ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9 1969

ОБ УСЛОВИИ МЕЙКСНЕРА НА РЕБРЕ

В. М. Ваксман

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из условий, необходимых для однозначной разрешимости задачи дифракции на экране, является естественное требование конечности энергии рассеянного поля в каждой конечной области. Мейкснер [6], исходя из строгих результатов для полуплоскости, предположил, что напряженность поля в окрестности ребра экрана имеет особенность вида $r^{-\alpha}$, где r — расстояние до ребра, и $0 < \alpha < 1$. Для определения показателя α Мейкснер раскладывал в ряд по степеням r компоненты поля в окрестности ребра и получил $\alpha = \frac{1}{2}$ (это согласуется с результатами для полуплоскости).

Однако этот результат нигде не был строго обоснован. Целью настоящей работы является строгое обоснование условия Мейкснера для задачи дифракции на плоском экране. В работе показано, что для выполнимости условия Мейкснера достаточно требовать конечности энергии рассеянного поля в каждой конечной области.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть S — конечный кусок плоскости в трехмерном пространстве R_3, граница которого является дважды непрерывно дифференцируемой кривой.

Решением задачи $\pi(f, S)$ назовем функцию w, непрерывную в R_3 и гармоническую в R_3/S; причем

$$w|_S = f, \quad w(\infty) = 0.$$

Известно, что решение этой задачи существует и единственно.

Для достаточно гладких f существуют предельные значения нормальной производной решения $\pi(f, S)$, и решение этой задачи представимо в виде

$$w(P) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{-\frac{\partial w}{\partial n}(Q)}{r_{PQ}} dS_Q.$$

В теореме 1 будет изучено поведение плотности

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n}(P)$$

при приближении точки P к краю куска S.

В этом параграфе будут доказаны вспомогательные утверждения к этой теореме.

Через $C_{1+\alpha}(F)$ будем обозначать множество функций, являющихся сужениями на F функций, имеющих производные непрерывные по Гельдеру.

Непрерывная функция, гармоническая в $R_3 \setminus S$, которая принимает на S значения $f(P) \in C_{1+\alpha}(S)$, имеет предельные значения нормальной производной, и этот предел является непрерывной функцией во внутренних точках S [1].

Лемма 1. *Пусть* w_1 — *решение* $\pi(1, S)$, *тогда*

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}(P)\right| < Cr^{-\frac{1}{2}},$$

где r — *расстояние от точки* P *до границы* ∂S *области* S.

Так как кривая ∂S имеет по условию ограниченную кривизну, то для каждой точки $Q \in \partial S$ существует круг $D \subset S$ и касающийся кривой ∂S в Q.

Пусть круг D лежит в плоскости (x, y). Через a обозначим его радиус. Начало координат поместим в центр круга.

Решением задачи $\pi(1, D)$ является функция (см., например, Ландау [2]),

$$\omega = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left[\frac{2a^2}{x^2+y^2+z^2+\sqrt{(x^2+y^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В силу принципа максимума для гармонических функций $\omega \leqslant w_1$ во всем R_3. Для любой точки $P(x, y, 0) \in D$, следовательно, будет справедливо неравенство

$$\frac{w_1(x, y, z) - w_1(x, y, 0)}{z} \geqslant \frac{\omega(x, y, z) - \omega(x, y, 0)}{z} \quad (z > 0).$$

Предельным переходом получаем

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} \geqslant \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Так как обе эти производные отрицательные, то

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial z}\right| \leqslant -\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Но $r = a - \sqrt{x^2+y^2}$, следовательно,

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial w_1}{\partial z}\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{a+\sqrt{x^2+y^2}}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{a}} r^{-\frac{1}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Приведем некоторые сведения из теории потенциала. Дополним кусок S до замкнутой поверхности Γ. Будем предполагать, что Γ является дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью; $\Gamma \setminus S$ обозначим Σ.

Каждой непрерывной на Σ функции $\varphi(X)$ соответствует такая непрерывная на S функция $\hat{\varphi}(X)$, что

а) функция

$$h(P) = \int_S \frac{\hat{\varphi}(X)}{r_{PX}} dS_X$$

непрерывна во всем пространстве и совпадает на множестве S с функцией

$$g(P) = \int_\Sigma \frac{\varphi(X)}{r_{PX}} dS_X;$$

б) если $\varphi(X) > 0$, то $\hat{\varphi}(X) \geqslant 0$, и $h(P) \leqslant g(P)$ для всех P;

в) $$\hat{\varphi}(X) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial h}{\partial n}(X).$$

Доказательство утверждений а), б) и в) имеется в работе Заремба [3].

На множестве непрерывных на Г функций определим оператор $\hat{S}$ (оператор выметания на S) формулой

$$\hat{S}(\varphi) = \varphi(X) + \hat{\varphi}(X) \quad (X \in S),$$

где $\hat{\varphi}(X)$ — та функция, которая соответствует в силу пункта а) сужению функции $\varphi(X)$ на Σ.

Оператор $\hat{S}$ линеен и позитивен, т. е.

$$\hat{S}(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\hat{S}(\varphi_1) + \beta\hat{S}(\varphi_2)$$

и

$$\hat{S}(\varphi) \geqslant 0, \text{ если } \varphi(X) > 0.$$

Как известно, потенциал простого слоя

$$H(P) = \int_F \frac{\rho(X)}{r_{PX}} dS_x$$

с непрерывной плотностью ρ непрерывен во всем пространстве, а его нормальная производная имеет следующий скачок при переходе через F:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial n}\right] = \frac{\partial H}{\partial n_+} + \frac{\partial H}{\partial n_-} = -4\pi\rho.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n_+}$ и $\frac{\partial}{\partial n_-}$ обозначают дифференцирование в двух противоположных направлениях по нормали к F.

В случае, если F — кусок плоскости, то в силу симметрии

$$\frac{\partial H}{\partial n_+} = \frac{\partial H}{\partial n} \text{ и } \frac{\partial H}{\partial n} = -2\pi\rho.$$

Учитывая это и пункт в), получаем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть φ — некоторая непрерывная на* Г *функция. Тогда потенциал простого слоя*

$$w(P) = \int_S \frac{\hat{S}(\varphi)}{r_{PX}} dS_X$$

можно представить в виде

$$w(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\frac{\partial w}{\partial n}(X)}{r_{PX}} dS_X,$$

т. е.

$$\hat{S}(\varphi) = \hat{\varphi}(X) + \varphi(X) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial w}{\partial n}(X).$$

Лемма 3. *Пусть гармоническая в области G функция U принимает наименьшее значение в некоторой точке X на границе* Г *области G.*

Предположим, что существует такой замкнутый шар, целиком лежащий в G, что точка X лежит на его границе. Тогда либо U постоянна, либо производная этой функци в точке X (предполагается, что она существует) по направлению внутренней нормали положительна (см., например, Заремба [3]).

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. *Пусть* $f(P) \in C_{1+\alpha}(S)$ *и* w *решение* $\pi(f, S)$, *тогда*

$$\left|\frac{\partial w}{\partial n}(P)\right| < Cr^{-\frac{1}{2}},$$

где r — *расстояние от точки* P *до границы* ∂S *области* S.

Среди продолжений f на Γ существует такое, которое на некотором куске поверхности $S' \subset \Sigma$ равняется там своему отрицательному минимуму m. Это продолжение можно построить следующим образом. Пусть $\tilde f \in C_{1+\alpha}(\Gamma)$ — какое-то продолжение. Помножим его на бесконечно дифференцируемую функцию $\lambda(X)$, равную единице на S и нулю на некотором куске τ поверхности. Пусть m — отрицательное число, меньшее, чем

$$\min_{X \in \Gamma\setminus\tau} \lambda(X)\tilde f(X).$$

Прибавим к $\lambda\tilde f$ бесконечно дифференцируемую неположительную функцию $\lambda_1(X)$, равную m на некотором куске поверхности $S' \subset \tau$ и равную нулю на $\Gamma\setminus\tau$ $(\lambda_1(X) \geqslant m)$. Функция $\lambda\tilde f + \lambda_1$ принадлежит $C_{1+\alpha}(\Gamma)$ и на S' равняется своему отрицательному минимуму. Ее мы будем обозначать также через f.

Через U обозначим непрерывную в R_3 и гармоническую в $R_3\setminus\Gamma$ функцию, которая на Γ принимает значение $f(X)$.

А U_0 будет обозначать непрерывную в R_3 функцию, гармоническую в $R_3\setminus\Gamma$ и равную m на Γ.

Предельные значения нормальной производной у внешней и внутренней задач в данном случае существуют и являются непрерывными функциями на Γ [4, стр. 257]. $\frac{\partial}{\partial n_i}$ обозначим дифференцирование по внутренней (отрицательной) нормали. $\frac{\partial}{\partial n_e}$ — по внешней (положительной).

Функция

$$\varphi(X) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n_i}(X) + \frac{\partial U}{\partial n_e}(X)\right)$$

является непрерывной. Потенциал простого слоя

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(X)}{r_{PX}}\, dS_X$$

имеет скачок нормальных производных, равный $-4\pi\varphi$.

В силу этого функция

$$U - \int_\Gamma \frac{\varphi(X)}{r_{PX}}\, dS_X$$

имеет скачок нормальных производных при переходе через Γ, равный нулю, и следовательно, является гармонической во всем пространстве. Так как на ∞ она равна нулю, то она равна нулю тождественно, так что

$$U = \int_\Gamma \frac{-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n_i}(X) + \frac{\partial U}{\partial n_e}(X)\right)}{r_{PX}}\, dS_X = \int_\Gamma \frac{\varphi(X)}{r_{PX}}\, dS_X.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$U_0=\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_0(X)}{r_{PX}}\,dS_X,\ \text{где}\ \varphi_0=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U_0}{\partial n_i}+\frac{\partial U_0}{\partial n_e}\right).$$

Функция U_0 тождественно равна m внутри Г, поэтому $\frac{\partial U_0}{\partial n_i}=0$. Так как $U_0\geqslant m$, то в силу леммы 3 на всей границе Г будет $\frac{\partial U_0}{\partial n_e}>0$.

В силу принципа максимума $U\geqslant U_0$ во всем R_3. Следовательно, функция $U-U_0$, равная нулю на куске S', достигает там своего минимума.

Пользуясь леммой 3, получим

$$\frac{\partial U}{\partial n_e}(X)-\frac{\partial U_0}{\partial n_e}(X)>0\,(X\in S').$$

Далее, функция U равна своему минимуму на S', поэтому $\frac{\partial U}{\partial n_i}(X)>0$ для $X\in S'$. Из предыдущего следует, что для $X\in S'$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial U}{\partial n_e}(X)+\frac{\partial U}{\partial n_i}(X)>\frac{\partial U_0}{\partial n_e}(X)+\frac{\partial U_0}{\partial n_i}(X).$$

Помножив его на $-\frac{1}{4\pi}$, получим $\varphi_0(X)\geqslant\varphi(X)\,(X\in S')$. Функция φ_0 строго отрицательна, поэтому тем более справедливо неравенство

$$-\varphi_0(X)\geqslant\varphi(X)\,(X\notin S').$$

В силу непрерывности функция φ ограничена; $-\varphi_0$ строго больше нуля. Отсюда следует, что для некоторой постоянной $C>0$ будет справедливо неравенство

$$-C\varphi_0(X)\geqslant\varphi(X),$$

уже для всех $X\in\Gamma$. Действуя оператором выметания $\hat{S}$, получим

$$\hat{S}(\varphi)\leqslant\hat{S}(-C\varphi_0)=-C\hat{S}(\varphi_0). \qquad (*)$$

Как легко убедиться, решением задачи $\pi(f, S)$ является функция

$$w=\int\limits_{S}\frac{\hat{S}(\varphi)}{r_{PX}}\,dS_X,$$

а задачи $\pi(m, S)$ — функция

$$w_0=\int\limits_{S}\frac{\hat{S}(\varphi_0)}{r_{PX}}\,dS_X.$$

В силу леммы 2 и (*)

$$-\frac{\partial w}{\partial n}\leqslant C\,\frac{\partial w_0}{\partial n}=Cm\sigma=C_1\sigma,$$

где σ, взятая с обратным знаком, нормальная производная решения $\pi(1, S)$.

Для получения оценки снизу достаточно рассмотреть задачу $\pi(-f, S)$. Согласно предыдущему получим

$$\frac{\partial w}{\partial n}\leqslant C_1'\delta\ \text{или}\ -C_1'\sigma\leqslant-\frac{\partial w}{\partial n}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right| < C_3.$$

В силу леммы 1 теорема доказана.

§ 4. ДИФРАКЦИЯ НА ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Пусть S — кусок плоскости (экран), край которого ∂S — дважды непрерывно дифференцируемая кривая. Пусть расположенные вне экрана (возможно на бесконечности) источники колебаний при отсутствии экрана порождают поле $u_0(x, y, z)$.

Задача о дифракции поля $u_0(x, y, z)$ на экране состоит в отыскании функции

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z) - v(x, y, z),$$

где описывающая рассеянное на экране поле функция $v(x, y, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) всюду вне S

$$\Delta v + k^2 v = 0;$$

2) в каждой конечной области Ω пространства энергия рассеянного поля конечна

$$\iiint\limits_{\Omega} \{|v|^2 + |\operatorname{grad} v|^2\}\, d\Omega < \infty;$$

3) на бесконечности выполняется условие излучения Зоммерфельда

$$r|v| \leqslant C < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} r\left(v - ik\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

4) на экране S выполняется некоторое граничное условие, вид которого зависит от свойств экрана.

Мы рассмотрим первую краевую задачу. В этом случае функция v должна быть непрерывной во всем пространстве, и на экране полное поле должно быть равно нулю, т. е.

$$v(x, y, z)|_S = u_0(x, y, z)|_S.$$

В работе В. А. Марченко и К. В. Маслова [5] доказано, что задача о дифракции на экране всегда имеет, и притом единственное, решение. Это решение представимо в виде

$$u(P) = u_0(P) - \int\limits_S \frac{e^{ikr_{PQ}}\psi(Q)}{r_{PQ}}\, dS_Q,$$

где непрерывная во внутренних точках S функция $\psi(Q)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_S \frac{|\psi(Q)|}{r_{PQ}}\, dS_Q < \infty.$$

Покажем, что в случае первой краевой задачи дифракции на плоском экране условие Мейкснера всегда выполняется, т. е.

$$r^{\frac{1}{2}}|\psi(Q)| < C.$$

Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть*

$$\int\limits_S \frac{|\psi(Q)|}{r_{PQ}}\, dS_Q < \infty,$$

тогда функция

$$\gamma(P) = \int\limits_S \frac{e^{ikr_{PQ}} - 1}{r_{PQ}}\, \psi(Q)\, dS_Q \in C_{1+\alpha}(S).^*$$

Разлагая подынтегральное выражение * в ряд Тейлора, получаем для функции γ следующее разложение:

$$\gamma(P) = ik \int\limits_S \psi(Q)\, dS_Q - \frac{k^2}{2} \int\limits_S r_{PQ}\psi(Q)\, dS_Q - \frac{ik^3}{3!} \int\limits_S r_{PQ}^2 \psi(Q)\, dS_Q + \ldots.$$

Из этого разложения видно, что достаточно для доказательства леммы показать принадлежность функции

$$\gamma_1(P) = \int\limits_S r_{PQ}\psi(Q)\, dS_Q$$

классу $C_{1+\alpha}(S)$, т. е. непрерывность по Гельдеру ее первых производных. Пусть $P = P(x, y, z)$; $Q = Q(\xi, \eta, \zeta)$.

Рассмотрим, например, поведение

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(P) = \int\limits_S \frac{(x-\xi)\psi(Q)}{r_{PQ}}\, dS_Q.$$

Имеем

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(P_1) = \int\limits_S \left(\frac{x_0-\xi}{r_{P_0Q}} - \frac{x_1-\xi}{r_{P_1Q}}\right) \psi(Q)\, dS_Q =$$

$$= \int\limits_S \frac{x_0 - x_1}{r_{P_0Q}}\, \psi(Q)\, dS_Q + \int\limits_S (x_1-\xi)\left(\frac{1}{r_{P_0Q}} - \frac{1}{r_{P_1Q}}\right) \psi(Q)\, dS_Q.$$

Ясно, что

$$\left| \int\limits_S \frac{x_0 - x_1}{r_{P_0Q}}\, \psi(Q)\, dS_Q \right| \leqslant C r_{P_0P_1}.$$

Так как

$$\frac{|x_1-\xi|}{r_{P_1Q}} \leqslant 1; \quad |r_{P_1Q} - r_{P_0Q}| \leqslant r_{P_1P_0},$$

то

$$\left| \int\limits_S (x_1-\xi)\left(\frac{1}{r_{P_0Q}} - \frac{1}{r_{P_1Q}}\right) \psi(Q)\, dS_Q \right| =$$

$$= \left| \int\limits_S \frac{x_1-\xi}{r_{P_1Q}} (r_{P_1Q} - r_{P_0Q}) \frac{\psi(Q)}{r_{P_0Q}}\, dS_Q \right| \leqslant C r_{P_0P_1}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(P_1) \right| \leqslant C r_{P_1P_0}.$$

Точно так же ведут себя другие производные. Лемма доказана.

Функция, описывающая рассеянное поле, как уже говорилось, представима в виде

$$v(P) = \int\limits_S \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\, \psi(Q)\, dS_Q,$$

причем

$$v(P)|_S = u_0.$$

Ввиду того, что источники колебаний расположены вне экрана, функция u_0 будет регулярной на S.

Для точек $P \in S$ справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_S \frac{\psi(Q)}{r_{PQ}} dS_Q = -\int\limits_S \frac{e^{ikr_{PQ}}-1}{r_{PQ}} \psi(Q)\, dS_Q + u_0.$$

Отсюда следует, что гармоническая вне S функция

$$w(P) = \int\limits_S \frac{\psi(Q)}{r_{PQ}} dS_Q$$

принимает на S значения из $C_{1+\alpha}(S)$.

В силу теоремы 1 заключаем, что

$$|\psi| \leqslant Cr^{-\frac{1}{2}},$$

и следовательно, выполнено условие Мейкснера.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ

В лемме 1 для решения $\pi(1, S)$ была получена оценка

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{a}}\, r^{-\frac{1}{2}}.$$

Для выпуклых областей можно получить оценку снизу. Для этого достаточно взять круг $\tilde{D}_Q$, содержащий S и касающийся ∂S в точке Q.

Пусть $\tilde{\omega}$ — решение $\pi(1, \tilde{D}_Q)$. В силу принципа максимума $\tilde{\omega} \geqslant w_1$ во всем пространстве.

Рассуждая так же как в лемме 1, получим неравенство

$$\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{a}}}\, r^{-\frac{1}{2}},$$

где $\tilde{a}$ — радиус круга $\tilde{D}_Q$. Таким образом,

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\tilde{a}}}\, r^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{a}}\, r^{-\frac{1}{2}}.$$

В заключении автор выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за руководство данной работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. D. Kellog. On the derivatives of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc., 33 (1931).

2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.

3. С. Заремба. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа, УМН, т. 1, вып. 3—4, 1946.

4. Н. И. Гюнтер. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953.

5. В. А. Марченко и К. В. Маслов. Коротковолновое приближение в задаче о дифракции на плоском экране. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», № 3. Изд-во ХГУ. Харьков, 1966.

J. Meixner. Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen. Ann. d. Phys;. 6, 2 (1949).

Поступила 5 марта 1968 г.