

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М. Ліфшиця

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри теоретичної фізики
імені академіка І. М. Ліфшиця
проф. Рашба Г. І.
_____ 2024 р.

Оцінка « _____ »
Голова ЕК

_____ 2024 р.

Варава Олексій Дмитрович

Моделювання стану сукупних образів у квантових алгоритмах за допомогою сплутаних станів.

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітнього ступеня «Бакалавр»
за спеціальністю 104 – «фізика та
астрономія»
освітньо-професійна програма «фізика»

(підпис студента)

Науковий керівник – професор кафедри
теоретичної фізики імені академіка
І. М. Ліфшиця, д-р фіз.-мат. н., доц.
Майзеліс З.О.

(підпис керівника)

Харків 2024

Анотація

Варава О.Д. Моделювання стану сукупних образів у квантових алгоритмах за допомогою сплутаних станів. – Рукопис.

Дипломна робота на здобуття освітньо – кваліфікаційного рівня бакалавр за спеціальністю 104–фізика та астрономія. Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2024.– 35с.– Іл. 7

У даній роботі розглянуто динаміку двохкубітної квантової системи (вимірювача), що взаємодіє із парою заплутаних кубітів (досліджуваною системою) та навколишнім середовищем (термостатом). Варто відзначити, що дана модель добре працює при слабкій взаємодії систем із термостатом. Досліджено динаміку елементів матриці густини вимірювача, зафіксовано факт формування заплутаності між кубітами вимірювача, що не взаємодіяли на пряму та отримано залежність міри заплутаності частинок вимірювача, як функції часу. Проаналізовано вплив вхідних параметрів квантових систем на динаміку їх станів. Пропонується алгоритм для зчитування та збереження зчитаної інформації із квантових скорельованих систем, як квантовий аналог машинного самонавчання.

Ключові слова: квантова заплутаність, кубіт, вимірювач, матриця густини, рівняння Ліндблада.

Abstract

Varava O.D. Modelling of the generalized images in quantum algorithms by entangled states – Manuscript.

The thesis is for getting Bachelor of Science degree, speciality 104 – «Physics and Astronomy». Kharkiv National University, 2024, – 35p. – Fig. 7

The work examines the dynamics of a two-qubit quantum system (measuring device) interacting with a pair of entangled qubits (the system under study) and the environment (thermostat). It is worth noting that this model works well with weak interaction of the system with the thermostat. The dynamics of the elements of the measuring system density matrix were studied, the fact of the formation of entanglement between the qubits of the measuring system that did not interact directly was recorded, and the dependence of the degree of entanglement of the measuring qubits as a function of time was obtained. The influence of the input parameters of quantum systems on the dynamics of their states is analyzed. An algorithm for reading and preserving the read information is proposed, as a quantum analogue of machine self-learning.

Keywords: quantum entanglement, qubit, measuring device, density matrix, Lindblad equation.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 Огляд літератури	7
1.1 Квантові обчислення. Кубіти	7
1.2 Відкриті та закриті системи. Взаємодія із термостатом	9
1.3 Квантові вимірювання	10
2 Опис еволюції квантових систем	12
2.1 Взаємодія квантових систем. Заплутаність	12
2.2 Дисипація та декогеренція в квантових системах	14
2.3 Рівняння Ліндблада	17
3 Еволюція заплутаності кубітів вимірювача	19
3.1 Взаємодія кубітів вимірювача з першою ланкою реєстру	19
3.2 Перевірка вимірювача на предмет формування заплутаності	26
3.3 Дослідження впливу вхідних параметрів на динаміку станів вимірювача	30
4 ВИСНОВКИ	32
Список використаних джерел	33

ВСТУП

Сучасний розвиток технологій значною мірою визначається прогресом у сфері обчислень. Традиційні комп'ютери, засновані на класичній фізиці, дозволили нам досягти значних успіхів у різних галузях науки і техніки. Однак, з наближенням до фізичних меж мініатюризації транзисторів, класичні обчислювальні технології стикаються з низкою обмежень. Це стимулює наукове співтовариство до пошуку альтернативних підходів до обробки інформації. Одним з найперспективніших напрямків є квантові обчислення.

Квантові обчислення базуються на феноменах квантової механіки, таких як суперпозиція та заплутаність. Суперпозиція дозволяє кубітам перебувати в кількох станах одночасно, що відкриває можливість паралельної обробки даних. Заплутаність, у свою чергу, забезпечує тісний зв'язок між кубітами, що дозволяє змінювати стан одного кубіта, миттєво впливаючи на стан іншого, незалежно від відстані між ними. Квантовий комп'ютер – це обчислювальна машина, яка використовує принципи квантової механіки для обробки даних. Основними одиницями інформації в квантових комп'ютерах є кубіти, які, на відміну від бітів у класичних комп'ютерах, можуть одночасно перебувати у станах 0 і 1 завдяки явищу суперпозиції. Це дозволяє квантовим комп'ютерам паралельно виконувати велике число обчислень, значно підвищуючи їх продуктивність у порівнянні з традиційними системами.

Ще однією сучасною інновацією є штучний інтелект (ШІ). Тож не дивно, що разом з розвитком квантових обчислень з'явилася нова галузь – квантовий штучний інтелект (КШІ). Поєднання квантових комп'ютерів з методами штучного інтелекту створює унікальні можливості для вирішення складних

задач, що не під силу навіть найпотужнішим класичним суперкомп'ютерам. КШІ обіцяє значно прискорити процеси навчання моделей, оптимізації та аналізу даних, що відкриває нові перспективи у різних галузях людської діяльності.

Таким чином, квантові обчислення та ШІ представляють собою революційний крок у розвитку інформаційних технологій. Їх впровадження може радикально змінити багато галузей, включаючи криптографію, моделювання хімічних процесів, оптимізацію та обробку великих масивів даних. Подальше дослідження та розвиток квантових комп'ютерів відкриває нові горизонти для науки і техніки, формуючи основу для майбутніх інновацій.

Однак, основною проблемою лишається процес машинного навчання. Відзначимо, що якщо класичні системи можуть зберігати інформацію в кореляціях, квантові системи теж зберігають інформацію не тільки в станах окремих кубітів, а й в заплутаності. Тож на сьогоднішній день лишається актуальним питання, виділення інформації, із скорельованої системи великого набору даних і те, як адаптувати систему машинного навчання для квантово випадку.

Об'єкт дослідження: двохкубітна не заплутана система, що взаємодіє з іншими заплутаними квантовими системами та термостатом.

Предмет дослідження: стан двохкубітної системи (вимірювача) при взаємодії із заплутаною системою (реєстром даних) та за наявності дисипації і декогеренції.

Мета дослідження: дослідити динаміку стану двохкубітної не заплутаної системи та розвиток заплутаності, що виникає в ній у процесі взаємодії із іншою заплутаною системою. Для цього було сформульовано наступні задачі:

- 1) сформулювати математичну модель та за її допомогою отримати рівняння,

що описує динаміку стану двохкубітної системи з часом, при її взаємодії із іншою заплутаною квантовою системою та термостатом;

2) перевірити, чи в результаті взаємодії системи та вимірювача, між кубітами останнього виникає заплутаність;

3) змоделювати динаміку стану двохкубітної системи при наявності дисипації та декогеренції; побудувати, на основі отриманих залежностей, графіки еволюції елементів матриці густини вимірювача та міри заплутаності з часом;

4) проаналізувати вплив вхідних параметрів на динаміку станів вимірювача.

Гіпотеза дослідження стверджує, що при контакті двох, спочатку не заплутаних, кубітів вимірювача із двома кубітами системи, що від початку знаходяться у заплутаному стані, між кубітами першого виникають кореляції. Дані кореляції виникають навіть, якщо кубіти вимірювача між собою не взаємодіють на пряму та міститимуть інформацію про вимірювану систему.

Методом дослідження є аналітичне моделювання; пошук та розв'язання відповідного квантово – кінетичного рівняння, яке враховує взаємодію двох систем, а також ефекти декогеренції та дисипації, викликані взаємодією із термостатом; візуалізація та аналіз отриманих даних.

Наукова новизна полягає у тому, що вперше запропоновано зберігати інформацію про кореляції у вихідній системі даних за допомогою квантової заплутаності системи, що вимірює стан реєстру.

Практичне значення запропонованого алгоритму формування заплутаності полягає у можливості його використання в процесі машинного навчання для квантово випадку.

1 Огляд літератури

1.1 Квантові обчислення. Кубіти

Сучасні комп'ютери — як у теорії (машини Тьюрінга), так і на практиці (ПК, високопродуктивні комп'ютери, ноутбуки, планшети, смартфони, тощо) — базуються на класичній фізиці. Вони обмежені принципом локальності й тим фактом, що системи можуть перебувати лише в одному стані одночасно. Однак сучасна квантова фізика говорить нам, що мікросвіт поводиться зовсім інакше. Квантова система може перебувати в суперпозиції багатьох різних станів одночасно і може проявляти інтерференційні властивості під час своєї еволюції. Крім того, просторово розділені квантові системи можуть переплутатися одна з одною, і через це операції можуть проявлятися «нелокальні» ефекти.

Квантові обчислення — це область, яка досліджує обчислювальну потужність та інші властивості комп'ютерів на основі квантово-механічних принципів. Вона поєднує два найважливіших напрямки науки 20-го століття: квантову механіку (розвинену Планком, Ейнштейном, Бором, Гейзенбергом, Шредингером та іншими в період 1900–1925 рр.) та інформатику (зародження якої можна датувати Тьюрінгом 1936 р. [1]). Важливою метою є пошук квантових алгоритмів, які значно швидші за будь-який класичний алгоритм, що розв'язує ту саму проблему. Квантові обчислення беруть свій початок з 1980-х років із пропозицій щодо аналогових квантових комп'ютерів Юрія Маніна [2], Річарда Фейнмана [3] і Пола Беніоффа [4], і досягли цифровізації, коли в 1985 Девід Дойч визначив універсальну квантову машину Тьюрінга [5]. У

наступні роки спостерігалася порівняно менш активна діяльність, зокрема розробка перших алгоритмів Дойчем і Йоною [6] і Саймоном [7], а також розробка теорії квантової складності Бернштейном і Вазірані [8]. Проте інтерес до цієї галузі надзвичайно зріс після дивовижного відкриття Пітером Шором ефективних квантових алгоритмів для задач цілочисельної факторизації та дискретних логарифмів у 1994 році [9], яке було натхненне роботою Саймона та відкриття Ловом Гровером квантового алгоритму розв'язання задачі перебору у 1996 році [10]. Оскільки більшість сучасної класичної криптографії базується на припущенні, що ці дві проблеми є обчислювально складними, здатність фактично побудувати та використовувати квантовий комп'ютер дозволить нам зламати більшість сучасних класичних криптографічних систем, зокрема систему RSA (аббревіатура від прізвищ Rivest, Shamir та Adleman) [11]. Навпаки, квантова форма криптографії, створена Беннетом і Brassаром [12], є непорушною навіть для квантових комп'ютерів.

Тепер розглянемо базові поняття, якими оперують квантові обчислення. Так, як біт є одиницею класичної інформації, кубіт є одиницею квантової інформації. Як відомо, біт завжди приймає одне із двох можливих значень: $\{0, 1\}$. Мінімальний нетривіальний гільбертовий простір двовимірний. Позначимо ортогональний базис в двомірному векторному просторі як $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Тоді найбільш загальний нормований чистий стан можна представити у вигляді:

$$a |0\rangle + b |1\rangle, \quad (1.1)$$

де a, b – комплексні числа, що задовольняють умові $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Отже кубітом називається система, стан якої в двомірному гільбертовому просторі, описується рівнянням (1.1). При виконанні вимірювання, стан кубіту проєктується у базисі $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Тоді з ймовірністю $|a|^2$ ми отримаємо результат $|0\rangle$, і з ймовірністю $|b|^2$ – результат $|1\rangle$. Більш того, за винятком випадків $a = 0$ і $b = 0$, вимірювання обов'язково призводить до збурення стану. Якщо

початкове значення кубіта невідоме, то тоді неможна визначити a і b за допомогою одного такого, або будь-якого іншого вимірювання. Однак після вимірювання кубіт виявляється у відомому стані – $|0\rangle$ або $|1\rangle$ – відмінному від його попереднього стану. У цьому і полягають наступні відмінності між бітом і кубітом: ми можемо виміряти класичний біт не збурюючи його і розшифрувати всю закодовану у ньому інформацію, а ще кубіт може перебувати у стані суперпозиції та заплутування, що відкриває нові обчислювальні можливості [14].

1.2 Відкриті та закриті системи. Взаємодія із термостатом

Замкнені та ізольовані системи описуються гамільтоніаном, що не залежить від часу. Однак, на практиці ми стикаємося із задачами, в яких система приводиться в рух зовнішніми силами різної природи. В такому разі ми говоримо про все ще закрити, але не ізольовану систему, гамільтоніан якої уже може залежати від часу. Фундаментальні закони квантової динаміки мають оборотний характер, так як динаміка закритої системи регулюється гамільтоніаном, який представляє її повну енергію і є константою руху. Проте жодна система насправді не є повністю ізольованою, тому в реальних моделях завжди присутні певні дисипативні процеси, зумовлені взаємодією із навколишнім середовищем. Такі системи називають відкритими, в цьому разі гамільтонова динаміка і теорема Ліувілля уже не годяться для розв'язання такої задачі. Фон Нейман був одним з першим, хто відзначив важливість взаємодії системи із зовнішнім середовищем, у своїй роботі [23].

Взаємодія системи із термостатом приводить до декогеренції. Якщо спочатку система перебувала у чистому стані, то з часом відбудеться її перехід до змішаного стану, це відбувається через зв'язок квантової системи із

ступенями свободи термостату. Під час цього процесу система та зовнішнє середовище обмінюються між собою інформацією й енергією.

1.3 Квантові вимірювання

Процес квантових вимірювань відіграє подвійну роль. З одного боку, він описує спосіб, у який стан квантової системи змінюється, коли над ній проводять вимірювання. Це впливає на прогнози, стосовно поведінки системи в майбутньому. З іншого боку, ми отримуємо певний рецепт для підготовки квантової системи у певному стані, тобто як вибрати набір експериментальних умов, які призвели до реалізації квантових статистичних ансамблів. Отже, чим грубіші вимірювання, то більше інформації про систему ми отримуємо, але при цьому і вплив на неї також високий. Саме тому, в залежності від необхідного результату були розроблені різні способи вимірювань. Основні методи квантових вимірювань подані в [22].

Базовим поняттям в квантових вимірюваннях є проективне вимірювання. Проективне вимірювання, на деякому просторі, з m можливими результатами, це набір проекторів P_1, \dots, P_m , що діють на той самий простір і їх сума: $\sum_{j=1}^m P_j = \mathbb{1}$. Ці проектори є попарно ортогональними, що означає $P_i P_j = 0$, якщо $i \neq j$. Проектор P_j проектує на певний підпростір V_j , загального гільбертового простору V , і кожен стан $|\psi\rangle \in V$ може бути розкладено наступним чином: $|\psi\rangle = \sum_{j=1}^m |\psi_j\rangle$, з $|\psi_j\rangle = P_j |\psi\rangle \in V_j$. Оскільки проектори ортогональні, то підпростори V_j та стани $|\psi_j\rangle$ ортогональні також. Тож коли ми застосовуємо це вимірювання до чистого стану $|\psi\rangle$, то ми отримуємо результат j з імовірністю: $\| |\psi_j\rangle \|^2 = \text{Tr}(P_j |\psi\rangle \langle \psi|) = \langle \psi_j | P_j | \psi_j \rangle$ і виміряний стан згортається до нового стану $|\psi_j\rangle / \| |\psi_j\rangle \| = P_j |\psi\rangle / \| P_j |\psi\rangle \|$. Сума ймовірностей дорівнює одиниці, завдяки припущенню $\sum_{j=1}^m P_j = \mathbb{1}$ і факту, що слід

це лінійна функція:

$$\sum_{j=1}^m \text{Tr}(P_j |\psi\rangle \langle\psi|) = \text{Tr}\left(\sum_{j=1}^m P_j\right) |\psi\rangle \langle\psi| = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle\psi|) = \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Як можна зрозуміти, отримуючи певний результат, ми змушуємо систему прийняти один із власних станів вимірюваної величини, тобто в такому разі ми суттєво впливаємо на систему. Слабкі вимірювання дають нам набагато менше інформації, однак і вплив на систему, в процесі спостереження, знижується, що можливо завдяки малій силі зв'язку між системою та вимірювальним приладом. Інший варіант - непряме вимірювання. В цьому випадку, перед вимірюванням інша квантова система, звана вимірювачем або пробою (підготовлена у певному початковому стані), взаємодіє із вихідною системою, протягом певного проміжку часу. І тоді інформація зчитується з цього вимірювача (проби). У цьому випадку інформація про вимірювану величину міститься в кореляціях між системою та вимірювачем (пробою), отже вимірювання призвело до незворотної та невизначеної зміни в системі, за рахунок зворотної дії [24].

Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених переведенню, зберіганню та обробці класичних даних у станах квантових систем, а також на велику роль квантової заплутаності у квантових алгоритмах, методи зберігання інформації у заплутаному стані квантової системи вивчені неповно. Саме цьому і присвячена дана дипломна робота.

2 Опис еволюції квантових систем

Наша модель представлена системою з n пар заплутаних кубітів, у яких закодована корисна інформація, та вимірювачем, що складається із пари не заплутаних кубітів. Вимірювач, рухаючись уздовж реєстру по черзі взаємодіє з кожною парою реєстру, при цьому обидві квантові системи взаємодіють із термостатом. Нашим завданням є дослідити еволюцію елементів матриці густини вимірювача, та довести факт формування між його кубітами заплутаності.

2.1 Взаємодія квантових систем. Заплутаність

Розглянемо багатокomпонентну систему, що складається з n підсистем. Відповідно до класичного опису, загальний простір станів системи є декартовим добутком n просторів підсистеми, що означає, що загальний стан завжди є добутком n окремих систем. На противагу цьому, згідно з квантовим формалізмом, повний гільбертовий простір H є тензорним добутком просторів підсистем, що означає, що повний стан завжди є добутком n окремих підсистем.[17]

$$H = \otimes_{l=1}^n H_l.$$

Тоді принцип суперпозиції дозволяє записати загальний стан системи у вигляді:

$$|\psi\rangle = \sum_{\mathbf{i}_n} c_{\mathbf{i}_n} |\mathbf{i}_n\rangle, \quad (2.1)$$

де $\mathbf{i}_n = i_1, i_2 \dots i_n$ це мультиіндекс та $|\mathbf{i}_n\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle$, що у загальному випадку не виражаються у вигляді тензорного добутку окремих підсистем

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle.$$

Це означає, що неможливо призначити один вектор стану жодній з n підсистем. Це формально і виражає феномен заплутаності. Саме це і є ключем до розв'язання неklasичних завдань. Стан, що виник у лівій частині формули (2.1) зазвичай з'являється в процесі прямої фізичної взаємодії. Однак заплутаність також може бути згенерована опосередковано, шляхом застосування постулату проєкції.

На практиці ми частіше маємо справу зі змішаними станами, ніж з чистими. Тому на відміну від чистих станів, змішані стани n систем вважаються заплутаними, якщо вони не можуть бути записані у вигляді опуклої комбінації добутку станів:

$$\rho \neq \sum_i p_i \rho_1^i \otimes \dots \otimes \rho_n^i. \quad (2.2)$$

Стани, які не є заплутаними у світлі наведеного вище визначення, називаються сепарабельними, або роздільними. На практиці важко вирішити, чи є дані стани сепарабельними чи заплутаними, виходячи з самого визначення. Тому однією з фундаментальних проблем, що стосуються заплутаності, є так звана проблема роздільності. Також варто відмітити, що заплутаність є надзвичайно важливим ресурсом, про що свідчать наступні відкриття: квантова криптографія [18], квантове щільне кодування [19, 20] і квантова телепортація [21]. Усі ці ефекти базуються на явищі заплутаності.

Ще одним важливим завданням є перевірка наявності заплутаності в системі та її кількісна оцінка. Нехай наша система, із двох кубітів A і B описується деякою матрицею густини ρ_{AB} . Зазначимо, що стан цієї пари може бути як

чистим, так і змішаним. Тож для того, щоб оцінити ступінь заплутаності кубітів вимірювача необхідно спочатку знайти матрицю густини перевернутих спінів

$$\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)(\rho_{AB})^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (2.3)$$

Так як матриці ρ_{AB} та $\tilde{\rho}_{AB}$ – позитивні оператори, їх добуток, хоч він і не є ермітовим, має тільки дійсні додатні власні значення. В такому разі міра заплутаності матриці густини ρ_{AB} визначатиметься формулою:

$$\tau_{AB} = [\text{Max}\{\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4, 0\}]^2, \quad (2.4)$$

де μ_j – квадратні корені із власних чисел $\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}$, розташовані у порядку зростання. τ_{AB} – може приймати значення від 0 до 1, де 0 відповідає незаплутаному стану, а 1 – максимально заплутаному стану [26].

2.2 Дисипація та декогеренція в квантових системах

Позначимо квантові стани частинки, (позначеної S скор. від «system») $|s_1\rangle$ та $|s_2\rangle$. Припустимо, що наша частинка взаємодіє із іншою системою (позначеної E скор. від «environment») – так, що якщо квантовий стан частинки перед взаємодією $|s_1\rangle$, то квантовий стан E буде відповідно $|E_1\rangle$. Аналогічно і для $|s_2\rangle$ та $|E_2\rangle$, що призведе до кінцевих складених станів $|s_1\rangle|E_1\rangle$ та $|s_2\rangle|E_2\rangle$ відповідно. Тоді завдяки лінійності шредінгерівської часової еволюції, для початкового стану суперпозиції $\alpha|s_1\rangle + \beta|s_2\rangle$ кінцевий загальний стан буде заплутаним,

$$|\psi\rangle = \alpha|s_1\rangle|E_1\rangle + \beta|s_2\rangle|E_2\rangle. \quad (2.5)$$

Отримаємо матрицю густини системи, шляхом усереднення за ступенями свободи середовища E , матриці густини загальної системи ρ_{SE} . Для цього

виконаємо операцію часткового сліду:

$$\rho_S = \text{Tr}_E(\rho_{SE}). \quad (2.6)$$

Отримана матриця густини ρ_S вичерпно кодує статистику всіх можливих локальних вимірювань на системі S . Тобто для будь-якої спостережуваної, яка відноситься лише до гільбертового простору системи, $O = O_S \otimes \mathbb{1}_E$, де $\mathbb{1}_E$ – одиничний оператор в гільбертовому просторі H_E . Матриці густини ρ_S достатньо для обчислення середнього значення O . Щоб показати це, позначимо $\{|\psi_k\rangle\}$ і $\{|\phi_l\rangle\}$ – ортогональні базиси в гільбертових просторах H_S і H_E відповідно. Тоді середнє значення O це

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \text{Tr}(\rho_{SE}O) = \sum_{kl} \langle \phi_l | \langle \psi_k | \rho_{SE} (O_S \otimes \mathbb{1}_E) | \psi_k \rangle | \phi_l \rangle = \\ &= \sum_k \langle \psi_k | \left(\sum_l \langle \phi_l | \rho_{SE} | \phi_l \rangle \right) O_S | \psi_k \rangle = \\ &= \sum_k \langle \psi_k | (\text{Tr}_E \rho_{SE}) O_S | \psi_k \rangle = \sum_k \langle \psi_k | \rho_S O_S | \psi_k \rangle = \text{Tr}(\rho_S O_S), \end{aligned} \quad (2.7)$$

показуючи, що для обчислення середнього значення потрібна лише скорочена матриця густини, а не повна ρ_{SE} . Оскільки в контексті декогеренції ми в основному стурбовані впливом середовища на вимірювані властивості системи, зменшена матриця густини відіграє важливу роль у теорії декогеренції для опису квантового стану системи за наявності заплутаності.

Для загального вектору стану (2.5), зменшена матриця ρ_S

$$\begin{aligned} \rho_S &= \text{Tr}_E(\rho_{SE}) = \text{Tr}_E |\psi\rangle \langle \psi| = |\alpha|^2 |s_1\rangle \langle s_1| + |\beta|^2 |s_2\rangle \langle s_2| + \\ &+ \alpha\beta^* |s_1\rangle \langle s_2| \langle E_2 | E_1 \rangle + \alpha^* \beta |s_2\rangle \langle s_1| \langle E_1 | E_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тепер проведемо вимірювання. Результуюча густина ймовірності частинки

$P(x)$ задається виразом

$$\begin{aligned} P(x) &= Tr_S(\rho_S x) = \\ &= |\alpha|^2 |\psi_1(x)|^2 + |\beta|^2 |\psi_2(x)|^2 + 2Re\{\alpha\beta^* \psi_1(x)\psi_2^*(x) \langle E_2|E_1 \rangle\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $\psi_i(x) = \langle x|s_i \rangle$. З рівняння (2.5), ми бачимо, що E кодує інформацію про S , так само, як і EPR-кореляції. Тож, якщо $\langle E_2|E_1 \rangle = 0$ і ми вимірюємо E та знаходимо його в стані $|E_1 \rangle$, то можна передбачити, що ми знайдемо S у стані $|s_1 \rangle$. Отже досліджувана система постійно обмінюється і з навколишнім середовищем енергією та інформацією [27, 28]. У проміжному режимі $0 < |\langle E_2|E_1 \rangle| < 1$, E кодує лише певну частину інформації про S , у сенсі, що вимірювання E не дозволяє достовірно розрізнити $|E_1 \rangle$ та $|E_2 \rangle$. Отже покращення розрізненості $|E_1 \rangle$ та $|E_2 \rangle$ призводить до зниження локальної когерентності між $|s_1 \rangle$ та $|s_2 \rangle$. Тоді опис декогеренції має форму:

$$\left(\sum_i c_i |s_i \rangle \right) |E_0 \rangle \longrightarrow \sum_i c_i |s_i \rangle |E_i(t) \rangle, \quad (2.10)$$

де $|E_i(t=0) \rangle = |E_0 \rangle$ для всіх i . Оскільки зазвичай навколишнє середовище має велику кількість ступенів свободи, то перекриття між різними станами $|E_i(t) \rangle$ швидко зменшується у наслідок чисельних взаємодій. Тому для багатьох моделей декогерентності виявлено експоненціальне затухання:

$$\langle E_i(t)|E_j(t) \rangle \propto e^{-t/\tau_d} \quad \text{для } i \neq j, \quad (2.11)$$

де τ_d – характерна шкала часу декогеренції, яку можна оцінити для конкретного вибору параметрів у кожній моделі.

Варто відмітити, що найбільш загальне диференціальне рівняння для матриці густини, узагальнююче рівняння фон Неймана на випадок дисипативної квантової системи, було знайдено Ліндбладом [29] у 1976 році, без використання якої-небудь фізичної моделі. При своєму, суто математичному аналізі, він висунув припущення, що процес описується напівгрупою операторів ево-

люції і накладав умову збереження позитивності матриці густини.

2.3 Рівняння Ліндблада

Зміна вектора стану $|\psi(t)\rangle$ з часом описується рівнянням Шреденгера:

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad (2.12)$$

де $H(t)$ – це гамільтоніан системи, а стала Планка \hbar дорівнює 1. Розв’язок (2.12) можна представити у вигляді унітарного оператора часової еволюції $U(t, t_0)$, що трансформує деякий стан у початковий момент часу $|\psi(t_0)\rangle$ в стан $|\psi(t)\rangle$, в момент часу t

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (2.13)$$

Після підстановки (2.13) до (2.12), отримаємо рівняння для оператора часової еволюції:

$$i\frac{d}{dt}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0), \quad (2.14)$$

з початковою умовою

$$U(t_0, t_0) = \mathbb{1}, \quad (2.15)$$

де $\mathbb{1}$ – одиничний оператор.

У разі, якщо система знаходиться у змішаному стані, то відповідний статистичний ансамбль можна охарактеризувати матрицею густини ρ . Тоді в початковий момент часу t_0 система описується деякою матрицею густини:

$$\rho(t_0) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} |\psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t_0)|, \quad (2.16)$$

де ω_{α} – позитивна вага, а $|\psi_{\alpha}(t_0)\rangle$ – нормалізований вектор стану, еволюція в

часі якого описується (2.13). Тоді стан системи в час t :

$$\rho(t) = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} U(t, t_0) |\psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t_0)| U^{\dagger}(t, t_0), \quad (2.17)$$

що в скороченому варіанті має вигляд

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^{\dagger}(t, t_0), \quad (2.18)$$

Продиференціювавши це рівняння отримаємо рівняння, зване рівнянням Ліувілля:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)]. \quad (2.19)$$

Однак, якщо до правої частини рівняння (2.19) додати дисипатор:

$$D(\rho) = \sum_k \gamma_k (L_k \rho(t) L_k^{\dagger} - \frac{1}{2} L_k^{\dagger} L_k \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_k^{\dagger} L_k), \quad (2.20)$$

де L_k – оператори Ліндблада, то ми отримаємо рівняння Ліндблада:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] + D(\rho(t)). \quad (2.21)$$

3 Еволюція заплутаності кубітів вимірювача

3.1 Взаємодія кубітів вимірювача з першою ланкою реєстру

Для того, щоб скласти квантово – кінетичне рівняння, необхідно спочатку записати гамільтоніан загальної системи. Отже, на першому кроці, вимірювач взаємодіє із першою ланкою вимірюваної системи, гамільтоніан цієї взаємодії:

$$H = \underbrace{H_1^m + H_2^m + H_1^s + H_2^s}_{H_0} + H_{int\ sm1} + H_{int\ sm2} + H_{int\ 1}^m + H_{int\ 2}^m + H_{int\ 1}^s + H_{int\ 2}^s, \quad (3.1)$$

де гамільтоніани окремих частинок:

$$H_1^m = \varepsilon_1(S_{z1}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1});$$

$$H_2^m = \varepsilon_1(\mathbf{1} \otimes S_{z2}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1});$$

$$H_1^s = \varepsilon_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_{z1}^s \otimes \mathbf{1});$$

$$H_2^s = \varepsilon_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_{z2}^s).$$

Тут контрваріантні індекси m та s вказують на те, куди відноситься частинка, до вимірювача (meter) чи до системи (system), а коваріантні індекси 1 та 2 вказують на номер частинок.

Гамільтоніани попарної взаємодії кубітів вимірювач - система:

$$H_{int\ sm1} = \gamma(S_{+1}^m \otimes \mathbf{1} \otimes S_{-1}^s \otimes \mathbf{1} + S_{-1}^m \otimes \mathbf{1} \otimes S_{+1}^s \otimes \mathbf{1});$$

$$H_{int\ sm2} = \gamma(\mathbf{1} \otimes S_{+2}^m \otimes \mathbf{1} \otimes S_{-2}^s + \mathbf{1} \otimes S_{-2}^m \otimes \mathbf{1} \otimes S_{+2}^s).$$

Якщо моделювати термостат набором осциляторів, то чотири гамільтоніани: $H_{int\ 1}^m$, $H_{int\ 2}^m$, $H_{int\ 1}^s$, $H_{int\ 2}^s$, що відповідають за взаємодію частинок із термостатом, задаються наступним чином:

$$H_{int} = - \sum (\alpha_i S_{+i}^j b_i + \alpha_i^* S_{-i}^j b_i^\dagger),$$

де b_i^\dagger, b_i – оператори породження/знищення осциляторів термостата, $S_{\pm i}^j = S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, де $S_x = \frac{1}{2}\sigma_x$, $S_y = \frac{1}{2}\sigma_y$, де σ_x, σ_y – відповідні матриці Паулі. А матриці S_{zi}^j дорівнюють:

$$S_{z1}^m = S_{z2}^m = S_{z1}^s = S_{z2}^s = S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тоді рівняння Ліндблада набуде вигляду:

$$\dot{\rho} = -i[H_0, \rho] - \hat{\Gamma}_1^m \rho - \hat{\Gamma}_2^m \rho - \hat{\Gamma}_1^s \rho - \hat{\Gamma}_2^s \rho, \quad (3.2)$$

де $[\]$ - позначає комутатор, а ρ - це матриця густини 16×16 загальної системи:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{116} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{161} & \dots & \rho_{1616} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

В кінці розрахунків проведемо нормування, поділивши обидві частини рівняння (3.2) на γ , для обезрозмірення. Тепер запишемо чотири доданки, де оператор $\hat{\Gamma}$ відображає негамільтонове перетворення матриці густини. Перший доданок, що відповідає за взаємодію першого кубіта вимірювача із термостатом:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^m \rho = & \Gamma^m(\bar{n} + 1)(\rho(S_{+}^m S_{-}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \\ & - 2(S_{-}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\rho(S_{+}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (S_{+}^m S_{-}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\rho) + \\ & + \Gamma^m \bar{n}(\rho(S_{-}^m S_{+}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \\ & - 2(S_{+}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\rho(S_{-}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (S_{-}^m S_{+}^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\rho). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Другий доданок, що відповідає за взаємодію другого кубіта вимірювача із термостатом:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_2^m \rho = & \Gamma^m (\bar{n} + 1) (\rho(\mathbf{1} \otimes S_+^m S_-^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \\ & - 2(\mathbf{1} \otimes S_-^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \rho(\mathbf{1} \otimes S_+^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \otimes S_+^m S_-^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \rho) + \\ & + \Gamma^m \bar{n} (\rho(\mathbf{1} \otimes S_-^m S_+^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \\ & - 2(\mathbf{1} \otimes S_+^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \rho(\mathbf{1} \otimes S_-^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \otimes S_-^m S_+^m \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \rho). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Взаємодію першого кубіта системи із термостатом визначає третій доданок:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^s \rho = & \Gamma^s (\bar{n} + 1) (\rho(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s S_-^s \otimes \mathbf{1}) - \\ & - 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_-^s \otimes \mathbf{1}) \rho(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s \otimes \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s S_-^s \otimes \mathbf{1}) \rho) + \\ & + \Gamma^s \bar{n} (\rho(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_-^s S_+^s \otimes \mathbf{1}) - \\ & - 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s S_-^s \otimes \mathbf{1}) + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_-^s S_+^s \otimes \mathbf{1}) \rho). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для другого кубіта системи відповідно четвертий доданок:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_2^s \rho = & \Gamma^s (\bar{n} + 1) (\rho(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s S_-^s) - \\ & - 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_-^s) \rho(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s) + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s S_-^s) \rho) + \\ & + \Gamma^s \bar{n} (\rho(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_-^s S_+^s) - \\ & - 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_+^s S_-^s) + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes S_-^s S_+^s) \rho), \end{aligned} \quad (3.7)$$

де матриці S_+ та S_- відповідно дорівнюють:

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\bar{n} = e^{-\beta \varepsilon_i} / (1 - e^{-\beta \varepsilon_i})$ – число заповнення стану з енергією ε_i , $i = 1, 2$ кубіта у зовнішньому полі, γ – параметр, що описує взаємодію кубітів, β – обернена температура. Дисипація та декогеренція визначається взаємодією системи із термостатом $\Gamma = \pi \sum_k |\alpha_k|^2 \delta(\omega_k - \varepsilon_i)$. Отже контакт із навколишнім середовищем (термостатом) призводить до двох негативних явищ: декогеренції та дисипації. Декогеренція – це втрата, квантовою системою, когерентності, через невірноважену взаємодію із навколишніми станами і проявляється у згасанні недиагональних елементів матриці густини. А дисипація – це процес

втрати енергії та інформації кубітом і проявляється це у згасанні діагональних елементів матриці густини.

Представлення цих доданків у матричній формі може бути проблематичним, а розрахунки громіздкими, тож я зображу їх у скороченому вигляді. Запишемо кінцевий результат для $\hat{\Gamma}_1^m \rho$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^m \rho = \Gamma^m(\bar{n} + 1) & \begin{pmatrix} 2\rho_{11} & 2\rho_{12} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ 2\rho_{21} & 2\rho_{22} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{151} & \rho_{152} & \dots & -2\rho_{77} & -2\rho_{78} \\ \rho_{161} & \rho_{162} & \dots & -2\rho_{87} & -2\rho_{88} \end{pmatrix} + \\ & + \Gamma^m \bar{n} \begin{pmatrix} -2\rho_{99} & -2\rho_{910} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ -2\rho_{109} & -2\rho_{1010} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{151} & \rho_{152} & \dots & 2\rho_{1515} & 2\rho_{1516} \\ \rho_{161} & \rho_{162} & \dots & 2\rho_{1615} & 2\rho_{1616} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

для інших кубітів слід провести аналогічні розрахунки. При цьому взаємодія інших кубітів із термостатом може мати інший вигляд. Як наслідок можуть відрізнятися дисперсійні зв'язки. Для простоти оберемо ту ж модель та однакові параметри взаємодії окремо для кубітів системи та для кубітів вимірювача. Тоді для $\hat{\Gamma}_2^m \rho$ матимемо наступний вираз:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_2^m \rho = \Gamma^m(\bar{n} + 1) & \begin{pmatrix} 2\rho_{11} & 2\rho_{12} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ 2\rho_{21} & 2\rho_{22} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{151} & \rho_{152} & \dots & -2\rho_{1111} & -2\rho_{1112} \\ \rho_{161} & \rho_{162} & \dots & -2\rho_{1211} & -2\rho_{1212} \end{pmatrix} + \\ & + \Gamma^m \bar{n} \begin{pmatrix} -2\rho_{55} & -2\rho_{56} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ -2\rho_{65} & -2\rho_{66} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{151} & \rho_{152} & \dots & 2\rho_{1515} & 2\rho_{1516} \\ \rho_{161} & \rho_{162} & \dots & 2\rho_{1615} & 2\rho_{1616} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

для $\hat{\Gamma}_1^s \rho$ матимемо наступний вираз:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^s \rho = & \Gamma^s(\bar{n} + 1) \begin{pmatrix} 2\rho_{11} & 2\rho_{12} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ 2\rho_{21} & 2\rho_{22} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{151} & \rho_{152} & \dots & -2\rho_{1313} & -2\rho_{1314} \\ \rho_{161} & \rho_{162} & \dots & -2\rho_{1413} & -2\rho_{1414} \end{pmatrix} + \\ & + \Gamma^s \bar{n} \begin{pmatrix} -2\rho_{33} & -2\rho_{34} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ -2\rho_{43} & -2\rho_{44} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \rho_{151} & \rho_{152} & \dots & 2\rho_{1515} & 2\rho_{1516} \\ \rho_{161} & \rho_{162} & \dots & 2\rho_{1615} & 2\rho_{1616} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

і нарешті, для $\hat{\Gamma}_2^s \rho$ матимемо наступний вираз:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_2^s \rho = & \Gamma^s(\bar{n} + 1) \begin{pmatrix} 2\rho_{11} & \rho_{12} & \dots & 2\rho_{115} & \rho_{116} \\ \rho_{21} & -2\rho_{11} & \dots & \rho_{215} & -2\rho_{115} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2\rho_{151} & \rho_{152} & \dots & 2\rho_{1515} & \rho_{1516} \\ \rho_{161} & -2\rho_{151} & \dots & \rho_{1615} & -2\rho_{1515} \end{pmatrix} + \\ & + \Gamma^s \bar{n} \begin{pmatrix} -2\rho_{22} & \rho_{12} & \dots & \rho_{115} & \rho_{116} \\ \rho_{21} & 2\rho_{22} & \dots & \rho_{215} & \rho_{216} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -2\rho_{162} & \rho_{152} & \dots & -2\rho_{1616} & \rho_{1516} \\ \rho_{161} & 2\rho_{162} & \dots & \rho_{1615} & 2\rho_{1616} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Комутатор, що фігурує у квантово-кінетичному рівнянні, має вигляд:

$$[H, \rho] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho_{116} \\ -\varepsilon_2\rho_{21} + \gamma\rho_{51} & \dots & (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho_{216} + \gamma\rho_{516} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma\rho_{121} - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho_{151} & \dots & \gamma\rho_{1216} + \varepsilon_2\rho_{1516} \\ -2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho_{161} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Отже підставляючи вирази: (3.12), (3.8), (3.9), (3.10) та (3.11) до (3.2), отримаємо систему з 256 лінійних диференціальних рівнянь, що описують динаміку

та стани кубітів під впливом навколишнього середовища. Однак, для того, щоб вирішити цю систему диференціальних рівнянь, слід задати початкові умови.

Матриці густини вимірювача та системи, в початковий момент часу, відповідно дорівнюють:

$$\rho^m(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^s(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далі, для спрощення подальших викладок, покладемо: $\bar{n} = 0$; $\Gamma^m = \Gamma^s = 0$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Отримуємо розв'язок системи диференціальних рівнянь у вигляді (3.3), де ненульові елементи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{11}(t) = \frac{1}{2} \\ \rho_{14}(t) = \frac{1}{8}e^{-2it(\varepsilon+\gamma)}(e^{2it\gamma} + 1)^2 \\ \rho_{41}(t) = \frac{1}{4}e^{2it\varepsilon} + \frac{1}{8}(e^{2it(\varepsilon-\gamma)} + e^{2it(\varepsilon+\gamma)}) \\ \rho_{44}(t) = \frac{1}{32}(e^{2it\gamma} + 1)^4 \\ \vdots \\ \rho_{1010}(t) = -\frac{1}{32}e^{-4it\gamma}(e^{2it\gamma} - 1)^2 \\ \rho_{1013}(t) = -\frac{1}{32}e^{-4it\gamma}(e^{2it\gamma} - 1)^3(e^{2it\gamma} + 1) \\ \rho_{1310}(t) = \frac{1}{32}e^{-4it\gamma}(e^{2it\gamma} - 1)^3(e^{2it\gamma} + 1) \\ \rho_{1313}(t) = \frac{1}{32}e^{-4it\gamma}(e^{2it\gamma} - 1)^4 \end{array} \right.$$

Однак нас цікавить динаміка не загальної системи, а вимірювача. Для того, щоб отримати залежність матриці густини вимірювача від часу, проведемо усереднення матриці густини загальної системи за станами вимірюваної системи, тобто виконаємо операцію отримання часткового сліду [26]. Позначимо

матрицю густини загальної системи як ρ^{ms} , тоді матриця ρ^m дорівнює:

$$\rho^m = Tr_s \rho^{ms} = \sum_{j=1}^{N_s} (\mathbf{1}_m \otimes \langle \phi_j |) \rho^{ms} (\mathbf{1}_m \otimes | \phi_j \rangle), \quad (3.13)$$

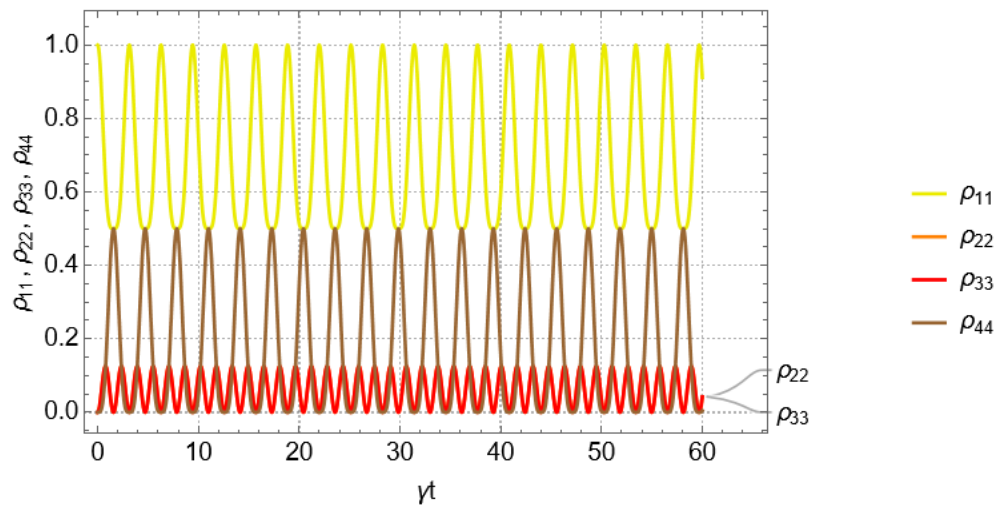
де $\mathbf{1}_m$ – оператор тотожності, що діє в H_m , ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, N_s$) – ортонормований базис в H_s . В наслідок отримали матрицю 4×4 :

$$\rho^m(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{2it\gamma} + 1)^4 & 0 & 0 & \frac{1}{8} e^{-2it(\varepsilon+\gamma)} (1 - e^{2it\gamma})^2 \\ 0 & -\frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{4it\gamma} - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{4it\gamma} - 1)^2 & 0 \\ -\frac{1}{4} e^{2it\varepsilon} + \frac{1}{8} (e^{2it(\varepsilon-\gamma)} + e^{2it(\varepsilon+\gamma)}) & 0 & 0 & \frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{2it\gamma} - 1)^4 \end{pmatrix}.$$

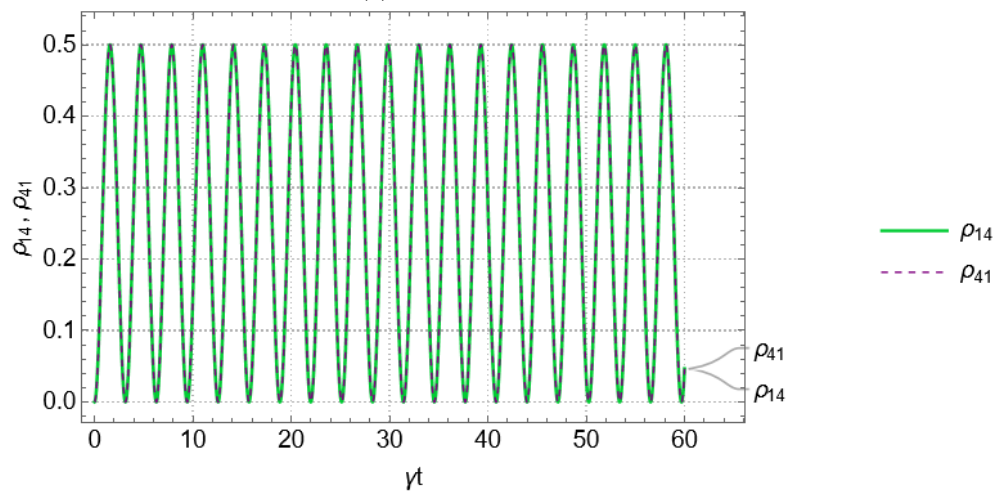
Проведемо аналогічні до (3.13) розрахунки і знайдемо матрицю густини для системи ρ^s :

$$\rho^s(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{2it\gamma} - 1)^4 & 0 & 0 & \frac{1}{8} e^{-2it(\varepsilon+\gamma)} (1 + e^{2it\gamma})^2 \\ 0 & -\frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{4it\gamma} - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{4it\gamma} - 1)^2 & 0 \\ \frac{1}{4} e^{2it\varepsilon} + \frac{1}{8} (e^{2it(\varepsilon-\gamma)} + e^{2it(\varepsilon+\gamma)}) & 0 & 0 & \frac{1}{32} e^{-4it\gamma} (e^{2it\gamma} + 1)^4 \end{pmatrix}.$$

Для цього випадку, залежність значень модулів елементів матриці густини вимірювача від часу наведено на рисунку (3.1). Як бачимо усі елементи осцилюють, описуючи синусоїду. При чому абсолютне значення лише елемента ρ_{11}^m коливається в межах від 1 до $\frac{1}{2}$, коли абсолютні значення інших елементів коливаються в межах 0 до $\frac{1}{2}$. Недіагональні елементи ρ_{14}^m і ρ_{41}^m осцилюють синхронно. Так, як значення саме цих недіагональних елементів відповідають за міру заплутаності в системі, то уже можемо припустити, що між не взаємодіючими на пряму кубітами вимірювача формується заплутаність, під час взаємодії із іншою квантовою системою.



(а) Діагональні елементи.



(б) Недіагональні елементи

Рис. 3.1: Еволюція елементів матриці густини вимірювача за відсутності взаємодії з термостатом ($\Gamma^m = \Gamma^s = 0$).

3.2 Перевірка вимірювача на предмет формування заплутаності

Для того, щоб оцінити міру заплутаності, що виникає між кубітами вимірювача необхідно знайти матрицю густини перевернутих спінів

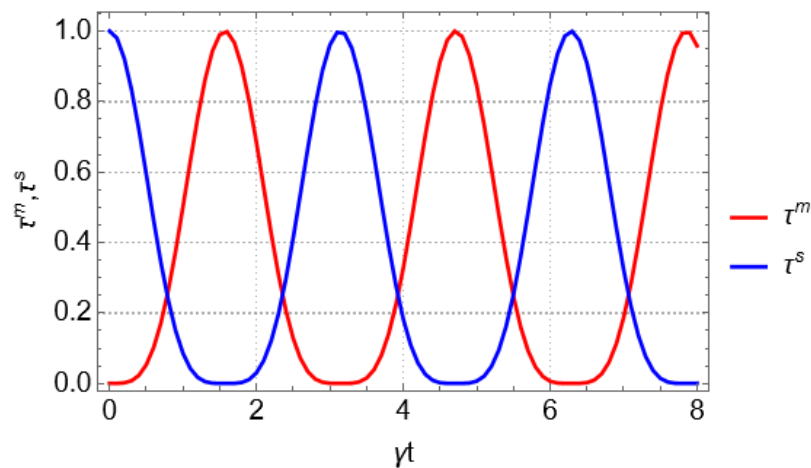
$$\tilde{\rho}^m = (\sigma_y \otimes \sigma_y)(\rho^m)^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (3.14)$$

Так як матриці ρ^m та $\tilde{\rho}^m$ - позитивні оператори, їх добуток має тільки дійсні додатні власні значення. В такому разі заплутаність матриці густини ρ^m

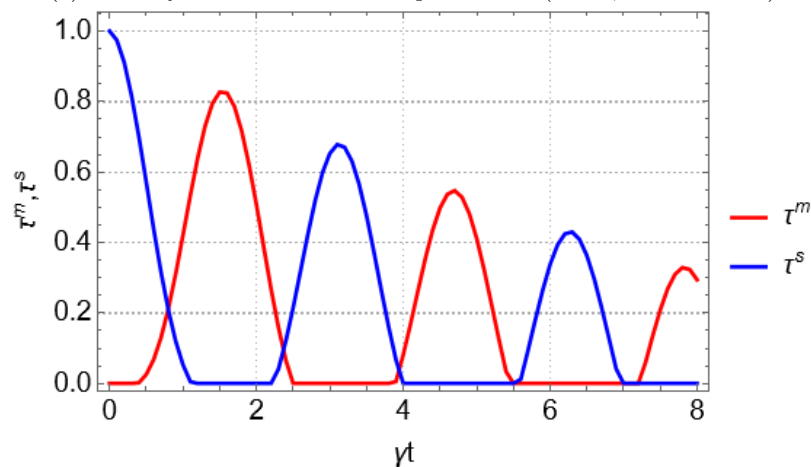
визначається формулою:

$$\tau^m = [\text{Max}\{\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4, 0\}]^2, \quad (3.15)$$

де μ_j – квадратні корені із власних чисел $\rho^m \tilde{\rho}^m$. τ^m – міра заплутаності, що може приймати значення від 0 до 1, де 0 відповідає незаплутаному стану, а 1 – максимально заплутаному стану [26]. Аналогічні розрахунки проведемо і для системи. Залежність міри заплутаності кубітів вимірювача та кубітів системи від часу наведено на рисунку (3.2). Як бачимо, у вимірювачі дійсно виникає заплутаність, це пов'язано із тим, що коли перший кубіт вимірювача взаємодіє із першим кубітом системи, а другий відповідно – з другим, заплутаність кубітів системи відіграє роль містка і забезпечуючи непряму взаємодію між частинками.



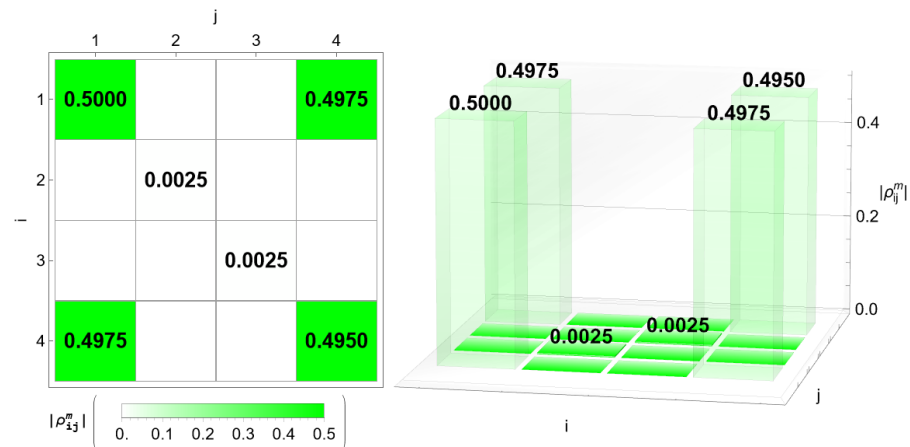
(а) За відсутності взаємодії із термостатом ($\bar{n} = 0$; $\Gamma^m = \Gamma^s = 0$).



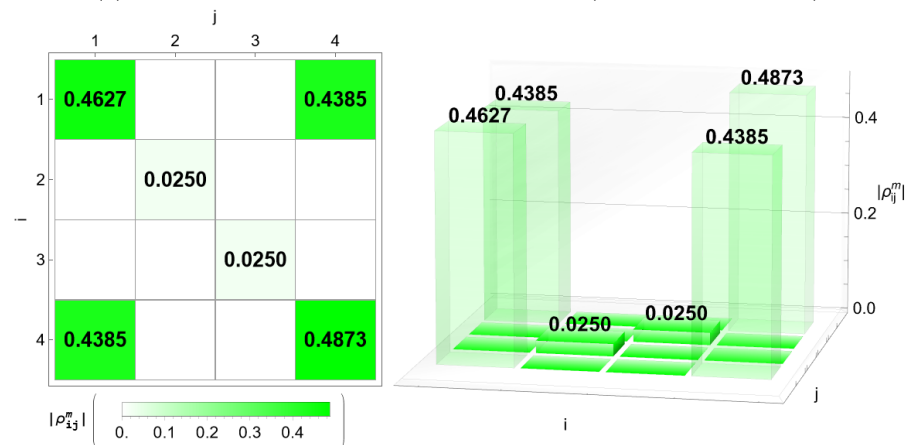
(б) Слабка взаємодія з термостатом ($\bar{n} = 0, 3$; $\Gamma^m = \Gamma^s = 0, 01$).

Рис. 3.2: Залежність міри заплутаності кубітів вимірювача τ^m та кубітів системи τ^s від часу.

Варто відзначити, що отримана картина дещо нагадує коливання двох маятників, пов'язаних пружним зв'язком. До того ж існує певна часова затримка початку процесу формування запутаності. І, навіть слабка взаємодія із навколишнім середовищем призводить до значних втрат енергії та інформації (див рис. (3.2) (б)). Також у цьому можна впевнитися порівнявши абсолютні значення елементів матриці густини в певний момент часу (див рис. (3.3)).



(а) За відсутності взаємодії із термостатом ($\bar{n} = 0$; $\Gamma^m = \Gamma^s = 0$).



(б) Слабка взаємодія з термостатом ($\bar{n} = 0, 3$; $\Gamma^m = \Gamma^s = 0, 01$).

Рис. 3.3: Абсолютні значення елементів матриці густини вимірювача в момент часу $\gamma t = 1.5$

Тож необхідно встановити межі застосування даної моделі. Як видно з рисунка (3.4), при значеннях коефіцієнтів $\Gamma^m = 0, 1$ та $\Gamma^s = 0, 1$ запутаність між кубітами вимірювача практично перестає утворюватися, а запутаність між кубітами системи швидко згасає. Цей факт говорить про те, що наша модель працює лише при слабких взаємодіях із навколишнім середовищем. а при сильній взаємодії усі елементи матриці густини вимірювача швидко

виходять, в процесі осциляцій, на певні сталі значення (див. рис. 3.5).

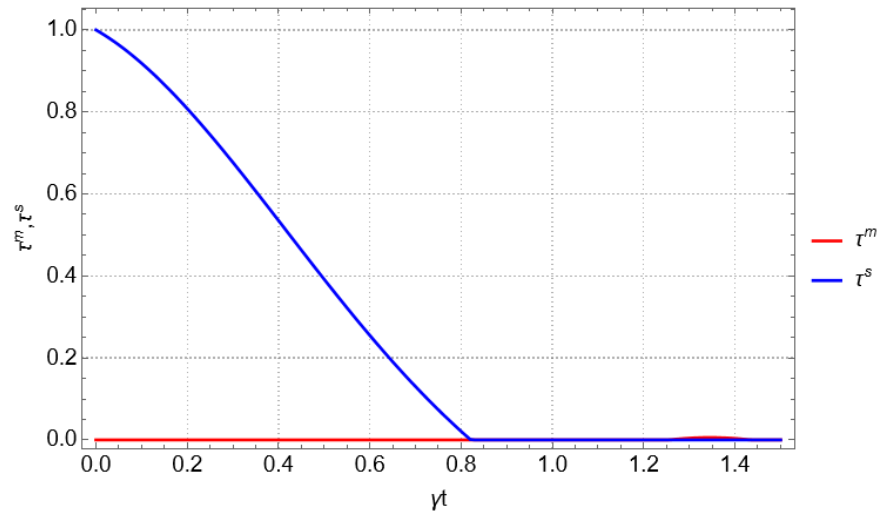
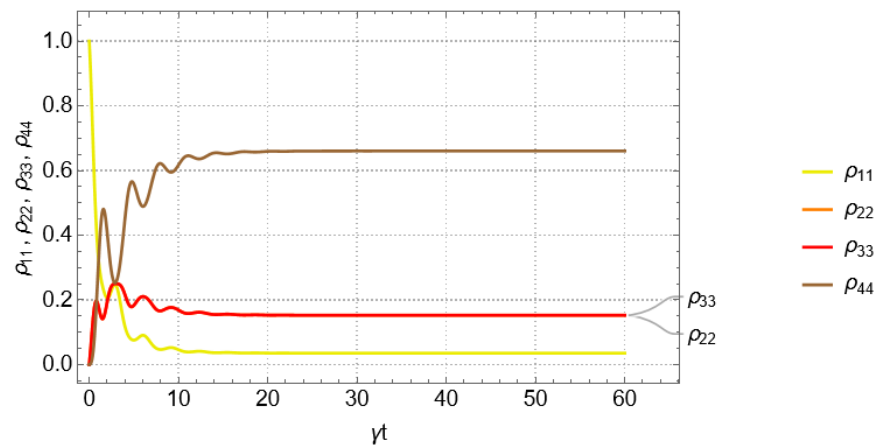
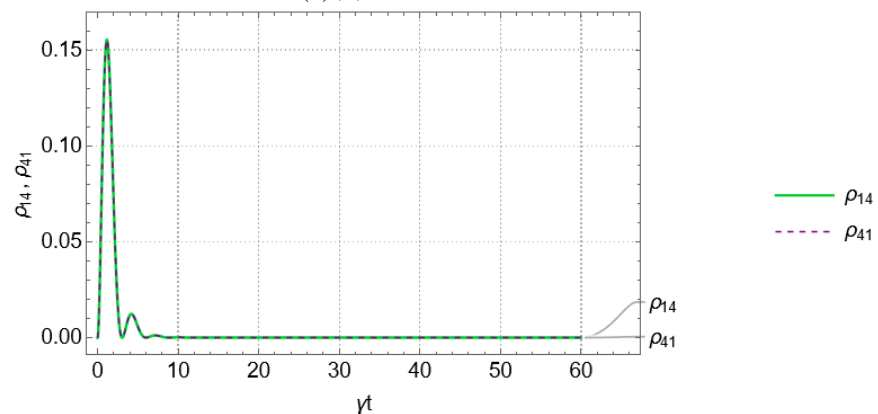


Рис. 3.4: Заплутаності кубітів вимірювача τ^m та системи τ^s при сильній взаємодії із термостатом.

При цьому матричні елементи прямують до таких граничних значень: $\rho_{11}^m \rightarrow 0.035$; $\rho_{22}^m, \rho_{33}^m \rightarrow 0.15$; $\rho_{44}^m \rightarrow 0.65$; $\rho_{14}^m, \rho_{41}^m \rightarrow 0$.



(а) Діагональні елементи.



(б) Не діагональні елементи.

Рис. 3.5: Еволюція елементів матриці густини вимірювача за сильної взаємодії з термостатом ($\Gamma^m = \Gamma^s = 0, 1$).

3.3 Дослідження впливу вхідних параметрів на динаміку станів вимірювача

При збільшенні параметра γ , що характеризує взаємодію систем (решта параметрів лишаються незмінними), збільшується не тільки амплітуда заплутаності, а й швидкість її формування (див рис. (3.6)). Це говорить про те, що цей параметр відповідає не тільки за силу взаємодію кубітів, а і за швидкість перебігу цих взаємодій.

Дані залежності були отримані при наступних значеннях параметрів:

$$\bar{n} = 0,3; \varepsilon_1 = 2; \varepsilon_2 = 2; \Gamma^m = 0,01; \Gamma^s = 0,01.$$

Також варто додати, що рівняння (3.2), а з ним і коефіцієнт γ_2 було віднормовано на γ_1 .

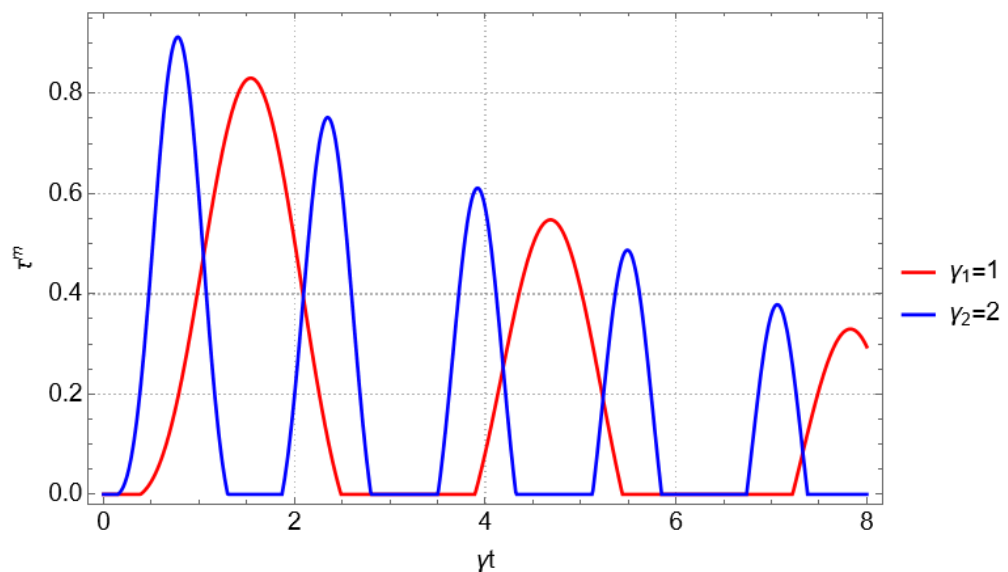


Рис. 3.6: Міра заплутаності кубітів вимірювача τ^m як функція часу при різних значеннях коефіцієнта γ .

Також аналіз показує, що на формування заплутаності впливають не стільки абсолютні значення ε_1 та ε_2 (див. рис. (3.7) (а, б)), скільки модуль різниці між ними, випадок (а, в).

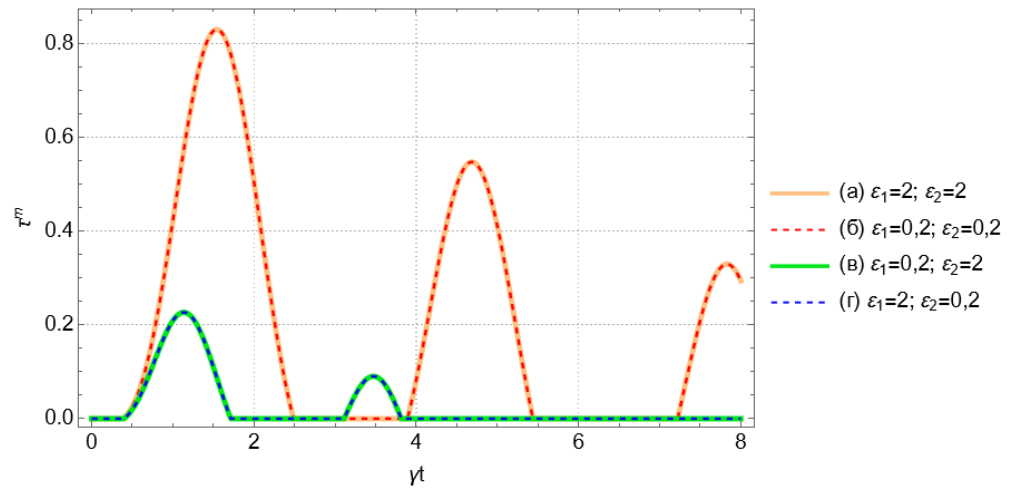


Рис. 3.7: Графік міри запутаності між кубітами вимірювача при різних значеннях параметрів ϵ_1 та ϵ_2 .

Як бачимо, навіть при однаковому модулі різниці ϵ_1 та ϵ_2 , значення запутаності лишається незмінним, рисунок (3.7), випадок (в, г). Значення решти параметрів:

$$\bar{n} = 0,3; \gamma = 1; \Gamma^m = 0,01; \Gamma^s = 0,01.$$

4 ВИСНОВКИ

В роботі було розглянуто еволюцію двохкубітної квантової системи (вимірювача), що взаємодіє із заплутаною квантовою системою (реєстр даних) та термостатом. Метою дослідження було дослідити розвиток заплутаності, що виникає у вимірювачі, в процесі взаємодії з реєстром даних.

Під час дослідження було отримано такі результати:

1) запропоновано математичну модель та за її допомогою отримано рівняння, що описує динаміку двохкубітної системи з часом, при її взаємодії із іншою заплутаною квантовою системою та термостатом;

2) перевірено, що в результаті взаємодії системи та вимірювача, між кубітами останнього виникає заплутаність;

3) змодельовано динаміку стану двохкубітної системи при наявності дисипації та декогеренції; на основі отриманих рівнянь побудовано графіки еволюції елементів матриці густини вимірювача та міри заплутаності у часі;

4) проаналізовано вплив вхідних параметрів на динаміку стану вимірювача.

Практична цінність запропонованого алгоритму полягає у можливості його використання для зберігання інформації про кореляції у вихідній системі даних за допомогою квантової заплутаності, що виникає в процесі вимірювання стану реєстру. В роботі було продемонстровано факт формування заплутаності між парою невзаємодіючих між собою безпосередньо кубітів та дана кількісна її оцінка.

Список використаних джерел

- [1] A. M. Turing. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. In Proceedings of the London Mathematical Society, volume 42, 1936.
- [2] Y. Manin. *Вычислимое и невычислимое computable and noncomputable*. Soviet Radio, 1980.
- [3] R. Feynman. *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics, 1982.
- [4] P. A. Benioff. *Quantum mechanical Hamiltonian models of Turing machines*. Journal of Statistical Physics, 1982.
- [5] D. Deutsch. *Quantum theory, the Church-Turing principle, and the universal quantum Turing machine*. In Proceedings of the Royal Society of London, volume A400, 1985.
- [6] D. Deutsch and R. Jozsa. *Rapid solution of problems by quantum computation*. In Proceedings of the Royal Society of London, volume A439, 1992.
- [7] D. Simon. *On the power of quantum computation*. SIAM Journal on Computing, 1997.
- [8] E. Bernstein and U. Vazirani. *Quantum complexity theory*. SIAM Journal on Computing, 1997.
- [9] Peter W. Shor. *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. SIAM Journal on Computing, Volume 26, Number 5, 1997.
- [10] Grover L.K. *A fast quantum mechanical algorithm for database search*. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, May, 1996.

- [11] R. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman. *A method for obtaining digital signatures and public key cryptosystems*. Communications of the ACM, 1978.
- [12] C. H. Bennett and G. Brassard. *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*. In Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, 1984.
- [13] Ronald de Wolf. *Quantum Computing*, CWI and University of Amsterdam, 2019, Jul.
- [14] John Preskill, Lecture Notes for Physics: *Quantum Information and Computation*. California Institute of Technology, 1998, Sep.
- [15] Werner, R. F. *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations a hidden-variable model* Phys. Rev. A 40, 4277, 1989.
- [16] R. Jozsa, S. L. Braunstein, C. M. Caves, N. Linden, S. Popescu, and R. Schack. *Separability of very noisy mixed states and implications for NMR quantum computing* Phys. Rev. Lett. 83, 1054, August 1999.
- [17] Ryszard Horodecki, Pawel Horodecki, Michal Horodecki, Karol Horodecki. *Quantum entanglement* Institute of Theoretical Physics and Astrophysics University of Gdansk, Poland, 2009.
- [18] Ekert, A. *Quantum cryptography based on Bell's theorem*. Phys. Rev. Lett 67, 661, August 1991.
- [19] Bennett, C. H., and S. J. Wiesner. *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states* Phys. Rev. Lett 69, 2881, November 1992.
- [20] Alexander S. Holevo. *A Mathematical Introduction: Quantum Systems, Channels, Information*, 2013.
- [21] Bennett, C. H., G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Phys. Rev. Lett 70, 1895, March 1993.

- [22] Wiseman H. M., Milburn G. J. *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, 2009, Nov.
- [23] Rose M.E, von Neumann J. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. PhysicsToday. Vol.8,No.10. 1955. Oct.
- [24] Breuer H.-P.,Petruccione F. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press Oxford, Jan, 2007.
- [25] Guzenko A. *Evolution of one- and two- qubit systems in the presence of decoherence, attenuation, and multiple measurements*. Kharkiv, V.N. Karazin Kharkiv National University, 2023.
- [26] Willi-Hans Steeb, Yorick Hardy. *Problems and solutions in quantum computing and quantum information* World Scientific Publishing, 2004.
- [27] Maximilian Schlosshauer. *Quantum decoherence*. Physics Reports, 2019.
- [28] Menskii. M. B. *Dissipation and decoherence in quantum systems*. Physics-Uspekhi, Volume 46, Number 11, 2003.
- [29] Lindblad G. *On the generators of quantum dynamical semigroups*. Communications in Mathematical Physics, June, 1976.
- [30] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, Berlin, 1932.
- [31] M.I. Jordan, T.M. Mitchell. *Machine learning: Trends, perspectives, and prospects*. SCIENCE, Vol 349, Issue 6245, 2015, Jul.
- [32] Vladimir B. Braginsky, Farid Ya Khalili. *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, 1992