ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В L^2 ПО ЛИНЕЙНЫМ КОМБИНАЦИЯМ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Д. Головин

Базис $\{x_k\}$ гильбертова пространства H называют, следуя Н. К. Бари, *базисом Рисса*, если

$$m\|x\|^2 \leqslant \sum |(x, x_k)|^2 \leqslant M\|x\|^2$$

при некоторых положительных m и M и любом $x \in H$.

В предлагаемой статье изучаются базисы Рисса, образованные функциями специального вида. При этом используется тот факт, что полная система $\{x_k\}$ есть базис Рисса в том и только в том случае, когда

1) существует система $\{h_k\}$, *сопряженная* с $\{x_k\}$, то есть такая, что $(x_k, h_j) = \delta_{kj}$, и

2) ряды

$$\sum |(x, x_k)|^2, \ \sum |(x, h_k)|^2$$

сходятся при любом $x \in H$ (см. [1]).

1. Пусть λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — различные между собой комплексные числа. Обозначив через $\{\lambda_k \mid \alpha_k\}$ последовательность, в которую каждое число λ_k входит α_k раз, разобьем эту последовательность на непересекающиеся классы Λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Элементы класса Λ_k обозначим через

$$\mu_k^0, \mu_k^1, \ldots \mu_k^{\nu_k - 1},$$

где ν_k — число элементов в классе. Если класс Λ_k составлен из чисел $\lambda_r, \lambda_s, \ldots \lambda_t$, то $\nu_k = \alpha_r + \alpha_s + \ldots + \alpha_t$.

Положим

$$\widehat{e_{kj}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^{i\zeta t}}{\omega_{kj}(\zeta)} d\zeta \ \ (j = 1, \ldots \nu_k; \ k = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где

$$\omega_{kj}(\zeta) = \frac{\zeta - \mu_k^0}{(j-1)!} (\zeta - \mu_k^1) \ldots (\zeta - \mu_k^{j-1}) \ \ (j = 1, \ldots \nu_k) - \tag{2}$$

— полиномы, связанные с классом Λ_k, и C_k — контур, охватывающий все точки μ_k^i $(0 \leqslant i < \nu_k)$. Вид функций $\widehat{e_{kj}}(t)$, очевидно, существенным образом зависит от способа нумерации чисел μ_k^i внутри классов Λ_k. При $\mu_k^0 = \lambda_k$, $\nu_k = \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ получаем систему функций

$$e_{kj}(t) = (it)^{j-1} e^{i\lambda_k t} \ \ (j = 1, \ldots \alpha_k; \ k = 1, 2, \ldots),$$

а при $\alpha_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — систему $\{e^{i\lambda_k t}\}$.

Будем говорить, что система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ есть *Λ-базис* (отвечающий данному разбиению последовательности $\{\lambda_k \mid \alpha_k\}$ на классы Λ_k), если система $\{\widehat{e_{kj}}\}$ является базисом Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$ при любом способе нумерации чисел внутри классов. Базис Рисса системы $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — это Λ-базис при $\overset{0}{\mu}_k = \lambda_k$, $\nu_k = \alpha_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$*.

Ниже будут даны некоторые условия, при которых система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ является Λ-базисом, а также будет показано, что свойство этой системы быть Λ-базисом устойчиво, то есть сохраняется при малых смещениях показателей.

2. Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Если последовательность комплексных чисел $\{\zeta_k\}$ такова, что при некоторых положительных h и δ*

$$|\operatorname{Im}\zeta_k| \leqslant h \ (k = 1, 2, \ldots); \ |\zeta_k - \zeta_j| > \delta \ (k \neq j), \tag{3}$$

то существует постоянная $C = C(a, b; h, \delta)$ $(-\infty < a < b < \infty)$ такая, что

$$\int_a^b \left|\sum c_k e^{i\zeta_k t}\right|^2 dt \leqslant C \sum |c_k|^2$$

для любой конечной системы комплексных чисел c_k.

Доказательство. Обозначим через n_k ближайшее к ζ_k целое число и предположим с самого начала, что $n_k \neq n_j$ при $k \neq j$. Это, очевидно, не изменит общности приводимого ниже рассуждения, так как вся последовательность $\{\zeta_k\}$ может быть разбита на конечное число последовательностей, обладающих указанным выше свойством.

Прежде всего,

$$\int_a^b \left|\sum c_k e^{i\zeta_k t}\right|^2 dt = \sum_{k\neq j}\sum c_k \bar{c}_j \int_a^b e^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t} dt + \sum |c_k|^2 \int_a^b |e^{i\zeta_k t}|^2 dt,$$

где вторая сумма в правой части не превосходит постоянной, зависящей лишь от h, умноженной на $\sum |c_k|^2$. Далее, интегрирование по частям дает

$$\int_a^b e^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t} dt = \frac{1}{i(n_k - n_j)} \int_a^b e^{i(\delta_k - \bar{\delta}_j)t} de^{i(n_k - n_j)t} =$$

$$= \frac{1}{n_k - n_j} \left\{ -ie^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t} \Big|_a^b - \int_a^b (\delta_k - \bar{\delta}_j) e^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t} dt \right\},$$

где $\delta_k = \zeta_k - n_k = O(1)$ $(k \to 0)$. После этого получаем:

$$\sum_{k\neq j}\sum c_k \bar{c}_j \int_a^b e^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t} dt = -i \sum_{k\neq j}\sum \frac{c_k c_j e^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t}}{n_k - n_j}\Bigg|_a^b -$$

$$- \int_a^b \sum_{k\neq j}\sum \frac{c_k \bar{c}_j (\delta_k - \bar{\delta}_j)}{n_k - n_j} e^{i(\zeta_k - \bar{\zeta}_j)t} dt.$$

Требуемый результат получается теперь применением неравенства Гильберта ([2], стр. 284), в силу которого

$$\left|\sum_{k\neq j}\sum \frac{A_k B_j}{k - j}\right| < 2\pi \left\{\sum |A_k|^2 \sum |B_j|^2\right\}^{1/2}$$

для любых комплексных A_k и B_j.

---

* Пусть $\inf |\lambda_k - \lambda_j| = 0$ $(k \neq j)$. Тогда система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ не является базисом Рисса (см. замечание к теореме 1), однако, с помощью теоремы 3 можно показать, что в некоторых случаях она может быть Λ-базисом. Следовательно, по крайней мере в таких случаях, введение понятия Λ-базиса может оказаться полезным.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{\zeta_k\}$ *удовлетворяет условиям леммы 1, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_a^b f(t)\,e^{i\zeta_k t}\,dt\right|^2 \leqslant C\int_a^b |f(t)|^2\,dt \quad (-\infty < a < b < \infty),$$

где $C = C(a, b; h, \delta)$ *.

Доказательство. Положим

$$c_k = \int_a^b f(t)\,e^{i\zeta_k t}\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2 = \int_a^b f(t)\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_k e^{i\zeta_k t}\,dt \leqslant \left\{\int_a^b |f(t)|^2\,dt\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{N}\bar{c}_k e^{i\zeta_k t}\right|^2 dt\right\}^{1/2}$$

и для завершения доказательства осталось лишь применить лемму 1 ко второму интегралу в правой части.

3. Переходим к построению системы, сопряженной с $\{\widehat{e}_{k_j}\}$.

Лемма 3. *Для того чтобы система* $\{\widehat{e}_{k_j}\}$ *была минимальной в* $L^2(-\pi, \pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция* $\Phi(\lambda)$ *степени* $\leqslant \pi$, *имеющая нули кратности* α_k *в точках* λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *и удовлетворяющая условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Phi(x)|^2}{1+x^2}\,dx < \infty. ^{**} \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим целые функции, которые при λ, лежащем вне Γ_k, определяются равенствами

$$\widehat{H}_{k_j}(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{\widehat{\omega}_{kj}(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\,\frac{d(\zeta)}{\lambda-\zeta}, \tag{5}$$

где

$$\widehat{\omega}_{k1}(\zeta) = 1;\ \widehat{\omega}_{kj}(\zeta) = \frac{(j-2)!}{(j-1)!}\,\omega_{k,\,j-1}(\zeta)\ (j = 2, \ldots \nu_k)$$

и Γ_k — контур, целиком лежащий внутри C_k, охватывающий все точки μ_k^i $(i = 0, 1, \ldots \nu_k - 1)$ и не содержащий внутри охватываемой замкнутой области других точек λ_k.

Ясно, что $\widehat{H}_{kj}(\lambda)$ $(j = 1, \ldots \nu_k;\ k = 1, 2, \ldots)$ — целые функции степени $\leqslant \pi$ из класса $L^2(-\infty, \infty)$. По теореме Палея и Винера о представлении таких функций

$$\widehat{H}_{kj}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\widehat{h}_{kj}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

где $\widehat{h}_{kj}(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ $(j = 1, \ldots \nu_k;\ k = 1, 2 \ldots)$. Докажем, что $\{\widehat{h}_{kj}\}$ — система, сопряженная с $\{\widehat{e}_{kj}\}$.

---

* Близкие факты имеются у многих авторов. См., например, [3], [4], [5].

** См. также [8] и [7], где имеются аналогичные предложения.

В самом деле, по определению функций $\widehat{e}_{kj}(t)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{e}_{ni}(t)\widehat{h}_{kj}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\widehat{H}_{kj}(\zeta)}{\omega_{ni}(\zeta)}\,d\zeta,$$

где правая часть при $k \neq n$ равна нулю, так как подынтегральная функция голоморфна внутри C_n. Предполагая поэтому $n = k$, подставим в правую часть первоначальное выражение для $\widehat{H}_{kj}(\zeta)$ и изменим порядок интегрирования. Внутренний интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{\Phi(\zeta)}{\omega_{ki}(\zeta)}\frac{d\zeta}{\lambda-\zeta} = \frac{\Phi(\lambda)}{\omega_{ki}(\lambda)} \quad (\lambda \in \Gamma_k),$$

следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{e}_{ki}(t)\,\widehat{h}_{kj}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{\widehat{\omega}_{kj}(\zeta)}{\omega_{ki}(\zeta)}\,d\zeta = \delta_{ij}.$$

С другой стороны, если система $\{\widehat{e}_{kj}\}$ минимальна, то минимальна и система $\{e_{kj}\}$, то есть существует последовательность $\{h_{kj}\}$, сопряженная с $\{e_{kj}\}$. Целая функция

$$\Phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\int_{-\pi}^{\pi} h_{11}(t)\,e^{i\lambda t}dt$$

имеет в точках λ_k нули кратности α_k и

$$\frac{\Phi(x)}{x-\lambda_1} \in L^2(-\infty, \infty).$$

Тем самым лемма доказана.

Заметим еще, что попутно нами было получено следующее важное для дальнейшего равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\widehat{h}_{kj}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,F(x)\,dx \int_{\Gamma_k} \frac{\widehat{\omega}_{kj}(\zeta)\,d\zeta}{\Phi(\zeta)\,(x-\zeta)}, \tag{6}$$

где $\{\widehat{h}_{kj}\}$ — система, сопряженная с $\{\widehat{e}_{kj}\}$, $\Phi(\lambda)$ — функция, упоминаемая в формулировке леммы 3, $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ и

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ixt}\,dt.$$

4. Основной результат статьи можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 1. *Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ была Λ-базисом, являются:*

а) все числа λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < h$;

б) последовательность $\{\nu_k\}$ ограничена;

в) существует целая функция $\Phi(\lambda)$ степени $\leqslant \pi$, обращающаяся в точках λ_k в нуль кратности α_k и удовлетворяющая при любом способе нумерации чисел μ_k^i внутри классов Λ_k и любой функции $F(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\nu_k}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\,F(x)\,dx\int_{\Gamma_k}\frac{\widehat{\omega}_{kj}(\zeta)\,d\zeta}{\Phi(\zeta)\,(x-\zeta)}\right|^2 < \infty,$$

где Γ_k — *контур, целиком лежащий внутри* C_k, *охватывающий все точки* μ_k^i $(i = 0, 1, \ldots \nu_k - 1)$ *и не содержащий других точек* λ_k;

г) система $\{e_{kj}\}$ *полна в* $L^2(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость сформулированных условий.

Пусть система $\{\widehat{e}_{kj}\}$ отвечает способу нумерации, при котором

$$|\operatorname{Im} \mu_k^i| \leqslant |\operatorname{Im} \mu_k^0| \quad (i = 1, \ldots \nu_k - 1).$$

Если $\{\widehat{e}_{kj}\}$ — базис Рисса, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{e}_{kj}(t)\, dt \right|^2$$

сходится для любой функции $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$, поэтому

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{e}_{k1}(t)\, dt = 0$$

и

$$\frac{\operatorname{sh}(2\pi \operatorname{Im} \mu_k^0)}{\operatorname{Im} \mu_k^0} = \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{e}_{k1}(t)|^2\, dt = O(1). \quad (k \to \infty),$$

так как из слабой сходимости следует ограниченность по норме. Тем самым необходимость условия *а*) доказана.

Теперь нужно доказать, что числа ν_k $(k = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности. Прежде всего, докажем, что

$$\max_{1 \leqslant i < \nu_k} |\mu_k^0 - \mu_k^i| = O(1) \quad (k \to \infty).$$

Если система $\{\widehat{e}_{kj}\}$ является базисом Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{h}_{kj}(t)\, dt \right|^2 \tag{7}$$

сходится при любой функции $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$, где $\{\widehat{h}_{kj}\}$ — система, сопряженная с $\{\widehat{e}_{kj}\}$. Поэтому, если существует бесконечная последовательность чисел ν_k, превышающих число 2, то

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{h}_{k2}(t)\, dt = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{h}_{k2}(t)|^2\, dt = O(1) \quad (k \to \infty).$$

Предположим, что выбран способ нумерации, при котором

$$|\mu_k^0 - \mu_k^1| = \max_{1 \leqslant i < \nu_k} |\mu_k^0 - \mu_k^i|.$$

Тогда при $k \to \infty$

$$\widehat{e}_{k2}(t) = \frac{e^{i\mu_k^0 t} - e^{i\mu_k^1 t}}{\mu_k^0 - \mu_k^1} = O(|\mu_k^0 - \mu_k^1|^{-1}).$$

Следовательно,

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{e}_{k2}(t)\,\widehat{h}_{k2}(t)\,dt \leqslant \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{e}_{k2}(t)|^2\,dt \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{h}_{k2}(t)|^2\,dt\right\}^{1/2} = O(|\mu_k^0 - \mu_k^1|^{-1}).$$

Тем самым высказанное утверждение доказано.

Перейдем к доказательству необходимости условия *б*). Предположим, что последнее не выполняется. Это означает, что найдутся последовательность натуральных чисел $\{k_r\}$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_r\}$ такие, что (1) в каждом классе Λ_{k_r} имеется по крайней мере r чисел $\tilde{\mu}^0_{k_r}, \ldots \tilde{\mu}^{r-1}_{k_r}$, для которых $|\tilde{\mu}^i_{k_r} - \tilde{\mu}^j_{k_r}| \leqslant \varepsilon_r\,(i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots\ r-1)$; (2) $r!\varepsilon_r \to 0$ при $r \to \infty$.

Пусть $\{\widehat{e}_{kj}\}$ отвечает такому способу нумерации чисел внутри классов, при котором $\tilde{\mu}^i_{k_r} = \tilde{\mu}^i_{k_r}$ $(i = 0, 1, \ldots r-1;\ r = 1, 2, \ldots)$. Если $\{\widehat{e}_{kj}\}$ — базис Рисса, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{e}_{k_r r}(t)|^2\,dt = O(1) \quad (r \to \infty).$$

С другой стороны,

$$\widehat{e}_{k_r r}(t) = (it)^{r-1} e^{i\mu^0_{k_r} t} + O(1) \qquad (r \to \infty)$$

равномерно по $t \in [-\pi, \pi]$. Действительно,

$$(it)^{r-1} e^{i\mu^0_{k_r} t} = \frac{(r-1)!}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{e^{i\zeta t}}{(\zeta - \mu^0_{k_r})^r}\,d\zeta$$

и при $\zeta \in C_k$

$$\left| \frac{1}{\omega_{k_r r}(\zeta)} - \frac{(r-1)!}{(\zeta - \mu^0_{k_r})^r} \right| \leqslant r!\varepsilon_r,$$

если контур C_k выбран расположенным от точек $\mu^i_{k_r}$ на расстоянии большем единицы. Следовательно, при $r \to \infty$

$$\frac{2\pi^{2r-1}}{2r-1} = O\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |(it)^{r-1} e^{i\mu^0_{k_r} t}|^2\,dt\right\} = O(1).$$

Полученное противоречие доказывает необходимость условия *б*).

На основании равенства Парсеваля необходимость условия *в*) следует из сходимости ряда (7) и равенства (6).

Переходим к доказательству достаточности условий теоремы. Прежде всего, из условия *в*), теоремы Рисса ([2], стр. 171) и леммы 3 вытекает минимальность системы $\{\widehat{e}_{kj}\}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\widehat{h}_{kj}(t)\,dt \right|^2 < \infty,$$

где $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ и $\{\widehat{h}_{kj}\}$ — система, сопряженная с $\{\widehat{e}_{kj}\}$.

Далее, $\inf|\lambda - \mu| > 0$, где $\lambda \in \Lambda_k$; $\mu \in \Lambda_j$ $(k \neq j)$. В самом деле, в силу только что доказанного

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\widehat{h}_{k1}(t)\,dt = 0$$

при любом $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$, откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{h}_{k1}(t)|^2 dt = O(1)$$

при $k \to \infty$ и произвольном способе нумерации чисел внутри классов. Утверждение следует теперь из неравенства

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \{\widehat{e}_{k1}(t) - \widehat{e}_{j1}(t)\} \widehat{h}_{k1}(t)\, dt = O(|\mu_k^0 - \mu_j^0|) \quad (k \neq j),$$

справедливого независимо от способа нумерации чисел внутри классов.

Таким образом, возможен такой выбор контуров C_k, при котором $|\zeta - \lambda_i| > \delta$ для любого λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и любого $\zeta \in C_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и $|\zeta - z| > \delta$ для любых $\zeta \in C_k$, $z \in C_j$ $(k \neq j)$, где $\delta > 0$.

Покажем еще, что длины контуров C_k $(k = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы

$$\max_{1 \leqslant i < \nu_k} |\mu_k^0 - \mu_k^i| = O(1) \quad (k \to \infty).$$

Однако это соотношение, как было показано при доказательстве необходимости, является следствием условий *а*) и *в*).

Если теперь $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{e}_{kj}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{F(\zeta)}{\omega_{kj}(\zeta)} d\zeta,$$

где

$$F(\zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\zeta t} dt.$$

Обозначим через ζ_k точку контура C_k, в которой модуль функции $F(\zeta)$ принимает наибольшее на контуре значение. Тогда

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{e}_{kj}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{l_k \delta^{-j}}{2\pi} |F(\zeta_k)|,$$

где l_k — длина контура C_k, и по лемме 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widehat{e}_{kj}(t)\, dt \right|^2 < \infty,$$

что, в силу полноты системы $\{\widehat{e}_{kj}\}$ (полной одновременно с системой $\{e_{kj}\}$), завершает доказательство теоремы 1.

В процессе этого доказательства был получен результат, который полезно сформулировать в виде отдельного замечания.

Замечание. *Если* $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — Λ-*базис при данном разбиении последовательности* $\{\lambda_k \mid \alpha_k\}$ *на непересекающиеся классы* $\Lambda_k = \{\mu_k^i\}_{0 \leqslant i < \nu_k}$, *то*

1) $\max\limits_{1 \leqslant i < \nu_k} |\mu_k^0 - \mu_k^i| = O(1)$ *при* $k \to \infty$ *и*

2) $\inf |\lambda - \mu| > 0$ *при любых* $\lambda \in \Lambda_k$, $\mu \in \Lambda_j$ $(k \neq j)$.

5. **Теорема 2.** *Пусть система* $\{e_{kj}\}$ — *базис Рисса в* $L^2(-\pi, \pi)$ *и последовательность* $\{\lambda_k \mid \alpha_k\}$ *разбита на непересекающиеся классы* $\Lambda_k = \{\mu_k^i\}_{0 \leqslant i < \nu_k}$. *Тогда для того, чтобы система* $\{e^{i\lambda_k t}\}$ *была* Λ-*базисом,*

необходимо и достаточно, чтобы числа ν_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *были ограничены в совокупности и* $\max\limits_{1 \leqslant i < \nu_k} |\mu_k^0 - \mu_k^i| = O(1)$ $(k \to \infty)$.

Доказательство. Необходимость перечисленных условий следует из теоремы 1 и замечания к ней, поэтому необходимо доказать только достаточность.

Если $\{e_{kj}\}$ — базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$, то по теореме 1 все числа λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < h$. Поэтому, согласно той же теореме 1, достаточно доказать сходимость ряда $\sum\sum |A_{kj}|^2$, где

$$A_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \widehat{\omega}_{kj}(\zeta)\, \Omega(\zeta)\, d\zeta \qquad (j = 1, \ldots \gamma_k;\ k = 1, 2, \ldots)$$

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\Phi(\zeta)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x) F(x)}{x - \zeta}\, dx.$$

По теореме Коши интеграл A_{kj} можно представить в виде суммы интегралов по непересекающимся кружкам Γ_{ki} с центрами в точках μ_k^i $(i = 0, 1, \ldots \nu_k - 1)$ и достаточно малого фиксированного радиуса. Обозначим эти интегралы через A_{kji}. Тогда

$$A_{kji} = \sum_{m < j} a_m \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{ki}} (\zeta - \mu_k^i)^m\, \Omega(\zeta)\, d\zeta,$$

где $a_m = a_m(k, j, i)$ — коэффициенты разложения полинома $\widehat{\omega}_{kj}(\zeta)$ по степеням $(\zeta - \mu_k^i)$. В силу замечания к теореме 1, $a_m = O(1)$ при $k \to \infty$. С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{ki}} \frac{(\zeta - \mu_k^i)^m}{m!}\, \Omega(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, h_{r\, \overline{m+1}}(t)\, dt \qquad (\lambda_r = \mu_k^i),$$

где $\{h_{kj}\}$ — система, сопряженная с $\{e_{kj}\}$. На основании неравенства Коши

$$\Big|\sum_i A_{kji}\Big|^2 \leqslant \nu_k \sum_i |A_{kji}|^2$$

и

$$|A_{kji}|^2 \leqslant \sum_{m<j} |a_m m!|^2 \sum_{m<j} \Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, h_{r\, \overline{m+1}}(t)\, dt\Big|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} |A_{kj}|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, h_{kj}(t)\, dt\Big|^2 < \infty,$$

что и требовалось.

6. Из теоремы 1 могут быть получены различные признаки того, что система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ является Λ-базисом. Прежде чем привести один из них, докажем вспомогательное предложение.

Лемма 4. *Если последовательность комплексных чисел* $\{\zeta_k\}$ *такова, что при некоторых положительных* h и δ

$$|\operatorname{Im} \zeta_k| \leqslant h \ (k = 1, 2, \ldots); \ |\zeta_k - \zeta_j| > \delta \ (k \neq j),$$

то

$$\sup \sum |\zeta - \zeta_k|^{-2} < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем комплексным ζ, *для которых* $|\zeta - \zeta_k| \geqslant \varepsilon > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. В силу сделанных предположений каждый прямоугольник

$$R_n = \{|Re\zeta - n| \leqslant 1/2;\ |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant h\} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \ldots)$$

содержит не более N точек ζ_k, причем N не зависит от n. Если $Re\zeta \in R_m$, а $\zeta_k \in R_n$, то

$$\frac{1}{|\zeta - \zeta_k|^2} \leqslant \begin{cases} |m - n - 1|^{-2} & (n < m - 1) \\ \varepsilon^{-2} & (m - 1 \leqslant n \leqslant m + 1) \\ |n - m - 1|^{-2} & (n > m + 1) \end{cases}$$

Следовательно, $\sum |\zeta - \zeta_k|^{-2} \leqslant N(3/\varepsilon^2 + \pi^2/_3)$.

Следующая теорема дает сравнительно простые достаточные условия того, чтобы система $\{e^{i\lambda_k t}\}$ была Λ-базисом. В своей существенной части впервые она была установлена Б. Я. Левиным [6].

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k | \alpha_k\}$ *разбита на непересекающиеся классы* $\Lambda_k = \{\mu_k^i\}_{0 \leqslant i < \nu_k}$ так, что

$$\max_{1 \leqslant i < \nu_k} |\mu_k^0 - \mu_k^i| = O(1)$$

при $k \to \infty$. *Если*

1) *все числа* $\lambda_k (k = 1,\ 2,\ \ldots)$ *лежат в некоторой полосе* $|\operatorname{Im}\lambda| < h$;
2) *числа* ν_k *ограничены в совокупности*;
3) $\inf|\lambda - \mu| > 0$ *при любых* $\lambda \in \Lambda_k$, $\mu \in \Lambda_j$ $(k \neq j)$;
4) *существует целая функция* $\Phi(\lambda)$ *степени* π *с корнями кратности* α_k *в точках* $\lambda_k (k = 1,\ 2,\ \ldots)$ *такая, что*

$$0 < m \leqslant |\Phi(x + iH)| \leqslant M \qquad (-\infty < x < \infty)$$

при $H > 2h$, *то* $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — Λ-*базис* *.

Доказательство. Полнота системы $\{e_{kj}\}$ следует из условия 4) (см. [7]). Достаточно доказать, что выполняется условие *в* теоремы 1, которое может быть записано в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\nu_k} \left| \int_{\Gamma_k} \hat{\omega}_{kj}(\zeta)\, \Omega(\zeta)\, d\zeta \right|^2 < \infty,$$

где функция

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\Phi(\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x + iH) F(x + iH)}{x + iH - \zeta}\, dx$$

непрерывна на контуре Γ_k и, следовательно, принимает в некоторой точке ζ_k наибольшее по модулю значение. Предположения теоремы обеспечивают возможность такого выбора контуров Γ_k, при котором их длины ограничены в совокупности и выполняются неравенства $|\zeta_k - \zeta_j| > \delta$ $(k \neq j)$, $|\zeta_k - \lambda_j| > \delta$ при k, $j = 1,\ 2,\ \ldots$ и $\delta > 0$. Поэтому

$$\int_{\Gamma_k} \hat{\omega}_{kj}(\zeta)\, \Omega(\zeta)\, d\zeta = O\{|\Omega(\zeta_k)|\} \qquad (k \to \infty). \tag{8}$$

---

* Можно доказать, что из 1) и 4) следует существование разбиения, удовлетворяющего условиям 2) и 3) (см. [6]).

Поскольку функция $\Phi(\lambda)$ представима в виде

$$\Phi(\lambda) = Ce^{i\alpha\lambda} \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} (1 - \lambda/\lambda_k)^{\alpha_k}$$

(см. [7]) и

$$\ln\left|\frac{1-\zeta_k/\lambda_i}{1-(a_k+iH)/\lambda_i}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{(a_k-\sigma_i)^2+(b_k-\tau_i)^2}{(a_k-\sigma_i)^2+(H-\tau_i)^2} = O\left(\frac{1}{|\lambda_i - a_k - iH|^2}\right),$$

где $\zeta_k = a_k + ib_k$, $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$, то по лемме 4

$$|\Phi(\zeta_k)| = |\Phi(a_k + iH)|\, e^{O(1)} \geqslant m_1 > 0.$$

Так как функцию $F(\lambda)$ можно считать целой, конечной степени ($\leqslant \pi$), то по теореме Палея и Винера

$$\Phi(\lambda) F(\lambda) = \int_{-2\pi}^{2\pi} \theta(t) e^{-i\lambda t}\, dt,$$

где $\theta(t) \in L^2(-2\pi, 2\pi)$, откуда по теореме о свертке

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x+iH) F(x+iH)}{x+iH-\zeta_k}\, dx = -2\pi i \int_0^{2\pi} \theta(t)\, e^{-i\zeta_k t}\, dt.$$

Сходимость ряда $\Sigma|\Omega(\zeta_k)|^2$ следует теперь из леммы 2.

7. Прежде чем перейти к вопросу об устойчивости Λ-базиса, докажем одно вспомогательное предложение, являющееся обобщением соответствующей теоремы Палея и Винера [8].

Лемма 5. *Если $\{x_k\}$ — базис Рисса в гильбертовом пространстве H, то существует такое число $\alpha > 0$, что всякая система $\{y_k\}$ элементов пространства H, удовлетворяющая условию*

$$\left\| \sum c_k (x_k - y_k) \right\|^2 \leqslant \alpha^2 \sum |c_k|^2$$

при любой конечной системе комплексных чисел c_k, является базисом Рисса.

Доказательство. Необходимым и достаточным условием того, чтобы система $\{y_k\}$ была базисом Рисса, является существование такого обратимого линейного ограниченного оператора A, что $y_k = A\varphi_k$, где $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система (см. [1]). По условию, такой оператор, назовем его B, существует для системы $\{x_k\}$. Положим $y_k - x_k = C\varphi_k$. В силу сделанных предположений $\|C\| \leqslant \alpha$. Взяв поэтому $\alpha < \|B^{-1}\|^{-1}$, обозначим через A сумму операторов B и C. Ясно, что оператор $A = B(I + B^{-1}C)$ удовлетворяет поставленным условиям. Лемма доказана.

Перейдем теперь к теореме об устойчивости Λ-базиса. Пусть комплексные числа $\tilde{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) все различны. Через $\{\tilde{\lambda}_k | \beta_k\}$ будем обозначать последовательность, в которую каждое число $\tilde{\lambda}_k$ входит β_k раз, а через $\tilde{\Lambda}_k = \{\tilde{\mu}_k^i\}_{0 \leqslant i < \nu_k}$ — непересекающиеся классы, на которые эта последовательность разбита.

Теорема 4. *Если $\{e^{i\lambda_k t}\}$ — Λ-базис, то существует такое число ε_0, что всякая система $\{e^{i\tilde{\lambda}_k t}\}$ при выполнении условий*

$$|\mu_k^i - \tilde{\mu}_k^i| \leqslant \varepsilon_0 \quad (i = 0, 1, \ldots \nu_k - 1;\ k = 1, 2, \ldots)$$

также является Λ-базисом.

Доказательство. При достаточно малом ε_0 контур C_k будет охватывать все точки класса $\tilde{\Lambda}_k$. Кроме того, согласно замечанию к теореме 1, контуры C_k $(k = 1, 2, \ldots)$ могут быть выбраны так, чтобы $|\zeta - \lambda_i|$, $|\zeta - \tilde{\lambda}_i|$, $|\zeta - z| > \delta > 0$ при любых $\zeta \in C_k$, $z \in C_j$ $(k \neq j)$, λ_i и $\tilde{\lambda}_i$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots)$.

Если $\tilde{\omega}_{kj}(\zeta)$ $(j = 1, \ldots \nu_k)$ — полиномы, связанные с классом Λ_k, то полагаем

$$\tilde{e}_{kj}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{e^{i\zeta t}}{\tilde{\omega}_{kj}(\zeta)}\,d\zeta \quad (j = 1, \ldots \nu_k;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

При $\zeta \in C_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\left|\frac{1}{\tilde{\omega}_{kj}(\zeta)} - \frac{1}{\omega_{kj}(\zeta)}\right| < A\varepsilon_0,$$

где A зависит только от выбора контуров C_k. По определению функций $\hat{e}_{kj}(t)$ и $\tilde{e}_{kj}(t)$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\{\tilde{e}_{kj}(t) - \hat{e}_{kj}(t)\}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} F(\zeta)\left\{\frac{1}{\tilde{\omega}_{kj}(\zeta)} - \frac{1}{\omega_{kj}(\zeta)}\right\}d\zeta,$$

где $f(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ и функция

$$F(\zeta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{i\zeta t}\,dt$$

принимает наибольшее по модулю значение в некоторой точке ζ_k контура C_k. Так как по доказанному в теореме 1 все контуры C_k лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im}\zeta| < H$ и имеют ограниченную длину, то

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\{\tilde{e}_{kj}(t) - \hat{e}_{kj}(t)\}\,dt\right| \leqslant B\varepsilon_0|F(\zeta_k)|,$$

где B зависит только от H и δ. Следовательно, для любой конечной системы комплексных чисел c_{kj} $(j \leqslant \nu_k)$

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k,j} c_{kj}\{\tilde{e}_{kj}(t) - \hat{e}_{kj}(t)\}\,dt\right| \leqslant B\varepsilon_0\sum_{k,j}|c_{kj}F(\zeta_k)|.$$

Применяя неравенство Коши и лемму 2, получаем

$$\sum_{k,j}|c_{kj}F(\zeta_k)| \leqslant \left\{\sum_{k,j}|c_{kj}|^2 \cdot C\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt\right\}^{1/2},$$

где C зависит только от H и δ.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{k,j} c_{kj}\{\tilde{e}_{kj}(t) - \hat{e}_{kj}(t)\}\Big|^2 dt = \sup_{\|f\|=1}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k,j} c_{kj}\{\tilde{e}_{kj}(t) - \hat{e}_{kj}(t)\}\,dt\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant B^2C\varepsilon_0^2\sum_{k,j}|c_{kj}|^2.$$

Взяв ε_0 достаточно малым и применяя лемму 5, получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. «Уч. зап. МГУ», 4, вып. 148, 69—107, 1951.

2. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства, М., 1948.

3. A. Plancherel et G. Polya. Fonctions entiéres et intégrales Fourier multiples. Comm. Math. Helf., 9, 224—248 (1937).

4. R. P. Boas. A general moment problem, Amer. Journ. Math., 63, 361—370 (1941).

5. R. V. Duffin and A. C. Schaeffer. A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 72, № 2, 341—366 (1952).

6. Б. Я. Левин. О базисах показательных функций в L^2. «Зап. мат. отд. физ.-мат. фак-та Харьк. гос. ун-та и Харьк. матем. об-ва», 27, сер. 4 (1961).

7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.

8. R. E. A. C. Paley and N. Wiener. Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.