точке вида $x_\infty = y_\infty$.

В случае (4) рассмотрим вспомогательную траекторию с начальным состоянием (c, c) , где $c = \max(x_0, y_0)$. Согласно лемме 1 эта вспомогательная траектория мажорирует заданную, а согласно лемме 2 сходится к неподвижной точке $(0, 0)$. Очевидно, что к этой же точке сходится и траектория с начальным состоянием (x_0, y_0) . Аналогичное рассуждение при $c = \min(x_0, y_0)$ применимо для доказательства сходимости траектории к точке (∞, ∞) в случае (5).

В случае (6) для траектории с начальным состоянием (x_0, y_0) рассмотрим две вспомогательные траектории с начальными состояниями (c_1, c_1) и (c_2, c_2) , где $c_1 = \min(x_0, y_0)$, $c_2 = \max(x_0, y_0)$. Согласно лемме 2 каждая из этих вспомогательных траекторий сходится к точке (Q, Q) , а согласно лемме 1 они являются соответственно минорантой и мажорантой для траектории с начальным состоянием (x_0, y_0) , которая, таким образом, также сходится к точке (Q, Q) .

В случае (7) предположим вначале, что траектория $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^\infty$ для всех $i = 0, 1, \dots, n, \dots$ удовлетворяет условию $(x_i - Q)(y_i - Q) < 0$. Согласно лемме 3 разность $|x_i - y_i|$ стремится к нулю, откуда легко следует сходимость самой траектории к точке (Q, Q) . Предположим теперь, что для какого-либо номера N верно противоположное неравенство $(x_N - Q)(y_N - Q) > 0$. Если при этом $x_N, y_N < Q$, то можно выбрать вспомогательную траекторию с начальным состоянием (c, c) , где $c = \max(x_N, y_N)$, которая начиная с номера N мажорирует заданную. По лемме 2 вспомогательная траектория сходится к точке $(0, 0)$, куда также сходится и изучаемая траектория. Случай $x_N, y_N > Q$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Holdane J. B. S., Jajakar S. D. Equilibrium under natural selection at a sex-linked locus // Journ. of Genetics. — 1964. — 59. — P. 29—36. 2. Wright S. Evolution and the Genetics Populations. — Univer. of Chicago Press, 1969. — 2. — P. 11.

Поступила в редколлегию 09.01.86

Р. Б. ТЮТЮНИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОТБОРА
И МУТАЦИЙ В АУТОСОМНОМ ДИАЛЛЕЛЬНОМ ЛОКУСЕ

1. В настоящей работе рассматривается (при $n = 2$) поведение итераций произвольной точки $(n - 1)$ -мерного симплекса Δ^{n-1} в R^n под действием оператора $V = FT$, где F — оператор отбора; $T = (\tau_{ij})_{i,j=1}^n$ — стохастическая по столбцам матрица мутаций ($\tau_{ij} < 1$ при $i \neq j$). Для биологических приложений важен случай малых τ_{ij} ($i \neq j$). Оператор F строится по некоторой матрице $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^n$ ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, $0 \leq \lambda_{ij} \leq 1$) и действует по формулам

$$p'_j = (Fp)_j = \frac{p_j W_j(p)}{W(p)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — точка из Δ^{n-1} ;

$$W_i(p) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} p_k, \quad W(p) = \sum_{i=1}^n p_i W_i(p) = \sum_{i,k=1}^n \lambda_{ik} p_i p_k.$$

В популяционной генетике оператор (1) описывает действие чистого отбора в аутосомном локусе (время считается дискретным). Функция $W_i(p)$ называется средней приспособленностью i -го гена в состоянии популяции p , а $W(p)$ — средней приспособленностью популяции. Вопрос о сходимости итераций $F^n_{(p_0)}$ ($n \rightarrow \infty$) для любой начальной точки $p_0 \in \Delta^{n-1}$ в настоящее время решен полностью [1, 2], его изложение имеется в монографии Ю. И. Любича [3]. Оператор $V = FT$ описывает взаимодействие мутаций и отбора. Так как F и T не коммутируют, то итерации V не сводятся к итерациям F и T в отдельности.

Оператор F называется гиперболическим, если все его неподвижные точки гиперболичны, т. е. спектр линейного приближения в этих точках не имеет собственных значений на единичной окружности. Гиперболические операторы отбора составляют открытое плотное множество среди всех операторов отбора (см. [3]).

В [3] была сформулирована следующая гипотеза: если F — гиперболический оператор, а диагональные элементы матрицы T положительны, то все траектории $V = FT$ сходятся. Там же был полностью изучен случай взаимодействия мутаций и отбора при $n = 2$, $\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{22} > 0$ (чистое доминирование),

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \tau & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (0 \leq \tau < 1).$$

В этом случае гипотеза справедлива. Ниже приводится контр-пример к гипотезе в общем случае.

2. Рассмотрим отображение одномерного симплекса в себя, задаваемое оператором $V=FT$, где

$$T = \begin{pmatrix} 1-\tau & \tau \\ \tau & 1-\tau \end{pmatrix},$$

а F строится по матрице

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

Сразу заметим, что если $\lambda_1 > \lambda_2$, то оператор отбора гиперболичен, а T удовлетворяет условиям гипотезы при $\tau < 1$ очевидным образом. Пусть $\omega = \lambda_1/\lambda_2$, $\theta = p/q$ (p и q — координаты точки симплекса Δ^1 в R^2). Из-за наличия связи $p+q=1$ можно от динамической системы в Δ^1 перейти к соответствующей системе на полуоси $[0, \infty]$. В этом случае V действует по формуле

$$\theta' = \frac{\tilde{\theta}(\omega\tilde{\theta}+1)}{\tilde{\theta}+\omega}, \quad (2)$$

где, в свою очередь,

$$\tilde{\theta} = \frac{(1-\tau)\theta + \tau}{\tau\theta + 1 - \tau}. \quad (3)$$

Другими словами, V заменяется произведением операторов (2) и (3). Тогда

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\omega\tilde{\theta}^2 + 2\omega^2\tilde{\theta} + \omega}{(\tilde{\theta} + \omega)^2} \frac{(1-2\tau)}{(\tau\theta + 1 - \tau)^2}. \quad (4)$$

Так как $d\theta'/d\theta > 0$, при $\tau < 1/2$, то при $\tau < 1/2$ все траектории сходятся. Пусть $\tau > 1/2$. Заметим, что в силу симметричности матриц Λ и T при любых значениях $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ точка $\theta=1$ (т. е. точка $p=q=1/2$) является неподвижной, а при $\tau > 1/2$, $\omega > 1$ других неподвижных точек нет, так как тогда из $p > q$ следует $p' < q'$ (для $p < q$ аналогично). С другой стороны, все точки симплекса под действием нашего отображения сходятся к циклу не более чем второго порядка в силу монотонности последовательности θ_{2k} ($d\theta_{k+2}/d\theta_k > 0$). Таким образом, если при $\tau > 1/2$ для некоторой точки $(p_0, q_0) \in \Delta^1$, $(p_0 > q_0)$ получается $p_2 > p_0$, то у оператора V есть цикл второго порядка; действительно, последовательность p_{2k} сходится к неподвижной точке, которая заведомо не является неподвижной для V . Если $\theta=1$ — отталкивающая неподвижная точка для V , то в Δ^1 существует точка (p_0, q_0) , такая, что $p_0 > q_0$ и $p_2 > p_0$. Из (4) следует, что точка

$\theta = 1$ при $\tau > (1 + 3\omega)/4\omega$ — отталкивающая. Следовательно, при этих условиях существует цикл второго порядка. Подчеркнем, однако, что эффект возник при больших τ (заведомо $\tau > 3/4$), в то время как по биологическому смыслу τ мало (порядка 10^{-3} и меньше).

3. В случае одномерного симплекса можно указать ограничения на матрицу мутаций

$$T = \begin{pmatrix} 1 - \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & 1 - \tau_2 \end{pmatrix}$$

являющиеся достаточными для того, чтобы картина сходимости имела вполне определенный вид. Матрица T считается от-

Картина сходимости	Ограничения на T
$\begin{array}{c} \circ \leftarrow \times \rightarrow \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\lambda_{12} = 0,$ $\lambda_{22} \neq 0, \quad \tau_1 < 1 + 2 \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} - \sqrt{\left(1 + 2 \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}}\right)^2 - 1},$ $\tau_2 = 0,$
$\begin{array}{c} \rightarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$0 < \lambda_{12} < \min(\lambda_{11}, \lambda_{22}),$ $\tau_2 = 0, \quad \tau_1 < \min\left(\frac{\omega_1 - 1}{\omega_1 + 1}, \frac{(1 - \omega_1)^2}{2[\omega_1^2 - 1 + 2\omega_1(\omega_2 - 1)]}\right)$
$\begin{array}{c} \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{11} \neq 0.$
$\begin{array}{c} \times \rightarrow \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\lambda_{11} \leq \lambda_{12} \leq \lambda_{22}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_1 \neq 0.$
$\begin{array}{c} \rightarrow \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\lambda\lambda_{22} < \lambda_{12}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_1 < 1 - \omega_2.$
$\begin{array}{c} \rightarrow \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0,$ $\lambda_{12} > \min(\lambda_{11}, \lambda_{22}), \quad \left[\begin{array}{l} \tau_2 < 1 - \omega_1, \quad \tau_1 < 1 - \tau_2 \\ \tau_1 < 1 - \omega_2, \quad \tau_2 < 1 - \tau_1 \end{array} \right]$
$\begin{array}{c} \rightarrow \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{22}, \quad \tau_1 \cdot \tau_2 \neq 0.$
$\begin{array}{c} \rightarrow \circ \leftarrow \times \rightarrow \circ \leftarrow \infty \\ 0 \end{array}$	$\lambda_{12} < \min(\lambda_{11}, \lambda_{22}), \quad \tau_1 + \tau_2 < 1,$ $\left[\begin{array}{l} \tau_1 < \min\left(\frac{(\omega_1 - 1)^3}{36\omega_1(4\omega_1\omega_2 + 1)}, \frac{(\omega_1 - 1)^2}{12\omega_1\omega_2}, \frac{\omega_1 - 1}{2(\omega_1 + 1)}\right) \\ \tau_2 < \min\left(\frac{(\omega_2 - 1)^3}{36\omega_2(4\omega_1\omega_2 + 1)}, \frac{(\omega_2 - 1)^2}{12\omega_1\omega_2}, \frac{\omega_2 - 1}{2(\omega_2 + 1)}\right) \end{array} \right]$

личной от единичной матрицы E , так как случай $T=E$ полностью изложен в [3]. Пусть матрица приспособленности есть

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} (\lambda_{12} = \lambda_{21}, \quad 0 \leq \lambda_{ij} \leq 1).$$

Как и в п. 2 перейдем к динамической системе на полуоси $[0, \infty]$. Введем $\theta = p/q$ (p и q — координаты точки симплекса в R^2), $\omega_1 = \lambda_{11}/\lambda_{12}$ и $\omega_2 = \lambda_{22}/\lambda_{12}$ (ω_1 и ω_2 вводятся при $\lambda_{12} \neq 0$). Результат исследований приведен в таблице, где притягивающая неподвижная точка изображена кружком, а отталкивающая неподвижная точка — крестиком.

Список литературы: 1. Любич Ю. И., Майстровский Г. Д., Ольховский Ю. Г. Сходимость к равновесию под действием отбора в однолокусной популяции // Докл. АН СССР. — 1976. — 226, № 1. — С. 58—60. 2. Любич Ю. И., Майстровский Г. Д., Ольховский Ю. Г. Сходимость к равновесию под действием отбора в однолокусной аутосомной популяции // Пробл. передачи информации. — 1980. — 16, № 1. — С. 93—104. 3. Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. К.: Наук. думка, 1983. — 230 с.

Поступила в редколлегию 30.12.85.

УДК 517.948+512.13

Л. П. КУЧКО

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ АРГУМЕНТА

В работе изучается вопрос о существовании и единственности локального C^∞ -решения линейного функционального уравнения

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = \gamma(x), \quad (1)$$

где $F: (R^1, 0) \rightarrow (R^1, 0)$, $Q: R^1 \rightarrow C^m$, $\gamma: R^1 \rightarrow C^m$ — заданные C^∞ — отображения. Уравнения такого вида изучались в [1], [2], однако в этих работах предполагалось, что F — локальный C^∞ -диффеоморфизм. Здесь изучается вырожденный случай: $F'(0) = 0$.

Для доказательства локальной C^∞ — разрешимости уравнения (1) необходима его формальная разрешимость, т. е. существование такого формального отображения

$$\hat{\varphi}: R^1 \rightarrow C^m, \quad \text{для которого } \hat{\varphi}(\hat{F}x) - \hat{Q}(x)\hat{\varphi}(x) = \hat{\gamma}(x).$$

(Здесь $\hat{F}$, $\hat{Q}$, $\hat{\gamma}$ — формальные ряды Тейлора в нуле). Формальной разрешимости уравнения (1) не достаточно для его локальной C^∞ -разрешимости. Однако при некоторых естественных ограничениях на матрицу $Q(x)$ любое формальное реше-

ние уравнения (1) однозначно восстанавливается до его локального C^∞ -решения:

Теорема. Пусть $F'(0)=0$, а $\det Q(x)$ — неплюская* в нуле C^∞ -функция. Тогда для любого формального решения $\hat{\varphi}$ уравнения (1) существует единственное локальное C^∞ -решение φ этого уравнения, ряд Тейлора которого в начале координат равен $\hat{\varphi}$.

Доказательство теоремы. Пусть $\hat{\varphi}$ — формальное решение уравнения (1). Докажем вначале существование локального C^∞ -решения φ уравнения (1), ряд Тейлора которого в начале координат равен $\hat{\varphi}$. Пусть $\varphi_0(x)$ — локальное C^∞ -отображение с рядом Тейлора $\hat{\varphi}$ в начале координат. Будем искать решение φ уравнения (1) в виде $\varphi_0 + \psi$, где $\hat{\psi}=0$. Для ψ получим уравнение

$$\psi(Fx) - Q(x)\psi(x) = \tau(x), \quad (2)$$

где $\tau(x) = -\varphi_0(Fx) + Q(x)\varphi_0(x) + \gamma(x)$ — плоское в нуле C^∞ — отображение. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы при $|x| \leq \delta$ выполнялись неравенства

$$|F(x)| \leq A|x|^2, \quad |F'(x)| \leq A|x|, \quad A > 0, \quad (3)$$

и, кроме того, $A\delta = \tilde{\delta} < 1$. Далее, поскольку $\det Q(x)$ имеет в начале координат нуль конечного порядка r ($r < \infty$), матрица $Q(x)$ при любом $x \neq 0$ обратима и для некоторого $B > 0$ выполняется неравенство:

$$\|Q^{-1}(x)\| \leq B|x|^{-r}, \quad |x| \leq \delta, \quad x \neq 0. \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (2) к виду

$$\psi(x) = (L\psi)(x), \quad (5)$$

где $(L\psi)(x) = Q^{-1}(x)\psi(Fx) - Q^{-1}(x)\tau(x)$ — линейный оператор, действующий в пространстве плоских в нуле C^∞ -отображений $\psi: [-\delta, \delta] \rightarrow C^m$. Для доказательства локальной C^∞ -разрешимости уравнения (5) достаточно доказать существование неподвижной точки оператора L .

Рассмотрим выпуклый компакт K плоских в нуле C^∞ -отображений ψ , удовлетворяющих неравенствам:

$$\|\psi^{(s)}(x)\| \leq C_{sv}|x|^v, \quad v \geq v_s, \quad |x| \leq \delta, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно принципу неподвижной точки, достаточно указать такие константы C_{sv} и v_s , чтобы компакт K был инвариантен

* Т. е. формальный ряд Тейлора в нуле функции $\det Q(x)$ отличен от нулевого.

относительно оператора L . Пусть $\psi \in K$. Учитывая (3), (4) и определение компакта K , получаем

$$\|(L\psi)^{(s)}(x)\| \leq C_{sv} |x|^v [D_s \tilde{\delta}^v + C_{sv}^{-1} h_{sv}(C_{0v}, \dots, C_{s-1,v})], \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где $D_s = BA^s \tilde{\delta}^{s-r}$; h_{sv} — некоторая линейная функция с неотрицательными коэффициентами ($h_{0v} = \text{const}$). Выберем v_s так,

чтобы для всех $v \geq v_s$ $D_s \tilde{\delta}^v \leq q < 1$. Далее, выбирая последовательно числа C_{sv} так, чтобы $q + C_{sv}^{-1} h_{sv}(C_{0v}, \dots, C_{s-1,v}) < 1$,

получаем, что компакт K инвариантен относительно оператора L . Следовательно, уравнение (5) имеет локальное C^∞ -решение $\psi \in K$.

Единственность решения уравнения (1) эквивалентна отсутствию локального нетривиального C^∞ -решения однородного уравнения

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = 0. \quad (6)$$

При этом, если φ — нетривиальное формальное решение уравнения (6), то в силу предыдущего оно восстанавливается до его локального нетривиального C^∞ -решения. Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в отсутствии плоских в нуле локальных нетривиальных C^∞ -решений уравнения (6). Предположим, что φ — плоское в нуле локальное нетривиальное C^∞ -решение уравнения (6). Тогда для любого v можно указать $C_v > 0$ такое, что

$$\|\varphi(x)\| \leq C_v |x|^v. \quad (7)$$

Преобразуем уравнение (6) к виду

$$\varphi(x) = Q^{-1}(x)\varphi(Fx). \quad (8)$$

Итерируя (8) и учитывая (4), (7), получаем

$$\|\varphi(x)\| \leq B^n \prod_{i=0}^{n-1} |F^i x|^{-r} \|\varphi(F^n x)\| \leq C_v B^n |F^n x|^{v-r} |F^n x|^r \prod_{i=0}^{n-1} |F^i x|^{-r}.$$

Из (3) следует

$$|F^n x| \leq A^n \prod_{i=0}^{n-1} |F^i x| |x|,$$

откуда

$$\|\varphi(x)\| \leq C_v A^{nr} B^n |F^n x|^{v-r} |x|^r.$$

Поскольку $|F^n x| \leq A^{2n-1} |x|^{2n}$, имеем

$$\|\varphi(x)\| \leq B^n A^{nr-v+r} C_v \cdot \tilde{\delta}^r \tilde{\delta}^{\sim 2n(v-r)}. \quad (9)$$

Выбирая $v > r$, получаем, что правая часть неравенства (9) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, плоское в нуле C^∞ -решение уравнения (6) тривиально. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Кучко Л. П. Линейные функциональные уравнения// Изв. АН СССР. — 1978. — 42, № 2. — С. 379—395. 2. Кучко Л. П. Линейные функциональные уравнения от одной переменной//Теория функций, функц. анализ и их приложения. — 1986. — Вып. 46. — С. 24—25.

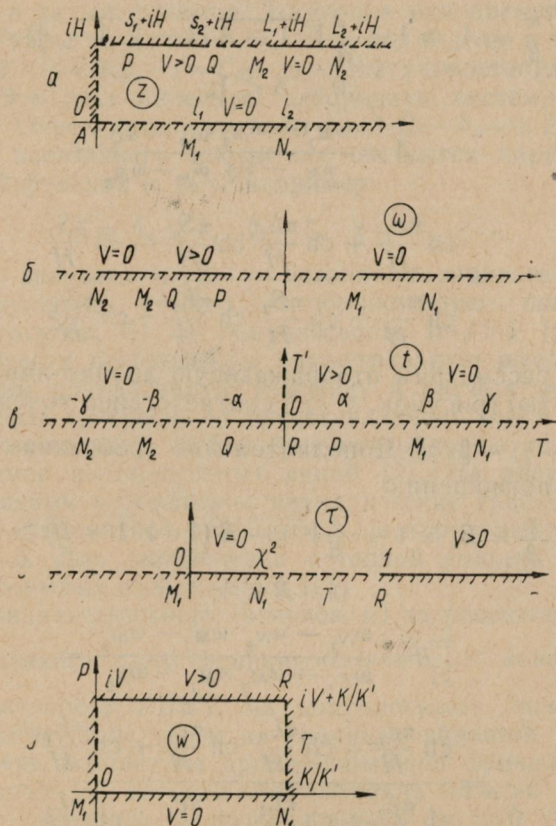
Поступила в редколлегию 04.10.85.

УДК 517.5+53

Н. И. ЛЕСИК, Б. В. КОНДРАТЬЕВ,
А. Б. КОНДРАТЬЕВ

К ВОПРОСУ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С СИММЕТРИЗАЦИЕЙ ШЕСТИ ТОЧЕК НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Известно, что при конформном отображении полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ на полуплоскость $\text{Im } t > 0$, осуществляемом дробно-линейной функцией $t = l(\omega)$ (рисунок, б, в), на границах этих



полуплоскостей можно произвольно задать соответствия только для трех пар точек [1]. Однако в радиотехнике встречаются задачи расчета емкости полосковых линий передачи ТЕМ-волн [2], при решении которых методом конформных отображений приходится следить за соответствием шести пар точек на границах отображаемых областей. Чтобы это оказалось возможным, следует не задавать конкретных значений параметров α, β, γ (рисунок, в), а отыскивать их из условий симметрии $t_{N_1} = t_{N_2}, t_{M_1} = t_{M_2}, t_p = t_Q$.

Рассмотрим сначала дробно-линейную функцию вида

$$\frac{\omega - \omega_{M_2}}{\omega - \omega_Q} \frac{\omega_p - \omega_Q}{\omega_p - \omega_{M_2}} = \frac{t + \beta}{t + \alpha} \frac{2\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (1)$$

Она связывает рассматриваемые полуплоскости (рисунок б, в) с соответствием точек на границах $\omega \{ \omega_{M_2}, \omega_Q, \omega_p \} \rightarrow t \{ -\beta, -\alpha, \alpha \}$. Дополнительное требование соответствия четвертой пары точек $\omega_{M_1} \rightarrow \beta$ приводит к соотношению

$$\frac{\alpha}{\beta} = A_0 \equiv 1 - \frac{2}{A} \sqrt{1-A} (1 - \sqrt{1-A}) < 1, \quad 0 < A < 1; \quad (2)$$

$$A = \frac{\omega_{M_1} - \omega_{M_2}}{\omega_{M_1} - \omega_Q} \frac{\omega_p - \omega_Q}{\omega_p - \omega_{M_2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi e_1}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi L_1}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi S_2}{H} - \operatorname{ch} \frac{\pi S_1}{H}}{\operatorname{ch} \frac{\pi e_1}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi S_2}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi L_1}{H} - \operatorname{ch} \frac{\pi S_1}{H}}.$$

Затем рассмотрим отображающую дробно-линейную функцию $t = t(\omega)$ (рисунок, б, в) с соответствием точек $\omega \{ \omega_{N_2}, \omega_{M_2}, \omega_{M_1} \} \rightarrow t \{ -\gamma, -\beta, \beta \}$. Дополнительное требование $\omega_{N_1} \rightarrow \gamma$ приводит к соотношению

$$\frac{\gamma}{\beta} = B_0 \equiv 1 + \frac{2}{B} \sqrt{1-B} (1 + \sqrt{1-B}) > 1, \quad 0 < B < 1; \quad (3)$$

$$B = \frac{\omega_{N_1} - \omega_{N_2}}{\omega_{N_1} - \omega_{M_2}} \frac{\omega_{M_1} - \omega_{M_2}}{\omega_{M_1} - \omega_{N_2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi e_2}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi L_2}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi e_1}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi L_1}{H}}{\operatorname{ch} \frac{\pi e_2}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi L_1}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi e_1}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi L_2}{H}}.$$

И, наконец, дробно-линейная функция $t = t(\omega)$ с соответствием точек $\omega \{ \omega_{N_2}, \omega_Q, \omega_P \} \rightarrow t \{ -\gamma, -\alpha, \alpha \}$ и требованием $\omega_{N_1} \rightarrow \gamma$ дает для того же отображения функцию

$$\frac{\gamma}{\alpha} = C_0 = 1 + \frac{2}{C} \sqrt{1-C} (1 + \sqrt{1-C}) > 1, \\ 0 < C < 1; \quad (4)$$

$$C = \frac{\omega_{N_1} - \omega_{N_2}}{\omega_{N_1} - \omega_Q} \frac{\omega_P - \omega_Q}{\omega_P - \omega_{N_2}} = \\ = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi e_2}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi L_2}{H}}{\operatorname{ch} \frac{\pi e_2}{H} + \operatorname{ch} \frac{\pi S_2}{H}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi S_2}{H} - \operatorname{ch} \frac{\pi S_1}{H}}{\operatorname{ch} \frac{\pi L_2}{H} - \operatorname{ch} \frac{\pi S_1}{H}}.$$

Можно потребовать, чтобы во всех трех случаях (2)–(4) была одна и та же функция. Тогда она одновременно симметризует три пары точек N_1 и N_2 , M_1 и M_2 , P и Q , и три уравнения $\alpha = A_0\beta$, $\gamma = B_0\beta$, $\gamma = C_0\alpha$ должны удовлетворяться одновременно. Это дает линейную однородную систему уравнений для α , β , γ . Определитель системы $\Delta = A_0C_0 - B_0 = 0$. Из нее с точностью до постоянного множителя находятся параметры отображающей функции α , β , γ , например

$$\alpha = A_0 < 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = B_0 > 1. \quad (5)$$

Найденные значения α , β , γ позволяют записать дробно-линейную функцию $t = t(\omega)$, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$ (рисунок, б) на полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ (рисунок, в) т. е. произвести необходимую симметризацию шести точек.

Применим предлагаемую методику к расчету погонной емкости системы (рисунок, а) представляющей собой поперечное сечение элементарной ячейки бесконечной решетки, составленной, например из полосковых линий [2]. На рисунке сплошными отрезками изображены металлические границы, а пунктирными — «магнитные границы», на которых выполняется условие $E_n = 0$. Для определения погонной емкости используем метод конформных отображений [1].

Если принять плоскость (рисунок, а) за плоскость комплексного переменного z , то функция $\omega(z) = \operatorname{ch} \frac{\pi z}{H}$ конформно отображит полуполосу $ABB'C$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$ (рисунок, б) соответствие точек на границах областей ясно из рисунка. Теперь используем дробно-линейную функцию типа (1) с параметрами (5), которая полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$ (рисунок, б) конформно отобразит на полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ (рисунок, в)

так, чтобы отображения металлических участков границ расположились симметричным образом. Выражения для A_0 , B_0 , C_0 получают вид (2)–(4). При указанном на рисунке в расположении потенциалов мнимая ось является осью симметрии и вдоль нее можно поставить «магнитную границу». Тогда функция

$$\tau(t) = \frac{t^2 - t_{M_1}^2}{t^2 - t_p^2} \frac{t_R^2 - t_p^2}{t_R^2 - t_{M_1}^2} = \frac{t^2 - 1}{(t/a)^2 - 1} \quad (6)$$

отобразит квадрант TRT' (рисунок, в) на верхнюю полуплоскость $\text{Im } \tau > 0$ (рисунок, г).

Эллиптический интеграл [3] вида

$$W = \frac{V}{K'} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{\tau}}{\kappa}, \kappa\right), \quad \kappa^2 = \frac{B_0^2 - 1}{C_0^2 - 1} < 1, \\ \kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$$

отображает полуплоскость $\text{Im } \tau > 0$ (рисунок, г) на прямоугольник M_1N_1RP (рисунок, д), и следовательно, является искомым комплексным потенциалом области, показанной на рисунке а. Здесь $F(\arcsin \kappa, \kappa)$ и $K' = K(\kappa')$ — эллиптические интегралы первого рода. Значение модуля эллиптических функций $\kappa \in [0, 1]$ определяется при отображении $\tau(t)$ и равно $\tau_{N_1} = \kappa^2$ (рисунок, г). Действительно, обозначим $u = WK'/V$ и рассмотрим отображение $\tau = \kappa^2 \text{sn}^2(u, \kappa)$, где $\text{sn}(u, \kappa)$ — эллиптический синус аргумента u и модуля κ ; тогда $u_{N_1} = K(\kappa)$ и $\text{sn}(k, \kappa) = 1$.

Зная комплексный потенциал, легко определить погонную емкость заряженной пластины PQ :

$$C = \epsilon \frac{2PR}{PM_1} = 2\epsilon \frac{K(\kappa)}{K'(\kappa)}. \quad (7)$$

По образцу рассмотренной задачи можно решать различные задачи гидро- и электростатики в тех случаях, когда для определения комплексного потенциала методом конформных отображений приходится симметризовать шесть точек.

Список литературы: 1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 680 с. 2. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств/Под ред. Вольмана В. И. — М.: Радио и связь, 1982. — 328 с. 3. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. — 236 с.

Поступила в редколлегию 06.03.86

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ПРОЦЕССА СУШКИ В ТРУБЕ-СУШИЛКЕ
ПРИ ПОНИЖЕННОМ ДАВЛЕНИИ**

Рассмотрим технологический процесс сушки движущейся распыленной композиции в потоке горячего газа при пониженном давлении. Движение противоточное.

Предполагается постоянство параметров, характеризующих процесс в поперечном сечении (одномерная модель) и распределенность параметров по длине трубы.

Процесс стационарный.

Исследование механизма сушки, анализ существующих математических моделей процессов сушки позволяет утверждать, что процесс сушки происходит неравномерно, т. е. с различной интенсивностью. Для получения более достоверной математической модели предполагается разбить процесс сушки не на два периода (постоянной скорости сушки и падающей), а на три периода (начальный период сушки, период постоянной скорости сушки и период падающей скорости сушки). Выделение начального периода сушки обусловлено существованием пониженного давления в трубе-сушилке. Следствие этого — низкая температура мокрого термометра.

В I периоде массообмен происходит в режиме неравномерного испарения, т. е. давление насыщенного пара воды больше общего давления. Процесс сушки описывается законом Герца—Кнудсена [1].

В периоде постоянной скорости сушки температура материала значительных изменений не претерпевает, сушка описывается формулой Дальтона [2].

В период падающей скорости сушки температура материала повышается, фронт влаги углубляется в материал, сушка осуществляется по закону Пуазейля [3].

В зависимости от условий протекания процесса (начальная температура материала, температура сушильного агента и т. д.) делается выбор периода (режима) сушки. Последнее не исключает возможность отсутствия второго режима или кратковременность первого.

Данный подход является наиболее общим и предполагает построение более точной математической модели.

Вследствие большой разницы между температурой мокрого термометра и температурой сушильных газов, а также отсутствия сил, препятствующих массопереносу, испарение в I и II периодах происходит очень интенсивно.

За исходную математическую модель берется система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dY_1(x)}{dx} = F_1(x; Y_1; Y_9; P); \quad \frac{dY_9(x)}{dx} = F_9(x; Y_1; Y_9; P);$$

с начальными условиями:

$$Y_1 = Y_1(0) = N_1; \quad Y_9 = Y_9(0) = N_9;$$

$$\text{где} \quad F_1(x; Y_1; Y_9; P) = -\frac{k_1 f_l}{\varepsilon}; \quad F_9(x; Y_1; Y_9; P) = \\ = -\frac{k_1 \{ \alpha [A_A - Y_9(x)] - f_l f_4 \}}{\varepsilon (c_0 k_3^A c_1 Y_1(x))}; \quad l = 1, 2, 3 \quad f_1 = l_P \varepsilon f_4 (Y_9(x) - N);$$

$$l_P = \frac{x_P}{N \sqrt{2\pi B_2 N}};$$

$$f_2 = k_2 (M - P + B_3 I_3 / C);$$

$$f_3 = \frac{M - P + B_3 I_3 / C}{1/k_2 + f_5}; \quad f_5 = \frac{8\mu r (1 - \sqrt[3]{\frac{Y_1(x)}{N_{кр}}})}{R_{кан}^2 \rho}.$$

$$M = 4,2 \cdot 10^{7,5(Y_9 - 273)/(Y_9 - 35)}; \quad \rho = \frac{M}{B_2 Y_9};$$

$$C = \frac{1}{P} \{ B_2 [I_0 (Y_1(x) - l_1) + l_4 l_8] + B_3 I_3; \\$$

$$A_A = \frac{A_1}{A_2}; \quad A_1 = I_0 \{ (c_0 k_3 + c_1 a_1) \alpha_0 - (c_0 k_3 + c_1 Y_1(x)) Y_9(x) - \\$$

$$- k_6 Y_1(x) + a_1 k_6 + a c_2 \alpha_0 - l_1 c_2 \alpha_0 \} + \alpha_0 (l_4 l_8 c_2 + c_3 I_3);$$

$$A_2 = I_0 c_2 Y_1(x) - I_0 c_2 l_1 - l_4 l_8 c_2 + c_3 I_3;$$

$$D = I_0 (Y_1(x) - l_1) + l_4 l_8 + I_3; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{(k_3 + Y_1(x)) k_4 C A_A}{k_5 D} - c A_A};$$

Y_1 — количество влаги, содержащейся в материале; Y_9 — температура материала; $f_{1, 2, 3}$ — поток влаги для каждого из периодов; k_1 — площадь поверхности частицы; k_3 — масса сухой частицы; I_0 — количество частиц, проходящих через 1 м^2 за 1 с ; I_3 — количество сушильного агента, проходящего через 1 м^2 за 1 с ; $N_{кр}$ — критическое содержание влаги; x — координата текущая; H — высота башни; c — теплоемкость; α — коэффициент теплообмена; f_4 — теплота испарения; r — ра-

диус частицы; P — давление; B — газовая постоянная; k_2 — коэффициент массообмена; $R_{\text{кап}}$ — радиус капилляра, $Y_i(0) = N_i$; $Y_i(H) = l_i$.

Индексы 0, 1, 2, 3 относятся соответственно к материалу, воде в материале, пару, сушильному агенту. S соответствует параметрам на линии насыщения.

Для численного решения предложенной системы разбиваем всю длину трубы-сушилки на n равных частей точками x_j , где $j=0, 1, \dots$

Просчет задачи производится методом Эйлера [4], т. е.

$$Y_{1,j+1} = Y_{1,j} + h(j) F_1(x_j; Y_{1,j}; Y_{9,j}; P); Y_{9,j+1} = Y_{9,j} + h(j) F_9(x_j; Y_{1,j}; Y_{9,j}; P).$$

Алгоритм программы состоит в следующем.

1. Ввод констант.
2. Присвоение начальных значений.
3. Вычисление $Y_{1,j+1}$; $Y_{9,j+1}$ по приведенным формулам.
4. Цикл по точкам.
5. Проверка на переключение режимов, т. е. переход от системы к системе, описывающей процесс сушки в каждом из периодов.

6. Вывод результатов.

Результаты получены с использованием ППП серии КРОТ. Решаем полученную систему последовательно, на каждом слое.

Начальные значения основных функций (Y_1 , Y_9) берутся из предыдущего слоя. Значения ряда параметров процесса сушки программно уточняются на каждом шаге. Таким образом, данная система представляет собой частично самонастраивающуюся систему. Программа написана на языке «Бейсик» и реализована на ЭВМ ВУМС-001.

Расчет произведен для сушилки композиции СМС на Первомайском химическом комбинате. Результаты расчетов представлены в таблице.

Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными.

x	y_1	$y_9 \cdot 10^2$
0,01	$1,151223326 \cdot 10^{-6}$	3,429782118
0,05	$2,14245737 \cdot 10^{-6}$	3,430102327
0,1	$2,072202476 \cdot 10^{-6}$	3,430162440
0,5	$1,720296434 \cdot 10^{-6}$	3,430737329
1	$1,278434315 \cdot 10^{-6}$	3,431819950
2	$3,820543862 \cdot 10^{-7}$	3,436830525
3	$3,638080722 \cdot 10^{-7}$	3,453449524
5	$3,697990859 \cdot 10^{-7}$	3,487031584
10	$3,63732270 \cdot 10^{-7}$	3,571961708
20	$3,635756095 \cdot 10^{-7}$	3,746667692
30	$3,630139113 \cdot 10^{-7}$	3,9292230063

Список литературы: 1. Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепло- и массообмен и волны в газожидкостных системах. — Новосибирск: Наука, 1984. — 301 с. 2. Киш Ласлоне М. И. Современное состояние методов расчета тепло- и массообмена в процессах сушки//Тепло- и массоперенос в процессах сушки и термообработки. Минск, 1970. — С. 80—98. 3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. — 736 с. 4. Бахвалов Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 512 с.

Поступила в редколлегию 11.03.86

УДК 517.518.8

А. В. КАМЫШАН, В. В. КАМЫШАН,
Т. И. ЛЕСИКОВА

О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА КОРРЕКТНОСТИ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу отыскания элементов гильбертова пространства. Пусть Y и F — гильбертовы пространства, размерность которых не предполагается конечной и $A:Y \rightarrow F$ (1) вполне непрерывное отображение. Требуется найти $y = A^{-1}f \in Y$, т. е. решить уравнение $Ay = f$ (2), когда имеется лишь приближенная информация о его правой части. При этом погрешность обусловлена как ошибками исходных данных, так и приближенным характером решения задачи. Предполагается, что для численного решения осуществлена дискретизация при помощи конечного числа определенных на F ограниченных линейных функционалов

$$\Phi[\circ] \equiv (\circ, g_v): F \rightarrow C, v = \overline{1, n}; n < \infty \quad (3)$$

(C — поле комплексных чисел) и известны приближенные значения этих функционалов от f :

$$f_v = (f, g_v) + e_v; v = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $e_v \in C$ — погрешность, обуславливаемая обоими вышеупомянутыми факторами; $g_v \in F^*$ — система функций, определяемая аппаратом для вычисления (или измерения) функционалов f_v ; F^* — сопряженное с F пространство.

Некорректность данной задачи обусловлена тем, что обратный оператор A^{-1} не является ограниченным. При решении ключевой проблемой является построение множества корректности, т. е. некоторого множества $M \subset Y$ возможных решений, для которых задача будет корректно поставленной по Тихонову. В данной работе при построении множества корректности существенно используется конкретный способ дискретизации [1].

Прежде всего заметим, что систему функционалов (3) следует рассматривать как некоторое отображение $\Phi: F \rightarrow C_n$ (5), где C_n — стандартное n -мерное векторное пространство, нор-

мированное при помощи обычной евклидовой метрики. Очевидно, отображение Φ является линейным и ограниченным, а в случае, когда множество $\{g_v\}_1^n$ линейно независимо, что мы и будем предполагать, сюръективным. В соответствии с этим сформулированная задача является задачей решения уравнения $Ky=f$ (6), где $K=\Phi A:Y \rightarrow C_n$ — композиция отображений A и Φ ; $f \in C_n$ — вектор, имеющий своими компонентами числа (4).

Очевидно, справедливы следующие утверждения: 1) отображение K есть линейная ограниченная сюръекция ранга n ; 2) дефект ядра N отображения K равен n , т. е. дополнения Y_n ядра N до Y есть конечномерное гильбертово пространство размерности n .

Как показано в [2], множеством корректности для линейного отображения является, в частности, конечномерное подпространство, принадлежащее области определения этого отображения. Следовательно, подпространство Y_n является множеством корректности данной задачи.

Сужение $K_n:Y_n \rightarrow C_n$ отображения K на Y_n имеет тривиальное ядро, поэтому уравнение $K_n y = \bar{f}$ (7) для всех $\bar{f} \in C_n$ однозначно разрешимо на Y_n .

При построении множества корректности Y_n использована лишь информация о дискретизации, т. е. вычислительной модели. Если кроме этого имеется дополнительная информация, то оно может быть расширено [2] до алгебраической суммы $M=Y_n+Q$, где $Q \subset Y$ — компактное подмножество, которое может быть определено исходя из физического смысла задачи. Если же дополнительной информации нет, то корректным решением задачи является решение уравнения (7).

Оценим устойчивость этого решения. Пространства Y_n и C_n будем отождествлять с их сопряженными Y_n^* и C_n^* соответственно. Скалярное произведение в $Y_n(C_n)$ обозначим через $(\cdot, \cdot)_Y((\cdot, \cdot)_C)$. В этом случае Y_n есть линейная оболочка множества $\{\omega_v\}_1^n$, где $\omega_v = A^* g_v$, $v = \overline{1, n}$, $A^*:F \rightarrow Y$ — отображение, сопряженное с A .

Приведем явный вид отображения K_n . Для каждого $y \in Y_n$ отображение K_n ставит в соответствие последовательность $\bar{f} = \{f_v\}_1^n$ такую, что $f_v = (y, \omega_v)_Y$. Сопряженное отображение K^* для всех $\bar{f} \in C_n$ определено выражением

$$K^* \bar{f} = \sum_{v=1}^n f_v \omega_v \in Y_n.$$

Самосопряженный оператор $KK^*:C_n \rightarrow C_n$ есть матрица Грамма последовательности $\{\omega_v\}_1^n$. В случае линейной независимости $\{\omega_v\}_1^n$ она не вырождена. Ее собственные вектора

$\bar{u}_i$, соответствующие собственным значениям g_i , образуют ортогональный базис $\{\bar{u}_i\}_1^n$ в C_n . Будем предполагать $\{q_i\}_1^n$ невозрастающей последовательностью, а $\{\bar{u}_i\}_1^n$ — нормированной: $(\bar{u}_i, \bar{u}_j)_C = \delta_{ij}$.

Последовательность $\{u_i\}_1^n$, $\left[u_i = \frac{1}{\sqrt{q_i}} K^* \bar{u}_i \right]$ является ортонормированным базисом в Y_n . В самом деле,

$$(u_i, u_j)_Y = \frac{1}{\sqrt{q_i q_j}} (K^* u_i, K^* u_j)_Y = \frac{1}{\sqrt{q_i q_j}} (u_i, K K^* u_j)_Y = \sqrt{\frac{q_j}{q_i}} \delta_{ij}$$

Введенные базисы $\{u_i\}_1^n$ и $\{\bar{u}_i\}_1^n$ позволяют представить решение суммой $y = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ (8), где $a_i = \frac{1}{\sqrt{q_i}} (\bar{f}, \bar{u})_C$

Пусть y_0 — решения при $e_v = 0$, $v = \overline{1, n}$, тогда $y = y_0 + d$, где $d \in Y_n$ — погрешность решения. По аналогии с (8) представим суммой $d = \sum_{i=1}^n B_i u_i$, где $B_i = \frac{b_i}{\sqrt{q_i}}$; $b_i = (e, \bar{u}_i)_C$; $\bar{e} = \{e_v\}_1^n \subset C_n$ — погрешность исходных данных.

Очевидно,

$$\|d\|^2 = (d, d)_Y = \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{q_i}.$$

Вычислим математическое ожидание E этой величины в предположении, что e_v — некоррелированные, равномерно распределенные на интервале $[-e, e]$ случайные величины. Поскольку

$$E[B_i^2] = \frac{e^2}{3} = E[e_v], \text{ то } E[\|d\|^2] = \frac{e^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}. \quad (9)$$

Полученное выражение показывает, что погрешность решения определяется погрешностью исходных данных и собственными числами оператора KK^* . Примечательно, что в этом выражении нет зависимости от получаемого решения, т. е. полученная оценка — априорная величина.

При больших величинах погрешностей исходных данных и (или) наличия в спектре $\{q_i\}_1^n$ слишком малых q_i погрешность (9) решения может оказаться неприемлемо велика. В этом случае необходимо дальнейшее сужение множества корректности — второй этап регуляции, если под первым понимать построение множества Y_n .

Оптимальным способом регуляризации, подсказываемым видом выражения (9), является уменьшение размерности подпространства Y_n путем исключения из множества $\{u_i\}_1^n$, на которое натянуто множество Y_n , элементов, соответствующих минимальным q_i .

Список литературы: 1. Иванов В. К., Васин В. В., Танапа В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 230 с. 2. Камышан А. В. Эффективное решение определенного класса задач обработки экспериментальных данных//Докл. АН УССР. — 1981. — № 19. — С. 23—24.

Поступила в редколлегию 04.04.86

СОДЕРЖАНИЕ

Домбровский Г. А., Ле Тхай Тхань. К задаче С. А. Чаплыгина о дозвуковом истечении газа из бесконечно широкого сосуда	3
Жакин А. И. О влиянии механизмов проводимости жидких диэлектриков на структуру электроконвективных течений	7
Иевлев И. И., Попова Л. Н. Численное определение поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом поле	19
Коробов В. И., Скляр Г. М., Крутинь В. И. Решение одной задачи оптимального синтеза с помощью функции управляемости	26
Гавриляко В. М. Численное построение функции управляемости	40
Сохин А. С. Управление эволюционной системой, описываемой нестационарным уравнением, односкоростного переноса	46
Баранов В. В., Подцыкин Н. С., Харыбин Н. И. Методы оптимальных решений в управляемых марковских системах с ненаблюдаемым состоянием	49
Чунеду О. С. Начальное многообразие задачи Коши для вырожденной системы линейных однородных стохастических уравнений	53
Зефирова В. Н., Коваль В. А., Куценко Н. Т., Подольский Е. Н. Алгоритм решения одной задачи управления при наличии возмущения	56
Винарский В. Я. Об оптимизации периодического размещения трехмерных многогранников	60
Болтонов А. И., Сологуб В. Г. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода в задаче рассеяния волн на двух лентах	63
Полтавский Л. Н. Асимптотика решений бесконечных систем специального вида и уравнение Абеля	73
Ахизер Т. А. Сходимость траекторий динамических систем, порожденных нестягивающими отображениями	84
Киржнер В. М., Любич Ю. И. Об одной динамической системе, возникающей в математической генетике	91
Тютюников Р. Б. Исследование взаимодействия отбора и мутаций в аутосомном диаллельном локусе	95
Кучко Л. П. Функциональные уравнения с вырожденным преобразованием аргумента	98
Лесик И. И., Кондратьев Б. В., Кондратьев А. Б. К вопросу выполнения конформного отображения с симметризацией шести точек на границе области	101
Салыга В. И., Русецкий А. И. Математическое описание технологического процесса сушки в трубе-сушилке при пониженном давлении	105
Камышан А. В., Камышан В. В., Лексикова Т. И. О построении множества корректности при дискретизации обратной задачи	108

2/3 5-1-9