

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра теоретичної радіофізики

До захисту допущено

Кафедрою теоретичної радіофізики протокол № _____ від _____

завідувач кафедри _____ Вячеслав Хардіков

(підпис)

« ____ » _____ 2025 р.

Кваліфікаційна робота

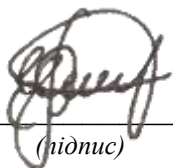
здобувача другого (магістерського) рівня вищої освіти

Моделювання електромагнітного розсіяння елементами складного
великогабаритного об'єкта

Спеціальність (спеціалізація) 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма Радіофізика та електроніка

Виконавець _____ Євгеній Рясний



(підпис)

Науковий керівник _____ Максим Легенький

(підпис)

Анотація

Надано стислу інформацію про радіолокацію, радіолокаційні станції, їх види та будову, розглянуто поняття ефективної площі розсіяння. Основні цілі цієї роботи – розробка методу визначення сумарної ефективної площі розсіювання декількох прямокутних пластин з використанням кутів Ейлера для подальшого використання цього методу при аналізі складного об'єкту, компонентами якого є прямокутні пластини. Проаналізована модель, що дозволяє представляти поверхні пластини у вигляді сукупності точкових локальних розсіювачів, визначення ефективної площі розсіяння пластини та сумарної ефективної площі розсіяння декількох розсіювачів, порівняння результатів.

Ключові слова: радіолокація, радіолокаційна станція (РЛС), радар, ефективна поверхня розсіяння (ЕПР), розсіювач, вторинне випромінювання, прямокутна пластина.

Робота містить 56 сторінок, 17 ілюстрацій та 15 джерел

Abstract

This work provides concise information about radiolocation, radar stations, their types and structure, and examines the concept of radar cross-section. The main objectives of this study are to develop a method for determining the total radar cross-section of several rectangular plates using Euler angles, with the aim of further applying this method to the analysis of a complex object composed of rectangular plate components. The analyzed model makes it possible to represent the surfaces of a plate as a set of point-like local scatterers, to determine the radar cross-section of a single plate and the total radar cross-section of multiple scatterers, and to compare the results.

Keywords: radiolocation, radar station (RS), radar, radar cross-section (RCS), scatterer, secondary radiation, rectangular plate.

The work contains 56 pages, 17 illustrations and 15 sources.

Зміст

Вступ.....	5
1. Загальна характеристика і види радіолокації.....	10
1.1. Класифікація радіолокаційних станцій.....	10
1.2. Будова та принцип роботи РЛС.....	13
2. Ефективна площа розсіювання.....	16
2.1. Загальне визначення.....	17
2.2. Сумарна ЕПР декількох точкових розсіювачів.....	20
2.3. Вторинне випромінювання плоскої поверхні.....	24
2.4. Визначення ЕПР пластини шляхом її заміни на 4 розсіювача.....	27
2.5. Особливі випадки при розрахунку ЕПР пластини і сумарної ЕПР чотирьох розсіювачів.....	31
3. Сумарне ЕПР двох прямокутних пластин.....	35
3.1. Кути Ейлера.....	36
3.2. Розрахунок ЕПР двох пластин, що розташовані під прямим кутом і під довільним кутом.....	40
4. ЕПР складного великогабаритного об'єкту.....	50
Висновок.....	53
Література.....	55

Вступ

Сучасний світ неможливо уявити без радіолокації – технології, яка дозволяє визначати місцезнаходження об'єктів на відстані за допомогою радіохвиль. Радіолокація відіграє важливу роль в авіації, навігації, метеорології, військовій сфері та навіть у повсякденному житті, наприклад, в автомобільних системах безпеки. З моменту появи в першій половині ХХ століття радіолокація пройшла шлях від експериментальних установок до високоточних цифрових комплексів. Сама назва «радіолокація» походить від двох латинських слів: *radiare* – випромінювати і *locatio* – місцезнаходження.

За початок історії радіолокації можна вважати відкриття електромагнітних хвиль (які були передбачені теорією Джеймса Максвелла) у 1886-1888 роках німецьким фізиком Генріхом Рудольфом Герцем. Він створив апарат, в якому використовував іскровий розряд як генератор електромагнітних хвиль, і приймач у вигляді дротяного кільця з невеликим зазором. При розряді між електродами генератора в приймальному кільці також виникала іскра, що підтвердило передачу енергії на відстань, тобто існування електромагнітних хвиль. Також Герцу вдалося дослідити швидкість поширення хвиль, їх заломлення, відбиття, і навіть поляризацію. Слід зазначити, що довжини хвиль, які генерував Герц були у межах від 2 до 5 метрів.

У 1897 році інженер Олександр Попов зі своїм асистентом проводив експеримент з радіозв'язку перебуваючи на флоті. Сенс експерименту полягав у передачі та прийому сигналу між двома кораблями, відстань між якими сягала до 5 кілометрів. На борті кораблів були встановлені телеграфні апарати для прийому та передачі сигналу. Результат експерименту був вдалий – сигнал вдалося прийняти, причому було виявлено вплив на приймач та передавач металевих конструкцій корабля, а також вплив на сигнал судна, що пропливало повз

передавач та приймач. Коли останнє траплялося – сигнал зникав і не фіксувався приймачем.

Наступним етапом розвитку радіолокації був патент 1904 року німецького інженера Крістіана Хюльсмейера, в якому він представив свій винахід для виявлення металевих об'єктів за допомогою відбитих хвиль. Його пристрій випромінював радіохвилі, що відбивалися від металевого корпусу корабля, а відбитий сигнал приймався антеною, і пристрій подавав звуковий або світловий сигнал, попереджаючи про виявлення перешкоди. Фактично це був перший прототип радару, а сам Хюльсмейер був першим, хто запропонував використовувати відбиті радіохвилі для виявлення об'єктів.

Стрімкого розвитку радіолокація зазнала у 1930-х роках та під час Другої Світової Війни, і саме тоді радіолокація переросла з ідеї в реальну науку і технологію, що дозволило активно використовувати її під час війни.

Наразі радіолокація грає ключову роль в авіації та військовій сфері: радары встановлюються на літаках для виявлення інших повітряних об'єктів, перешкод або хмар; за допомогою наземних радарів слідкують за літаками в зоні аеропорту або на маршрутах; радары допомагають виявляти ворожу наземну, повітряну або морську техніку, працюють як системи протиповітряної оборони. Також радіолокаційні станції використовують у морській навігації – для виявлення берегової лінії, інших морських суден або інших перешкод – особливо це важливо в туманну погоду та вночі; у метеорології – для визначення опадів та їх інтенсивності, швидкості та напрямку руху хмар, що важливо для прогнозування погоди; в астрономії для дослідження космосу; в геології та археології тощо.

Принцип роботи радіолокаційних станцій (РЛС) базується на відбитті хвиль від об'єкта і їх фіксуванні приймачем (але є види РЛС, що використовують інші методи, про це буде далі у цій роботі). Тут важливо розуміти, що кожен об'єкт по різному відбиває радіохвилі від себе: один може відбивати майже повністю, інший – частину відбивати, частину поглинати або розсіювати в різні

боки, третій – взагалі майже все випромінювання поглинати. У цій роботі буде розглянуто та визначено на конкретних прикладах одну з основних фізичних величин у радіолокації – ефектину площу розсіювання (ЕПР) – величину, що характеризує здатність об'єкта відбивати радіохвилі.

Визначення ЕПР представляє собою складну задачу. При цьому можна застосовувати, як експериментальні, так і теоретичні методи. При експериментальному визначенні ЕПР слід зважати на те, що за визначенням ЕПР визначається в дальній зоні, що вимагає застосування для проведення таких вимірювань спеціалізованих полігонів, а також є технічно складним та коштовним. Тому на етапі конструювання та проектування техніки здебільшого використовуються теоретичні підходи, які дозволяють передбачити ЕПР об'єкта та її зміну при застосуванні тих чи інших засобів зменшення помітності, за допомогою розрахунків. Якщо підходити до задачі про визначення ЕПР строго, то вона представляє собою дифракційну задачу. Такі задачі строго теоретично можуть бути розв'язані тільки для дуже обмеженої кількості відносно простих геометричних об'єктів. Тому для визначення ЕПР реальних об'єктів, геометрична форма яких є досить складною, слід використовувати чисельні методи. При цьому поверхня об'єкта, а зазвичай саме вона вносить суттєвий внесок в розсіюючі властивості об'єкта, розділяється на невеликі пласкі частини прямокутної або трикутної форми, які називаються фацетами. Внутрішня частина об'єкта може суттєво впливати лише у випадку наявності напівпрозорих частин поверхні, що дозволяють електромагнітним хвилям досягнути до внутрішніх елементів конструкції і без суттєвого згасання вийти назовні в напрямку до радара. Далі визначається розсіювання електромагнітних хвиль на фацетах. З огляду на те, що розмір фацетів є близьким до довжини хвилі електромагнітного випромінювання, виходить, що для реальних радіолокаційних об'єктів, розміри яких є суттєво більшими за довжину хвилі поля, доводиться використовувати дуже велику кількість фацетів. Це призводить до того, що такі задачі стають занадто складними і вимогливими з точки зору часу на моделювання навіть для сучасних

суперкомп'ютерів. Тому важливим є пошук нових спрощених методів оцінки радіолокаційної помітності об'єктів. Один із таких методів базується на тому, що як відомо, суттєвий внесок в ЕПР складного об'єкта вносять лише окремі частини його поверхні, які інколи називають "блискучими точками", а сумарна ЕПР потім представляє собою інтерференцію хвиль створених такими ділянками поверхні.

В даній роботі проводяться моделювання, які досить точно замінювати розсіяння електромагнітних хвиль на реальному складному об'єкті на модель розсіяння хвиль на низці таких ділянок. Такі ділянки представляються у вигляді точкових ізотропних розсіювачів з певною ЕПР, розташованих в певних просторових точках. Для побудови такої моделі спочатку розглядається питання про представлення за допомогою низки розсіювачів окремої частини його складної поверхні - прямокутного фацета. Далі розглядається питання про представлення за допомогою низки розсіювачів фацета, який відповідним чином переміщено та повернуто. Розглядається питання про інтерференцію випромінювання створеного розсіювачами, які представляють різні частини поверхні об'єкта. Надалі планується використати отриману модель для оптимізації розсіюючих властивостей складного об'єкта за допомогою відповідного маскуванню різних таких розсіювачів – різних ділянок його поверхні. Також отриману модель може бути в подальшому оптимізовано для визначення найбільш важливих для формування сумарного розсіяння ділянок поверхні (розсіювачів) та маскуванню саме їх. Для вищеописаних оптимізацій можливим є застосування сучасних методів штучного інтелекту, що дозволить в тому числі розв'язувати задачі класифікації складних об'єктів за виглядом їх радіолокаційного розсіяння.

Серед літератури присвяченої поняттю ефективної площі розсіювання різних тіл є багато робіт, в яких розглядаються питання схожі з тематикою даної роботи. Наприклад, методи визначення ефективної поверхні розсіювання простих об'єктів розглядаються у [1, 6], моделювання радіолокаційних цілей у вигляді декількох окремих розсіювачів [4], порівняння різних методів моделювання

електромагнітного розсіяння [3], визначення ЕПР складних об'єктів та об'єктів довільної форми з використанням програмного забезпечення MATLAB [2], визначення ЕПР моделі, що має вигляд секції ракети експериментально у безеховій камері та за допомогою моделювання, виконаного в програмному забезпеченні [5], визначення ЕПР простих об'єктів та складних об'єктів з РПМ та без нього [6, 7], тощо.

1. Загальна характеристика і види радіолокації

1.1. Класифікація радіолокаційних станцій

Галузь радіофізики і радіоелектроніки, основною метою якої є отримання інформації про об'єкт шляхом випромінювання та прийому радіохвиль, називається радіолокацією. Об'єкти радіолокації, які представляють практичний інтерес, називаються радіолокаційними цілями (далі просто ціль). Технічний засіб, що використовують у радіолокації має назву радіолокаційної станції. Радіолокаційна станція (РЛС) або радар (від англ. RADAR – **R**ADIO **D**ETECTION **A**ND **R**ANGING, «радіохвильове виявлення і визначення дальності») – технологія, завдяки якій визначають місцезнаходження у просторі повітряних, наземних та морських об'єктів, визначають їхню дальність від точки спостереження (РЛС) та, за потреби, їхні геометричні параметри. Радари використовують здебільшого випромінювання радіохвиль – найдовшого типу хвиль з всього діапазону електромагнітного випромінювання, що мають довжину хвилі від 1 мм (30 ГГц) до більше ніж 100 км (< 3 кГц). Радіолокація використовує метод випромінювання радіохвиль і реєстрації їх відбиття від об'єктів. При поширенні хвилі у просторі, вона збуджує у провіднику змінний струм частота якого відповідає частоті хвилі. Радіохвилі, відповідно, виникають при проходженні по провіднику змінного струму частота якого входить у частотний діапазон радіохвиль. Цю властивість у радіотехніці використовують для конструювання антен, які є невід'ємною частиною радіостанцій. При взаємодії хвилі з середовищем, яке частково має як властивості провідника, так і властивості діелектрика, відбуваються більш складні процеси, при яких поля, зумовлені створеними таким чином струмами накладаються на поля, зумовлені поляризаційними змінами в середовищі.

Розрізняють два загальні типи радіолокації: активну та пасивну. Активна радіолокація в свою чергу може бути з активною та пасивною відповіддю. При активній радіолокації з пасивною відповіддю (рис. 1а) РЛС виявляє ціль за допомогою своїх же хвиль, які будучи відбитими повертаються у зворотному

напрямку (вторинне випромінювання) і фіксуються приймачем. Але не завжди таким способом можливо ефективно визначати цілі – поверхня об’єкта може бути покрита спеціальним радіопоглинаючим матеріалом, що значно знижує відбиття хвиль. Інша ситуація – хвилі від поверхні об’єкта будуть розсіюватися, тобто

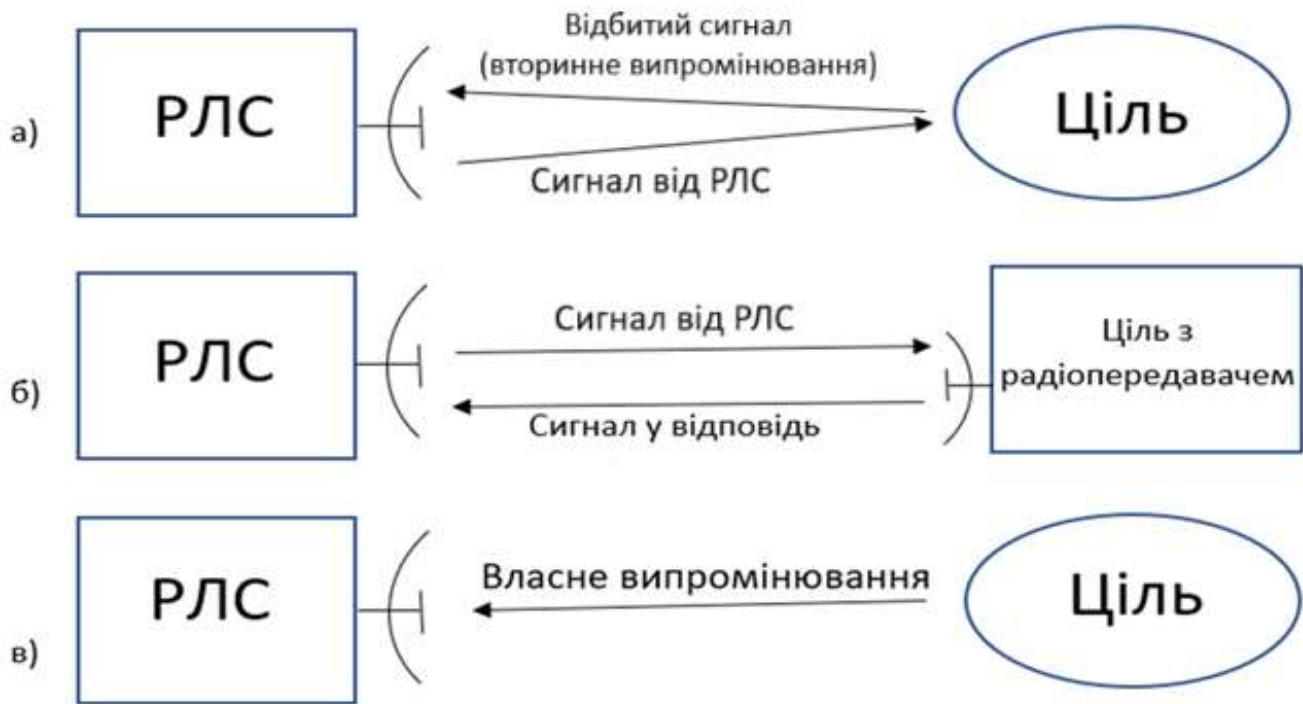


Рис 1.1. Види РЛС

відбиватися у різних напрямках (дифузійне відбиття) і на антену РЛС може потрапити дуже слабкий сигнал, який приймач не в змозі прийняти. Такий розсіюючий об’єкт може складатися з великої кількості дуже дрібних дзеркал, спрямованих у різні боки. Але більшість об’єктів, які зазвичай потрібно виявляти радаром не є розсіюючими і зроблені з металу. Взагалі краще за все радіохвилі відбивають предмети, які зроблені з матеріалів, що є гарними провідниками. [13]

При активній радіолокації з активною відповіддю (рис. 1б) на об’єкті розташований радіопередавач (приймач-передавач), що випромінює сигнал у вигляді радіохвиль, як відповідь на прийнятий сигнал. Тобто від радара поширюється сигнал, який приймає об’єкт, і тільки після отримання цього

сигналу об'єктом, він випромінює сигнал у відповідь на прийнятий. Даний вид радіолокації використовується, наприклад, у загальновійськовій системі радіолокаційного розпізнавання «свій-чужий» (IFF – Identification friend or foe) – для автоматичного визначення своїх військ та озброєнь від військ та озброєнь противника. Окрім впізнання цілей система «свій-чужий» допомагає отримувати додаткову інформацію. Наприклад, якщо це «свій» літак, то радіолокаційна система може показати висоту польоту літака, запас пального на його борту тощо.

Пасивна радіолокація (рис. 1в) на відміну від активної не потребує випромінювання радіохвиль для виявлення цілі. Радари такого типу тільки приймають сигнал, тобто виявляють цілі за їх власним випромінюванням. Це може бути схоже на активну радіолокацію з активною відповіддю, де об'єкт також випромінює сигнал, а радар його приймає, але там сигнал від об'єкта йде тільки після фіксування сигналу від радару. У даному ж випадку випромінювання сигналу з боку РЛС не потребується, адже об'єкт сам його випромінює, а РЛС залишається тільки прийняти його і визначити координати цілі та, за необхідності, її параметри. Пасивна радіолокація також буває двох типів: із штучним випромінюванням радіохвиль (радіопередавачі) і природним або тепловим випромінюванням (наприклад, будь-яке нагріте тіло, природні явища на кшталт блискавка, природні космічні джерела випромінювання тощо).

За типом випромінюваного сигналу РЛС можуть бути імпульсні та безперервного випромінювання. Перший тип випромінює переривчастий високочастотний зондувальний сигнал високої потужності. За ним настає довга пауза, протягом якої може прийматися ехо-сигнал до того, як буде випромінений наступний зондувальний сигнал. За часом затримки прийнятого ехо-сигналу щодо моменту випромінювання зондувального сигналу визначають дальність до об'єкту. Час затримки – це сумарний час випромінювання сигналу і реєстрації відбитого сигналу. Знаючи час затримки, можна визначити відстань від радару до

цілі за такою формулою: $s = \frac{tc}{2}$, де s – шукана відстань, t – час затримки, c –

швидкість поширення хвилі. Кутові координати об'єкта і його висота можуть визначатися за розташуванням антени під час прийому ехо-сигналу. Радіохвилі (і взагалі електромагнітні хвилі) поширюються у просторі зі швидкістю світла, тому затримка сигналу на відстані кілька сотень кілометрів дорівнює лише тисячним часткам секунди. Напрямок на об'єкт (азимут) визначається за допомогою діаграми спрямованості радара, яка утворює вузький пучок у вертикальній площині. Діаграма спрямованості є однією з основних характеристик у радіолокації, і представляє собою графічне зображення залежності енергії випромінювання антени від кута напрямку. Іншими словами діаграма спрямованості графічно показує як антена випромінює або приймає сигнал в різних напрямках. Якщо антена радара має вузьку ДС, то вона може точно визначити напрямок на об'єкт; якщо ж ДС широка, то радар бачить об'єкт у більшому секторі кутів, але з меншою точністю.

Радари безперервного випромінювання (Continuous wave radar, CW-radar) випромінюють сигнал безперервно, без пауз між передачею та прийомом. Через це потрібно мати в наявності дві антени: одна для випромінювання (передачі) сигналу, інша – для його прийому. Такими радарми неможливо виміряти відстань до об'єкта, а для вимірювання швидкості об'єктів даний вид РЛС використовує ефект Доплера, оскільки різниця частот між переданим і отриманим сигналом пропорційна швидкості цілі: $f_D = \frac{2v}{\lambda}$, де f_D – доплерівське зміщення частот, v – швидкість об'єкту (цілі), λ – довжина хвилі [9, 10].

1.2. Будова та принцип роботи РЛС

На рисунку 1.2 показана будова найпростішої (у даному випадку активної) радіолокаційної станції, що має такі основні складові: передавач, антенний

перемикач (комутатор), антена, приймач, індикатор. Індикатори можуть бути двох видів: індикатори дальності та індикатори кругового огляду (ІКО) (рис. 1.3).

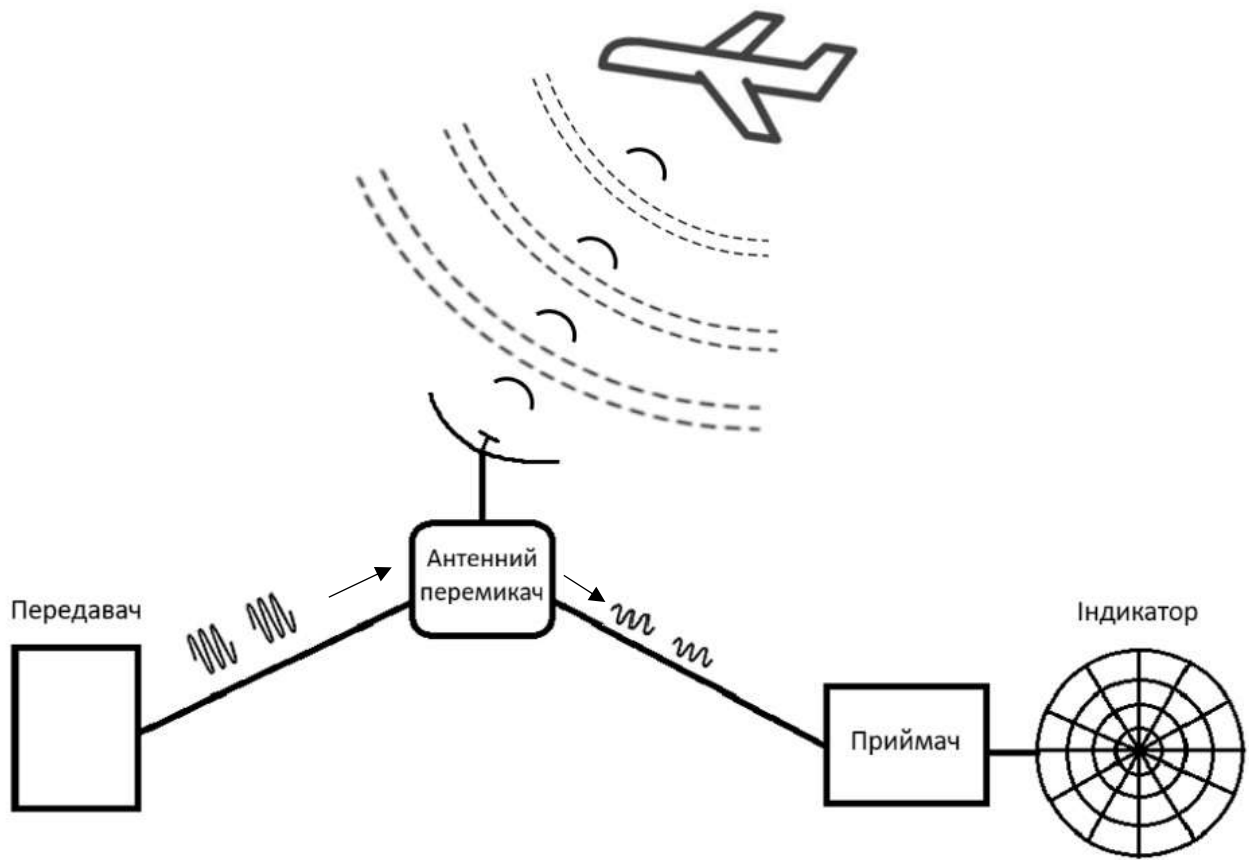


Рис. 1.2. Будова РЛС, схематичний зображення

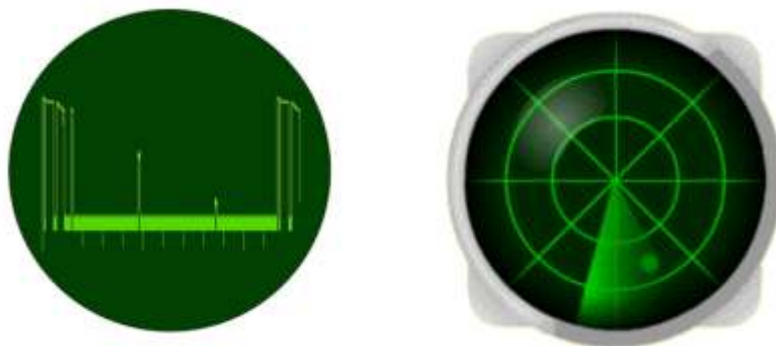


Рис. 1.3. Індикатор дальності (зліва) та індикатор кругового огляду (справа) [14, 15].

Передавач (передавальний пристрій) – джерело високочастотного електромагнітного сигналу, яке споживає при роботі радару більше всього потужності енергії живлення. В якості передавача може бути, наприклад, магнетрон – генератор із самозбудженням (автогенератор), що генерує хвилі високої частоти, Або ж стабільний малопотужний генератор, в якому коливання підсилюються однією або декількома лампами підсилювання (лампами біжучої хвилі, амплітронами, тріодними лампами тощо) до необхідного рівня потужності. Передавачі, що використовують потужні генератори із самозбудженням, зазвичай менших розмірів, ніж передавачі, із задавальними генераторами і потужними підсилювачами коливань. Оскільки останні більш стабільні порівнянно з потужними автогенераторами, то вони можуть досягати більшої середньої потужності. В залежності від конструкції, передавач може працювати або в імпульсному режимі, генеруючи короткі потужні електромагнітні імпульси, що повторюються, або випромінювати безперервні електромагнітні хвилі. Вибір між тим чи іншим типом передавача визначається в основному призначенням радіолокатора.

Антенний перемикач або комутатор – пристрій для узгодження виходу передавального і входу приймального пристроїв з антенною системою задля захисту приймача від потужних зондувальних імпульсів передавача. Антенний комутатор автоматично перемикає антену з передачі на прийом сигналу і навпаки.

За допомогою антени електромагнітні хвилі, що поширюються у хвилеводі, переходять із хвилеводу у вільний простір, і навпаки, з вільного простору у хвилевід. Лінія передачі, що під'єднана до антени разом із самою антеною називається антенно-фідерним трактом (АФТ). При передачі випромінювальної енергії антена концентрує її в промінь, який має заданий напрямок у просторі й потрібну форму. Коли відбита хвиля повертається назад, вона створює на антені струми, які через АФТ потрапляють до приймального пристрою. Щоб при цьому можливим було фокусування променя, антену часто роблять у формі параболоїда з досить великим радіусом розкриву, а саму антену

такої конструкції ще називають параболічною. Таким чином, параболічна антена виконує протилежні, але взаємозалежні функції (випромінювання хвиль і їх же прийняття).

Крім суцільних антен (зроблених з суцільного металу), ще використовують антени у вигляді каркаса (рами), покритого металеву сіткою. Для ефективного відбивання хвиль розміри комірок сітки повинні бути значно менші довжини хвилі (менше, ніж $\lambda/10$). Переваги таких антен над суцільними – менша маса (важливо для мобільних РЛС і у випадках якщо антена обертається), менший опір вітру, а також виготовлення цих антен є більш дешевим та простим процесом.

Приймач (приймальний пристрій) – пристрій, що приймає дуже слабкий відбитий сигнал, підсилює його та виділяє корисну інформацію про ціль. Зазвичай у РЛС використовують детекторні приймачі з відеочастотним підсиленням, супергетеродинні або надгетеродинні. Найбільш поширені – супергетеродинні приймачі, оскільки вони мають великий коефіцієнт підсилення, високу чутливість та вибірковість (здатність виділяти потрібний сигнал серед шумів). Підсумковий сигнал подається на індикатор (екран), який візуально показує інформацію про ціль.

Як вже згадувалося індикатори можуть бути двох основних типів. Один з них – індикатор дальності (рис. 1.3 зліва), відомий також під назвою індикатора типу А. На ньому зображено дві осі перпендикулярні одна одній. Вертикальна вісь показує амплітуду прийнятого сигналу, горизонтальна – час, починаючи від випромінювання імпульсу і закінчуючи його прийняттям. Знаючи час розповсюдження імпульсу можна легко визначити відстань до цілі. Другий, більш універсальний тип – індикатор кругового огляду (англ. PPI – Plan Position Indicator) (рис. 1.3 справа) – показує просторове місцезнаходження цілей за допомогою полярної системи координат. Центр екрану – це положення радару; від центру обертається промінь, що синхронізується з обертання антени (для роботи такого індикатора антена повинна обертатись обов'язково). Мітками

дальності на ІКО є кола, відстань між якими однакова, а лінії, що відходять від центру – кути поворота антени (фактично азимут). Відбитий сигнал, тобто положення цілі, позначається яскравою крапкою на відповідній дальності та напрямку.

Для того щоб РЛС працювала правильно, тобто всі її елементи виконували свої функції узгоджено за часом роботи, вона повинна мати у своїй будові блок синхронізації (синхронізатор) – пристрій, що генерує короткі імпульси, які подаються на всі елементи радару, що повинні одночасно запускатись. Іншими словами синхронізатор визначає, коли та що саме повинно відбуватися у роботі радіостанції: коли випромінювати сигнал, коли приймати відбитий, коли оновлювати екран і т.д. [9].

2. Ефективна площа розсіювання

2.1. Загальне визначення

Якщо в поле електромагнітної хвилі помістити тіло, яке стане перешкодою для поля, то це поле порушується. У присутності тіла повне поле може бути записане у вигляді суми падаючого поля та відбитого від тіла:

$$\vec{E} = \vec{E}_{над} + \vec{E}_{від}. \quad (2.1)$$

Вектор Умова-Пойнтінга характеризує густину потоку потужності відбитого поля. Модуль цього вектора збігається з величиною щільності потоку потужності поля, а напрям вектора в кожній точці простору – з нормаллю до хвильового фронту відбитого поля. Вектор Умова-Пойнтінга може бути записаний у вигляді векторного добутку:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}^* \right], \quad (2.2)$$

де \vec{E} – вектор електричного поля, \vec{H}^* – комплексно спряжений вектор до вектора магнітного поля \vec{H} .

Ефективна поверхня розсіяння (ЕПР) – це фізична величина, що характеризує здатність об'єкта розсіювати електромагнітне випромінювання у напрямку приймача (або радара). Формально ЕПР визначають як уявну площу, яка відбивала б таку саму потужність, яку приймає радар від реального об'єкта. ЕПР визначається наступним чином:

$$\sigma = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} 4\pi R_0^2 \frac{|\vec{S}_{\text{від}}|}{|\vec{S}_{\text{над}}|}, \quad (2.3)$$

де $|\vec{S}_{\text{від}}|$ – густина потоку потужності відбитого поля в точці прийому на відстані R_0 від тіла; $|\vec{S}_{\text{над}}|$ – густина потоку потужності падаючої плоскої хвилі в точці розташування тіла. ЕПР має розмірність квадратного метра або децибела.

ЕПР цілі характеризує її властивість розсіювання, яка визначається як площа, що охоплює кількість потужності, яка при ізотропному розсіюванні створює в приймачі щільність, що дорівнює щільності, розсіяній фактичною ціллю. Якщо передавач і приймач знаходяться в одному місці (одна антена), величина ЕПР тіла залежить від двох кутів θ і γ , які характеризують напрям опромінювання відповідно у вертикальній та горизонтальній площинах, а ЕПР називається моностатичною. Якщо передавач і приймач в різних місцях (дві антени), то ЕПР називається бістатичною, і залежить, як від кутів θ_0 і φ_0 , що визначають напрямок до випромінюючої антени, так і від кутів θ і φ , що визначають напрямок до приймальної антени.

Фізичний зміст ЕПР тіла зазвичай пов'язують із площиною, орієнтованою перпендикулярно падаючому полю. Потужність відбитого від цієї площини поля,

за умови, що воно розсіюється рівномірно на всі боки, чисельно дорівнює потужності, що приймається від досліджуваного об'єкта. Тракткування поняття ЕПР тіла в такому вигляді є досить зручним для низки випадків. Наприклад, при відбитті від кулі великого радіуса порівняно з довжиною хвилі, ЕПР цієї кулі точно збігається з силуетною площею кулі. Але у переважній більшості інших випадків ЕПР має складну залежність від розмірів тіла і змінюється з довжиною хвилі поля. Через це ефективна площа розсіювання не може бути представлена як комбінація з характерних геометричних розмірів тіла. Проте математичне визначення ЕПР тіла (2.3) широко використовується в радіолокації та в теорії поширення радіохвиль.

Далі наведемо пояснення щодо формули (2.3). Граничний перехід у формулі здійснюється для того, щоб виключити залежність ЕПР тіла від відстані до нього. У ліміті при $R_0 \rightarrow \infty$ відбите поле набуває вигляду сферичної хвилі, що розходить, для якої $|\vec{S}_{від}| \sim \frac{1}{R_0^2}$, а падаючу хвилю вважають плоскою, тому

$|\vec{S}_{над}|$ не залежить від відстані R_0 . Відповідно, якщо помножити відношення $\frac{|\vec{S}_{від}|}{|\vec{S}_{над}|}$ на вираз $4\pi R_0^2$, можна прийти до незалежності ЕПР від відстані.

Для лінійно поляризованих плоских хвиль і хвиль, що сферично розходяться модуль вектора Умова–Пойнтінга:

$$|\vec{S}| = \frac{|E|^2}{2Z_0}, \quad (2.4)$$

де Z_0 – хвильовий опір середовища (імпеданс).

З урахуванням цього визначення формула для ЕПР може бути переписана у більш простій формі:

$$\sigma = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} 4\pi R_0^2 \frac{|\vec{E}_{\text{від}}|^2}{|\vec{E}_{\text{над}}|^2} = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} 4\pi R_0^2 \frac{|\vec{H}_{\text{від}}|^2}{|\vec{H}_{\text{над}}|^2}. \quad (2.5)$$

Для акустичних хвиль визначення ЕПР може бути записано аналогічно з виразом (2.5) у наступному вигляді:

$$\sigma = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} 4\pi R_0^2 \frac{I_{\text{від}}}{I_{\text{над}}} = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} 4\pi R_0^2 \frac{U_{\text{від}}^2}{U_{\text{над}}^2}, \quad (2.6)$$

де $I_{\text{від}}$ і $I_{\text{над}}$ – інтенсивності відбитого та падаючого полів відповідно; $U_{\text{над}}$, $U_{\text{від}}$ – акустичні потенціали падаючого і відбитого полів.

2.2. Сумарна ЕПР декількох точкових розсіювачів

Виведемо формулу для сумарної ефективної площі розсіювання декількох точкових розсіювачів. Точковий означає, що його розмір a набагато менший довжини хвилі ($a \ll \lambda$). На малюнку 2.1 зображено шлях електромагнітної хвилі від джерела 1 (випромінювальна антена) до n розсіювачів з радіус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ і ефективними площами розсіювання $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Відбита хвиля приймається у точці 2 (приймальна антена). Визначимо сумарну ефективну площу розсіювання σ_Σ .

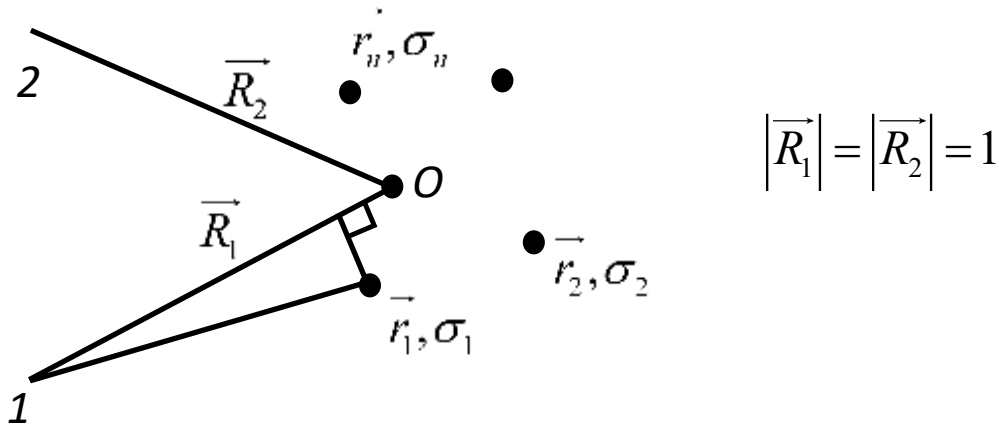


Рис. 2.1. Падаюча та відбита від n розсіювачів хвиля, схематичне зображення

Оскільки всі розсіювачі знаходяться в різних точках простору, то виникає зсув фаз, через що треба знайти фази сигналу, що пройшов від випромінювальної антени до розсіювачів і від розсіювачів до приймальної антени. Тут слід зауважити, що якщо точно визначати різницю фаз між хвилями, відбитими від різних розсіювачів, то слід враховувати шлях, який ці хвилі проходять від точки розташування випромінюючої антени до розсіювача і від розсіювача до точки розташування приймальної антени. Однак, у випадку, коли ми вважаємо, що випромінююча й приймальна антена розташовані в дальній зоні відносно розсіювачів, немає потреби точно визначати відстань до них і достатньо врахувати взаємний зсув розсіювачів у відповідних напрямках. Ці фази відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned}\Delta r_{1n} &= \vec{R}_1 \cdot \vec{r}_n, \\ \Delta r_{2n} &= \vec{R}_2 \cdot \vec{r}_n\end{aligned}\tag{2.7}$$

Сумарне поле, що потрапляє до приймача визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}u_{\Sigma} &= \sum_n E_n \cos(\omega t + kr - k\Delta r_{1n} - k\Delta r_{2n}) = E_{\Sigma} \cos(\omega t + kr - \varphi) = \\ &= E_{\Sigma} \cos(\omega t + kr) \cos \varphi + E_{\Sigma} \sin(\omega t + kr) \sin \varphi = \\ &= \sum_n E_n \left(\cos(\omega t + kr) \cos(k\Delta r_{1n} + k\Delta r_{2n}) + \sin(\omega t + kr) \sin(k\Delta r_{1n} + k\Delta r_{2n}) \right) = \\ &= \cos(\omega t + kr) \sum_n E_n \cos(k\Delta r_{1n} + k\Delta r_{2n}) + \sin(\omega t + kr) \sum_n E_n \sin(k\Delta r_{1n} + k\Delta r_{2n}).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Тут ω – кругова частота, t – час, $k = 2\pi / \lambda$ – хвильове число. Перетворення відбуваються з використанням формули косинуса різниці. Після чого результуюча амплітуда розкладається через окремі суми по кожній складовій. У результаті виходить вираз, який показує, що вся сума гармонічних складових однієї частоти еквівалентна одному гармонічному коливанию тієї ж частоти, але з новими значеннями амплітуди та фази, що залежать від просторових зсувів окремих хвиль.

Отже, з (2.8) отримуємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} E_{\Sigma} \cos \varphi &= \sum_n E_n \cos(k(\Delta r_{1n} + \Delta r_{2n})) \\ E_{\Sigma} \sin \varphi &= \sum_n E_n \sin(k(\Delta r_{1n} + \Delta r_{2n})) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Піднесемо до квадрату обидва рівняння і додамо їх один до одного, в результаті чого ліва частина рівняння дорівнюватиме $E_{\Sigma}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = E_{\Sigma}^2$, а права частина набуде вигляду:

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}^2 &= \sum_n E_n \cos(k(\Delta r_{1n} + \Delta r_{2n})) \sum_m E_m \cos(k(\Delta r_{1m} + \Delta r_{2m})) + \\ &+ \sum_n E_n \sin(k(\Delta r_{1n} + \Delta r_{2n})) \sum_m E_m \sin(k(\Delta r_{1m} + \Delta r_{2m})) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Зробимо заміну $\delta r_n = \Delta r_{1n} + \Delta r_{2n}$ і $\delta r_m = \Delta r_{1m} + \Delta r_{2m}$ і перепишемо (2.10):

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}^2 &= \sum_n E_n \cos(k\delta r_n) \sum_m E_m \cos(k\delta r_m) + \sum_n E_n \sin(k\delta r_n) \sum_m E_m \sin(k\delta r_m) = \\ &= \sum_n \sum_m E_n E_m \cos(k\delta r_n) \cos(k\delta r_m) + \sum_n \sum_m E_n E_m \sin(k\delta r_n) \sin(k\delta r_m) = \\ &= \sum_n \sum_m E_n E_m (\cos(k\delta r_n) \cos(k\delta r_m) + \sin(k\delta r_n) \sin(k\delta r_m)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

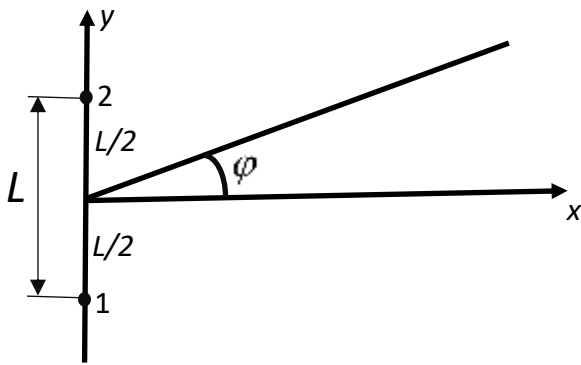
Збираємо суму добутків косинусів і синусів та отримуємо остаточну формулу для квадрату сумарного поля всіх розсіювачів, що по суті і є сумарною ефективною площею розсіювання:

$$\sigma_{\Sigma} = E_{\Sigma}^2 = \sum_n \sum_m E_n E_m \cos(k(\delta r_n - \delta r_m)) \quad (2.12)$$

Розглянемо приклад з двома розсіювачами 1 і 2 (рис. 2.2), які мають однакові ЕПР $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$. φ – кут між напрямком поширення хвилі і віссю x . Визначимо моностатичну ЕПР для таких розсіювачів. За формулою (2.12) знаходимо:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Sigma} &= \sqrt{\sigma_1 \sigma_1} + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(k(\delta r_1 - \delta r_2)) + \sqrt{\sigma_2 \sigma_1} \cos(k(\delta r_2 - \delta r_1)) + \sqrt{\sigma_2 \sigma_2} = \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(k(\delta r_1 - \delta r_2)) = 2\sigma_0 + 2\sigma_0 \cos(k(\delta r_1 - \delta r_2))\end{aligned}$$

Приймаючи відстань між розсіювачами 1 і 2 як L , знайдемо різниці хлдж δr_1 і δr_2 :



$$\begin{aligned}\delta r_1 &= \Delta r_{11} + \Delta r_{21} = \vec{R}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot \vec{r}_1 \\ \vec{R}_1 &= \vec{R}_2 = \cos \varphi \vec{x}_0 + \sin \varphi \vec{y}_0 \\ \vec{r}_1 &= -\frac{L}{2} \vec{y}_0, \quad \vec{r}_2 = \frac{L}{2} \vec{y}_0 \\ \delta r_1 &= -\frac{L}{2} \sin \varphi - \frac{L}{2} \sin \varphi = -L \sin \varphi\end{aligned}$$

Рис. 2.2. Два точкових розсіювача

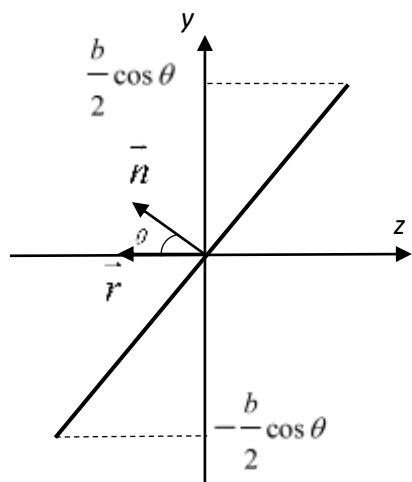
$$\delta r_2 = \vec{R}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{R}_2 \cdot \vec{r}_2 = \frac{L}{2} \sin \varphi + \frac{L}{2} \sin \varphi = L \sin \varphi$$

Таким чином, із використанням явного вигляду для фазових зсувів, формула для сумарного ЕПР набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Sigma} &= 2\sigma_0 + 2\sigma_0 \cos(2kL \sin \varphi) = \\ &= 2\sigma_0 + 2\sigma_0 \cos\left(\frac{4\pi L}{\lambda} \sin \varphi\right) = 2\sigma_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi L}{\lambda} \sin \varphi\right)\right).\end{aligned}\tag{2.13}$$

2.3. Вторинне випромінювання плоскої поверхні

Розглянемо формулу ефективної поверхні зворотного вторинного випромінювання прямокутної металевої пластини зі сторонами $a, b \gg \lambda$. На



малюнку 2.3 зображена пластина з бокової сторони (вид на сторону b). \vec{n} – нормаль до пластини, \vec{r} – одиничний вектор у напрямку радіолокатора, θ – кут між векторами \vec{n} і \vec{r} . Формула ЕПР для цієї пластини в наближенні фізичної оптики має вигляд:

$$\sigma(\varphi, \theta) = \sigma_m \left(\cos \theta \frac{\sin(ka \sin \theta \cos \varphi)}{ka \sin \theta \cos \varphi} \times \frac{\sin(kb \sin \theta \sin \varphi)}{kb \sin \theta \sin \varphi} \right)^2. \quad (2.14)$$

Рис. 2.3. Пластина, вид збоку

При $\theta = 0$ величина σ приймає максимальне значення, і це значення пропорційне квадрату геометричної площі пластини і обернено пропорційне квадрату довжини хвилі:

$$\sigma_m = \frac{4\pi}{\lambda^2} a^2 b^2. \quad (2.15)$$

За величиною σ_m може значно перевищувати геометричну площу пластини, через відсутність фазових зсувів між збудженими елементами на поверхні пластини. Різниця фаз з'являється при повороті пластини на кут θ , що призводить до зменшення амплітуди результуючого поля зворотного вторинного випромінювання. Залежності $\sigma = \sigma(\theta)$, які показані на малюнку 2.4, носять інтерференційний характер, в них явно виражені нулі та максимуми. Нулі діаграми зворотного вторинного випромінювання $\sigma(\theta)$ можуть виникати при кутах θ , що визначаються наступною умовою:

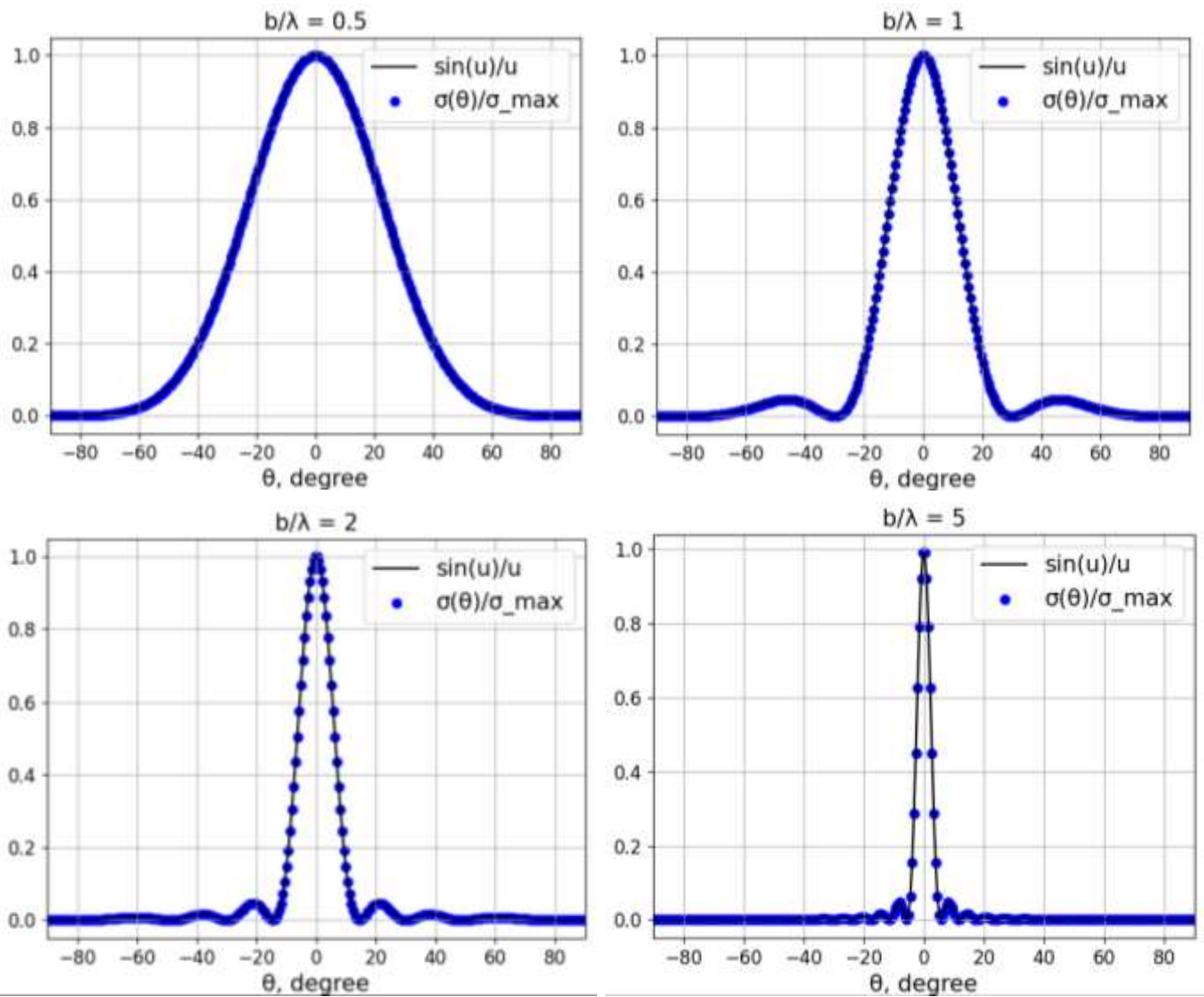


Рис. 2.4. Графік зворотного вторинного випромінювання прямокутної пластини (сині точки) і функція $\sin(u(\theta)) / u(\theta)$ (суцільна крива) при різних значеннях b/λ

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta_n\right) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta_n = n\pi, \quad \text{де } n = 1, 2, 3, \dots \text{ – ціле число,}$$

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{2b}. \quad \text{Оскільки } b \gg \lambda, \text{ то}$$

$$\theta_n \approx n \frac{\lambda}{2b}. \quad (2.16)$$

Для кутів $\theta = \theta_n + \frac{\lambda}{4}b$ ЕПР дорівнює $\sigma = \frac{4S_{\text{вид}}^2}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}$,

де $S_{\text{вид}} = ab \cos \theta$ – видима площа пластини.

Ширина бічних пелюсток графіків дорівнює $\frac{\lambda}{2b}$, а ширина основної пелюстки – $\frac{\lambda}{b}$. З графіків на малюнку 2.4 можна побачити, що чим більша зворотна до ширини основної пелюстки величина, тобто $\frac{b}{\lambda}$, тим більш вузька основна пелюстка.

Область пелюсток значно менша за $\pi/2$, тому залежність $\sigma = \sigma(\theta)$ визначається квадратом функції $\frac{\sin u}{u}$, де $u = \frac{2\pi}{\lambda}b \sin \theta$. При $a, b \gg \lambda$ величина $\cos^2 \theta$ у виразі (2.14) впливає незначно, отже

$$\sigma \approx \sigma_m \left| \frac{\sin u}{u} \right|^2. \quad (2.17)$$

Якщо ввести величину $\sigma_1 = \frac{\sigma_m}{(2u)^2}$ і врахувати, що $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u - \pi))$, то вираз (2.17) можна переписати у такому вигляді:

$$\sigma = 2\sigma_1 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta \left(b - \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\sin \theta} \right) \right) \right). \quad (2.18)$$

Порівнюючи цей вираз із формулою (2.13) для групового випромінювача, що складається з двох елементів (розсіювачів), можна побачити, що вони співпадають. Це говорить про те, що при $a, b \gg \lambda$ пластини є також груповим випромінювачем. Його елементи – блискучі точки, що розташовані практично на краях пластини (з зсувом $\frac{\lambda}{8} \sin \theta$ від кожного краю). Вторинна хвиля виникає

лише на неоднорідностях, які є на краях пластини, оскільки вздовж її поверхні хвиля поширюється без завад. Якщо хвиля послідовно набігає на краї кожного з ребер, а пластина орієнтована довільно, число «блискучих точок» дорівнює чотирьом. Ці точки майже не переміщуються вздовж плоскої поверхні при зміні орієнтації пластини в широких межах, на відміну від «дзеркальних» блискучих точок криволінійної поверхні [8].

2.4. Визначення ЕПР пластини шляхом її заміни на 4 розсіювача

Замінімо прямокутну пластину чотирма розсіювачами, як показано на малюнку 2.5. Кожен з розсіювачів знаходиться посередині біля країв кожної сторони, причому ті, що знаходяться один проти одного, тобто на краях протилежних сторін, мають однакову ЕПР: розсіювачі 1 і 3, відстань між якими L_1 , мають ЕПР σ_1 , розсіювачі 2 і 4 з відстанню між ними L_2 мають ЕПР σ_2 . Вважаємо, що центр пластини знаходиться у точці, що відповідає початку координат, а також має кут θ між віссю z і одиничним вектором \vec{R} , що починається з центру пластини (з центру координат) і спрямований в точку розташування приймальної і передавальної антени, і кут φ – між віссю x і проекцією вектора \vec{R} на площину xy .

Отже, знайдемо сумарну ефективну площу розсіювання чотирьох розсіювачів, використовуючи формулу (2.12) і враховуючи, що $E_{n,m} = \sqrt{\sigma_{n,m}}$. Спочатку визначимо δr_i для кожного розсіювача. Загальний вигляд:

$$\delta r_i = \Delta r_{1i} + \Delta r_{2i} = \vec{R}_1 \cdot \vec{r}_i + \vec{R}_2 \cdot \vec{r}_i = 2r_i \vec{R},$$

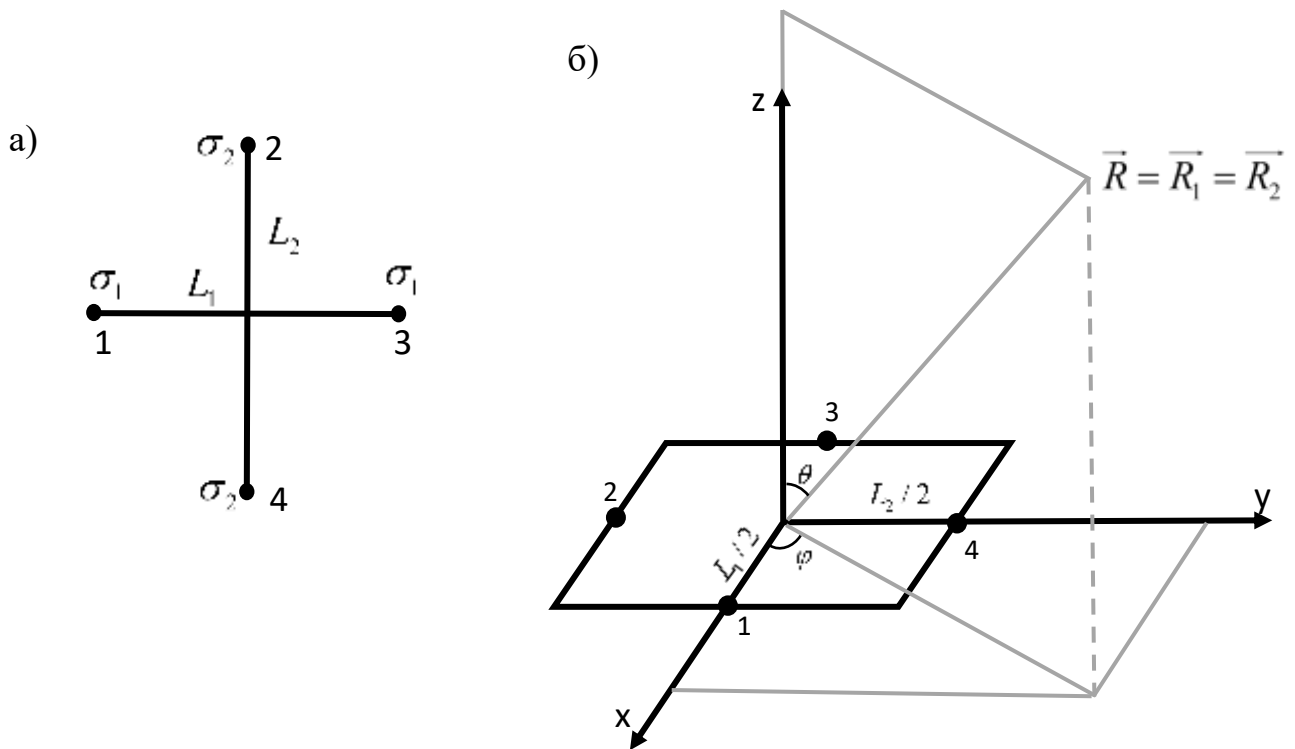


Рис. 2.5. а) схематичне зображення чотирьох розсіювачів, що знаходяться на краях пластини; б) прямокутна пластинка з тими ж розсіювачами

де $\vec{R} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, \vec{r} – радіус-вектори розсіювачів, які згідно малюнку 2.5б дорівнюють

$$\vec{r}_1 = \left(\frac{L_1}{2}, 0, 0 \right); \quad \vec{r}_2 = \left(0, -\frac{L_2}{2}, 0 \right); \quad \vec{r}_3 = \left(-\frac{L_1}{2}, 0, 0 \right); \quad \vec{r}_4 = \left(0, \frac{L_2}{2}, 0 \right).$$

Тоді різниці фаз приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= L_1 \sin \theta \cos \varphi & \delta r_3 &= -L_1 \sin \theta \cos \varphi \\ \delta r_2 &= -L_2 \sin \theta \sin \varphi & \delta r_4 &= L_2 \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

Підставимо знайдені величини у (2.12) і після групування доданків з однаковими коефіцієнтами, що представляють собою окремі ЕПР σ_1 та σ_2 і їх добутки під коренем $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ та $\sqrt{\sigma_2 \sigma_1}$, отримаємо наступний результат:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Sigma} = & \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sqrt{\sigma_n \sigma_m} \cos(k(\delta r_n - \delta r_m)) = \sqrt{\sigma_1 \sigma_1} + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(k(\delta r_1 - \delta r_2)) + \\
& + \sqrt{\sigma_1 \sigma_1} \cos(k(\delta r_1 - \delta r_3)) + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(k(\delta r_1 - \delta r_4)) + \\
& + \sqrt{\sigma_2 \sigma_1} \cos(k(\delta r_2 - \delta r_1)) + \sqrt{\sigma_2 \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 \sigma_1} \cos(k(\delta r_2 - \delta r_3)) + \\
& + \sqrt{\sigma_2 \sigma_2} \cos(k(\delta r_2 - \delta r_4)) + \sqrt{\sigma_1 \sigma_1} \cos(k(\delta r_3 - \delta r_1)) + \\
& + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(k(\delta r_3 - \delta r_2)) + \sqrt{\sigma_1 \sigma_1} + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(k(\delta r_3 - \delta r_4)) + \\
& + \sqrt{\sigma_2 \sigma_1} \cos(k(\delta r_4 - \delta r_1)) + \sqrt{\sigma_2 \sigma_2} \cos(k(\delta r_4 - \delta r_2)) + \\
& + \sqrt{\sigma_2 \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 \sigma_1} \cos(k(\delta r_4 - \delta r_3)) = 2\sigma_1 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta \cos \varphi\right) \right) + 2\sigma_2 \times \\
& \times \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta \sin \varphi\right) \right) + 4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta (L_1 \cos \varphi - L_2 \sin \varphi)\right) + \\
& + 4\sqrt{\sigma_2 \sigma_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta (L_2 \sin \varphi + L_1 \cos \varphi)\right). \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Далі для доданків з коефіцієнтами $2\sigma_1$ і $2\sigma_2$ застосовуємо формулу половинного кута $\frac{1 + \cos x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$, а з коефіцієнтами $4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} = 4\sqrt{\sigma_2 \sigma_1}$ – формули косинуса різниці та суми $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, і в результаті отримуємо формулу для ЕПР у вигляді квадрата суми:

$$\sigma_{\Sigma} = \left(2\sqrt{\sigma_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta \cos \varphi\right) + 2\sqrt{\sigma_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta \sin \varphi\right) \right)^2. \quad (2.20)$$

Залишилося визначити явний вигляд окремих ЕПР розсіювачів σ_1 і σ_2 і відстаней між ними L_1 і L_2 . Для цього розглянемо формулу для ЕПР прямокутної пластини зі сторонами a і b , що має (2.14). Перепишемо формулу ще раз:

$$\sigma(\varphi, \theta) = \sigma_m \left(\cos \theta \frac{\sin(ka \sin \theta \cos \varphi)}{ka \sin \theta \cos \varphi} \cdot \frac{\sin(kb \sin \theta \sin \varphi)}{kb \sin \theta \sin \varphi} \right)^2.$$

Тут застосуємо формулу (2.15) і формулу добутку синусів

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

і отримаємо

$$\sigma = \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{16\pi^3 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \left(\cos(k \sin \theta \cos \varphi (a - b \operatorname{tg} \varphi)) - \right. \\ \left. - \cos(k \sin \theta \sin \varphi (a \operatorname{ctg} \varphi + b)) \right)^2.$$

$\operatorname{tg} \varphi$ і $\operatorname{ctg} \varphi$ з'являються в результаті винесення відповідно внутрішніх $\cos \varphi$ і $\sin \varphi$ всередині зовнішніх косинусів. Далі використаємо формулу для хвильового числа k , формулу приведення $-\cos x = \cos(x - \pi)$, а також замінимо коефіцієнт перед квадратом різниці косинусів на σ_0 і вираз для ЕПР набуде вигляду:

$$\sigma = \sigma_0 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi (a - b \operatorname{tg} \varphi)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi (a \operatorname{ctg} \varphi + b) - \pi\right) \right)^2.$$

У другому косинусі другий доданок, тобто π замінимо на $\frac{k\lambda}{2}$, після чого

винесемо за дужки $k \sin \theta \sin \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi$:

$$\sigma = \sigma_0 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi (a - b \operatorname{tg} \varphi)\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi \left((a \operatorname{ctg} \varphi + b) - \frac{\lambda}{2 \sin \theta \sin \varphi} \right) \right) \right)^2. \quad (2.21)$$

Порівнюючи отриману формулу з (2.20) можна зробити висновок, що

$$L_1 = a - b \operatorname{tg} \varphi, \\ L_2 = a \operatorname{ctg} \varphi + b - \frac{\lambda}{2 \sin \theta \sin \varphi}, \quad (2.22)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{4} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{64\pi^3 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}. \quad (2.23)$$

Таким чином було досягнуто рівності формул (2.20) і (2.21), і аналітично показано, що прямокутну пластину дійсно можна замінити чотирма розсіювачами за умови, коли відстані між розсіювачами (рис. 2.5) визначаються за допомогою формул (2.22), а ЕПР цих розсіювачів визначаються як (2.23) Далі розглянемо особливі випадки при розрахунку ЕПР, використовуючи обидві формули.

2.5. Особливі випадки при розрахунку ЕПР пластини і сумарної ЕПР чотирьох розсіювачів

Розглянемо особливі точки, де кут φ приймає значення 0, 90, 180 і 270 градусів, а також при $\theta = 0$ градусів. Ці точки слід розглядати окремо, бо в цьому випадку в формулі (2.14) і, як наслідок, в формулі (2.21) наявні особливості. Почергово підставимо ці кути у формулу для ЕПР пластини (2.21) і формулу для сумарної ЕПР чотирьох розсіювачів (2.20).

Кут $\theta = 0$:

Формула для пластини (2.21):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi a^2 b^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sin(ak \sin \theta \cos \varphi)}{ak \sin \theta \cos \varphi} \cdot \frac{\sin(bk \sin \theta \sin \varphi)}{bk \sin \theta \sin \varphi} \right)^2 (\cos \theta)^2 = \sigma_m \left(\frac{\sin 0}{0} \cdot \frac{\sin 0}{0} \right)^2 \cdot 1 = \\ &= \sigma_m (1 \cdot 1)^2 \cdot 1 = \sigma_m \end{aligned}$$

Тут було враховано, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Формула для 4-х розсіювачів (2.20):

$$\sigma_{\Sigma} = \left(2\sqrt{\sigma_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta \cos \varphi\right) + 2\sqrt{\sigma_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta \sin \varphi\right) \right)^2 = 4 \left(\sqrt{\sigma_1} \cos 0 + \sqrt{\sigma_2} \cos 0 \right)^2 =$$

$$= 4\left(\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}\right)^2 = \left|\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{4}\right| = 4\sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{\pi a^2 b^2}{\lambda^2}.$$

Таким чином для випадку $\theta = 0$ (напрям зверху нормально до пластини), пластину можна представити у вигляді чотирьох розсіювачів, розташованих на краях пластини посередині кожної сторони. Кожен розсіювач має одне й те саме значення ЕПР, що дорівнює $\frac{\sigma_0}{4}$, а сумарна ЕПР має вигляд

$$\sigma_{\Sigma} = 4\sigma_0 = \sigma_m = \frac{4\pi a^2 b^2}{\lambda^2}.$$

Кут $\varphi = 0$:

Формула для пластини:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi a^2 b^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sin(ak \sin \theta \cos \varphi)}{ak \sin \theta \cos \varphi} \cdot \frac{\sin(bk \sin \theta \sin \varphi)}{bk \sin \theta \sin \varphi} \right)^2 (\cos \theta)^2 = \sigma_m \cos^2 \theta \left(\frac{\sin(ak \sin \theta)}{ak \sin \theta} \cdot \frac{\sin 0}{0} \right)^2 = \\ &= \sigma_m \cos^2 \theta \frac{\sin^2(ak \sin \theta)}{a^2 k^2 \sin^2 \theta} = \left| \sin^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u - \pi)) \right| = \sigma_m \frac{\cos^2 \theta}{2a^2 k^2 \sin^2 \theta} (1 + \cos(2ak \sin \theta - \pi)) = \\ &= \sigma_m \frac{\cos^2 \theta}{2a^2 k^2 \sin^2 \theta} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} a \sin \theta\right) \right). \end{aligned}$$

Формула для 4-х розсіювачів:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma} &= \left(2\sqrt{\sigma_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta \cos \varphi\right) + 2\sqrt{\sigma_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta \sin \varphi\right) \right)^2 = |\sigma_2 = 0| = \\ &= \left(2\sqrt{\sigma_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta \cos 0\right) \right)^2 = 4\sigma_1 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta\right) \right) = \\ &= 2\sigma_1 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} \left(a - \frac{\lambda}{4 \sin \theta} \right) \sin \theta \right) \right), \quad \sigma_1 = \frac{b^2 \cos^2 \theta}{4\pi \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Деякі зауважень щодо цієї формули. Згідно малюнку 2.5 при $\varphi = 0$ точка випромінювання знаходиться на осі x , на якій лежать розсіювачі 1 і 3, що мають ЕПР σ_1 . Розсіювачі 2 і 4 не випромінюють під цим кутом, тому $\sigma_2 = 0$, в результаті

чого другий доданок зникає. Тобто в цьому випадку формулу для ЕПР пластини можна апроксимувати формулою не для чотирьох, а для двох розсіювачів. А σ_1 вимірюється таким чином, щоб коефіцієнт $2\sigma_1$ співпадав з коефіцієнтом біля формули для пластини. Фактично розв'язується рівняння:

$$2\sigma_1 = \sigma_m \frac{\cos^2 \theta}{2a^2 k^2 \sin^2 \theta} = \frac{4\pi a^2 b^2}{\lambda^2} \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{2a^2 \cdot 4\pi^2 \sin^2 \theta};$$

$$2\sigma_1 = \frac{b^2 \cos^2 \theta}{2\pi \sin^2 \theta} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{b^2 \cos^2 \theta}{4\pi \sin^2 \theta}$$

Кут $\varphi = \pi/2$:

Формула для пластини:

$$\sigma = \sigma_m \cos^2 \theta \left(\frac{\sin 0}{0} \cdot \frac{\sin(bk \sin \theta)}{bk \sin \theta} \right)^2 = \sigma_m \cos^2 \theta \frac{\sin^2(bk \sin \theta)}{b^2 k^2 \sin^2 \theta} =$$

$$\sigma_m \frac{\cos^2 \theta}{2b^2 k^2 \sin^2 \theta} (1 + \cos(2bk \sin \theta - \pi)) = \sigma_m \frac{\cos^2 \theta}{2b^2 k^2 \sin^2 \theta} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} b \sin \theta\right) \right).$$

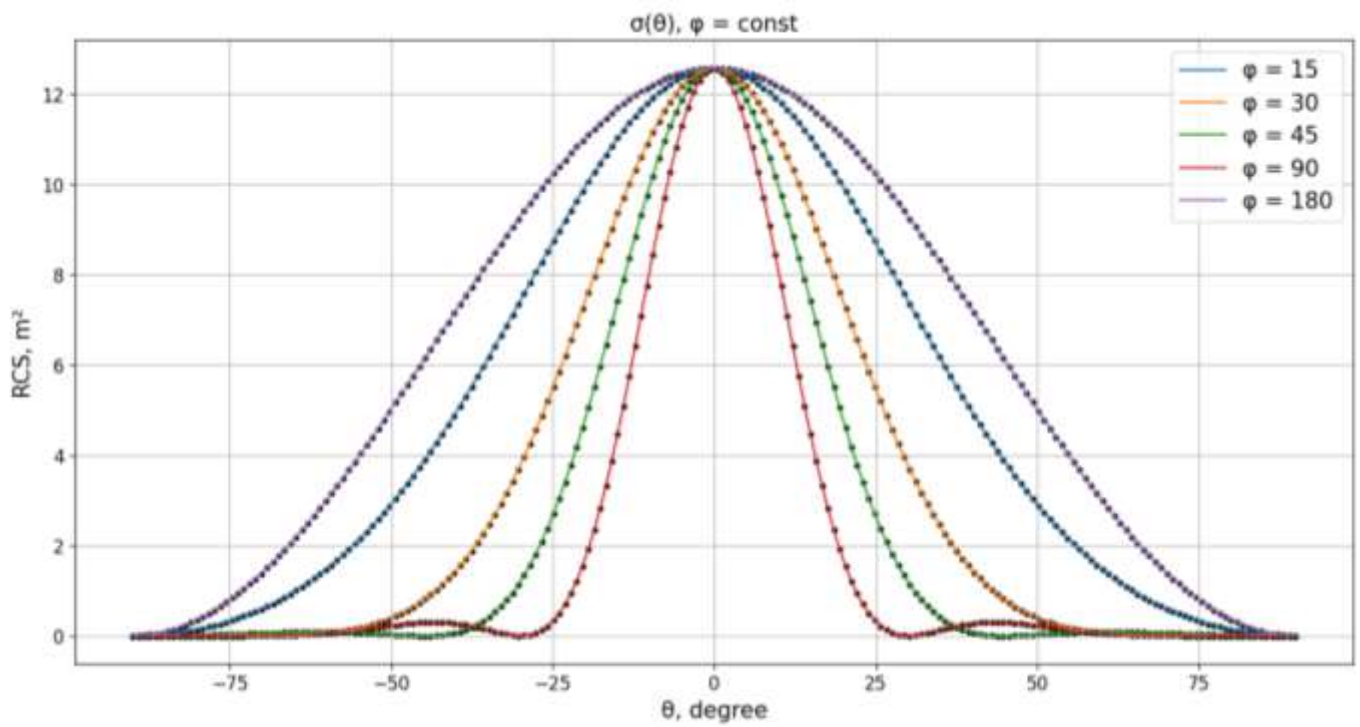
Формула для 4-х розсіювачів:

$$\sigma = \left(2\sqrt{\sigma_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_1 \sin \theta \cos \varphi\right) + 2\sqrt{\sigma_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta \sin \varphi\right) \right)^2 = |\sigma_1 = 0| =$$

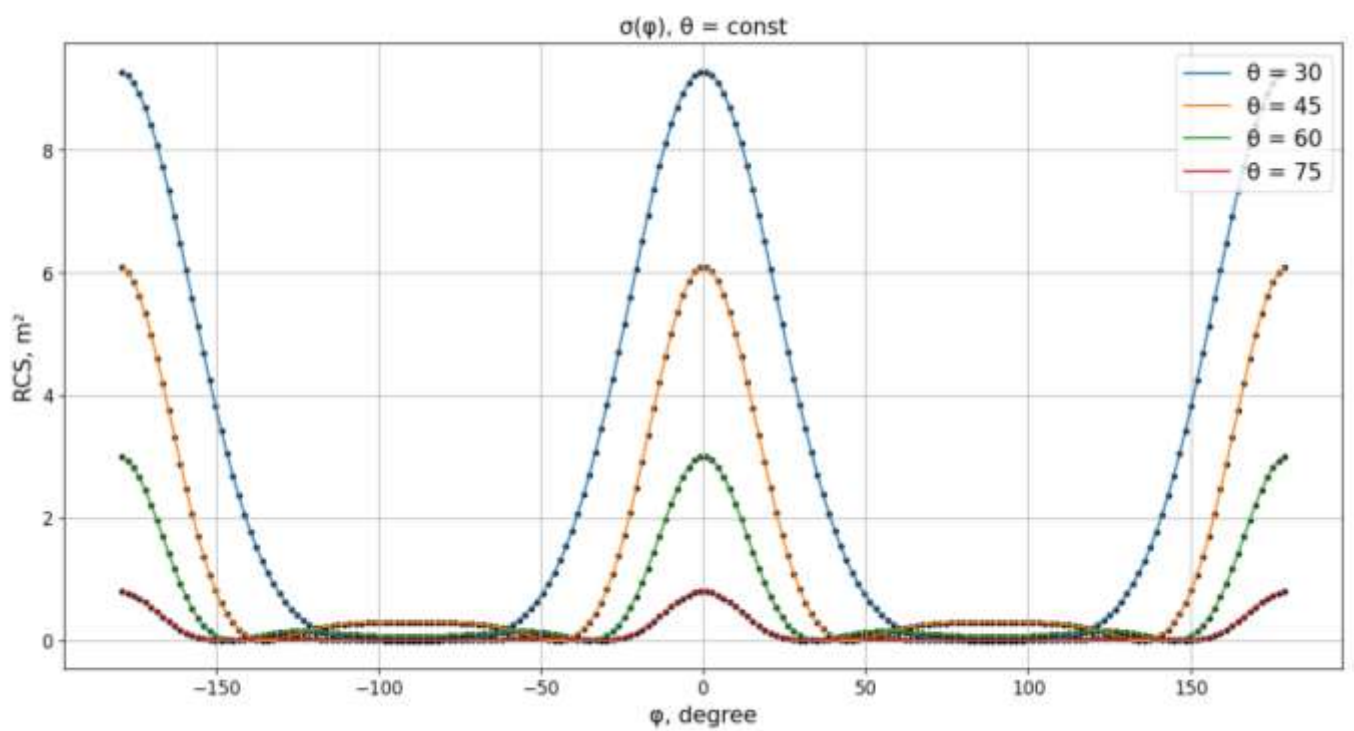
$$= \left(2\sqrt{\sigma_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta \sin \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 = 4\sigma_2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} L_2 \sin \theta\right) \right) =$$

$$= 2\sigma_2 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} \left(b - \frac{\lambda}{4 \sin \theta}\right) \sin \theta\right) \right), \quad \sigma_2 = \frac{a^2 \cos^2 \theta}{4\pi \sin^2 \theta}$$

Тут аналогічним чином внесок розсіювачів 1 і 3 нульовий, оскільки вони розташовані на осі x і під кутом $\varphi = 90^\circ$ не випромінюють енергію, тому $\sigma_1 = 0$ і перший доданок зникає. σ_2 теж шукається аналогічним чином. Для останніх двох



а)



б)

Рис. 2.6. Графіки ефективної площі розсіювання прямокутної пластини (кольорові криві) і 4-х розсіювачів (точки), а) залежність від кута фі, б) залежність від кута тета

кутів змін немає: формули для кута $\varphi = \pi$ відповідають формулам для $\varphi = 0$, а формули для $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ відповідають формулам для $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Отже, ми визначили вигляд формул для ЕПР пластини і чотирьох розсіювачів при особливих кутах, а також аналітично довели, що отримані при цих кутах формули теж співпадають. На рисунку 2.6 представлені графіки залежностей ефективної поверхні розсіювання від кута в двох варіантах: кут φ змінюється, а θ приймає конкретні значення: 30, 45, 60 і 75 градусів (рис. 2.6а), і навпаки (θ змінюється, а φ приймає значення 15, 50, 45, 90 і 180 градусів (рис. 2.6б)). Кожному значенню кута відповідає свій колір на графіку. Графіки побудовані для таких значень: $\lambda = 15$ м, $a = 1$ м, $b = \lambda$.

По графікам можна побачити, що залежності для ЕПР прямокутної пластини і для чотирьох розсіювачів, в якості заміни пластини, співпадають, що каже про правильність виведення формули для розсіювачів, і що цією формулою дійсно можна замінити формулу для пластини, оскільки обидві формули дають однаковий результат. Слід зазначити, що для різних кутів спостереження θ і φ положення розсіювачів і їх ЕПР змінюються у відповідності до формул (2.22) і (2.23), тож для кожного ракурсу маємо різну систему розсіювачів.

3. Сумарна ЕПР двох прямокутних пластин

У даному розділі буде виведено формулу для сумарної ЕПР двох пластин, що мають одну спільну сторону і розташовані під певним кутом одна відносно іншої. Ця задача є базовою для подальшого розрахунку ЕПР складного об'єкта, поверхню якого представлено за допомогою сукупності прямокутних пластин – фацетів, кожен із яких повернуто на певний кут і перенесено на відповідну

відстань вздовж якогось вектора. Кожна з двох пластин має свою систему координат зі своїми кутами θ і φ . Одна пластина розташована горизонтально, її центр співпадає з центром системи координат. Нехай ця система буде називатись оригінальною. Оскільки друга пластина знаходиться під кутом відносно першої (горизонтальної), її система координат відрізняється від оригінальної. Відповідно, систему координат другої пластини будемо називати повернутою. Тепер потрібно знайти взаємозв'язок кутів оригінальної системи координат θ і φ і повернутої (кути повернутої СК позначимо штрихами: θ' і φ').

3.1. Кути Ейлера

Одиничний вектор \vec{R} у сферичній системі координат пов'язаний з його кутами (θ, φ) наступним чином:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Якщо ми хочемо перейти від системи 1 (r, θ, φ) до повернутої системи 2 (r', θ', φ') , то візьмемо до уваги, що тій самій точці у просторі відповідають два одиничних вектори: \vec{R} (в системі 1) і \vec{R}' (в системі 2). Вони пов'язані матрицею повороту:

$$\vec{R}' = M \cdot \vec{R}. \quad (3.2)$$

Алгоритм знаходження кутів поверненої системи (θ', φ') через кути оригінальної системи (θ, φ) та матриці повороту M наступний:

1. Записати \vec{R} у системі 1: $\vec{R} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$.

2. Визначити вектор \vec{R}' і отримати нові його компоненти $\vec{R}' = (x', y', z')$ за формулою (3.2)

3. Знайти нові кути за визначенням сферичних координат:

- кут θ вимірюється від осі Z' системи 2. Він визначається через z' -компоненту:

$$\theta' = \arccos(z') \quad (3.3)$$

за умови $0 \leq \theta' \leq \pi$;

- кут φ' вимірюється в площині $X'Y'$ від осі X' . Він визначається через x' та y' компоненти:

$$\varphi' = \text{atan2}(y', x'). \quad (3.4)$$

atan2 – це розширена функція арктангенсу, що дорівнює $\text{atan2}(y, x) = \arctg(y/x)$.

Вона повертає кут полярних (або сферичних) координат точки (x, y) , враховуючи знаки x та y . На відміну від звичайного арктангенсу, ця функція відрізняє кути у I та III квадрантах (чвертях), а також працює коректно при $x = 0$.

Отже, формально зв'язок кутів задається цими двома формулами:

$$\begin{aligned} \theta' &= \arccos\left(\left[\vec{R} \cdot \vec{r}\right]_z\right); \\ \varphi' &= \text{atan2}\left(\left[\vec{R} \cdot \vec{r}\right]_y, \left[\vec{R} \cdot \vec{r}\right]_x\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Явний вигляд функцій $\theta'(\theta, \varphi)$ і $\varphi'(\theta, \varphi)$ буде залежати від конкретного вигляду матриці M .

Кутами Ейлера можна описати будь-який поворот у тривимірному просторі за допомогою трьох послідовних поворотів навколо певних осей. Вибір осей та їх послідовність можуть відрізнятися. На прикладі розглянемо кути Ейлера з осями ZYZ . Будь-який поворот можна представити як послідовність трьох незалежних поворотів навколо обраних осей:

1. Поворот навколо початкової осі Z на кут α (прецесія):

Обертаємо системи координат навколо спільної осі Z . Після цього повороту вісь X переходить у вісь X_1 , вісь Y – у Y_1 . Вісь Z залишається незмінною.

2. Поворот навколо нової осі Y_1 на кут β (нутація):

Тепер обертаємо систему навколо проміжної осі Y_1 . Цей поворот змінює напрямок осі Z . Після нього вісь Z займає своє кінцеве положення Z' . Вісь X_1 переходить у X_2 .

3. Поворот навколо нової осі Z' на кут γ (Власне обертання):

Останній поворот навколо нової осі Z' (яка вже співпадає з віссю Z' цільової системи). Він остаточно вирівнює осі X та Y . Кути (α, β, γ) і є кутами Ейлера (ZYZ). Вони мають інтуїтивний геометричний зміст (особливо в задачах про обертання симетричних тіл), і за цими кутами можна легко побудувати загальну матрицю повороту. Матриця повороту є добутком трьох матриць елементарних поворотів:

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = M_z(\alpha) \cdot M_y(\beta) \cdot M_z(\gamma), \quad (3.6)$$

де $M_z(\alpha)$ – матриця повороту навколо осі z на кут α ;

$M_y(\beta)$ – матриця повороту навколо осі y на кут β ;

$M_z(\gamma)$ – матриця повороту навколо осі z на кут γ ;

Явний вигляд матриці $M(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha & \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Розглянемо на конкретному прикладі визначення співвідношення кутів двох систем. Задамо таку умову: нехай система 2 повернута відносно системи 1 лише

навколо осі Y на кут β . Це окремий випадок кутів Ейлера, де $\alpha = 0$, $\gamma = 0$.

Підставимо відомі кути у матрицю (3.7) і отримаємо:

$$M_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Далі обчислимо \vec{R}' використовуючи множення матриць (3.1) і (3.8), як показано в формулі (3.2):

$$\vec{R}' = M_y(\beta) \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \sin \theta \cos \varphi + \sin \beta \cos \theta \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \beta \sin \theta \cos \varphi + \cos \beta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо наступні координати вектору \vec{R}' :

$$x' = \cos \beta \sin \theta \cos \varphi + \sin \beta \cos \theta,$$

$$y' = \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z' = -\sin \beta \sin \theta \cos \varphi + \cos \beta \cos \theta.$$

За формулами (3.3) і (3.4) знаходимо нові кути в повернутій системі координат:

$$\theta' = \arccos(z') = \arccos(\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta \cos \varphi);$$

$$\varphi' = \operatorname{atan} 2(y', x') = \operatorname{atan} 2(-\sin \theta \sin \varphi, \cos \beta \sin \theta \cos \varphi - \sin \beta \cos \theta).$$

Подробиці щодо застосованого підходу можна знайти в [11, 12].

3.2. Розрахунок ЕПР двох пластин, що розташовані під прямим кутом і під довільним кутом

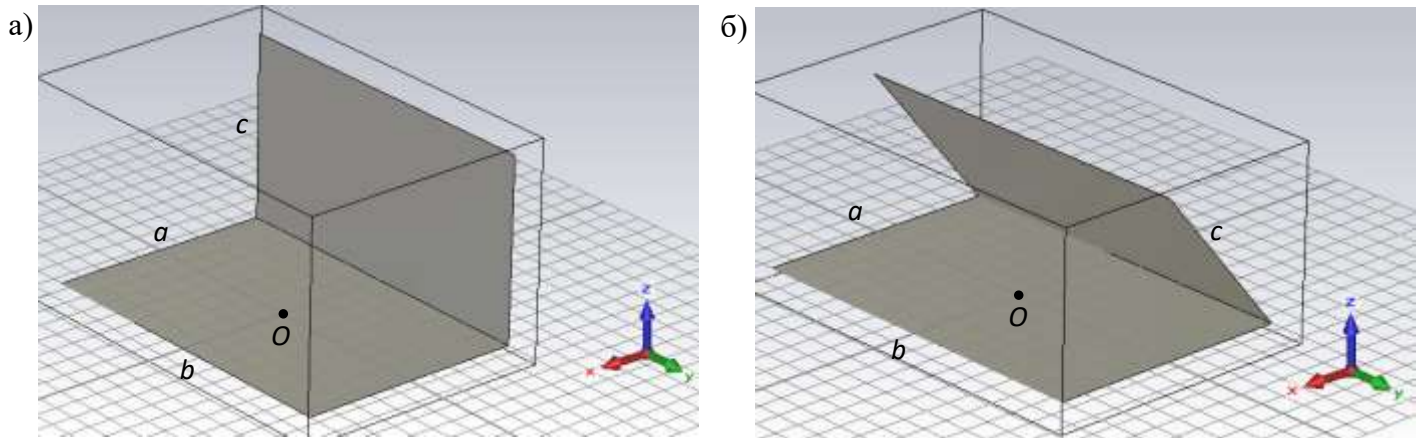


Рис. 3.1. Дві прямокутні пластини з однією спільною стороною: а) під прямим кутом, б) під кутом 50 градусів

Для побудови моделей пластин, що зображені на малюнку 3.1, використовувалося програмне забезпечення для електромагнітного аналізу в 3D – CST Studio Suite. Перша, горизонтальна, пластина на обох малюнках має розміри $a = 100$ мм, $b = 150$ мм. Друга пластина має спільну сторону b з першою, а її друга сторона $c = 80$ мм. На малюнку 3.1а перша і друга пластини утворюють прямий кут, тобто друга пластина розташована вертикально, на малюнку 3.1б друга пластина утворює з першою кут $\zeta = 50$ градусів. Точка O – початок координат. Знайдемо сумарну ефективну поверхню розсіяння двох пластин. Вона визначається за формулою

$$\sigma_{\Sigma} = |E_{\Sigma}|^2, \quad (3.9)$$

де E_{Σ} – сумарна комплексна амплітуда розсіяного поля, отримана шляхом складання полів кожної пластини з урахуванням фаз.

Окремі поля першої та другої пластини мають вигляд

$$E_1 = \sqrt{\sigma_1} e^{-jk(\Delta r_{11} + \Delta r_{21})} \quad E_2 = \sqrt{\sigma_2} e^{-jk(\Delta r_{12} + \Delta r_{22})}, \quad (3.10)$$

де σ_1 і σ_2 – ЕПР першої та другої пластин відповідно, k – хвильове число, j – уявна одиниця, $\Delta r_{1n} = \vec{R}_1 \cdot \vec{r}_n$, $\Delta r_{2n} = \vec{R}_2 \cdot \vec{r}_n$,

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

\vec{r}_n – радіус-вектор пластини (вектор від центру координат до центру пластини).

Радіус-вектор першої пластини має нульову довжину і нульові координати, тобто співпадає з центром координат, оскільки пластина лежить в площині xu і координати її центру співпадають з центром системи координат. Отже, $\vec{r}_1 = (0,0,0)$. Координати центру другої, похилої, пластини невідомі, тому поточною задачею є знайти радіус-вектор другої пластини \vec{r}_2 . Для його знаходження розглянемо пластини з бічної сторони та проаналізуємо геометрію (див. рис. 3.2).

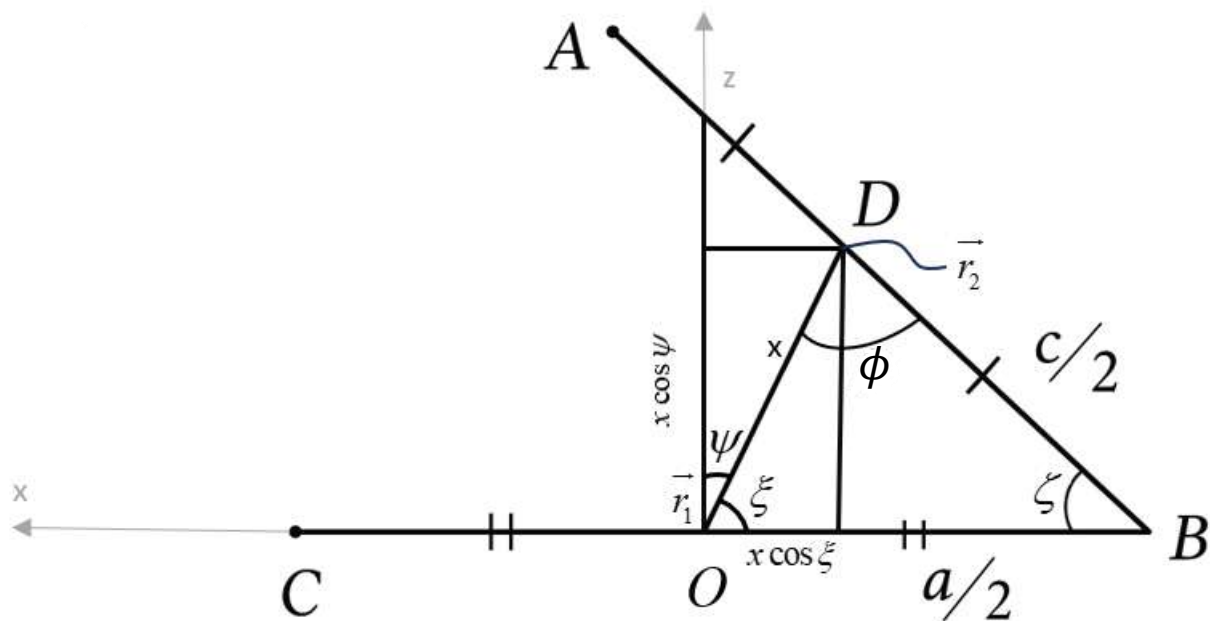


Рис. 3.2. До задачі про знаходження координат радіус-вектору \vec{r}_2 пластини АВ

Тут СВ – перша пластина з центром в точці О, АВ – друга пластина з центром в точці D. Вектор $\overrightarrow{ED} = \vec{r}_2$ – радіус-вектор другої пластини, координати якого треба знайти, $\zeta = 50^\circ$ – кут між пластинами. З малюнку зрозуміло, що $\vec{r}_2 = (-x \cos \xi, 0, x \cos \psi)$. Потрібно знайти x та кути ψ і ξ . Якщо провести відрізок AC, отримаємо два подібних трикутника ABC і DBO, і оскільки відрізок OD, він же x, проведений від центру однієї сторони до центру іншої, то паралельна до x сторона більшого трикутника дорівнює $AC = 2x$. Звідси і знаходимо $x = AC / 2$. AC, в свою чергу, знайдемо за теоремою косинусів:

$$AC = \sqrt{c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cos \zeta},$$

$$x = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cos \zeta}}{2}. \quad (3.11)$$

З малюнка 3.2 видно, що $\psi = \phi - 40^\circ$. Кут ϕ визначемо за теоремою синусів:

$$\frac{x}{\sin \zeta} = \frac{a}{2 \sin \phi} \Rightarrow \sin \phi = \frac{a \sin \zeta}{2x} \Rightarrow \phi = \arcsin\left(\frac{a \sin \zeta}{2x}\right),$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{a \sin \zeta}{2x}\right) - 40^\circ = \arcsin\left(\frac{a \sin \zeta}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} + \zeta.$$

Тепер знаючи кут ψ можна знайти кут ξ :

$$\xi = 90^\circ - \psi = \frac{\pi}{2} - \left(\arcsin\left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} + \zeta \right) = \pi - \zeta - \arcsin\left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x}\right).$$

Отже, координати радіус-вектора \vec{r}_2 приймуть вигляд

$$\vec{r}_2 = \left(-x \cos\left(\pi - \zeta - \arcsin\left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x}\right)\right), 0, x \cos\left(\arcsin\left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} + \zeta\right) \right).$$

Тут і надалі не будемо підставляти явний вигляд x (3.11) задля уникнення зайвої громіздкості.

Наступний крок – знаходимо фази Δr_{11} , Δr_{21} , Δr_{12} і Δr_{22} :

$$\Delta r_{11} = \Delta r_{21} = \vec{R}_1 \cdot \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta r_{12} = \Delta r_{22} = \vec{R}_2 \cdot \vec{r}_2 &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \cos \left(\pi - \zeta - \arcsin \left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x} \right) \right) \\ 0 \\ x \cos \left(\arcsin \left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x} \right) - \frac{\pi}{2} + \zeta \right) \end{pmatrix} = \\ &= x \cos \theta \cos \left(\arcsin \left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x} \right) - \frac{\pi}{2} + \zeta \right) - x \sin \theta \cos \varphi \cos \left(\pi - \zeta - \arcsin \left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x} \right) \right) \end{aligned}$$

та підставляємо їх у (3.10):

$$E_1 = \sqrt{\sigma_1} e^{-jk(\Delta r_{11} + \Delta r_{21})} = \sqrt{\sigma_1} e^{-jk(0+0)} = \sqrt{\sigma_1},$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{\sigma_2} e^{-jk(\Delta r_{12} + \Delta r_{22})} = \sqrt{\sigma_2} \exp \left(-jk \begin{pmatrix} 2x \cos \theta \cos \left(\arcsin \left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x} \right) - \frac{\pi}{2} + \zeta \right) - \\ -2x \sin \theta \cos \varphi \cos \left(\pi - \zeta - \arcsin \left(\frac{a \sin(\zeta)}{2x} \right) \right) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \sqrt{\sigma_2} \exp(-jk\eta). \end{aligned}$$

Тут явний вигляд $\Delta r_{12} + \Delta r_{22}$ було замінено на η .

Сумарне поле розрахуємо за формулою (2.12):

$$\begin{aligned}
E_{\Sigma}^2 &= \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 E_n E_m \cos(k(\delta r_n - \delta r_m)) = E_1 E_1 + E_1 E_2 \cos(k(0 - \eta)) + \\
&+ E_2 E_1 \cos(k(\eta - 0)) + E_2 E_2 = \sigma_1 + \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} e^{-jk\eta} \cos(k\eta) + \\
&+ \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} e^{-jk\eta} \cos(k\eta) + \sigma_2 e^{-2jk\eta} = \sigma_1 + \sigma_2 e^{-2jk\eta} + 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} e^{-jk\eta} \cos(k\eta).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Перепишемо результат, представляючи експоненти за допомогою формули Ейлера $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$:

$$\begin{aligned}
E_{\Sigma}^2 &= \sigma_1 + \sigma_2 e^{-2jk\eta} + 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} e^{-jk\eta} \cos(k\eta) = \\
&= \sigma_1 + \sigma_2 (\cos(2k\eta) - j \sin(2k\eta)) + 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} (\cos(k\eta) - j \sin(k\eta)) \cos(k\eta).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Для того, щоб знайти квадрат модуля сумарного поля, розкриємо дужки в (3.13), згрупуємо реальну частину (a) та уявну (b), і використаємо формулу для модуля комплексного числа $z^2 = a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned}
|E_{\Sigma}|^2 &= \left(\sigma_1 + \sigma_2 \cos(2k\eta) + 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos^2(k\eta) \right)^2 + \\
&+ \left(-\sigma_2 \sin(2k\eta) - 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \sin(k\eta) \cos(k\eta) \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Після математичних і тригонометричних перетворень у (3.14) отримуємо остаточний вигляд формули для квадрату модуля сумарного поля двох прямокутних пластин, тобто їхню сумарну ЕПР:

$$\sigma_{\Sigma} = |E_{\Sigma}|^2 = \left(\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} \right)^2 \left(\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \cos(2k\eta) \right). \tag{3.15}$$

Остання задача: визначення конкретних значень σ_1 і σ_2 . Точка О (мал. 3.1) є центром глобальної системи координат і в той же час центром локальної системи, що прив'язана до горизонтальної пластини (глобальна і локальна СК співпадають). ЕПР σ_1 цієї пластини визначається за формулою (2.14). Локальна система координат другої пластини повернута на той же кут, що і сама пластина відносно горизонтальної пластини, тобто на 50 градусів навколо осі у. У данному

прикладі використовується комбінація поворотів ZYZ, як і у прикладі з попереднього параграфа. Кути повороту, тобто кути Ейлера, мають такі значення:

$\alpha = 0^\circ$ – наколо осі z поворот не було;

$\zeta = 50^\circ$ – поворот навколо осі y;

$\gamma = 0^\circ$ – другого повороту навколо осі z теж не було.

Матриця повороту (3.7) визначається наступним чином:

$$M = \begin{pmatrix} \cos 0 \cos \zeta \cos 0 - \sin 0 \sin 0 & \cos 0 \cos \zeta \sin 0 + \sin 0 \cos 0 & \cos 0 \sin \zeta \\ -\sin 0 \cos \zeta \cos 0 - \cos 0 \sin 0 & -\sin 0 \cos \zeta \sin 0 + \cos 0 \cos 0 & \sin 0 \sin \zeta \\ -\sin \zeta \cos 0 & \sin \zeta \sin 0 & \cos \zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \zeta & 0 & \sin \zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \zeta & 0 & \cos \zeta \end{pmatrix} = M_y(\zeta).$$

Одиничний вектор \vec{R}' (3.2) має вигляд:

$$\vec{R}' = M_y(\zeta) \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & 0 & \sin \zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \zeta & 0 & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta \sin \theta \cos \varphi + \sin \zeta \cos \theta \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \zeta \sin \theta \cos \varphi + \cos \zeta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми знайшли взаємозв'язок декартових координат повернутої системи і сферичних координат оригінальної системи:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \zeta \sin \theta \cos \varphi + \sin \zeta \cos \theta, \\ y' &= \sin \theta \sin \varphi, \\ z' &= -\sin \zeta \sin \theta \cos \varphi + \cos \zeta \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Для визначення сферичних координат повернутої системи скористаємось формулами (3.3) і (3.4):

$$\begin{aligned}\theta' &= \arccos(z') = \arccos(-\sin \zeta \sin \theta \cos \varphi + \cos \zeta \cos \theta); \\ \varphi' &= \operatorname{atan} 2(y', x') = \operatorname{atan} 2(\sin \theta \sin \varphi, \cos \zeta \sin \theta \cos \varphi + \sin \zeta \cos \theta).\end{aligned}\quad (3.17)$$

Тоді ЕПР другої пластини визначається за формулою (2.14) із заміною сторін пластини a на b у першому синусі і b на c у другому синусі, а також заміною кутів θ і φ на (3.17):

$$\sigma_2(\varphi', \theta') = \frac{4\pi b^2 c^2}{\lambda^2} \left(\frac{\sin(kb \sin \theta' \cos \varphi')}{kb \sin \theta' \cos \varphi'} \cdot \frac{\sin(kc \sin \theta' \sin \varphi')}{kc \sin \theta' \sin \varphi'} \right)^2 (\cos \theta')^2. \quad (3.18)$$

Для випадку коли кут між пластинами дорівнює 90 градусів (рис. 3.1а), тобто $\alpha = 0^\circ$, $\zeta = 90^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, декартові координати x' , y' , z' і сферичні кути φ' і θ' матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}x' &= \cos \theta, \\ y' &= \sin \theta \sin \varphi, \\ z' &= -\sin \theta \cos \varphi;\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\theta' &= \arccos(z') = \arccos(-\sin \theta \cos \varphi), \\ \varphi' &= \operatorname{atan} 2(y', x') = \operatorname{atan} 2(\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).\end{aligned}\quad (3.20)$$

На рисунку 3.5 представлені графіки залежності ефективної поверхні розсіяння для двох пластин, кут між якими $\zeta = 50$ градусів (3.5а) і $\zeta = 90$ градусів (3.5б). На обох координатних площинах представлено чотири графіка. Два з них – це сумарна ЕПР двох пластин отримана за формулою (3.15), і отримана за допомогою 3D-моделювання у CST Studio Suite. Крім цих двох графіків також побудовано окремі графіки для кожної пластини: горизонтальної (зелений колір на графіках), під кутом $\zeta = 50$ градусів (а) і під кутом $\zeta = 90$ градусів (б) (червоний колір на графіках). Слід зазначити, що всі графіки, зображені на малюнку 3.5 для всіх випадків будувалися без врахування перевідбиттів між пластинами. Формула (3.15) не враховує перевідбиття, а при моделюванні у CST кількість відбивань хвилі від поверхонь моделі встановлювалась рівною одному

(рис. 3.4). Це означає що хвиля, що падає на досліджувані пластини відбивається тільки від першої, на яку потрапить промінь, а всі наступні відбиття, якщо вони є, ігноруються.

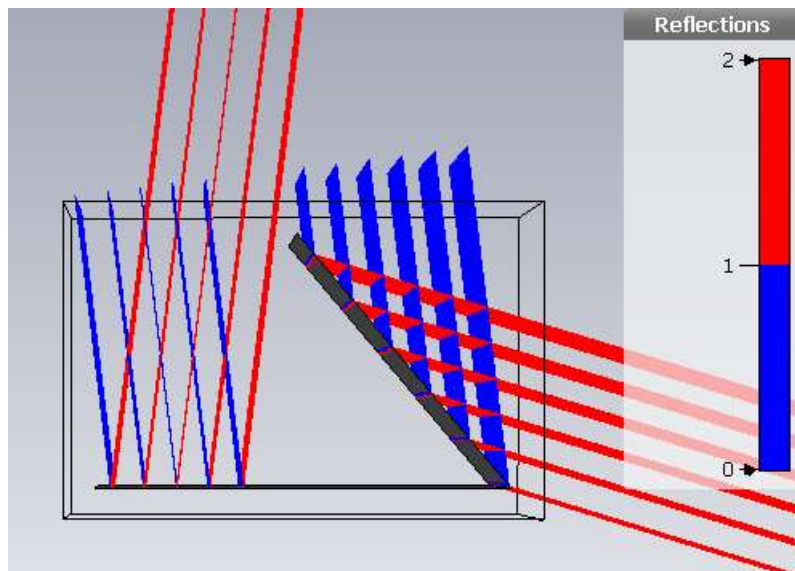


Рис. 3.3. Візуальне зображення падаючих та відбитих один раз променів у CST Studio Suite для кутів $\theta = 7$ градусів і $\varphi = 0$ градусів

Як вже зазначалось, розміри горизонтальної пластини: $a = 0,1$ м, $b = 0,15$ м, розміри другої пластини повернутої на кут ζ : $c = 0,08$ м, $b = 0,15$ м. Моделювання проводилось на частоті 10 ГГц ($\lambda = 0,03$ м), поляризація електромагнітної хвилі – горизонтальна. Розраховується моностатична діаграма розсіння для кутів місця θ від 0 до 180 градусів з кроком в один градус, при цьому азимутальний кут дорівнює $\varphi = 0^\circ$.

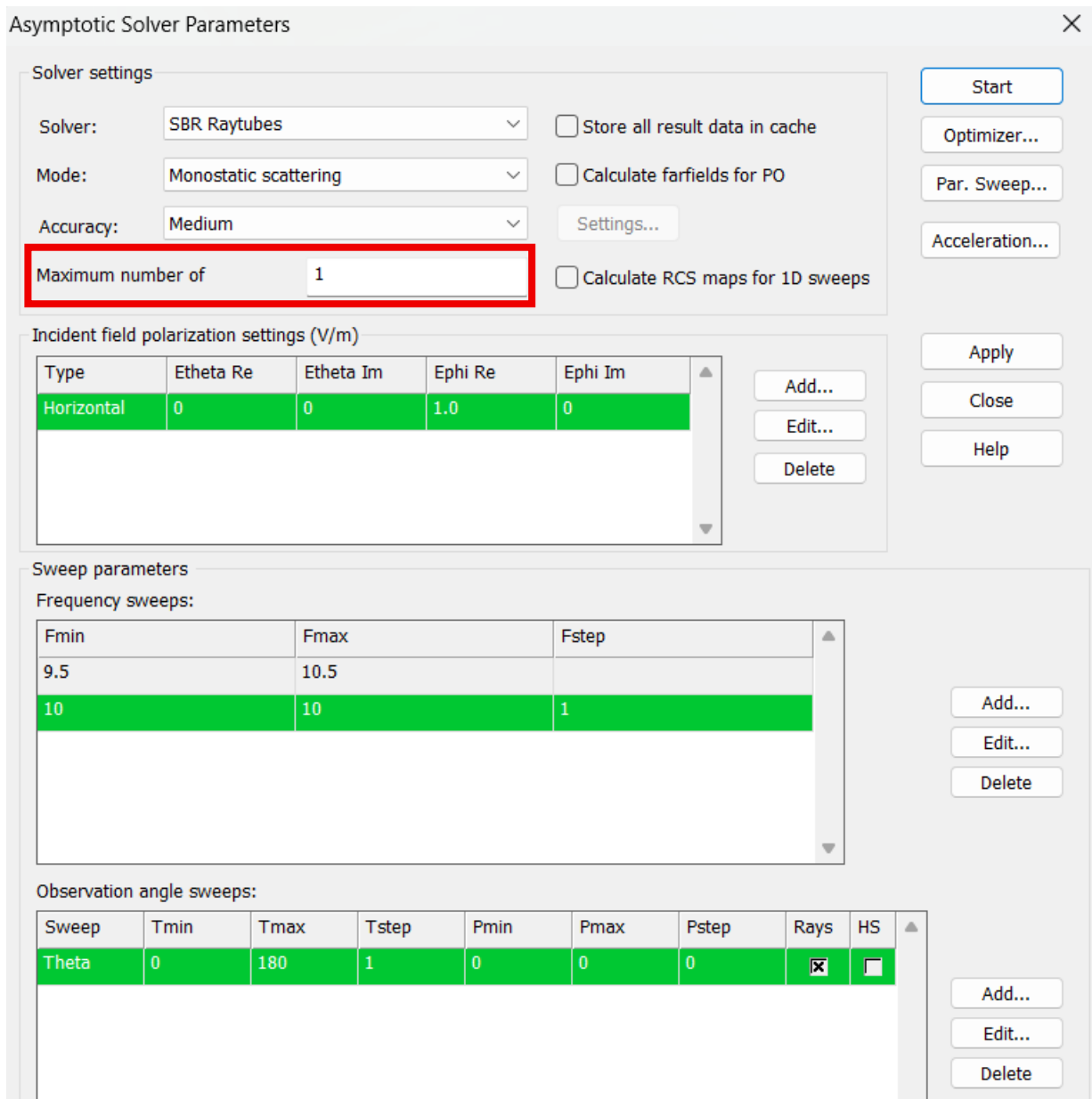
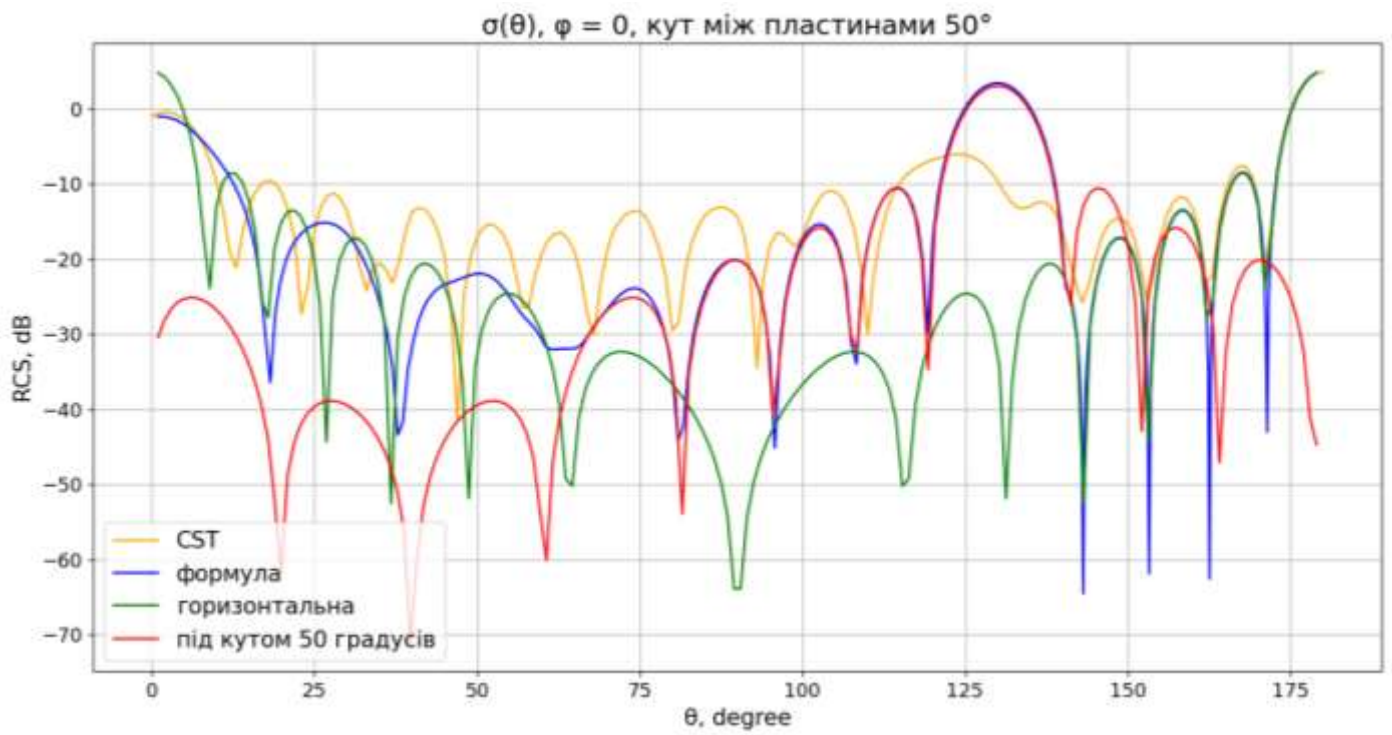
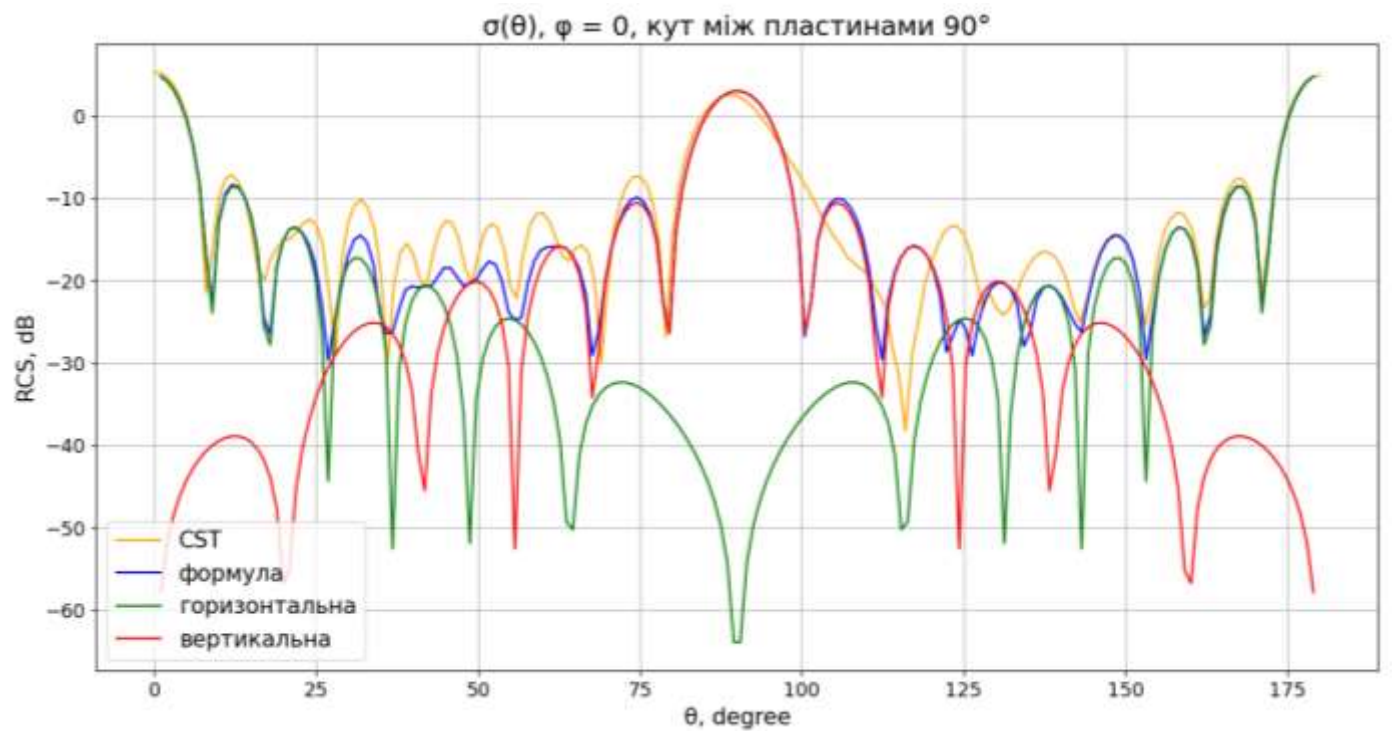


Рис. 3.4. Вікно у CST Studio Suite з налаштуванням розрахунків, зокрема з встановленням кількості відбиттів рівною одному



a)



б)

Рис. 3.5. Графіки сумарної ефектиної площі розсіювання двох прямокутних пластин і кожної пластини зокрема

4. ЕПР складного великогабаритного об'єкту

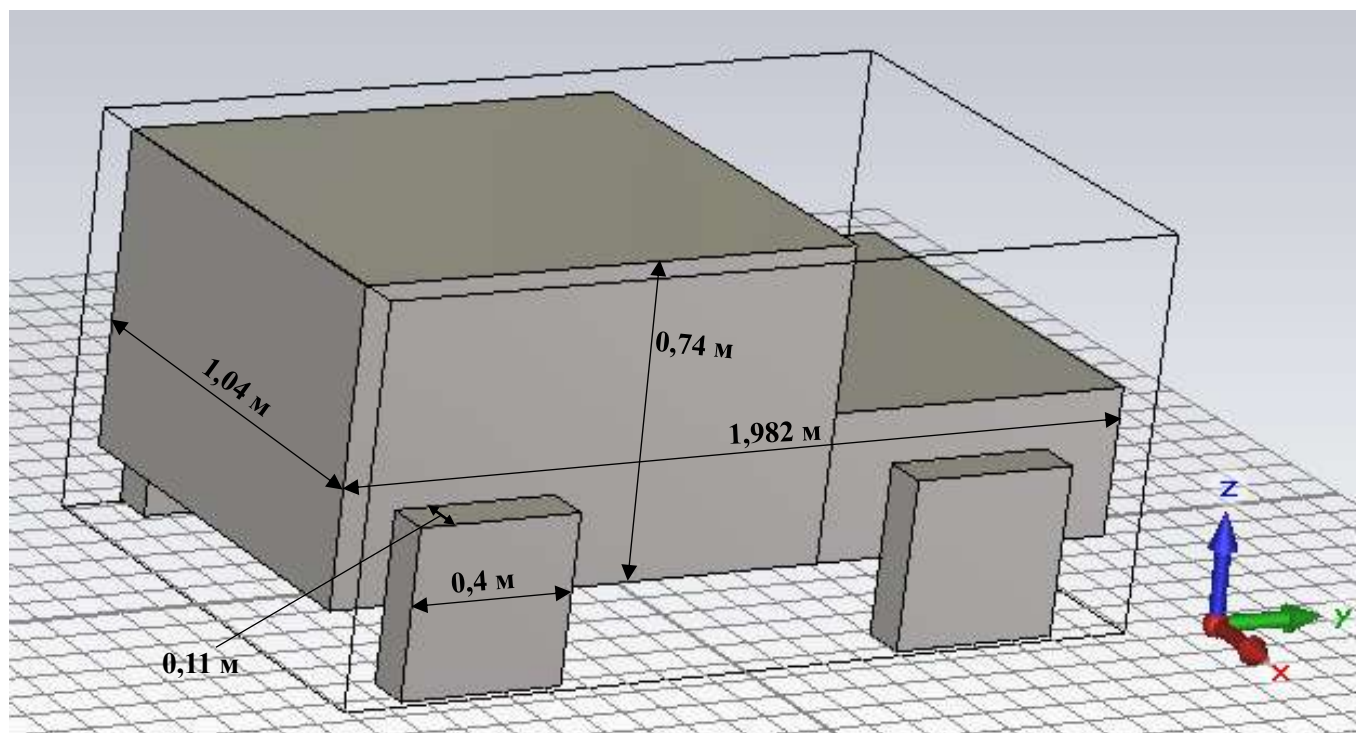
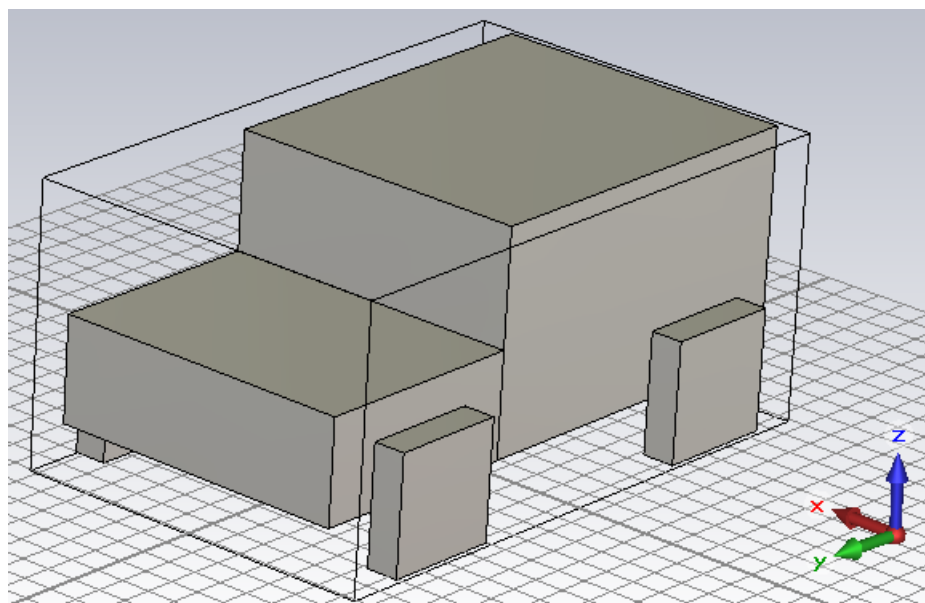


Рис. 4.1. Модель, що досліджується у цьому розділі

В якості складного великогабаритного об'єкту вибрана спрощена модель автомобіля, що зображена на рисунку 4.1. Там же вказані й геометричні розміри окремих компонентів даної моделі. Всі компоненти представляють собою

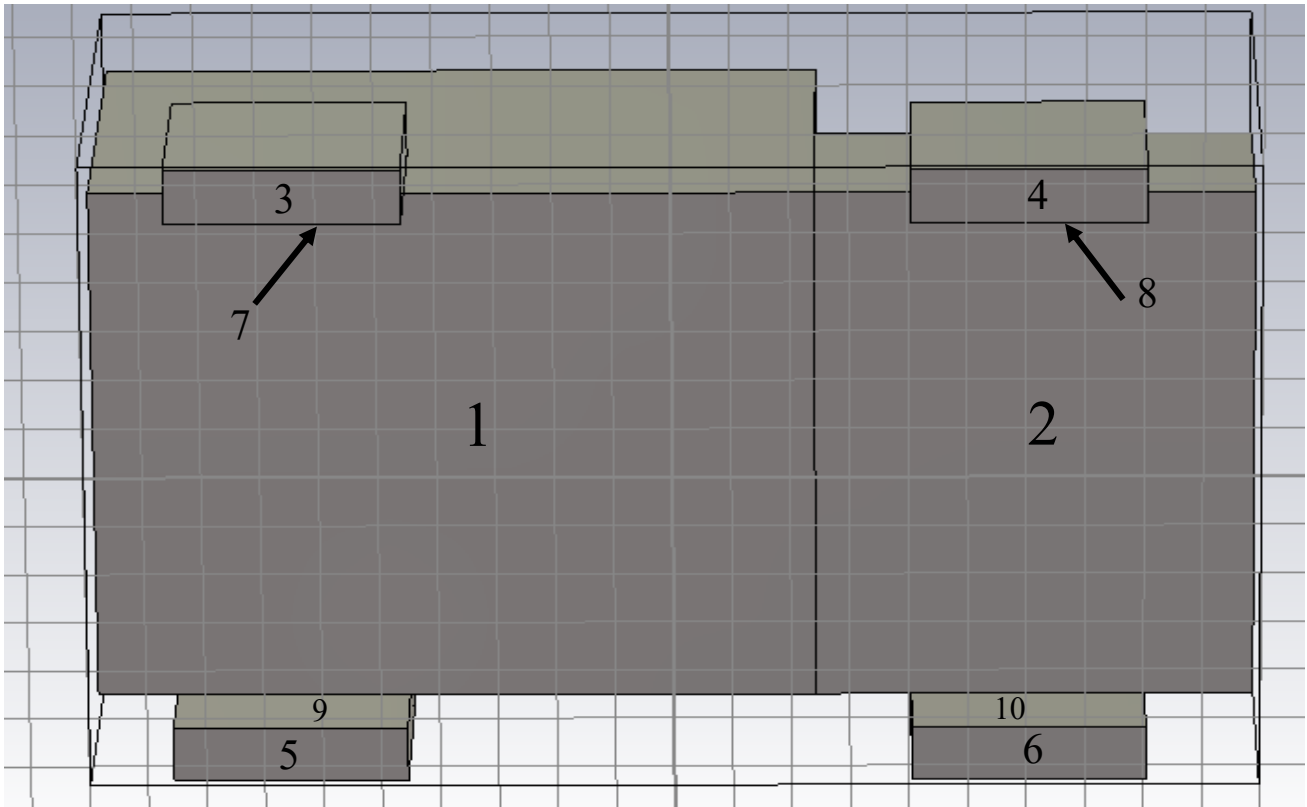
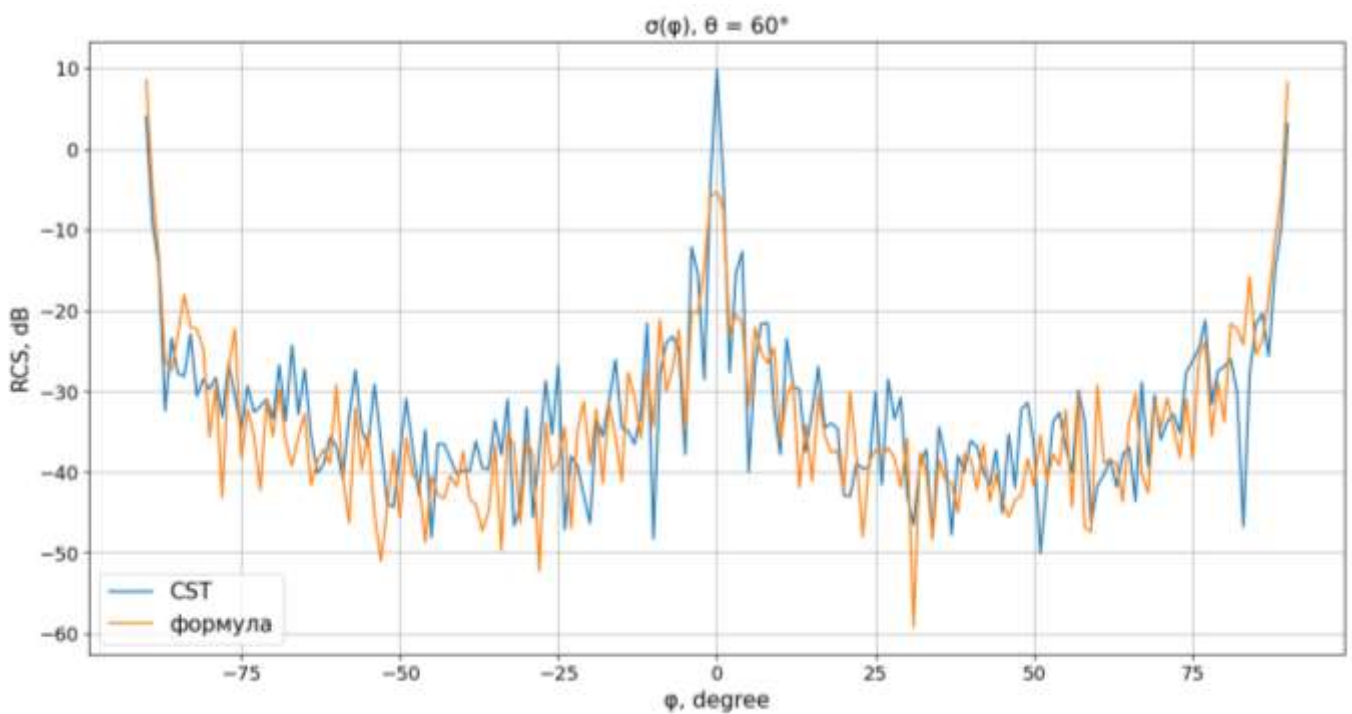


Рис. 4.2. Модель, що досліджується, вид знизу. Пронумеровані всі пластини, які не враховувалися при розрахунку ЕПР

прямокутні пластини, матеріал кожної без виключень – ідеальний провідник (РЕС). Усі двогранні кути, що утворюють сусідні пластини, дорівнюють або 90 градусів (переважна більшість), або 180 градусів. Модель складається з 35 пластин, але при розрахунку сумарної ефективної площі розсіяння враховувалось тільки 25 з них. 10 пластин у нижній частині моделі (позначені на малюнку 4.2) не враховуються через те, що на них не потрапляють хвилі при заданих кутах θ і φ , тому вони мають нульовий внесок у розрахунок.

Для розрахунку сумарної ЕПР моделі, використовувалася та сама формула, що і для двох пластин (2.12) з урахуванням (3.10). Було визначно розміри кожної з 25 задіяних пластин, а також координати їх центрів. Діапазон зміни азимутального кута φ – від -90 до 90 градусів, кут місця $\theta = 60^\circ$, довжина хвилі

$\lambda = 0,03$ м. Результат розрахунку програмою CST, в якій побудовано модель, і результат розрахунку по робочій формулі (2.12) наведено на рисунку 4.3.



4.3. Графік зворотного вторинного випромінювання складного великогабаритного об'єкту, що розглядається у цій роботі

Залежності не співпадають повністю, це є зрозумілим і пояснюється неврахуванням перевідбиттів та використанням кардинально різних методів розрахунку. Але поведінка отриманих залежностей співпадає. Отже, можна зробити висновок, що робоча формула для сумарної ЕПР декількох прямокутних пластин була виведена правильно.

Висновок

У даній роботі було оглянуто поняття радіолокації та радіолокаційної станції (РЛС або радар), їх різновиди, приведен приклад будови радіолокаційної станції з технічної точки зору, і особливу увагу приведено поняттю ефективної поверхні або площі розсіяння. Було визначено аналітичним способом (виведено формулу) та представлено результати у графічну вигляді величини ефективної площі розсіяння простих моделей – прямокутних пластин та великогабаритного об'єкта, який повністю складається з прямокутних пластин. Також було доведено можливість апроксимувати прямокутну пластину точковими розсіювачами, так званими «блискучими точками», розташованими по краям пластини. Проведений аналіз підтвердив ефективність розглянутої апроксимації: отримані у роботі формули для точкових розсіювальних елементів відповідають формулі для пластини, графічні залежності побудовані по цим формулам також узгоджуються.

Використання кутів Ейлера при розрахунку ЕПР двох пластин дозволяє формалізувати орієнтацію елементів поверхні у довільному положенні, що робить модель універсальною і застосовною до широкого набору конфігурацій. Аналіз показав, що взаємне положення пластин істотно впливає на форму діаграми ЕПР: змінюється положення і рівень головної, і бічних пелюсток, з'являється анізотропія розсіяння.

На фінальному етапі був представлений об'єкт, що складається з 35 пластин, розраховано його ЕПР методом чисельного моделювання (за допомогою програмного забезпечення для 3D-моделювання і ЕМ аналізу) і аналітично – за допомогою виведеної формули і порівняння результатів, які показали гарне співпадіння.

Розроблені моделі та проведені розрахунки дозволяють зробити висновки про структуру розсіювання складних об'єктів, оцінювати їхню радіолокаційну помітність та досліджувати вплив геометрії та орієнтації поверхневих елементів

на формування діаграми ЕПР. Отримані результати можуть бути основою для подальшого розвитку методів швидкої оцінки ЕПР, оптимізації конструкції об'єктів з точки зору зниження помітності, а також для подальшого переходу до більш точних фізичних моделей розсіювання.

Література

1. J. W. Crispin and A. L. Maffett, "Radar cross-section estimation for simple shapes", 1965.
2. C. S. Datta, P. S. Teja, P. T. Rao and G. Prasad, "RADAR cross section for arbitrary and complex objects", 2013.
3. A. Taflove and K. Umashankar, "Radar Cross Section of General Three-Dimensional Scatterers", 1983.
4. J. S. Daba and M. R. Bell, "Statistics of the scattering cross-section of a small number of random scatterers", 1995.
5. M. A. Alves, I. M. Martins, M. A. S. Miacci, M. C. Rezende, "Radar Cross Section of Simple and Complex Targets in the C-band: A Comparison between Anechoic Chamber Measurements and Simulations", 2008.
6. Хричов В. С. "Радіолокаційна помітність об'єктів складної форми із покриттям та без нього", 2023.
7. Масловський О. А. "Радіолокаційні характеристики наземних об'єктів складної форми на основі вимірювань відбиття від локальних ділянок", 2020.
8. S. Redadaa, A. Boualleg, N. Merabtine, and M. Benslama, "Radar cross section study from wave scattering structures", 2006.
9. К. С. Васюта, О. В. Тесленко, В. М. Купрій, О. А. Малишев "Основи побудови радіолокаційних засобів розвідки повітряного простору", 2013.
10. Б. Ф. Бондаренко, В. В. Вишнівський, В. П. Долгушин та ін. "Теорія радіолокаційних систем", 2011.
11. Douglas Cline "Variational Principles in Classical Mechanics, 3rd edition", 2021.
12. Gregory G. Slabaugh "Computing Euler angles from a rotation matrix".
13. Juds S. M. "Photoelectric Sensors and Controls: Selection and Application". New York: Marcel Dekker, 1988. 392 p.
14. <https://www.radartutorial.eu/12.scopes/sc05.uk.html>

15. <https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%80>