УДК 517.55

С. Ю. ФАВОРОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СИБОНИ И ВОНГА

Рассматривается класс B функций $\Phi(z, t)$, определенных при $z \in C^n$, $t \geqslant 0$ и таких, что функция $\Phi(z, |w|)$, $w \in \mathbf{C}$, плюрисубгармоническая (п.— с.— г.) в $\mathbf{C}^{n+1}$ (см. [1]). Как отметил Л. И. Ронкин [2], для функций $\Phi(z, t) \in B$ имеет место следующая

Теорема А. *Пусть* $\alpha(t)$ — *произвольная монотонно растущая функция, и пусть для функции* $\Phi(z, t) \in B$ *при каждом* z *из некоторого множества положительной* Г-*емкости*** $\Phi(z, t) \leqslant \alpha(t) + K(z)$, *где* $K(z) < \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого ограниченного множества* $S \subset \mathbf{C}^n$ *найдется константа* $K(S, \varepsilon) < \infty$ *такая, что для всех* $z \in S$ *и всех* $t \geqslant 0$ $\Phi(z, t) \leqslant \alpha \times (t^{1+\varepsilon}) + K(S, \varepsilon)$.

Таким образом, рост функций класса B по переменной t в каком-то смысле один и тот же для всех $z \in C^n$, кроме некоторого «редкого» множества. С этой точки зрения рост функций класса B изучался ранее в [1], а также в [3, 4]. При этом рассматривались такие характеристики роста, как порядок, нижний порядок, тип, класс сходимости. Для характеристики «редкости» множества в [1, 3] использовалось понятие Г-емкости, в [3, 4] — понятие плюриполярности (см. ниже). Отметим, что в [3, 4] использовался метод «обратных функций» П. Лелона, который он применил в работе [5] для изучения роста целых и п.-с.-г. функций по одной переменной.

Л. И. Ронкин обратил внимание автора на следующий результат Сибони и Вонга, который дает более точную оценку роста п.-с.-г. функций на лучах, выходящих из начала координат, чем теорема А:

Теорема Б ([6], предложение 1). *Для любого множества* $F \subset P^{n-1}$ *положительной* Г-*емкости найдется константа* $\theta =$

---

* К. М. Слепенчук. Об условиях абсолютной суммируемости в степени p-рядов. — Укр. мат. журн., 1982, 34, № 1, с, 74—80.

** Определение Г-емкости см. [1].

$=\theta(F)<\infty$ *такая, что любая п.-с.-г. в шаре* $\{z:|z|\leqslant R\}$ *функция* $v(z)$ *при всех* $t<R$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sup\{v(z):|z|\leqslant\theta t\}\leqslant\sup\{v(z):|z|\leqslant t,\ \pi(z)\in F\},$$

где π — *каноническая проекция* $\boldsymbol{C}^n$ *на* $\boldsymbol{P}^{n-1}$.

Обобщение этого неравенства на функции $\Phi(z,\ t)\in\mathrm{B}$ должно иметь вид

$$\sup\{\Phi(z,\ \theta t):|z|\leqslant 1\}\leqslant\sup\{\Phi(z,\ t):z\in E\},\qquad(1)$$

где E — достаточно «массивное» множество. Однако для всех функций из B такое неравенство невозможно: в [1] на с. 233—235 построен пример целой в $\boldsymbol{C}^2$ функции $f(z,\ w)$ такой, что величина $\sup\{\ln|f(z,\ w)|:|z|<r,\ |w|<t\}$ имеет по переменной t минимальный тип роста при порядке 1 для $r<1$ и нормальный тип роста при порядке 1 для $r=1$. Очевидно, что для функции $\Phi(z,\ t)=\sup\{\ln|f(z,\ w)|:|w|=t\}$ и множества $E=\{z:|z|<1/2\}$ неравенство (1) не может выполняться для всех $t\geqslant 0$.

В настоящей заметке находятся условия, при которых неравенство (1) имеет место для функций из класса В (теорема 1). При этом для характеристики «массивности» множества используется понятие плюриполярности. Напомним, что множество $E\subset\Omega$ называется плюриполярным в Ω, если для любой точки из Ω найдется ее окрестность $\omega\subset\Omega$ и п.-с.-г. в ω функция $v(z)\not\equiv-\infty$ такая, что $E\cap\omega\subset\{z:v(z)=-\infty\}$. Поскольку плюриполярные множества имеют нулевую Г-емкость, в качестве следствия получается усиление теоремы Б (теорема 2). Как приложение получены некоторые утверждения о росте и распределении нулей целых функций в $\boldsymbol{C}^{n+1}$ (предложения 3 и 4).

Для $\Phi(z,\ t)\in\mathrm{B}$ и $\alpha\geqslant 0$ полагаем $A(\Phi,\ \alpha)=\varlimsup\limits_{z\to\infty}\Phi(z,\ |z|^{-\alpha})\times(\ln|z|)^{-1}$. Этот предел не равен $-\infty$, так как величина $\sup\times\{\Phi(z,\ r^{-\alpha}),\ |z|=r\}$ выпукла относительно $\ln r$. В частности, для $\Phi(z,\ t)=\sup\{V(z\cdot w):w\in\boldsymbol{C},\ |w|\leqslant t\}$, где $V(z)$ — п.-с.-г. в $\boldsymbol{C}^n$ функция, $A(\Phi,\ \alpha)\leqslant 0$ при $\alpha\geqslant 1$.

Теорема 1. *Для любого неплюриполярного множества* $E\subset\boldsymbol{C}^n$ *и любого* $s<\infty$ *найдется константа* $K=K(E,\ s)<\infty$ *такая, что для любой функции* $\Phi(z,\ t)\in\mathrm{B}$ *и любых* $t\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$

$$\sup\{\Phi(z,\ \theta t):|z|\leqslant s\}\leqslant\sup\{\Phi(z,\ t):z\in E\}+K[A(\Phi,\ \alpha)]^+,$$

где $\theta=\exp\{-\alpha K\}$.

Замечание. Утверждение теоремы содержательно лишь при $A(\Phi,\ \alpha)<+\infty$.

Следствие 1. *Для любого неплюриполярного множества* $E\subset\boldsymbol{C}^n$ *найдется константа* $\theta=\theta(E)$ *такая, что любая п.-с.-г. в* $\boldsymbol{C}^n$ *функция* $V(z)$ *удовлетворяет при любом* $t\geqslant 0$ *неравенству*

$$\sup\{V(z):|z|\leqslant\theta t\}\leqslant\sup\{V(z\cdot w):z\in E,\ w\in\boldsymbol{C},\ |w|\leqslant t\}.$$

Следствие 2. *Пусть функция* $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ *такая, что при* $z \to \infty$ $\Phi(z, 1) = O(\ln|z|)$. *Тогда для любого неплюриполярного компакта* E *найдется константа* $Q = Q(E, \Phi) < \infty$ *такая, что при всех* $t \geqslant 0$

$$|\sup\{\Phi(z, t) : z \in E\} - \sup\{\Phi(z, t) : |z| = 1\}| \leqslant Q.$$

Для доказательства следствия 2 надо применить теорему 1 при $\alpha = 0$ вначале к множеству E и числу $s = 1$, а затем к множеству $\{z : |z| \leqslant 1\}$ и числу $s = \sup\{|z| : z \in E\}$.

Покажем теперь, как из теоремы 1 получить усиление теоремы Б. Заметим, что множество $F \subset \boldsymbol{P}^{n-1}$ неплюриполярно тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(F) \cap \{z : |z| \leqslant 1\}$ неплюриполярно в $\boldsymbol{C}^n$. Далее, если функция $V(z)$ п.-с.-г. в шаре $\{z : |z| < R\}$, то для любого $t < R$ можно подобрать числа $a > 0$ и b так, чтобы $\sup\{V(z) : z \in \boldsymbol{C}^n, |z| \leqslant t, \pi(z) \in F\} > a \ln t + b$ и $\sup\left\{V(z) : |z| = \frac{t+R}{2}\right\} < a \ln \frac{t+R}{2} + b$. Применяя к функции

$$\tilde{V}(z) = \begin{cases} \max\{V(z), a\ln|z| + b\} & \text{при } |z| < \dfrac{t+R}{2} \\ a\ln|z| + b & \text{при } |z| \geqslant \dfrac{t+R}{2} \end{cases}$$

следствие 1, получаем такое утверждение:

Теорема 2. *Для любого неплюриполярного множества* $F \subset \boldsymbol{P}^{n-1}$ *найдется константа* $\theta = \theta(F) > 0$ *такая, что для любого шара* $\{z : |z| < R\} \subset \boldsymbol{C}^n$ *и любой п.-с.-г. в этом шаре функции* $V(z)$ *для всех* $t \in (0, R)$ *выполняется неравенство*

$$\sup\{V(z) : |z| \leqslant \theta t\} \leqslant \sup\{V(z) : |z| \leqslant t, \pi(z) \in F\}.$$

Доказательство теоремы 1. Ввиду неравенства $A(\Phi, \alpha) \leqslant A(\Phi, 0)$ достаточно доказать эту теорему при $\alpha > 0$. Далее, если для такого α $0 \leqslant A(\Phi, \alpha) < +\infty$, то, рассматривая вспомогательную функцию $\Phi_\varepsilon(z, t) = \Phi(z, t) + [A(\Phi, \alpha) + \varepsilon]\alpha^{-1} \ln t$, сведем задачу к случаю $A(\Phi, \alpha) < 0$. Утверждение теоремы при $\alpha > 0$, $A(\Phi, \alpha) < 0$ вытекает из следующего предложения:

Предложение 1. *Для любых чисел* $s < \infty, \alpha_m > 0$, $t_m \geqslant 0$ *и функций* $\Phi_m(z, t) \in \mathrm{B}$ *таких, что*

$$A(\Phi_m, \alpha_m) < 0, \tag{2}$$

множество

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \{z \in \boldsymbol{C}^n : \Phi_m(z, t_m) < \sup_{|z|=s} \Phi_m(z, t_m \exp\{-m^2\alpha_m\})\}$$

плюриполярно.

Доказательство предложения 1. Полагаем $R_m(z) = \sup\{t : \Phi_m(z, t) \leqslant \sup[\Phi_m(z, t_m \exp\{-m^2\alpha_m\}) : |z| = s]\}$. Из условия (2) следует, что для всех m $\Phi_m(z, 0) \equiv -\infty$, т. е. $R_m(z)$

определено при всех $z \in C^n$. Согласно [5], функция $-\ln R_m(z)$ п.-с.-г. в C^n, поэтому величина $\sup\{-\ln R_m(z) : |z| = r\}$ выпукла относительно $\ln r$. Выберем $r > d > s$, тогда

$$\sup\{-\ln R_m(z) : |z| = d\} \leqslant \frac{\ln r - \ln d}{\ln r - \ln s} \sup\{-\ln R_m(z) : |z| = s\} + \\ + \frac{\ln d - \ln s}{\ln r - \ln s} \sup\{-\ln R_m(z) : |z| = r\}. \quad (3)$$

Ввиду (2) при достаточно больших $|z|$ $R_m(z) > |z|^{-\alpha_m}$, поэтому, переходя в (3) к пределу при $r \to \infty$, приходим к неравенству

$$\sup\{-\ln R_m(z) : |z| = s\} - \sup\{-\ln R_m(z) : |z| = d\} \geqslant \\ \geqslant -\alpha_m(\ln d - \ln s). \quad (4)$$

Полагаем $v_m(z) = m^{-2}\alpha_m^{-1}[-\ln R_m(z) + \inf\{\ln R_m(z) : |z| = d\}]$. По принципу максимума, $v_m(z) \leqslant 0$ при $|z| \leqslant d$ и, согласно (4), ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sup\{v_m(z) : |z| = s\}$ сходится. Пусть T_m — унитарный оператор в C^n такой, что для фиксированной точки z_0, $|z_0| = s$ $\sup\{v_m \times \times (z) : |z| = s\} = v_m(T_m z_0)$. Полагаем $v(z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m(z)$, $\tilde{v}(z) = = \sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m(T_m(z))$. Отметим, что $\tilde{v}(z_0) \neq -\infty$, поэтому $\tilde{v}(z) \not\equiv -\infty$. Так как $\int\limits_{|z|=s} v(z)\,d\tau(z) = \int\limits_{|z|=s} \tilde{v}(z)\,d\tau(z)$, где $\tau(z)$ — мера Лебега на сфере, то и п.-с.-г. в шаре $\{z : |z| < d\}$ функция $v(z)$ не равна тождественно $-\infty$. Из определения $R_m(z)$ следует, что $\inf\{R_m \times \times (z) : |z| = s\} = t_m \exp\{-m^2\alpha_m\}$. Поэтому по принципу максимума

$$\inf\{\ln R_m(z) : |z| = d\} \leqslant \ln t_m - m^2\alpha_m.$$

Кроме того, при $z \in E$ на некоторой последовательности $m' \to \infty$ $R_{m'}(z) > t_{m'}$, так что $v_{m'}(z) \leqslant -1$, и поэтому $E \cap \{z : |z| < d\} \subset \subset \{z : v(z) = -\infty\}$. Отсюда ввиду произвольности d следует доказываемое утверждение.

Отметим, что ограничения на рост функции $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ на множестве $\{(z, t) : t = |z|^{-\alpha}\}$ влекут ограничения на рост этой функции по переменной z. Именно для функции $\Phi(z, t) \in \mathrm{B}$ и $r \geqslant 0$ обозначим $u(r, t) = \sup\{\Phi(z, t) : |z| = r\}$ и положим

$$\rho_1 = \varlimsup_{r \to \infty} (\ln u(r, 1))(\ln r)^{-1}, \ \rho_2 = \varlimsup_{t \to \infty} (\ln u(1, t))(\ln t)^{-1}$$

и для $\alpha > 0$ $\tau_\alpha = \varlimsup\limits_{r \to \infty} \ln u(r, r^{-\alpha})(\ln r)^{-1}$. Имеет место

Теорема 3. *Для любой функции* $\Phi(z, t) \in B$ $\rho_1 \leqslant \alpha\rho_2 + \tau_\alpha$.

Доказательство. Функция $u(r, t)$ монотонно неубывающая и выпуклая относительно переменных $\ln r$, $\ln t$. Поэтому для любых неотрицательных r_1, r_2, t_1, t_2, λ, μ таких, что $\lambda + \mu = 1$ $u(r_1^\lambda r_2^\mu, t_1^\lambda t_2^\mu) \leqslant \lambda u(r_1 t_1) + \mu u(r_2, t_2)$. Полагая в этом неравенстве $\mu = (\tau_\alpha + \varepsilon)(\alpha\rho_2 + \tau_\alpha + \varepsilon + \alpha\varepsilon)^{-1}$, $\lambda = 1 - \mu$, $r_1 = 1$, $r_2 = r^{\mu^{-1}}$, $t_1 = r^{\alpha\lambda^{-1}}$, $t_2 = r^{-\alpha\mu^{-1}}$ и пользуясь произвольностью выбора $\varepsilon > 0$, получим доказываемое утверждение.

В качестве приложения отметим следующие результаты:

Предложение 2. *Пусть* $\{f_m(z)\}$ — *семейство голоморфных в шаре* $\{z \in \boldsymbol{C}^n : |z| < R\}$ *функций. Если для каждой комплексной прямой* L *из некоторого неплюриполярного множества* $F \subset \boldsymbol{P}^{n-1}$ *сужение функций этого семейства на* L *нормально на* L, *то это семейство нормально в некоторой окрестности нуля в* $\boldsymbol{C}^n$.

Это утверждение отличается от следствия 10 работы [6] лишь тем, что в [6] множество F предполагается имеющим положительную Г-емкость. Доказательство предложения 2 проводится так же, как доказательство упомянутого следствия с использованием теоремы 2 вместо теоремы Б.

Пусть, далее, $f(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z) w^m$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $w \in \boldsymbol{C}$ — целая функция в $\boldsymbol{C}^{n+1}$ и пусть $\Phi(z, t) = \sup\{\ln|f(z, w)| : |w| < t\}$. Из неравенств Коши следует, что неравенство $A(\Phi, \alpha) \leqslant 0$ для некоторого $\alpha < \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $b_0(z) \equiv \equiv \mathrm{const}$, а $b_m(z)$ — полиномы, удовлетворяющие при всех $|z| > r$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенствам

$$|b_m(z)| \leqslant |z|^{mN}, \tag{5}$$

где константы N, r не зависят от m. Поэтому из теоремы 1 следует

Предложение 3. *Пусть* $f(z, w)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$, $w \in \boldsymbol{C}$ — *целая функция в* $\boldsymbol{C}^{n+1}$ *такая, что ее коэффициенты разложения по степеням* w *при некоторых* N, r *удовлетворяют неравенствам* (5) *и, кроме того,* $f(z, 0) \equiv \mathrm{const}$. *Тогда для любого* $s < \infty$ *и любого неплюриполярного множества* $E \subset \boldsymbol{C}^n$ *найдется константа* $\theta = \theta \times \times (E, s, N)$ *такая, что при всех* $t \geqslant 0$

$$\sup\{|f(z, w)| : |z| \leqslant s, \ |w| \leqslant \theta t\} \leqslant \sup\{|f(z, w)| : z \in E, \ |w| \leqslant t\}.$$

Замечание. Если $f(z, 0)$ — полином от z степени p, а остальные коэффициенты разложения по степеням w функции $f(z, w)$ удовлетворяют неравенствам (5), то из теоремы 1 следует, что для всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\sup\{|f(z, w) : |z| \leqslant s, \ |w| \leqslant \theta t\} \leqslant R \sup\{|f(z, w)| : z \in E, \ |w| < t\},$$

где константа $R < \infty$ зависит от E, s, p.

Если теперь положить $\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(z, te^{i\varphi})|\, d\varphi$, то для тех точек $z \in C^n$, для которых $f(z, 0) \neq 0$, по формуле Йенсена $\Phi(z, t) = N(z, t) + \ln|f(z, 0)|$, где $N(z, t) = \int\limits_0^t \frac{n(z, r)}{r} dr$, а $n(z, r)$ — число корней функции $f(z, w)$ как функции переменного w в круге $|w| < r$.

Поэтому имеет место также

Предложение 4. *Пусть* $f(z, w)$, $z \in C^n$, $w \in C$ — *целая функция в* C^{n+1}, *коэффициенты разложения по степеням* w *которой при некоторых* r, N *удовлетворяют неравенствам* (5) *и, кроме того,* $f(z, 0) \equiv \mathrm{const} \neq 0$. *Тогда для любого* $s < \infty$ *и любого неплюриполярного множества* $E \subset C^n$ *найдется константа* $\theta = \theta(E, s, N)$ *такая, что для всех* $t \geqslant 0$

$$\sup\{N(z, \theta t) : |z| \leqslant s\} \leqslant \sup\{N(z, t) : z \in E\}.$$

Автор выражает глубокую признательность Л. И. Ронкину за постоянное внимание к работе.

Список литературы: 1. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1971.— 430 с. 2. *Ронкин Л. И.* Об одном общем подходе к изучению распределения значений целых и мероморфных функций на параллельных комплексных прямых.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций комплексного переменного. Х., 1971, с. 189—190. 3. *Фаворов С. Ю.* О функциях класса β и их применении в теории мероморфных функций многих переменных.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1974, вып. 20, с. 149 — 169. 4. *Фаворов С. Ю.* О росте плюрисубгармонических функций.— Сиб. мат. журн., 1983, **24**, № 1, с. 168 — 174. 5. *Lelong P.* Fonctionnelles analy Ligues et fonctions entieres. Chapitre VI, Press Univ. de Montreal, 1968.— 169 p. 6. *Sibony N., Wong P. N.* Some results on Global Analitic Sets, Seminaire P. Lelong — H. Scoda (Analyse).— Lecture Notes, 1979, № 694, p. 221 — 237.

Поступила в редколлегию 18.06.84.