

K-14038



ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

361 '92
(I)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

«ОСНОВА»

СОДЕРЖАНИЕ

Овчаренко И. Е. Положительная определенность; ортогональные системы; положительность	3
Скляр Г. М. О распространности одного метода построения позиционного синтезирующего управления на уравнения с неограниченным оператором	15
Луценко А. В. К задаче стабилизации	26
Сохин А. С. Идентификация билинейной эволюционной системы, описываемой уравнением переноса	29
Нестерова Т. М. Стабилизируемость относительно подпространства линейных систем с неполной информацией о состоянии	40
Чуприна В. Е. ε -управляемость линейной стационарной дискретной системы на подпространство с удержанием	48
Зефилов В. Н., Подольский Е. Н., Суворов А. В. Моделирование на ЭВМ стационарного случайного процесса с заданной рациональной спектральной плотностью	55
Ахмезер Т. А. Сходимость траекторий одного циклически симметричного гиперцикла	60
Терехов Л. П. Об оптимальной форме слоя в нестационарной задаче теории смазки	67
Гадецкая С. В. Параболический эффект в задаче Коши для уравнения с нагрузками	71
Жоаким Жозе да Коста. Многомерное функциональное уравнение со сдвигом в аргументе	80
Баранов В. В. Принцип согласия в проблеме коллективного выбора	83

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ВІСНИК ХАРКІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

№ 361

Прикладная математика и механика

Редактор *О. І. Григор'ян*
Художній редактор *Т. П. Короленко*
Технічний редактор *І. А. Омельченко*
Коректор *Л. П. Сич*

Здано до набору 16.04.92. Підписано до друку 16.06.92. Формат 60×90/16. Папір друк. № 3. Гарнітура літературна. Друк високий. Ум. друк. арк. 5,5. Ум. фарбо-відб. 5,75. Обл.-вид. арк. 8,4. Тираж 500 прим. Видавн. № 2097. Зам. 616.

Видавництво «Основа» при Харківському державному університеті.
310005 Харків, пл. Повстання, 17.

Харківська міська друкарня № 16.
310003 Харків, вул. Університетська, 16.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ



№ 361

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА**

Заснований у 1965 р.

Харків
Видавництво «Основа» при Харківському
державному університеті
1992

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, уравнениям математической физики, а также по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.
Для научных работников и специалистов.

У віснику опубліковано статті з математичної теорії оптимальних процесів, з рівнянь математичної фізики, а також деяких питань прикладної математики та алгебри.
Для науковців та фахівців.

Редакційна колегія: І. Є. Тарапов (відп. ред.), В. І. Коробов (заст. відп. ред.), А. П. Маринич (відп. секр.), В. А. Марченко, А. Г. Руткас, Г. А. Домбровський.

Адреса редакційної колегії: 310077 Харків, пл. Свободи, 4, університет, механіко-математичний факультет, тел. 45-72-40

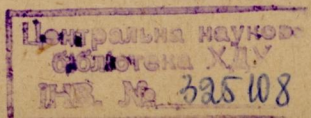
Видана на замовлення Харківського державного університету

Відповідаючий за випуск А. П. Маринич.

K-14038

В 1604030000-057
226-92 Замовне

© Харківський державний
університет, 1992



ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ; ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ; ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ

«At the heart of the new shell-model program and one or two similar ones is the so-called LANSZOS method and this, it turns out, has many deep and subtle connections with the mathematical theory of moments. It is these connection that I will explore here. Everything that I say, with a few minor exceptions, has been known for the best part of a century, and its full mathematical expressions is very elegant (and consequently obscure). I will confine myself to the elementary exposition. I can construct but it ought to be born in mind that there are many different approaches any of which may illuminate out problems».

R. R. Whitehead

В работе [1], из которой взято приведенное выше высказывание, авторы в качестве основного источника сведений по проблеме моментов называют книгу Н. И. Ахиезера [2]. Ее роль в распространении методов проблемы моментов трудно переоценить. Рассмотрим некоторые аспекты данной проблемы, прежде всего, конструктивного и прикладного характера. Они не являются основными для монографии [2], однако тесно связаны с ее проблематикой. Проблема моментов рассматривается здесь как структура скалярного произведения (с. п.) в пространстве многочленов. Ее специфика заключена в условии на с. п.

$$\langle P, Q \rangle = \langle P\bar{Q}, 1 \rangle, \quad (1)$$

которое будем считать всегда выполненным. Преимущественный интерес представляют дефинитные с. п.

1. *Алгебраическое задание с. п.* Если с. п. в пространстве многочленов удовлетворяет (1), то, как известно, (в многом. случае см. [3]) $\exists$ — мера $\mu(d\lambda_1; d\lambda_2; \dots d\lambda_n)$ такая, что

$$\langle P, Q \rangle = \int_{R^n} P(\lambda) \overline{Q(\lambda)} \mu(d\lambda_1; \dots d\lambda_n). \quad (2)$$

* Все что я творю, за небольшим исключением, известно уже почти целое столетие и законченное математическое выражение этого очень красиво (и, следовательно, темно). Я ограничусь самым элементарным рассмотрением. Я могу предложить теорию, но следует помнить, что существует множество других подходов, каждый из которых может прояснить наши проблемы.

Наряду с представлениями вида (2) будем использовать задание с. п., которое естественно назвать алгебраическим. Пусть $\{P_{R^1}\}$ — пространство многочленов одного переменного, $\langle, \rangle$ — с. п. на $\{P_{R^1}\}$ такое, что $\langle P, P \rangle \geq 0$ и матрицы Ганкеля—Адамара $H(n) = \|s(j+k)\|_{j,k=0}^n$ невырождены, $s(n) = \langle \lambda^n, 1 \rangle$. Отправляясь от произвольной последовательности $\{\alpha\} = \{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$ вещественных чисел и системы $\{P_I\}$, $P_I(\lambda) = \sum_{l=0}^I \gamma_{I,l} \lambda^l$ — ортонормированных многочленов первого рода, определим на $\{P_{R^1}\}$ — с. п. $\langle, \rangle_\alpha$ — обладающее свойством (1). Именно

$$\langle P, Q \rangle_\alpha = \sum_{j=0}^{m+n} \gamma_j \alpha_j, \quad (3)$$

$$m = \deg P, \quad n = \deg Q, \quad P\bar{Q} = \sum_0^{m+n} \gamma_j P_I.$$

Посредством матрицы Хаара $\|c_{jk}^r\|$, определяемой из „таблицы умножения“

$P_I(\lambda) P_K(\lambda) = \sum_{|j-k|}^{I+K} c_{jk}^r P_R(\lambda)$ системы $\{P_I\}$, определим ядро

$$K_\alpha(j; k) := \sum_{|j-k|}^{I+K} c_{jk}^r \alpha_r \quad (= \langle P_I, P_K \rangle_\alpha). \quad (4)$$

Отметим соотношения: J — матрица Якоби системы $\{P_I\}$

$$c_{j,k}^r = \|P_R(J)\|_{I,k}; \quad K_\alpha(j; k) = \|\alpha(J)\|_{j,k}. \quad (5)$$

Под $\alpha(J)$ здесь понимается матрица

$$\|\alpha(J)\|_{I,k} := \sum_{|j-k|}^{I+K} \alpha_r P_R(J). \quad (6)$$

Следующие утверждения эквивалентны:

а) скалярное произведение $\langle, \rangle$, определяемое равенством (3), таково, что $\langle P, P \rangle_\alpha \geq 0$, $\forall P \in \{P_{R^1}\}$; б) ядро $K_\alpha(j; k)$ — положительно-определенное (п. о.); в) последовательность $s_\alpha(n) := \langle \lambda^n, 1 \rangle_\alpha$ (7) такова, что ядро $s_\alpha(l+k)$ положительно-определенное; г) $\{\alpha_j\}$ — модифицированная моментная последовательность относительно системы $\{P_I\}$, т. е. $\exists \mu_\alpha(d\lambda) \geq 0$

$$\alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_I(\lambda) \mu_\alpha(d\lambda); \quad (8)$$

д) $((\langle P_K(\lambda), \hat{P}_K(\lambda) \rangle_\alpha \geq 0) \wedge (\langle \hat{P}_K(\lambda), P_K(\lambda) \rangle \geq 0) \forall k \in Z_+, \{\hat{P}_K(\lambda)\} \rightarrow \langle, \rangle_\alpha$ — ортогональная система многочленов; коэффициент

при старшей степени λ считается положительным; е) форма $\alpha(J)$, определенная на плотном в гильбертовом пространстве $H = \{P_R\}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ множестве многочленов, — положительная. Эквивалентности а) $\leftrightarrow$ е) устанавливаются прямой выкладкой. Пусть $P(\lambda)$ — многочлен степени N . Запишем два его представления

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^N \xi_j \lambda^j \quad \text{и} \quad P(\lambda) = \sum_{l=0}^N \zeta_l P_Z(\lambda) \quad \text{и}$$

воспользуемся тем, что $c_{jk}^r = \langle P_l P_K, P_R \rangle$.

Тогда

$$\begin{aligned} \langle P(\lambda), P(\lambda) \rangle_\alpha &= \sum_{l,k=0}^N s_\alpha(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k; \\ \langle P(\lambda), P(\lambda) \rangle_\alpha &= \sum_{l,s=0}^N \langle P_L(\lambda), P_S(\lambda) \rangle_\alpha \zeta_l \bar{\zeta}_s = \\ &= \sum_{l,s=0}^N \langle P_L \bar{P}_S, 1 \rangle_\alpha \zeta_l \bar{\zeta}_s = \sum_{l,s=0}^N \left\langle \sum_r c_{l,s}^r P_R, 1 \right\rangle_\alpha \zeta_l \bar{\zeta}_s = \\ &= \sum_{l,s=0}^N \left(\sum_r c_{l,s}^r \alpha_r \right) \zeta_l \bar{\zeta}_s = \sum_{l,s=0}^N K_\alpha(l; s) \zeta_l \bar{\zeta}_s. \end{aligned}$$

Равенство

$$\sum_{j,k} s_\alpha(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k = \sum_{l,s} K_\alpha(l; s) \zeta_l \bar{\zeta}_s \quad (9)$$

доказывает эквивалентности а) $\leftrightarrow$ б) $\leftrightarrow$ в).

Если $\langle P, P \rangle_\alpha \geq 0$, то $\exists \mu_\alpha(d\lambda) \geq 0$:

$$\langle P, Q \rangle_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda) \overline{Q(\lambda)} \mu_\alpha(d\lambda). \quad (10)$$

Следовательно, $\alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_l(\lambda) \mu_\alpha(d\lambda)$, что доказывает а) $\leftrightarrow$ г) $\leftrightarrow$ е).

очевидно. Если $\langle \hat{P}_K, P_K \rangle_\alpha \geq 0$

$$\Rightarrow \langle \hat{P}_K, \lambda^k \rangle_\alpha \geq 0 \Rightarrow \langle \hat{P}_K, \hat{P}_K \rangle_\alpha \geq 0 \Rightarrow \langle P, P \rangle_\alpha = \sum_l \langle \hat{P}_L, P_L \rangle_\alpha |\zeta_l|^2 \geq 0,$$

равным образом $\langle P_K, \hat{P}_K \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle P, P \rangle \geq 0$.

Тем самым а) $\leftrightarrow$ д).

Задание скалярного произведения с помощью $\{a\} = \{a_j\}$ рассматривалось Р. Лассером [4]. Используя теорему о расширении положительного функционала, им была установлена эквивалентность б) $\leftrightarrow$ г). При таком подходе структура семейства мер $\mu_\alpha(d\lambda) \geq 0$, задающих (8), неясна.

Теорема 1 [5]. Если $\{a_j\}$ задает $\langle, \rangle_a$ такое, что $\langle P, P \rangle_a \geq 0$ то совокупность $\sum_a$ мер $\mu_a(d\lambda) \geq 0$, задающих представление (8), совпадает с совокупностью мер $\sum_{s_a}$, задающих представление последовательности $s_a(n) = \langle \lambda^n, 1 \rangle_a$ в виде

$$s_a(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu_a(d\lambda), \quad \mu_a(d\lambda) \geq 0. \quad (11)$$

Последовательность $s_a(n)$ можно определить из треугольной системы

$$\sum_{l=0}^I \gamma_{l,Is_a}(l) = a_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (12)$$

Если $\langle, \rangle$ и $(,)$ — скалярные произведения на $\{P_R\}$, для которых выполняется свойство (1), то $\exists!$ — последовательность $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ такая, что $(,) = \langle, \rangle_a$, $\{a\} = \{a_j\}$ находится из системы (12), где $s_a(l) = (\lambda^l, 1)$. Если $(P, P) \geq 0$, то a_j — п. о. относительно $\|c_{jk}^r\|$.

Доказательство. Пусть $\|\Gamma\|_{l,k}$ — некоторая ниже-треугольная матрица $\Gamma_{jj} \neq 0$, $\vec{s}$ и $\vec{a}$ — два вектора столбца, связанных равенством $\Gamma \vec{s} = \vec{a}$. Если $\mu_{s_a}(d\lambda)$ — мера, порождаемая функцией ограниченной вариации, задающая представление

$$s_a(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^l \mu_{s_a}(d\lambda), \quad (13)$$

то $\vec{a}$ представим в виде

$$a_j = \int_{-\infty}^{\infty} P_I(\lambda) \mu_{s_a}(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P_I(\lambda) \mu_a(d\lambda), \quad (14)$$

$\mu_a(d\lambda) := \mu_{s_a}(d\lambda)$, $\{P_I(\lambda)\}$ — j -компонента вектора из многочленов:

$$\overrightarrow{P_I(\lambda)} = (\Gamma \vec{\Lambda})_j, \quad \vec{\Lambda} = \{\lambda^0; \lambda^1; \dots \lambda^l; \dots\}^r,$$

τ — транспонирование.

Переходы (13) $\Leftrightarrow$ (14) идентичны. Если теперь $\|\Gamma\|_{j,l} = \gamma_{l,j}$ — матрица из коэффициентов ортогональных многочленов, построенных по $\langle, \rangle$, $\{a_j\}$ — последовательность, задающая $\langle, \rangle_a$, $s_a(l) = \langle \lambda^l, 1 \rangle_a$, то $\Gamma \vec{s} = \vec{a}$ и совокупности мер, задающих (13) и (14), совпадают, как совпадают и меры, порождаемые неубывающими функциями в случае

$$\langle P, P \rangle \geq 0, \quad \langle P, P \rangle_a \geq 0.$$

Обращение α -задания. Последовательность $\{a_j^{i-1}\}$, задающая $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$, находится из равенства

$$\{\alpha\}^{(-1)} = \langle \hat{P}_I, 1 \rangle. \quad (15)$$

Здесь — $\hat{P}_I$ — $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ — о. н. с. м. Рекурсивный алгоритм нахождения матрицы, связывающей о. н. с. многочленов, приведен ниже.

2. Связь между о. с. м., соответствующим разным $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\{P_R^1\}$ модифицированный алгоритм Чебышева.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ — скалярные произведения на $\{P_R^1\}$, $\{P_K(\lambda)\}$, $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$, отвечающие им монические системы о. м. Системы $\{P_K(\lambda)\}$, $\{\hat{P}_K(\lambda)\}$ удовлетворяют (и определяются) трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} P_{K+1}(\lambda) &= (\lambda - a_k) P_K(\lambda) - b_k P_{K-1}(\lambda); \\ \hat{P}_{K+1}(\lambda) &= (\lambda - \hat{a}_k) \hat{P}_K(\lambda) - \hat{b}_k \hat{P}_{K-1}(\lambda); \\ P_{-1}(\lambda) &\equiv 0, \hat{P}_{-1}(\lambda) \equiv 0; P_0(\lambda) \equiv 1, \hat{P}_0(\lambda) \equiv 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что, хотя $b_0, \hat{b}_0$ фактически не участвуют в рекурсии (16), целесообразно принять $b_0 := \langle 1, 1 \rangle_1$; $\hat{b}_0 := \langle 1, 1 \rangle_2$. Тогда

$$\langle P_K(\lambda), P_K(\lambda) \rangle_1 = b_0 \cdot b_1 \dots b_k; \langle \hat{P}_K(\lambda), \hat{P}_K(\lambda) \rangle_2 = \hat{b}_0 \cdot \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k. \quad (17)$$

Матрицами Чебышева систем $\{\hat{P}_N; P_N\}$; $\{P_N, \hat{P}_N\}$ будем называть матрицы смешанных моментов

$$\|T_{PP}^{\wedge}\|_{k,l} := \sigma_{k,l} = \langle \hat{P}_K, P_L \rangle_2; \|T_{PP}^{\wedge}\|_{k,l} = \langle P_K, \hat{P}_L \rangle_1. \quad (18)$$

При $k > l$, $\sigma_{k,l} = 0$. Из равенств $\sigma_{k+1,k-1} = 0$, $\sigma_{k+1,k} = 0$ следует, что элементы матрицы T , коэффициенты a_k ; b_k ; $\hat{a}_k$; $\hat{b}_k$ связаны соотношениями, которые, в частности, дают эффективный алгоритм перехода от одной ортогональной системы к другой. Именно

$$\begin{aligned} \sigma_{k,l} &= \sigma_{k-1,l-1} - (\hat{a}_{k-1} - a_l) \sigma_{k-1,l} - \hat{b}_{k-1} \sigma_{k-2,l} + b_l \sigma_{k-1,l-1}, \\ l &= k, k+1, \dots, 2n-k-1; \end{aligned}$$

$$\hat{a}_k = a_k + (\sigma_{k,k+1} \sigma_{k,k}^{-1} - \sigma_{k-1,k} \sigma_{k-1,k-1}^{-1}) \quad (m) - T,$$

$$\hat{b}_k = \sigma_{k,k} \sigma_{k-1,k-1}^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Пусть теперь $d_n^2 = \langle P_N, P_N \rangle_1 (= b_0 \cdot b_1 \dots b_N)$ и $\langle, \rangle_2 = \langle, \rangle_a$, $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$. Образуя начальные данные для массива σ_{kl} :

$$\sigma_{k,l} = 0 \quad (k > l), \quad \sigma_{-1,l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 2n-2; \quad (19)$$

$$\sigma_{0,l} = \alpha_l d_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, 2n-1, \quad \hat{a}_0 = a_0 + (\alpha_1 d_1)(\alpha_0 d_0)^{-1},$$

$$\hat{b}_0 = \alpha_0 d_0^2$$

и добавляя (m) — Т соотношения, получим (m) — Т алгоритм для определения коэффициентов $\hat{a}_k$; $\hat{b}_k$ — рекуррентных соотношений (16), что позволяет получить $\langle, \rangle_a$ — ортогональную моническую систему, а воспользовавшись (17), перейти, если необходимо, и к $\langle, \rangle_a$ о. н. с.

Теорема 2 [5]. Пусть $\langle, \rangle$ дефинитное невырождающееся с. п. на $\{P_R^1\}$, $\langle, \rangle_a$ — с. п. на $\{P_R^1\}$, порождаемое вещественной последовательностью $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$. Для того чтобы $\langle, \rangle_a$ было дефинитным и невырождающим с. п. на $\{P_R^1\}$, необходимо и достаточно, чтобы параметры $\hat{b}_k$, определяемые (m) — Т рекурсией, были положительны.

Доказательство. Эквивалентность $(\forall P \in \{P_R^1\}, \langle P, P \rangle_a > 0) \leftrightarrow \hat{b}_k > 0$ следует из теоремы Ж. Фавара.

Замечание. Полагая в (18) P_N и $\hat{P}_N$ — о. н. с. м., приходим к матрице Чебышева $\hat{T}_{P;\hat{P}}$ для о. н. с. Переход $\hat{T}_{P;\hat{P}} \rightarrow T_{P;\hat{P}}$ осуществляется посредством (17). Если $\Gamma, \hat{\Gamma}$ — матрицы, составленные из коэффициентов $\{P_N\}$ и $\{\hat{P}_N\}$, то

$$\hat{\Gamma}\Gamma^{-1} = \hat{T}_{P;\hat{P}}^{\circ}; \quad \Gamma\hat{\Gamma}^{-1} = \hat{T}_{P;\hat{P}}^{\circ}. \quad (20)$$

Приведенный выше (m) — Т алгоритм восходит к [6]. В последнее время он нашел широкое применение в вычислительной математике, квантовой физике и химии (см. напр. [7] и ссылки). В изложении п. 2 мы, в основном, следовали [7].

3. **Внутренне положительные (в. п.) функции.** Пусть $B(E) = \{\bar{P}_R^1\}_{\langle, \rangle}$ — гильбертово пространство целых функций, порождаемое неопределенной моментной последовательностью $s(n)$; $K_{|P|^2}$ — конус многочленов, неотрицательных на оси. Вещественная на вещественной оси функция $\alpha(\lambda) \in B(E)$ называется в. п. в $B(E)$, если $\forall P \in K_{|P|^2} \langle P(\lambda), \alpha(\lambda) \rangle \geq 0$. Конус в. п. функций обозначим $K_{t.p.}$. Ядро $K(\lambda; \omega) = \sum_j P_j(\lambda) P_j(\omega)$ — воспроизводящее для пространства $B(E)$. Дефектный вектор оператора сдвига есть $K(\lambda; \omega)$; при $\omega \in (-\infty, \infty)$ он доставляет типичный при-

мер в п. функции, а при t пробегающем R^1 функции $K(\lambda; t)$ пробегают все крайние точки конуса $K_{i,p}$. Если $\{t_n\}$ — точки скачков какого-либо канонического решения проблемы моментов для $s(n)$, то $K(\lambda; t_n) K^{-1}(t_n, t_n)$ — о. н. с. в $B(E)$. Таким образом, в отличие от положительных функций в п. функции могут быть ортогональны в $B(E)$. Конус $K_{i,p}$ воспроизводящий в $B(E)$. Действительно, запишем разложение

$$f(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t_n)}{K(t_n, t_n)} K(\lambda; t_n) = \sum_{f(t_n) > 0} \frac{f(t_n)}{K(t_n, t_n)} K(\lambda; t_n) - \\ - \sum_{f(t_n) < 0} \frac{(-f(t_n))}{K(t_n, t_n)} K(\lambda; t_n) = f_+(\lambda) - f_-(\lambda). \\ f_+(\lambda), f_-(\lambda) \in K_{i,p}; \|f\|^2 = \|f_+\|^2 + \|f_-\|^2.$$

Согласно теореме 2 для проверки того, что функция $\alpha(\lambda) = \sum a_j P_j$ в п. в $B(E)$, достаточно убедиться, что $(m) - T$ рекурсия приводит к $\hat{b}_k \geq 0$, если в качестве параметров a_k и b_k взяты коэффициенты монической о. с. для $s(n)$, а в качестве начальных данных — параметры (19). Коэффициенты a_k, b_k можно построить опять-таки следуя $(m) - T$ алгоритму, что и было предложено П. Л. Чебышевым в [6].

4. О представлении двухпеременных п. о. последовательностей [8]. Пусть $a_{n,m}(n, m \in \mathbb{Z}_+)$ — вещественная п. о. последовательность, т. е. ядро

$$K(n; m; l; s) := a_{n+l, m+s} \quad (A)$$

положительно-определенное.

Относительно последовательности $a_{n,m}$ кроме (A), будем предполагать, что справедливы неравенства

$$\sum_N \left| \sum_k^N \gamma_{k,N} a_{k,m} \right|^2 \leq C_m (C_m = a_{0,2}); \quad (B)$$

$$\sum_L \left| \sum_s^L a_{e,s} \eta_{s,L} \right|^2 \leq D_e (D_e = a_{2e,0});$$

$$\sum_{N,L} \left| \sum_k^N \sum_s^L \gamma_{k,N} a_{ks} \eta_{s,L} \right|^2 < \infty. \quad (C)$$

Здесь $\gamma_{k,N}; \eta_{s,L}$ — коэффициенты ортонормальных многочленов первого рода:

$$P_N(\lambda) = \sum_k^N \gamma_{k,N} \lambda^k, \quad D_L(\mu) = \sum_s^L \eta_{s,L} \mu^s, \quad (21)$$

порожденных последовательностями $a_{n,0}$ и $a_{0,m}$ соответственно.

Последовательности $a_{n,m}$, удовлетворяющие приведенным выше условиям, будем называть квадратично-ограниченными п. о. последовательностями.

Двухпеременные п. о. последовательности $a_{n,m}$, представимые в виде

$$a_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda; d\mu) \quad (22)$$

(М-последовательности) с необходимостью удовлетворяют условиям (А) и (В). Будем предполагать, что $a_{n,0}$ и $a_{0,m}$ — неопределенные моментные последовательности. Тогда, как известно

$B(E_1) = \{\overline{P_{R^1}}\}_{<.,>_{a_{n,0}}}$, $B(E_2) = \{\overline{P_{R^1}}\}_{<.,>_{a_{0,m}}}$ — гильбертово пространство

целых функций. Исторически, видимо, они были первым примером таких пространств. Общие пространства такого вида были одним из основных объектов в построенной М. Г. Крейном теории целых операторов [9]. Как самостоятельный объект изучения они составили предмет аналитической теории Луи де Бранжа, резюмированной в монографии [10]. Обозначений и терминологии [10] будем придерживаться (кроме замены $H(E) := B(E)$).

Теорема 3. Квадратично-ограниченная п. о. последовательность $a_{n,m}$ такая, что последовательности $a_{n,0}$ и $a_{0,m}$ — неопределенные моментные последовательности, представима в виде

$$a_{n,m} = \langle \lambda^n \otimes \mu^m, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_1) \otimes B(E_2)}, \quad (23)$$

где $\Phi(\lambda; \mu) = \Phi(z; w)|_{R^1 \times R^1}$, $\Phi(z; w)$ — целая функция нулевого порядка вещественная из вещественной плоскости; $\Phi(z; w) \in B(E_1)$ для каждого фиксированного w и $\Phi(z; w) \in B(E_2)$ для каждого фиксированного z . Справедливо неравенство

$$|\Phi(z; w)|^2 \leq AK_1(z; z)K_2(w; w); \quad (24)$$

$K_1(z_1; z_2) = \sum_N P_N(z_1) \overline{P_N(z_2)}$; $K_2(w_1; w_2) = \sum_L D_L(w_1) \overline{D_L(w_2)}$ — воспроизводящие ядра пространств $B(E_1)$ и $B(E_2)$, $A = \infimum$ констант в (С). Представление (23) единственно.

Функция $\Phi(z; w)$ может быть задана равенством

$$\Phi(z; w) = \sum_{N,L} \left(\sum_k \sum_s \gamma_{k,N} a_{ks} \gamma_{s,L} \right) P_N(z) \otimes D_L(w). \quad (25)$$

Ряд (25) сходится как в $B(E_1) \otimes B(E_2)$ так и поточечно. Доказательство. Согласно теореме 3 из [11] из условий (А), (В) следуют представления

$$a_{n,m} = \langle \lambda^n, s_\lambda(m) \rangle_{B(E_1)}; \quad a_{k,m} = \langle \mu^m, r_\mu(k) \rangle_{B(E_2)}, \quad (26)$$

где

$$\overset{\circ}{s}_\lambda(m) = \sum_N \left(\sum_k^N \gamma_{k,N} a_{k,m} \right) P_N(\lambda); \quad (27)$$

$$\overset{\circ}{r}_\mu(k) = \sum_L \left(\sum_s^L a_{k,s} \gamma_{s,L} \right) D_L(\mu).$$

Сходимость рядов (27) поточечная и в смысле пространстве $B(E_1)$ и $B(E_2)$. Введем в первое из равенств (26) выражение (27) для $\overset{\circ}{s}_\lambda(m)$ и в полученном равенстве заменим $a_{k,m}$ на $\langle \mu^m, \overset{\circ}{r}_\mu(k) \rangle_{B(E_2)}$. Имеем

$$\begin{aligned} a_{n,m} &= \langle \lambda^n, \overset{\circ}{s}_\lambda(m) \rangle_{B(E_2)} = \langle \lambda^n, \sum_N \left(\sum_k^N \gamma_{k,N} a_{k,m} \right) P_N(\lambda) \rangle_{B(E_1)} = \\ &= \langle \lambda^n, \sum_N \left(\sum_k^N \gamma_{k,N} \langle \mu^m, \overset{\circ}{r}_\mu(k) \rangle_{B(E_2)} \right) P_N(\lambda) \rangle_{B(E_1)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Определим последовательность $\Phi_N(\mu) \in B(E_2)$:

$$\Phi_N(\mu) := \sum_L \left(\sum_k^N \sum_s^L \gamma_{k,N} a_{k,s} \gamma_{s,L} \right) D_L(\mu). \quad (29)$$

В силу условия (C) $\sum \|\Phi_N(\mu)\|_{B(E_2)}^2 < \infty$. Продолжая (28), получаем:

$$\begin{aligned} a_{n,m} &= \sum_N \langle \lambda^n, P_N(\lambda) \rangle_{B(E_1)} \langle \mu^m, \Phi_N(\mu) \rangle_{B(E_2)} = \\ &= \sum_N \langle \lambda^n \otimes \mu^m, P_N(\lambda) \otimes \Phi_N(\mu) \rangle_{B(E_2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $P_N(\lambda) \otimes D_L(\mu)$ — ортонормированный базис в $B(E_1) \otimes B(E_2)$ и $\sum \|\Phi_N(\mu)\|_{B(E_2)}^2 < \infty$, сумма ряда

$$\sum_{N,L} \left(\sum_k^N \sum_s^L \gamma_{k,N} a_{k,s} \gamma_{s,L} \right) P_N(\lambda) \otimes D_L(\mu) \in B(E_1) \otimes B(E_2) \quad (31)$$

и может быть отождествлена с целой функцией $\Phi(z; w) \in B(E_1) \otimes B(E_2)$. Ее свойства следуют из начальных положений теории пространств $B(E_1) \otimes B(E_2)$. Однако нам неизвестно изложение таковой. Поэтому установим независимо свойства функции

$\Phi(z; w)$. В выражении $\sum_{N=0}^{\infty} P_N(z) \otimes \Phi_N(w)$ зафиксируем w . Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \sum_N^k P_N(z) \otimes \Phi_N(w) \right|^2 &\leq \sum_N^K |P_N(z)|^2 \sum_N^K |\Phi_N(w)|^2 \leq \\ &\leq \sum_N^K |P_N(z)|^2 \sum_L^{\infty} \sum_k^N \sum_s^L \gamma_{k,N} a_{k,s} \gamma_{s,L} \left| \sum_L^{\infty} D_L(w) \right|^2. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $K \rightarrow \infty$, получим

$$|\Phi(z; w)|^2 \leq A \sum_N |P_N(z)|^2 \sum_L |D_L(w)|^2 =$$

$$= AK_{B(E_1)}(z; z) K_{B(E_2)}(w; w); \quad (32)$$

$$A = \sum_N \sum_L \left| \sum_k \sum_l^N \gamma_{k,N} a_{k,s} \eta_{s,L} \right|^2.$$

Так как $\forall w_0 \in C^1$, $\Phi(z; w_0)$ нулевого порядка относительно z $\forall z_0 \in C^1$, $\Phi(z_0; w)$ — нулевого порядка по w , то $\Phi(z; w)$ — целая функция нулевого порядка по совокупности переменных.

Функция $\Phi(z; w)$ (элемент $\Phi \in B(E_1) \otimes B(E_2)$) называется *пропагатором квадратично-ограниченной последовательности*

Теорема 4. Для того чтобы целая функция $\Phi(z; w) \in B(E_1) \otimes B(E_2)$ была пропагатором квадратично-ограниченной п. о. последовательности $a_{n,m}$ такой, что $a_{n,0}$ и $a_{0,m}$ — неопределенные моментные последовательности, необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к свойствам, указанным в теореме 3, выполнялось

$$1^\circ \langle 1, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_1)} = 1; \langle 1, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_2)} = 1.$$

2° Последовательность $s_\lambda(m) := \langle \mu^m, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_2)}$ такая, что

$$AN \in [N, \forall [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}]] \text{ функция } \varphi_{[\xi]}(\lambda) := \sum_{j,k=0}^{N-1} s_\lambda(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k \text{ в. п.}$$

функция в $B(E_1) \vee$ (последовательность $r_\mu(k) := \langle \lambda^k, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_1)}$

такова, что функции $\psi_{[\eta]}(\mu) := \sum_{l,k=0}^{N-1} r_\mu(l+k) \eta_l \bar{\eta}_k$ в. п. функции

в $B(E_2)$, $\forall [\eta] = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}]$.

Доказательство теоремы 4, хотя и громоздко, но может быть проведено прямым вычислением, возможность которого обеспечивается приведенной совокупностью условий.

Замечание. Неравенство (32) показывает, что при любом фиксированном $w \in C^1$ (любом фиксированном $z \in C^1$) отображение $z \rightarrow \Phi(z; w)$ ($w \rightarrow \Phi(z; w)$) — линейный ограниченный функционал над $B(E_1)$ ($B(E_2)$) и как функция принадлежит гильбертову пространству целых функций $B(E_1)$ ($B(E_2)$). Обозначим далее

$K_\lambda(m) := \langle \mu^m, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_2)}$. Тогда $K_\lambda(m) \in B(E_1)$ и $a_{n,m} = \langle \mu^m, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_2)}$. Сравнивая это равенство с (26), получим для $s_\lambda(m)$ ($r_\mu(k)$) аналитические выражения

$$s_\lambda(m) = \langle \mu^m, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_2)}; \quad r_\mu(k) = \langle \lambda^k, \Phi(\lambda; \mu) \rangle_{B(E_1)}.$$

Из включений $s_\lambda(m) \in \overset{\circ}{B}(E_1)$; $r_\mu(k) \in \overset{\circ}{B}(E_2)$ и структуры пр. ст-ранств $B(E)$ вытекают оценки

$$|\overset{\circ}{s}_z(m)|^2 \leq \|\overset{\circ}{s}_z(m)\|_{B(E_1)}^2, \quad K_1(z; \bar{z}) \leq a_{1,2m} K_1(z; \bar{z});$$

$$|\overset{\circ}{r}_w(k)|^2 \leq \|\overset{\circ}{r}_w(k)\|_{B(E_2)}^2 K_2(w; \bar{w}) \leq a_{2k,0} K_2(w; \bar{w}).$$

А. Реньи [12], изучая зависимость между случайными величинами, рассматривал двумерные вероятностные меры $\sigma(d\lambda; d\mu) \geq 0$ такие, что $\sigma(d\lambda; d\mu)$ абсолютно непрерывна относительно $\pi_\lambda \otimes \pi_\mu$ и, следовательно,

$$\sigma(d\lambda; d\mu) = k(\lambda; \mu) (\pi_\lambda \otimes \pi_\mu).$$

Пусть теперь $\sigma(d\lambda; d\mu)$ обладает всеми моментами, $k(\lambda; \mu) \in L^2_{\pi_\lambda \otimes \pi_\mu}$,

$$a_{n,m} = \iint_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda; d\mu)$$

удовлетворяет условиям теоремы 3. В этом случае

$$\Phi(\lambda; \mu) = Pr_{B(E_1) \otimes B(E_2)} k(\lambda; \mu),$$

а аналогом коэффициента контингенции

$$C = \iint_{-\infty}^{\infty} (k(\lambda; \mu) - 1)^2 d(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu)$$

для последовательности $a_{n,m}$ является, по нашему мнению, величина

$$C(a_{n,m}) = \|\Phi(\lambda; \mu)\|_{B(E_1) \otimes B(E_2)}^2 - 1,$$

равная левой части в (C). В случае, рассматриваемом А. Реньи, равенство (25), в котором $z = \lambda$; $\mu = w$, приводит к формуле для вычисления $d\sigma/d(\pi_\lambda \otimes \pi_\mu)$.

5. Алгоритмы проверки знаков постоянства функции; наличия в мере заданной системы люков [5]. М. Ковальски [13] рассмотрел меры, выделяемые свойством.

Определение. Пусть $\rho(d\lambda) \geq 0$ — мера, обладающая всеми моментами. Будем называть ее u - p -мерой (uniqueness positivity), если последовательность $s(n) := \langle \lambda^n, 1 \rangle_\rho$ — определенная и $\forall \alpha(\lambda) \in L^2_\rho$ из п. о. последовательности

$$s_\alpha(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \alpha(\lambda) \rho(d\lambda),$$

следует, что ρ — п. в. $\alpha(\lambda) \geq 0$.

В [13] отмечается, что каждое из условий: $\text{supp } \rho$ — ограничен; $\{P_R^{-1}\}$ — плотно в L^4_ρ ; $\exists a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_{a|\lambda|} \rho(d\lambda) < \infty,$$

достаточно, чтобы ρ — было u — p -мерой. В [14] рассматривались моменты квадратично интегрируемых функций.

Теорема 5. Пусть $\rho(d\lambda)$ — u — p -мера $\alpha(\lambda) \in L^2_\rho$. Каждое из следующих условий эквивалентно тому, чтобы $\alpha(\lambda)|_{\text{supp}} \geq 0$:

1. Ядро $K_\alpha(j; k)$ — положительно-определенное. 2. Параметры $\hat{b}_k$ в (m) — T -рекурсии с начальными данными (19) были положительны, a_k, b_k — коэффициенты рекуррентных соотношений для монической системы ρ -ортогональных многочленов.

Проверка каждого из условий 1; 2 очевидным образом оформляется как алгоритм проверки $\alpha(\lambda)|_{\text{supp}} \geq 0$. Для вычисления модифицированных моментов функции $\alpha(\lambda)$ есть удовлетворительные алгоритмы. Параметры a_k и $b_k(m)$ — T -рекурсии могут быть взяты из подходящей классической или генерированной [7] — ортогональной системы многочленов.

Пусть $(\alpha_1; \beta_1), (\alpha_2; \beta_2) \dots (\alpha_m; \beta_m)$ — предписанная система интервалов на оси, $\rho(d\lambda)$ — заданная u — p -мера. Для проверки того, что (α_i, β_i) — спектральные люки для $\rho(d\lambda)$, достаточно проверить, что функции $t_k(\lambda) = (\lambda - \alpha_k)(\lambda - \beta_k)$, $k = 1, \dots, m$ — неотрицательные в L^2_ρ . Алгоритмы предыдущего пункта выполняются параллельно.

Гораздо более сложная задача проверки двумерной последовательности $a_{n,m}$ на положительную определенность возникла в задачах теоретической физики (см. напр. [15] и ссылки). Для алгоритмизации этой задачи можно применить справедливое для любых двумерных п. о. последовательностей $a_{n,m}$ формальное представление из [8].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем алгебраические соотношения, представляющиеся нам полезными в связи с алгоритмическими вопросами проблемы моментов. Они непосредственно следуют из изложенного выше.

Пусть $\{a_k; b_k\}; \{\hat{a}_k; \hat{b}_k\}$ — коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений $b_k \neq 0, \hat{b}_k \neq 0$, отвечающие скалярным произведениям $\langle, \rangle_1$ и $\langle, \rangle_2$ $s_1(n) := \langle \lambda^n, 1 \rangle_1, s_2(n) := \langle \lambda^n, 1 \rangle_2, H_i(n) := \det \| s_i(j+k) \|_{j,k=0}^n$.

Тогда

$$1) \quad H_1(n) = b_0^{n+1} b_1^n \dots b_n; \quad H_2(n) = \hat{b}_0^{n+1} \hat{b}_1^n \dots \hat{b}_n;$$

$$2) \quad \text{если } \langle, \rangle_2 = \langle, \rangle_{1,\alpha}; \quad \Delta_\alpha(n) := \det \| K_\alpha(j; k) \|_0^{n-1}, \quad \text{то } \Delta_\alpha(n) = H_2^{-1}(n) H_1(n);$$

3) если $\langle, \rangle_1 = \langle, \rangle_{2,a}^{(-1)}$, то определители $\Delta_a(n)$, $\Delta_a^{(-1)}(n)$ усеченных ядер $K_a(j; k) = \langle P_j, P_k \rangle_a$, $K_a^{(-1)}(j; k) = \langle \hat{P}_j, \hat{P}_k \rangle_a^{(-1)} = \langle \hat{P}_j, \hat{P}_k \rangle_1 = \sum \hat{c}_{jk} \alpha_r^{(-1)}$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяют равенству $\Delta_a(n) \Delta_a^{(-1)}(n) = 1$;

4) если $\|\Gamma\|_{j,k} = \gamma_{k,j}$ — матрица из коэффициентов $\langle, \rangle$ -ортонормальной системы $\{P\}$, то $\Gamma^{-1} = \tilde{T}_{\lambda,l,p}^{\circ} (\|\Gamma^{-1}\|_{l,k} = \langle \lambda^k, P_l(\lambda) \rangle)$, матрица $\tilde{T}_{\lambda,l,p}^{\circ}$ легко считается процессом T -рекурсии ($b(m)$ — T -рекурсии $a_k = 0$; $b_k = 0$ П. Л. Чебышев, 1859 г.).

Список литературы: 1. Dalton B. J., Vary J. P. (Eds.) Theory and applications of moment problems in many fermion systems//Plenum Press. 1980. P. 500. 2. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 3. Kowalski M. A. A note on the general multivariate moment problem//Constructive theory of functions. 1984. P. 493—499. 4. Lasser R. On the problem of modified moments//Proc. Amer. Math. Soc. 1984. 90, № 3. P. 360—362. 5. Овчаренко И. Е. Скалярные произведения в пространстве многочленов и положительность//Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 4. С. 10—13. 6. Chebyshev P. Z. Sur l'interpolation par la methode de des mondres carres//Mem. Acad. Imper. Sci. St. Petersburg. 1959. 7. 1, № 15. P. 1—24. 7. Gautschi W. Orthogonal polynomials — Constructive theory and Applications//J. of Comput. Appl. Math. 1985. 12, 13. P. 61—76. 8. Овчаренко И. Е. О двухпеременных положительно-определенных последовательностях//Докл. АН СССР. 1998. 300, № 1. С. 35—38. 9. Крейн М. Г. Об одном замечательном классе эрмитовых операторов//Докл. АН СССР. 1944. 24, № 4. С. 191—194. 10. Branges Lois de. Hilbert Spaces of Entire Functions//Prentice; Hall, 1968. P. 326. 11. Овчаренко И. Е. О двумерных степенных моментных последовательностях//Укр. мат. журн. 1984. 36, № 1. С. 51—56. 12. Remji A. On the Measures of dependence//Acta Math. Hung. 1959. 10, № 3. P. 441—451. 13. Kowalski M. A. Representation of inner products on space of Polynomials//Acta Math. Hung. 1985. 46, № 1—2. P. 101—109. 14. Kowalski M. A. Moments of Square integrable functions//J. Math. Anal. and Appl. 1987. 127, N 4. P. 237—245. 15. Handy C. R., Bessis D. Generating quantum energy bounds by the moment method: A linear programming approach//Phys. Rev. A. 1988. 37, N 12. P. 4557—4569.

Поступила в редколлегию 16.12.89

УДК 517.977

Г. М. СКЛЯР

О РАСПРОСТРАНИМОСТИ ОДНОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ПОЗИЦИОННОГО СИНТЕЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ НА УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где $x \in X$, $u \in \Omega \subset U$, $0 \in \text{int } \Omega$; X , U — гильбертовы пространства, оператор A порождает сильно непрерывную группу $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < \infty$, $B \in [U, X]$.

В [1] рассмотрен вопрос о построении позиционного управления $u(x) \in \Omega$, переводящего все траектории замкнутого уравнения $\dot{x} = Ax + Bu(x)$, начинающиеся в окрестности нуля, в нуль за конечное время (задача синтеза управления). В предположении, что оператор A ограничен и система (1) точно управляема, эта задача конструктивно решена следующим образом [1, 2]: показано, что искомым свойством обладает управление вида

$$u(x) = -B^*N^{-1}(1/\Theta(x))x, \quad x \in Q \setminus \{0\}, \quad (2)$$

где $\Theta(x)$ — функционал управляемости, определяемый как единственное положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = (N^{-1}(1/\Theta)x, x), \quad x \in Q \setminus \{0\}, \quad a_0 > 0, \quad (3)$$

$$N(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt, \quad \lambda > 2\omega_0(-A) =$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|e^{-At}\|}{t},$$

Q — некоторая окрестность нуля. Для уравнений с неограниченным оператором A такой результат доказан лишь на примере одномерного волнового процесса прямым вычислением оператора $N(\lambda)$ [1].

В данной статье получены условия, при которых предложенный метод решения задачи синтеза может быть распространен на уравнения с неограниченным оператором A . Рассмотренный в статье класс уравнений, для которых решается задача синтеза, обобщает при этом ранее рассмотренные случаи.

Класс уравнений

Обязательным предположением, при котором корректна постановка задачи синтеза, является точная управляемость уравнения (1) за свободное время [3], критерий которой состоит в положительной определенности оператора $N(\lambda)$. В [3] показано, что оператор $N(\lambda)$, $\lambda > \max\{2\omega_0(-A), 0\}$ представим сильно сходящимся рядом

$$N(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} R_\lambda T_\lambda^k B B^* T_\lambda^{*k} R_\lambda^*, \quad (4)$$

где $R_\lambda = (A + \lambda I)^{-1}$, $T_\lambda = A(A + \lambda I)^{-1}$.

Если оператор A ограничен, то при достаточно больших λ ряд (4) сходится в операторной норме, что позволяет из точной управляемости уравнения (1) получить при некотором натуральном m и $\lambda \geq \lambda_0$ оценку [1, стр. 118]:

$$(N(\lambda)x, x) \geq \gamma_0 \|x\|^2 / \lambda^{2m+1}, \quad \gamma_0 > 0.$$

Поскольку в этом случае $\|T_\lambda\| = o(1/\lambda)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, то отсюда следует неравенство

$$(N(\lambda)x, x) \geq \frac{\gamma}{\lambda} \|T_\lambda^{*m} x\|^2, \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

При неограниченном операторе A неравенство (5), вообще говоря, не следует из точной управляемости уравнения (1).

Пример 1. Пусть $X = L_2[0, 1]$, $U = L_2\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $A = \frac{d}{ds}$,

и область определения $D(A)$ оператора A представляет множество абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$ таких, что

$$x'(\cdot) \in L_2[0, 1], \quad x(0) = x(1);$$

$$Bu(\cdot) = \begin{cases} u(s), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0, & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Оператор A является кососамосопряженным ($A^* = -A$) и обладает ортонормированным базисом из собственных векторов $e_n = e^{2\pi i n s}$, соответствующих собственным числам $\lambda_n = 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, оператор A порождает сильно непрерывную унитарную группу $\{e^{At}\}$, $-\infty < t < \infty$:

$e^{At}x(s) = \tilde{x}(s+t) = e^{-A^*t}x(s)$, $s \in [0, 1]$, где $\tilde{x}(\cdot) - 1$ — периодическое продолжение функции $x(\cdot)$ на вещественную ось. Уравнение (1) в этом примере точно управляемо за свободное время [3]. Покажем, что неравенство (5) тем не менее не имеет места. Пусть

$$x(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, 1/4], \\ 0, & s \in [1/4, 1]. \end{cases}$$

Тогда $B^*e^{-A^*t}x(\cdot) = 0$ при $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Поэтому

$$\begin{aligned} (N(\lambda)x(\cdot), x(\cdot)) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \|B^*e^{-A^*t}x(\cdot)\|^2 dt = \\ &= \int_{1/4}^{\infty} e^{-\lambda t} \|B^*e^{-A^*t}x(\cdot)\|^2 dt \leq \int_{1/4}^{\infty} e^{-\lambda t} \|x(\cdot)\|^2 dt = \frac{e^{-\lambda/4}}{\lambda} \|x(\cdot)\|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\lambda}^m x(\cdot)\|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2 + 4\pi^2 n^2} \right)^m \left| \int_0^{1/4} e^{2\pi i n t} dt \right|^2 \geq \\ &\geq \frac{32(4\pi^2)^{m-1}}{(\lambda^2 + 4\pi^2)^m} \|x(\cdot)\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (5) не выполняется ни для какого m .

Далее мы будем рассматривать класс точно управляемых уравнений (1), удовлетворяющих неравенству (5).

Как уже отмечалось, этот класс включает точно управляемые уравнения с ограниченным оператором A . Приведем другой важный для нас пример таких уравнений.

Пример 2. Пусть оператор A обладает в X ортогональным нормированным базисом из собственных векторов $\{e_n\}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_n\}$ таким, что

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_{-n}, |\operatorname{Re} \lambda_n| \leq \Lambda, |\operatorname{Im} \lambda_n| \geq q, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть $U = \overline{\mathcal{L}\{e_n - e_{-n}\}_n} = \pm 1, \pm 2, \dots$ и B оператор вложения U в X , т. е. $B(e_n - e_{-n}) = e_n - e_{-n}$.

Рассмотрим уравнение (1) и вычислим оператор $N(\lambda)$, $\lambda > 2\Lambda$.

Имеем для вектора $x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} x_n / n$:

$$B^* e^{-A^* t} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{-\lambda_{-n} t} x_n - e^{-\lambda_n t} x_{-n})(e_n - e_{-n});$$

$$(N(\lambda) x, x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} |e^{-\lambda_{-n} t} x_n - e^{-\lambda_n t} x_{-n}|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + 2\operatorname{Re} \lambda_n)t} (|x_n|^2 + |x_{-n}|^2 - x_n \bar{x}_{-n} e^{2i\operatorname{Im} \lambda_n t} -$$

$$- x_{-n} \bar{x}_n e^{-2i\operatorname{Im} \lambda_n t}) dt = \frac{1}{2\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{\lambda + 2\operatorname{Re} \lambda_n} (|x_n|^2 + |x_{-n}|^2) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda x_n \bar{x}_{-n}}{\lambda + 2\lambda_{-n}} - \frac{\lambda x_{-n} \bar{x}_n}{\lambda + 2\lambda_n} \right];$$

$$T_{\lambda}^* x = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\lambda_{-n}}{\lambda + \lambda_{-n}} x_n e_n;$$

$$\|T_{\lambda}^* x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2} (|x_n|^2 + |x_{-n}|^2).$$

Установим справедливость неравенства (5) для $m=1$ и некоторого $\gamma > 0$ при $\lambda \geq \lambda_0$. Это неравенство в данном случае приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} - 2\gamma \frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2} \right) (|x_n|^2 + |x_{-n}|^2) - \frac{\lambda x_n \bar{x}_{-n}}{\lambda + 2\lambda_{-n}} - \frac{\lambda x_{-n} \bar{x}_n}{\lambda + 2\lambda_n} \right] \leq 0.$$

В силу критерия Сильвестра достаточно установить при $\lambda \geq \lambda_0$ равномерно по n оценки

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} \geq 2\gamma \frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2}; \quad (6)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} - 2\gamma \frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2} \right)^2 \geq \frac{\lambda^2}{|\lambda + 2\lambda_n|^2}. \quad (7)$$

Справедливость неравенства (6) следует при $\lambda > 2\Lambda$ и $\gamma \leq \frac{1}{4}$ из неравенств

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} \geq \frac{\lambda}{\lambda + 2\Lambda} \geq \frac{1}{2};$$

$$\frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2} \leq \frac{|\operatorname{Im} \lambda_n|^2 + \Lambda^2}{(\lambda - \Lambda)^2 + |\operatorname{Im} \lambda_n|^2} \leq 1.$$

Докажем неравенство (7). При $\lambda > 2\Lambda$ имеем

$$\frac{\lambda^2}{|\lambda + 2\lambda_n|^2} = \frac{\lambda^2}{(\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n)^2} - \frac{4\lambda^2 |\operatorname{Im} \lambda_n|^2}{|\lambda + 2\lambda_n|^2 (\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n)^2} \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^2}{(\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n)^2} - \frac{\lambda^2 |\operatorname{Im} \lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2 (\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n)^2}. \quad (8)$$

Заменим правую часть неравенства (7) на большую величину из (8) и преобразуем его к виду

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} - \frac{2\gamma |\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2} \right)^2 \geq \frac{1 - |\operatorname{Im} \lambda_n|^2}{(\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n)^2} \lambda^2. \quad (9)$$

Из (9) следует, что при $|\operatorname{Im} \lambda_n| \geq 1$ неравенство (7) справедливо при произвольном γ . Пусть теперь $q \leq |\operatorname{Im} \lambda_n| < 1$. В этом случае неравенство (9) преобразуется к виду

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} (1 - \sqrt{1 - |\operatorname{Im} \lambda_n|^2}) \geq \frac{2\gamma |\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2}.$$

Справедливость последнего неравенства следует при $\gamma \leq \frac{1}{4} \frac{\Lambda (1 - \sqrt{1 - q^2})}{1 + \Lambda^2}$ из оценок

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2 \operatorname{Re} \lambda_n} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda + \lambda_n|^2} \leq \frac{1 + \Lambda^2}{\Lambda}.$$

Таким образом, неравенство (7) доказано. Следовательно, уравнение (1) удовлетворяет условию (5).

Основной результат

Перейдем к рассмотрению задачи синтеза для уравнения (1), которое предполагаем точно управляемым за свободное время. В [1, стр. 103] показано, что уравнение (3) имеет единственное положительное решение в некотором выколотом шаре $Q_1 \setminus \{0\}$, $Q_1 = \{x : \|x\| \leq R\}$. Тем самым в $Q_1 \setminus \{0\}$ задан функционал $\Theta(x)$ (функционал управляемости), который доопределяется значением $\Theta(0) = 0$. Управление $u(x)$ в $Q_1 \setminus \{0\}$ задается формулой (2).

Теорема 1. Пусть для точно управляемого за свободное время уравнения (1) выполнено при некоторых t , $\gamma > 0$, $\lambda_0 > 0$ и $\lambda \geq \lambda_0$ неравенство (5). Тогда существует $C > 0$ такое, что для любого $x_0 \in Q \setminus \{0\}$, $Q = \{x : \Theta(x) \leq C\} \subset \text{int } Q_1$ обобщенное решение [1] уравнения (1) с управлением (2) и начальным условием $x(0) = x_0$ существует, единственно на некотором полуинтервале $[0, T(x_0)]$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0, \text{ где } T(x_0) \leq \beta \theta(x_0), \beta > 0.$$

При этом существует $\hat{a} > 0$ такое, что при $0 < a_0 \leq \hat{a}$ управление (2) удовлетворяет в $Q \setminus \{0\}$ ограничению $u(x) \in \Omega$.

Доказательство теоремы проводится на основании теоремы 6.1 [1, с. 76]. При этом поскольку в [1, с. 103—107] показано, что функционал $\Theta(x)$ и управление $u(x)$ удовлетворяют предположениям 1—6 этой теоремы, нам необходимо лишь установить справедливость неравенства

$$\Psi(x) = \langle \theta_x, Ax + Bu(x) \rangle \leq -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), \quad (8)$$

$x \in D(A) \cap (Q \setminus \{0\})$, $\alpha = 1$, $\beta > 0$, а также проверить выполнение ограничений $u(x) \in \Omega$.

Функционал $\Psi(x)$, продолженный по непрерывности на множество $Q_1 \setminus \{0\}$, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & - \frac{\frac{1}{\Theta(x)} \left(N \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \psi, \psi \right) + (BB^* \psi, \psi)}{\frac{1}{\Theta^2(x)} \left(N_1 \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \psi, \psi \right) + \frac{1}{\Theta(x)} \left(N \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \psi, \psi \right)} \leq \\ & \leq -1 \left/ \left(1 + \frac{\frac{1}{\Theta(x)} \left(N_1 \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \psi, \psi \right)}{\left(N \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) \psi, \psi \right)} \right) \right., \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } \psi = N^{-1} \left(\frac{1}{\Theta(x)} \right) x, \quad N_1(\lambda) = \int_0^\infty t e^{-\lambda t} e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt.$$

$$\text{Рассмотрим далее функцию } \eta(\theta, \psi) = \frac{\frac{1}{\theta} \left(N_1 \left(\frac{1}{\theta} \right) \psi, \psi \right)}{\left(N \left(\frac{1}{\theta} \right) \psi, \psi \right)}.$$

Оператор $N_1(\lambda)$ может быть представлен в виде $N_1(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-A t} N(\lambda) e^{-A^* t} dt$. Поэтому [3] при $\lambda > \max \{2\omega_0(-A) 0\}$ имеет место представление оператора $N_1(\lambda)$ сильно сходящимся рядом

$$N_1(\lambda) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} R_\lambda T_\lambda^k N(\lambda) T_\lambda^{*k} R_\lambda^*.$$

$$\text{Отсюда } (N_1(\lambda) \psi, \psi) = \lambda \left(\sum_{k=0}^{m-1} R_\lambda T_\lambda^k N(\lambda) T_\lambda^{*k} R_\lambda^* \psi, \psi \right) + \|N_1(\lambda) T_\lambda^{*m} \psi\|^2.$$

Учитывая, что при $\lambda > 2\omega_0(-A) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ будет $\|N_1(\lambda)\| \leq M/(\lambda - 2\omega_0(-A) - \varepsilon)^2$, $M > 0$, имеем

$$(N_1(\lambda) \psi, \psi) \leq \lambda \sum_{k=0}^{m-1} R_\lambda T_\lambda^k N(\lambda) T_\lambda^{*k} R_\lambda^* \psi, \psi + \frac{M \|T_\lambda^{*m} \psi\|^2}{(\lambda - 2\omega_0(-A) - \varepsilon)^2}, \quad (10)$$

$m=0, 1, 2, \dots$. Из (5), (10) следует, что существуют константы $C > 0$, $\gamma_0 > 0$ и натуральное число m такие, что при $0 < \theta \leq C$ будет справедливо неравенство

$$\eta(\theta, \psi) \leq \gamma_0 + \frac{\frac{1}{\theta^2} \left(\sum_{k=0}^{m-1} R_1 T_1^k N \left(\frac{1}{\theta} \right) T_1^{*k} R_1^* \psi, \psi \right)}{\left(N \left(\frac{1}{\theta} \right) \psi, \psi \right)}.$$

Поскольку $\frac{1}{\theta} R_1 = I - T_1$, то отсюда следует неравенство

$$\eta(\theta, \psi) \leq \gamma_0 + 2 \frac{\sum_{k=0}^m \left(N \left(\frac{1}{\theta} \right) T_1^{*k} \psi, T_1^k \psi \right)}{\left(N \left(\frac{1}{\theta} \right) \psi, \psi \right)}.$$

Используя представление (4) для оператора $N(\lambda)$, получим оценку $\eta(\theta, \psi) \leq \gamma_0 + 2(m+1)$. Отсюда и из (9) следует справедливость в области $Q \setminus \{0\}$ неравенства (8) при $\alpha=1$, $\beta=1/(\gamma_0 + 2m + 3)$.

Поскольку $0 \in \text{int } \Omega$, то при некотором $d \geq 0$ будет $\{u: \|u\| \leq d\} \subset \Omega$. Покажем, что $\|u(x)\| \leq d$ в $Q \setminus \{0\}$. Из (2), (3) имеем

$$\|u(x)\|^2 = 2a_0 \frac{\|B^* \psi\|^2 \Theta(x)}{\left(N\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right) \psi, \psi\right)}, \quad (11)$$

где $\psi = N^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x$. Рассмотрим набор функций

$$v_s(\Theta, \psi) = \frac{\Theta \|B^* T_1^{*s} \psi\|^2}{\left(N\left(\frac{1}{\Theta}\right) \psi, \psi\right)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, 0 < \Theta \leq C.$$

Поскольку $\Theta \psi = (I + \Theta A^*) R_1^* \psi$, учитывая (4), имеем:

$$v_s(\Theta, \psi) \leq 2 \left(\frac{\|B^* T_1^{*s} R_1^* \psi\|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \|B^* T_1^{*k} R_1^* \psi\|^2} + \frac{\|B^* T_1^{*s+1} \psi\|^2 \Theta}{\left(N\left(\frac{1}{\Theta}\right) \psi, \psi\right)} \right) \leq 2 + 2v_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$v_0(\Theta, \psi) \leq 2^{m+1} - 2 + 2^m v_m(\Theta, \psi). \quad (12)$$

Из (5), (12) вытекает оценка управления $u(x)$ в области

$$Q \setminus \{0\}: \|u(x)\|^2 \leq 4a_0 \left(2^m - 1 + 2^{m-1} \frac{\|B\|^2}{\gamma} \right).$$

Выбирая $0 < a_0 \leq \hat{a} = d^2 / \left(2^m - 1 + 2^{m-1} \frac{\|B\|^2}{\gamma} \right)$, получаем

$\|u(x)\| \leq d$, а следовательно, $u(x) \in \Omega$ при $x \in Q \setminus \{0\}$.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим существенность предположения о справедливости неравенства (5). Рассмотрим уравнение из примера 1.

Пусть последовательность $\Theta_n \rightarrow 0$, $\Theta_n > 0$, пусть $\psi_n(s) = I_n \psi(s)$, где

$$\psi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, 1/4] \\ 0, & s \in (1/4, 1], \quad 2a_0 \Theta_n = \left(N\left(\frac{1}{\Theta_n}\right) \psi_n, \psi_n\right). \end{cases}$$

Тогда $\Theta_n = \Theta_n(x_n)$, где $x_n = N\left(\frac{1}{\Theta_n}\right)\psi_n$, причем $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку $\Theta_n \rightarrow 0$. Имеем далее

$$\eta(\Theta_n, \psi_n) = \frac{\frac{1}{\Theta_n} \int_{1/4}^{\infty} t e^{-\frac{t}{\Theta_n}} \|B^* e^{-A^* t} \psi_n\|^2 dt}{\int_{1/4}^{\infty} e^{-\frac{t}{\Theta_n}} \|B^* e^{-A^* t} \psi_n\|^2 dt} \geq \frac{1}{4\Theta_n}.$$

Поэтому $\Psi(x_n) \geq -\frac{4\Theta_n}{1 + 4\Theta_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -4\Theta_n$, что показывает несправедливость неравенства (8) в произвольной окрестности нуля.

Примеры управляемых процессов

Приведем некоторые постановки задач управления, которые могут быть сведены к случаю, рассмотренному в примере 2, и в которых управление, построенное по предложенному методу, дает решение задачи синтеза.

1. *Волновой процесс.* Пусть $G \subset E_n$ некоторая замкнутая ограниченная область евклидова пространства E_n , обладающая границей ∂G класса C_2 . Рассмотрим волновой процесс, описываемый уравнением

$$\psi_{tt}(t, x) = \Delta \psi(t, x) + u(t, x), \quad \psi|_{\partial G} = 0, \quad (13)$$

где $x \in G$, $t \in [0, \infty)$. Заменой

$$\psi(t, \cdot) = \varphi_1(\cdot)(t), \quad \psi_t(t, \cdot) = \varphi_2(\cdot)(t) \quad (14)$$

сведем уравнение (13) к виду

$$d\varphi/dt = A\varphi + Bu, \quad (15)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H = H_1 \times H_2$, H_1 — замыкание по норме $\|\varphi_1(\cdot)\| = \left(\int_G |\nabla \varphi_1(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ бесконечно гладких функций φ_1

с носителем G ; $H_2 = L_2(G)$, оператор A определяется равенством $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, и областью определения $D(A)$ оператора A

является множество функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, таких, что $A\varphi \in H$; пространство $U = H_2$ и оператор B имеет вид $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$. Квад-

рат нормы в пространстве H $\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2} \int_G (|\nabla \varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2) dx$

совпадает с полной энергией. Поэтому изучаемая в статье задача синтеза интерпретируется в данном случае как задача полного гашения энергии с помощью выбора позиционной управляющей силы $u(\varphi)$, удовлетворяющей ограничению $\|u(\varphi)\| \leq d$.

Оператор A с областью определения $D(A)$ является кососопряженным и, следовательно, порождает унитарную группу. Поскольку спектр оператора Лапласа в ограниченной области G состоит из счетного числа отрицательных собственных чисел $\gamma_k = -\lambda_k^2$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, причем соответствующие им собственные вектора f_k ($\Delta f_k = \gamma_k f_k$) образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(G)$ [4], то спектр $\sigma(A) = \{\pm i\lambda_k, k=1, 2, \dots\}$, причем собственные вектора $\varphi^{\pm k} = (f_k, \pm i\lambda_k f_k)$, $k=1, 2, \dots$ ($A\varphi^{\pm k} = \pm i\lambda_k \varphi^{\pm k}$) образуют ортогональный базис в H и $B(\varphi^k - \varphi^{-k}) = \varphi^k - \varphi^{-k}$. Следовательно, мы находимся в рамках примера 2 и теорема 1 дает метод решения задачи синтеза.

В одномерном случае колебаний струны длины l с закрепленными концами управление (2) и уравнение (3) будут иметь соответственно вид [1]:

$$u(\varphi) = -\varphi_1/\Theta^2(\varphi) - 2\varphi_2/\Theta(\varphi), \quad \varphi \neq 0;$$

$$2a_0\Theta^4 = \int_0^l |\varphi_1(x)|^2 dx + \Theta \int_0^l (\overline{\varphi_1(x)} \varphi_2(x) + \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)}) dx +$$

$$+ 2\Theta^2 \int_0^l (|\varphi_2(x)|^2 + |\varphi_1'(x)|^2) dx.$$

2. *Волновой процесс с торможением.* Пусть в предыдущем примере движению препятствует тормозящая сила, пропорциональная скорости. В этом случае уравнение (13) приобретает вид

$$\psi_{tt}(t, x) = \Delta \psi(t, x) - \mu \psi_t(t, x) + u(t, x), \quad \psi/\partial G = 0, \quad \mu > 0. \quad (16)$$

Как и ранее, заменой (14) сведем уравнение (16) к виду (15), в котором оператор A будет иметь вид $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\mu I \end{pmatrix}$. Спектр

$\sigma(A) = \left\{ r_{\pm k} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \lambda_k^2} \right\}$, собственные вектора $\varphi^{\pm k} = (f_k, r_{\pm k} f_k)$, $k=1, 2, \dots$ ($A\varphi^{\pm k} = r_{\pm k} \varphi^{\pm k}$) образуют ортогональный базис в H и $B(\varphi^k - \varphi^{-k}) = \varphi^k - \varphi^{-k}$. Пусть $k_0 = \min \left\{ k: \lambda_k^2 > \frac{\mu^2}{4} \right\}$. Тогда $H = \mathcal{L}\{\varphi^{\pm k}, k \geq k_0\} \oplus \mathcal{L}\{\varphi^{\pm k}, 1 \leq k < k_0\}$, причем второе подпространство вырождается в тривиальное, если $\lambda_1^2 > \frac{\mu^2}{4}$. На элементах подпространства

$\mathcal{L}\{\varphi^{\pm k}, k \geq k_0\}$ оценка (5) следует из примера 2, а на элементах конечномерного подпространства $L\{\varphi^{\pm k}, 1 \leq k < k_0\}$. Эта оценка следует из ограниченности на этом подпространстве оператора A . Таким образом, в этом примере теорема 1 также дает решение задачи синтеза управления.

3. *Поперечные колебания стержня.* Рассмотрим процесс колебаний закрепленного с одной стороны прямоугольного стержня, описываемый уравнением

$$\frac{d^2\psi(t, x)}{dt^2} = -\frac{d^4\psi(t, x)}{dx^4} + u(t, x), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty);$$

$$\psi(t, 0) = \psi_x(t, 0) = \psi_{xx}(t, l) = \psi_{xxx}(t, l) = 0.$$

Как и ранее, заменой (14) сведем это уравнение к виду (15), где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H = H_1 \times H_2$, H_1 — пространство функций $\varphi_1(\cdot)$, обладающих второй производной из $L_2[0, l]$ с нормой $\|\varphi_1(\cdot)\|^2 = \left(\int_0^l |\varphi_1''(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ (функции, отличающиеся на линейную функцию, отождествляются), $U = L_2[0, l]$. Оператор $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\frac{d^4}{dx^4} & 0 \end{pmatrix}$ имеет областью определения множество функций $\varphi \in H$ таких, что $A\varphi \in H$ и $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$. Покажем, что теорема 1 и в данном случае дает способ выбора управляющей силы, позволяющей погасить энергию стержня $\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^l (|\varphi_1''(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2) dx$ за конечное время.

Оператор A является косамосопряженным и обладает ортогональным базисом из собственных векторов $\varphi^{\pm k} = (f_k \pm \pm i\lambda_k f_k)$, соответствующих собственным числам $\pm i\lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$. Здесь f_k собственные векторы оператора $-d^4/dx^4$, соответствующие собственным числам $\gamma_k = -\lambda_k^2$ (точные значения чисел γ_k даны, например, в [5]), $B(\varphi^k - \varphi^{-k}) = \varphi^k - \varphi^{-k}$.

Таким образом, данный пример также вкладывается в предположения примера 2, решение задачи гашения колебаний дает теорема 1.

Список литературы: 1. Склър Г. М. О синтезе управления в банаховых пространствах//Дисс. канд. физ-мат. наук. Х., 1983. 138 с. 2. Коробов В. И., Склър Г. М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для системы в бесконечномерных пространствах//Докл. АН УССР. 1983. Сер. А, № 5. С. 11—14. 3. Склър Г. М. О точной управляемости линейного уравнения с неограниченным оператором//Вест. Харьк. ун-та. 1990. № 287. Теория управления. С. 23—38. 4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1976. 528 с. 5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, М., 1966. 724 с.

Поступила в редколлегию 25.12.89

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ

В предлагаемой работе в терминах алгебраического матричного уравнения получены необходимые и достаточные условия α -стабилизируемости итерационной системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где A, B — постоянные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $x_k \in E_n$, $u_k \in E_r$.

Назовем систему (1) α -стабилизируемой, $\alpha > 0$, если существует управление вида $u_k = Fx_k$, где F — постоянная $(r \times n)$ -матрица, такое, что каждое решение x_k системы $x_{k+1} = (A + BF)x_k$ удовлетворяет условию $\alpha^k x_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Другими словами, система (1) является α -стабилизируемой, если существует постоянная матрица F такая, что $A + BF$ представляет собой α -устойчивую матрицу, т. е. $\sigma(A + BF) \subset C_\alpha^-$, где $\sigma(\cdot)$ — спектр матрицы, стоящей в скобках, $C_\alpha^- = \{\lambda \in C : |\lambda| < \alpha^{-1}\}$.

Теорема. Для того чтобы система (1) была α -стабилизируемой, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\alpha^2 A^* R A - R - \alpha^2 A^* R B (I + B^* R B)^{-1} B^* R A + I = 0 \quad (2)$$

обладало симметрическим положительно определенным решением R . Причем, если такое решение существует, то $\sigma(A + BQ) \subset C_\alpha^-$

где $Q = -(I + B^* R B)^{-1} B^* R A$.

Установим вначале вспомогательный результат, аналогичный теореме А. М. Ляпунова [1].

Лемма. Для того чтобы матрица A была α -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\alpha^2 A^* P A - P + Q = 0 \quad (3)$$

имело положительно определенное решение P при любой симметрической положительно определенной матрице Q . При этом если матрица A является α -устойчивой, а $Q \geq 0$, то уравнение (3) имеет единственное неотрицательное решение.

Необходимость. Предположим, что $\sigma(A) \subset C_\alpha^-$, т. е. $|\alpha \lambda_j(A)| < 1$, $j = \overline{1, n}$, где $\lambda_j(A)$ — собственные значения матрицы A , и пусть P является симметрической положительно определенной матрицей. Умножим равенство $P - (\alpha A^*) P (\alpha A) = Q$ слева на $(\alpha A^*)^k$, справа на $(\alpha A)^k$ и затем просуммируем от 0 до m . Получим

$$P - (\alpha A^*)^{m+1} P (\alpha A)^{m+1} = \sum_{k=0}^m (\alpha A^*)^k Q (\alpha A)^k. \quad (4)$$

Последнее соотношение означает, что если решение уравнения (3) существует, то оно имеет вид

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha A^*)^k Q (\alpha A)^k. \quad (5)$$

В самом деле, равенство (5) получается из (4) при $m \rightarrow \infty$, так как $(\alpha A)^{m+1} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Ряд, стоящий в правой части (5), сходится, поскольку $|\alpha \lambda_j(A)| < 1$. Так как слагаемые ряда (5), начиная со второго, являются неотрицательными матрицами, матрица P будет определенно положительной в случае определенной положительности Q и неотрицательной в случае неотрицательности Q . Непосредственной подстановкой (5) в (3) убеждаемся, что ряд (5) дает решение уравнения (3). Легко видеть при этом, что матрица P является единственным решением этого уравнения.

Достаточность. Пусть P — положительно определенное решение уравнения (3), где Q — положительно определенная матрица. Введем квадратичные формы $V(x) = x^* P x$, $W(x) = x^* Q x$. Тогда из (3) в силу уравнения $x_{k+1} = \alpha A x_k$ имеем

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) = -W(x_k). \quad (6)$$

Так как матрицы P , Q симметричны и положительно определены, для любого $x \in E_n$ имеют место оценки

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2; \quad (7)$$

$$\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \leq W(x) \leq \lambda_{\max}(Q) \|x\|^2, \quad (8)$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — минимальное и максимальное собственные значения матриц, стоящих в скобках. Из (7), (8) следует, что

$$W(x) \geq \gamma V(x), \quad (9)$$

где $\gamma = \lambda_{\min}(Q) / \lambda_{\max}(P)$. Из (6), (9) получаем

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\gamma V(x_k), \quad \gamma > 0,$$

откуда

$$V(x_{k+1}) \leq (1 - \gamma) V(x_k), \quad \gamma > 0. \quad (10)$$

Так как квадратичная форма $V(x)$ положительно определена, из (10) вытекает, что $\gamma \leq 1$. Из (10) легко вывести, что $V(x_{k+1}) \leq (1 - \gamma)^{k+1} V(x_0)$. Последнее неравенство означает, что $V(x_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а это эквивалентно соотношению $x_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, матрица αA является 1-устойчивой, а значит, матрица A будет α -устойчивой.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть система (1) является α -стабилизируемой.

Заменим уравнение (2) системой двух уравнений относительно матриц Q , R :

$$\alpha^2 (A + BQ)^* R (A + BQ) - R + I + \alpha^2 Q^* Q = 0; \quad (11)$$

$$Q = -(I + B^* R B)^{-1} B^* R A. \quad (12)$$

Построим теперь последовательность матриц Q_m, R_m , используя следующий алгоритм:

1) выбираем Q_1 так, чтобы матрица $A + BQ_1$ была α -устойчивой, т. е. чтобы $\sigma(A + BQ_1) \subset C_{\alpha}^{-}$;

2) выбрав $Q_1, \dots, Q_m$, находим R_m как решение уравнения $\alpha^2 A_m^* R_m A_m - R_m + I + \alpha^2 Q_m^* Q_m = 0$ (13), где $A_m = A + BQ_m$;

3) вычисляем $Q_{m+1} = -(I + B^* R_m B)^{-1} B^* R_m A$ (14).

Нетрудно проверить, что указанный алгоритм позволяет определить такую последовательность $\{Q_m, R_m\}$, у которой матрицы R_m являются положительно определенными и последовательность R_m монотонно не возрастает. Действительно, так как система (1) является α -стабилизируемой, найдется Q_1 такая, что матрица $A + BQ_1$ будет α -устойчивой. Тогда уравнение (13) имеет при $m=1$ в силу доказанной леммы единственное решение. R_1 и матрица R_1 — положительно определена.

Предположим, что матрицы $R_1, \dots, R_m$ найдены и положительно определены. Тогда из (14) определяем матрицу Q_{m+1} . Из легко проверяемого равенства

$$A_{m+1}^* R_m A_{m+1} + Q_{m+1}^* Q_{m+1} = A_m^* R_m A_m + Q_m^* Q_m - (Q_m - Q_{m+1})^* (I + B^* R_m B) (Q_m - Q_{m+1})$$

на основании (13) получаем

$$\alpha^2 A_{m+1}^* R_m A_{m+1} - R_m + Q = 0, \quad (15)$$

где

$$Q = I + \alpha^2 Q_{m+1}^* Q_{m+1} + \alpha^2 (Q_m - Q_{m+1})^* (I + B^* R_m B) (Q_m - Q_{m+1}).$$

Так как матрица Q положительно определена, в силу леммы матрица $A_{m+1} = A + BQ_{m+1}$ является α -устойчивой. Тогда из (13) получаем, что R_{m+1} положительно определена. Для доказательства монотонности последовательности R_m поступим следующим образом: в (13) заменим m на $m+1$ и вычтем полученное равенство из (15). В результате будем иметь

$$\alpha^2 A_{m+1}^* (R_m - R_{m+1}) A_{m+1} - (R_m - R_{m+1}) + \alpha^2 (Q_m - Q_{m+1})^* (I + B^* R_m B) (Q_m - Q_{m+1}) = 0.$$

Отсюда на основании леммы заключаем, что $R_m - R_{m+1} \geq 0$, т. е. последовательность R_m не возрастает. Так как матрицы R_m положительно определены, то существует [2] предел $R = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m$, причем из соотношения $x^* R x = \lim_{m \rightarrow \infty} x^* R_m x$ сле-

дует, что матрица R неотрицательна. Из сходимости последовательности R_m следует, в силу (14), существование предела $Q = \lim Q_m = -(I + B^*RB)^{-1}B^*RA$. Переходя в равенстве (13) к пределу, получаем, что матрицы Q, R удовлетворяют уравнениям (11), (12) и, следовательно, уравнению (2). Наконец, из (11) получаем: $R = I + \alpha^2 Q^*Q + \alpha^2 (A + BQ)^*R(A + BQ)$, откуда вытекает положительная определенность матрицы R .

Достаточность. Пусть R — положительно определенное решение уравнения (2). В системе (1) положим $u_k = Qx$, где $Q = -(I + B^*RB)^{-1}B^*RA$. Как установлено выше, уравнение (2) эквивалентно уравнению (11), из которого в силу леммы следует α -устойчивость матрицы $A + BQ$.

Список литературы: 1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969. 368 с.
2. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 424 с.

Поступила в редколлегию 12.12.89

УДК 517.998.3

А. С. СОХИН

ИДЕНТИФИКАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ ПЕРЕНОСА

1. Постановка задачи.

Рассмотрим билинейную эволюционную систему, описываемую уравнением переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} = \int_{-1}^1 u(x, t, a, a') y(x, t, a') da', \quad -\infty < t < \infty,$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -1 < a < 1$$

при следующих условиях на управление $u(x, t, a, a')$:

1) $u(x, t, a, a')$ — непрерывная функция по всем переменным;

2) $\text{supp } u(x, t, a, a') \equiv n(a) \subset D(a) \equiv \{a' : a/a' < 1\}$;

3) $n(a) \cap n^*(a') = \emptyset \quad \forall a' \in n(a)$, где $n^*(a') = \text{supp } u(x, t, a, a') = \{a : a' \in n(a)\}$;

4) функция $q^\pm(t) \equiv \max_{t' \in [t, \pm \infty]} |q(t')|$ ограничена на интервале $(-\infty, \infty)$ и суммируема на интервале $[a, \pm \infty)$ при $a \neq \mp \infty$, где $q = u$, $\hat{u} = u/a'$, $\tilde{u} = u/a$, $\bar{u} = u/(a - a')$.

Функции, подчиненные перечисленным условиям, образуют множество U допустимых управлений.

Задача идентификации системы состоит в отыскании управления $u \in U$ по всевозможным заданным начальным $f_-(x, a) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(x + at, t, a)$ и отвечающим им наблюдаемым финальным состояниям $f_+(x, a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(x + at, t, a)$, т. е. по известному оператору перехода $S: f_- \rightarrow f_+$.

Метод исследования поставленной задачи близок идеям метода решения стационарной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля [1] и нестационарной задачи для системы двух гиперболических уравнений [2]. Данная работа является продолжением работ [3, 4].

2. Вывод операторного тождества и основного уравнения.

Введем оператор $T_x f(t, a) = f(x - at, a)$, $a \neq 0$, действующий из $L_i(X, A)$ в $\hat{L}_i(X, A)$, $i = 1, \infty$. Обратный оператор $T_x^{-1} g(t, a) = g\left(\frac{x-t}{a}, a\right)$, $a \neq 0$. Заметим, что $\|T_x f\|_i^{\wedge} \leq \|f\|_i$, $\|T_x^{-1} g\| \leq \|g\|_i^{\wedge}$, $i = 1, \infty$. Согласно работе [4] решение интегрального уравнения задачи управления имеет представление $y(x) = (I + K_x^-) T_x f_- = (I + K_x^+) T_x f_+$.

Подставляя $f_+ = S f_-$, где $S = I + F$ оператор перехода, в предыдущее выражение, получим следующее равенство $(I + K_x^-) T_x f_- = (I + K_x^+) T_x (I + F) f_-$

на функциях $f_- \in F_i(X, A)$. Полагая

$$S_x = T_x S T_x^{-1}, \quad F_x = T_x F T_x^{-1}$$

в силу произвольности f_- , приходим к операторному тождеству в $L_i(X, A)$, $i = 1, \infty$ (вольтеровой факторизации оператора S_x): $I + K_x^- = (I + K_x^+)(I + F_x)$

или в равносильной форме

$$K_x^- = K_x^+ + F_x + K_x^+ F_x. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что ядро оператора F_x имеет вид

$$F(x, t, a, t', a') = |a'| F(x - at, a, x - a't', a').$$

Равенство (1) операторов влечет равенство их ядер

$$\begin{aligned} K^-(x, t, a, t', a') &= K^+(x, t, a, t', a') + F(x, t, a, t', a') + \\ &+ \int_t^\infty \int_{n(a, a')} K^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) F(x, t, a, \bar{t}', \bar{a}') \bar{d}t \bar{d}a, \quad (2) \\ &\forall t, x, a, \text{ где } n(a, a') = n(a) \cap n^*(a'). \end{aligned}$$

Выражение (2) является уравнением относительно $F(x, t, a, t', a')$ при каждом фиксированном x, t', a' . Так как $K^-(x, t, a, t', a') = 0$ при $t' \geq t$, из уравнения (2) получим

$$F(x, t, a, t', a') + K^+(x, t, a, t', a') + \int_t^\infty \int_{n(a, a')} K^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) F(x, \bar{t}, \bar{a}, t', a') d\bar{t} d\bar{a} = 0, \quad t' \geq t. \quad (3)$$

Соотношение (3) является уравнением относительно функции $K^+(x, t, a, t', a')$ при каждом фиксированном x, t, a . Уравнение (3), следуя [1], естественно назвать основным уравнением задачи идентификации для оператора переноса при $t > -\infty$. В решении задачи идентификации оно имеет такое же значение, какое имеет основное уравнение В. А. Марченко [1] в решении обратной задачи рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля.

Обозначив $S^{-1} = I + G$, аналогично получим основное уравнение задачи идентификации для оператора переноса при $t < +\infty$:

$$G(x, t, a, t', a') + K^-(x, t, a, t', a') + \int_{-\infty}^t \int_{n(a, a')} K^-(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) G(x, \bar{t}, \bar{a}, t', a') d\bar{t} d\bar{a} = 0, \quad t' \leq t. \quad (3)$$

Свойства основного уравнения и операторного тождества.

Введем операторы проектирования

$$P_\tau f(t', a) = \begin{cases} f(t', a), & t' \geq \tau \\ 0, & t' < \tau; \end{cases} \quad Q_\tau f(t', a) = \begin{cases} 0, & t' \geq \tau \\ f(t', a), & t' < \tau. \end{cases}$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$P_\tau^2 = P_\tau, \quad P_\tau + Q_\tau = I, \quad P_\tau Q_\tau = 0. \quad (4)$$

Обозначим для краткости

$$D_x^\pm = I + K_x^\pm, \quad A_\tau = (A)_\tau = P_\tau A P_\tau,$$

где $A = D_x^\pm, (D_x^\pm)^{-1}, S_x, F_x$.

Теорема 1. Операторы $D_{x,\tau}^\pm$ имеют обратные на множестве значений $R(D_{x,\tau}^\pm)$, причем $(D_{x,\tau}^\pm)^{-1} = P_\tau (D_x^\pm)^{-1} P_\tau$.

Доказательство. Так как операторы с переменным верхним пределом отображают подпространство $R(P_\tau)$ значений оператора P_τ в себя и операторы с переменным нижним пределом отображают подпространство $R(Q_\tau)$ в себя, справедливы равенства

$$P_\tau (D_x^-)^{\pm 1} P_\tau = (D_x^-)^{\pm 1} P_\tau; \quad (5)$$

$$Q_\tau (D_x^+)^{\pm 1} Q_\tau = (D_x^+)^{\pm 1} Q_\tau. \quad (6)$$

Умножив равенство $I = D_x^+ (D_x^+)^{-1}$ слева и справа на P_τ и учи-

тывая свойства (4) операторов проектирования и равенство (6), получим

$$P_{\tau} = P_{\tau} D_x^{+} (D_x^{+})^{-1} P_{\tau} = P_{\tau} D_x^{+} (P_{\tau} + Q_{\tau}) (D_x^{+})^{-1} P_{\tau} = \\ = D_{x,\tau}^{+} ((D_x^{+})^{-1})_{\tau}.$$

Из тождества $I = D_x^{-} (D_x^{-})^{-1}$ после умножения на P_{τ} слева и справа и свойств (4), (5) следует $P_{\tau} = D_{x,\tau}^{-} ((D_x^{-})^{-2})_{\tau}$. Теорема доказана.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $B^{+} = S$, $B^{-} = S^{-1}$, тогда существует число $0 < c < \infty$, $i = 1, \infty$ такое что

$$c \| B_{x,\tau}^{\pm} f \|_{L_i(\tau, \pm \infty; A)} \geq \| f \|_{L_{\infty}(\tau, \pm \infty; A)}; \\ c \| (B_{x,\tau}^{\pm})^{*} g \|_{L_i(\tau, \pm \infty; A)} \geq \| g \|_{L_1(\tau, \pm \infty; A)}$$

равномерно по x и $\tau \neq \mp \infty$, $i = 1, \infty$.

Доказательство. Рассмотрим подробно случай B^{+} . Из тождества (1) получим $D_x^{-} P_{\tau} = D_x^{+} (P_{\tau} + Q_{\tau}) S_x P_{\tau}$. Положив $S_{x,\tau} = P_{\tau} S_x P_{\tau}$, $D_{x,\tau}^{\pm} = P_{\tau} D_x^{\pm} P_{\tau}$ в силу равенства (6) и свойств (4) операторов P_{τ} и Q_{τ} , найдем $D_{x,\tau}^{-} = D_{x,\tau}^{+} S_{x,\tau}$.

По теореме 1 оператор $D_{x,\tau}^{-}$ имеет в $L_{\infty}(\tau, \infty; A)$ ограниченный обратный оператор. Следовательно из равенства

$$I = (D_{x,\tau}^{-})^{-1} D_{x,\tau}^{+} S_{x,\tau} \quad (7)$$

находим

$$\| f \|_{L_{\infty}(\tau, \infty; A)} \leq c_{x,\tau} \| S_{x,\tau} f \|_{L_i(\tau, \infty; A)}; \\ c_{x,\tau} = \| (D_{x,\tau}^{-})^{-1} \|_{i, \infty} \| D_{x,\tau}^{+} \|_{i, \infty}, \quad i = 1, \infty.$$

Из равенства (7) вытекает равенство для сопряженных операторов

$$I = (D_{x,\tau}^{+})^{*} ((D_{x,\tau}^{-})^{-1})^{*} S_{x,\tau}^{*},$$

из которого находим

$$\| g \|_{L_1(\tau, \infty; A)} \leq c_{x,\tau}^{*} \| S_{x,\tau}^{*} g \|_{L_i(\tau, \infty; A)}; \\ c_{x,\tau}^{*} = \| (D_{x,\tau}^{+})^{*} \|_{i, 1} \| ((D_{x,\tau}^{-})^{-1})^{*} \|_{i, 1}.$$

Покажем, что существует $0 < c_i < \infty$ такая, что выполнены неравенства

$$c_{x,\tau} \leq c_i, \quad c_{x,\tau}^{*} \leq c_i, \quad i = 1, \infty$$

равномерно по x, τ . Действительно,

$$\| (D_{x,\tau}^{+})^{*} \|_{i, 1} \leq 1 + \| (K_{x,\tau}^{+})^{*} \|_{i, \infty} = 1 - \| K_{x,\tau}^{+} \|_{i, \infty}.$$

Из оценки (10'') в [4], записанной применительно к оператору $K_{x,\tau}^+$, действующему из $L_1(\tau, \infty; A)$ в $L_\infty(\tau, \infty; A)$, следует

$$\|K_{x,\tau}^+\|_{i,\infty}^i \leq \begin{cases} \bar{u}^+(\tau) \exp[u_1^+(\tau)] \leq \bar{u}^+(-\infty) \exp[u_1^+(-\infty)], & i=1, \\ \hat{u}_1^+(\tau) \exp[u_1^+(\tau)] \leq \hat{u}_1^+(-\infty) \exp[u_1^+(-\infty)], & i=\infty. \end{cases}$$

Далее, $\|(D_{x,\tau}^-)^{-1}\|_{1,1} \leq 1 + \|(H_{x,\tau}^-)^*\|_{1,\infty} = 1 + \|H_{x,\tau}^-\|_{i,\infty}$.

Из оценки (11''') в [4] следует

$$\|H_{x,\tau}^-\| \leq \begin{cases} \bar{u}^-(\infty) \exp[\tilde{u}_1^-(\infty)], & i=1 \\ \hat{u}_1^-(\infty) \{1 + \tilde{u}_1^-(\infty) \exp[u_1^-(\infty)]\}, & i=\infty. \end{cases}$$

Таким образом, можно положить

$$c_i = \begin{cases} (1 + \bar{u}^+(-\infty) \exp[u_1^+(-\infty)])(1 + \bar{u}^-(\infty) \exp[\tilde{u}_1^-(\infty)]), & i=1 \\ (1 + \hat{u}_1^+(-\infty) \exp[u_1^+(-\infty)])(1 + \hat{u}_1^-(\infty) \{1 + \tilde{u}_1^-(\infty) \times \\ \times \exp[u_1^-(\infty)]\}), & i=\infty, \end{cases}$$

$$c = \max(c_1, c_\infty).$$

Следствие 1. $K_x^\pm: L_1 \rightarrow L_\infty$, $H_x^\pm: L_1 \rightarrow L_\infty$, $S_x: L_1 \rightarrow L_\infty$: $S_x^*: L_1 \rightarrow L_\infty$ ($i=1, \infty$) линейно и непрерывно.

Следствие 2. $(S_{x,\tau}^*)^{-1}: L_1(\tau, \infty; A) \rightarrow L_1(\tau, \infty; A)$, $[(I+G)_{x,\tau}^*]^{-1}: L_1(-\infty, \tau; A) \rightarrow L_1(-\infty, \tau; A)$ линейно и непрерывно.

Теорема 3. При каждом $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a \in [-1, 1]$ основное уравнение имеет единственное решение в $L_1(t, \infty; -1, 1)$ относительно функции $K^+(x, t, a, t', a')$ как функции t', a' .

Доказательство. Уравнение (3) относительно функции $K^+(x, t, a, t', a')$ как функции от t', a' имеет вид $S_{x,t}^* b = -f_{x,t,a}(t', a')$, где $f_{x,t,a}(t', a') = F(x, t, a, t', a')$. Из следствия 2 и включения $f_{x,t,a} \in L_1(t, \infty; -1, 1)$ вытекает справедливость теоремы и равенство $K^+(x, t, a, t', a') = -(S_{x,t}^*)^{-1} f_{x,t,a} \times (t', a')$.

Аналогично из уравнения (3') находим

$$K^-(x, t, a, t', a') = -((I+G)_{x,t}^*)^{-1} g_{x,t,a}(t', a'), \text{ где } g_{x,t,a}(t', a') = G(x, t, a, t', a').$$

Сформулируем теперь полностью условия, которым удовлетворяет ядро $F(x, a, x', a')$ оператора перехода с допустимым управлением.

Теорема 4. Функция $F(x, t, a, t', a') \equiv |a'| F(x - at, a, x - a't', a')$ удовлетворяет условиям:

1. $(I + F)^{-1} = S^{-1} = I + G$ — линейный и непрерывный;
2. Функции

$$f(x, t, a, a') \equiv F(x, t, a, t, a') = |a'| F(x - at, a, x - a't, a');$$

$$g(x, t, a, a') \equiv G(x, t, a, t, a') = |a'| G(x - at, a, x - a't, a')$$

обладают свойством $\supp_a f \subseteq n(a)$, $\supp_a g \subseteq n(a)$, $\supp_a f \subseteq n^*(a')$,

$$\supp_a g \subseteq n^*(a').$$

3. $f_{\pm}^+(t) \in L_i(\delta, \infty)$, $g_{\pm}^-(t) \in L_i(-\infty, \delta)$, $\delta \neq \pm \infty$, $i = 1, \infty$,

$$\text{где } f_{\infty}^+(t) = \max_{\substack{t' \in [t, \infty], \\ x, a, a'}} |f(x, t', a, a')|, \quad g_{\infty}^-(t) = \max_{\substack{t' \in [-\infty, t], \\ x, a, a'}} |g(x, t', a, a')|.$$

$$4. \quad \|\varphi\|_{L_{\infty}(\tau, \pm \infty; A)} \leq c_{\infty}^{\pm} \|B_{x, \tau}^{\pm} \varphi\|_{L_i(\tau, \pm \infty; A)},$$

$$\|\psi\|_{L_1(\tau, \pm \infty; A)} \leq c_1^{\pm} \|(B_{x, \tau}^{\pm})^* \psi\|_{L_i(\tau, \pm \infty; A)},$$

где $B^+ = S = I + F$, $B^- = S^{-1} = I + G$, $(B^{\pm})^*$ — оператор, сопряженный к $B^{\pm}$, $i = 1, \infty$.

Замечание 2. Условия 4 эквивалентны такому условию: уравнение

$$(B_{x, \tau}^{\pm})^* \psi = \theta$$

имеет при каждом $\theta \in L_i(\tau, \pm \infty; -1, 1)$, $i = 1, \infty$ единственное решение, и это решение удовлетворяет неравенству $\|\psi\|_1 \leq c_1 \|\theta\|_i$, $i = 1, \infty$ равномерно по x, τ .

Доказательство нетрудно получить следуя [5] (теорема 3.4).

При решении задачи идентификации покажем, что условия 1—4 теоремы 4 на заданную функцию $F(x, a, x', a')$ достаточны для того, чтобы найти управление, подчиненное условиям U .

4. Решение основного уравнения и его свойства.

Из условий 1—4 теоремы 4 следует, что уравнение (3) имеет единственное решение $K_0^+(x, t, a, t', a')$ из $L_1(t, \infty; -1, 1)$ по t', a' при каждом $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a \in [-1, 1]$, и это решение удовлетворяет тождеству

$$K_0^+(x, t, a, t', a') + |a'| F(x - at, a, x - a't', a') + \int_t^{\infty} \int_{n(a, a')} K_0^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) |a'| F(x - a\bar{t}, \bar{a}, x - a't', a') d\bar{a} = 0 \quad (8)$$

при $t' \in [t, \infty)$, $a' \in [-1, 1]$. Легко видеть, что

$$\text{supp } K_0^+(x, t, a, t', a') \subset n(a).$$

Теорема 5. $\int_t^\infty \int_{-1}^1 |K_0^+(x, t, a, t', a')| dt' da' \leq c_2 f_1^+(t).$

Доказательство.

$$\int_t^\infty \int_{-1}^1 |K_0^+(x, t, a, t', a')| dt' da' \leq c \int_t^\infty \int_{-1}^1 |F(x - at, a, x - a't',$$

$$a')/a'| dt' da' = c \int_t^\infty \int_{-1}^1 |a'| \left| f(x + a(s' - t), s', a, a') \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{a}{a'}\right) \right| ds' da' \leq c_2 \int_t^\infty f(s') ds' = c_2 f_1^+(t).$$

Лемма 1. Если $F(t, a, t', a')$ непрерывна по t' , то функция $K_0^+(x, t, a, t', a')$ также непрерывна по t' при $t' \rightarrow t + 0$.

Доказательство вытекает из тождества (8) в силу непрерывности по t' функции $F(t, a, t', a')$ и интегрируемости функции $K_0^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a})$ по $\bar{t}, \bar{a}$.

Лемма 2.

$$\|K_{x,t,a}^+\|_1 \leq c_\infty^+ \max_{\substack{t' \in [t, \infty), \\ a', x}} |f_{x,t,a}(t', a')| \leq c_\infty^+ f_\infty^+(t), \quad t > -\infty,$$

$$\|K_{x,t,a}^-\|_1 \leq c_\infty^- \max_{\substack{t' \in [-\infty, t], \\ a', x}} |g_{x,t,a}(t', a')| \leq c_\infty^- g_\infty^-(t), \quad t < +\infty.$$

Доказательство легко следует из равенства (8) и свойства 4 теоремы 4.

Обозначим $v(x, t, a, a') = -(1 - a/a') K_0^+(x, t, a, t + 0, a')$,

тогда функция $\bar{v}(x, t, a, a') = \frac{1}{a' - a} v(x, t, a, a')$ определяется равенством

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, t, a, a') &= \hat{f}(x, t, a, a') + \int_t^\infty \int_{-1}^1 K_0^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) \times \\ &\times \hat{f}\left(x + \bar{a} \frac{t - \bar{t}}{1 - \bar{a}/a'}, \frac{t - \bar{a}t/a'}{1 - \bar{a}/a'}, \bar{a}, a'\right) d\bar{t} d\bar{a}, \end{aligned}$$

где $\hat{f}(x, t, a, a') = \text{sign}(a') F(x - at, a, x - a't, a')$, из которого находим последовательно следующие неравенства

$$|\bar{v}(x, t, a, a')| \leq |\hat{f}(x, t, a, a')| + c_1^+ \hat{f}_\infty^+(-\infty) \hat{f}_\infty^+(t) \leq \hat{f}_\infty(t) + c_1^+ \hat{f}_\infty^+(-\infty) \hat{f}_\infty^+(t) \in L_1(\delta, \infty), \delta > -\infty. \quad (9)$$

Обозначим $w(x, t, a, a') = (1 - a/a') K_0^-(x, t, a, t - 0, a')$,

тогда функция $\bar{w}(x, t, a, a') = \frac{1}{a' - a} w(x, t, a, a')$ находится из равенства

$$\bar{w}(x, t, a, a') = \hat{g}(x, t, a, a') + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 K_0^-(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) \times \\ \hat{g}(x + \bar{a} \frac{t - \bar{t}}{1 - \bar{a}/a'}, \frac{t - \bar{a}t/a'}{1 - \bar{a}/a'}, \bar{a}, a') d\bar{t} d\bar{a},$$

где $\hat{g}(x, t, a, a') = \text{sign}(a') G(x - at, a, x - a't, a')$.

Аналогично предыдущему убедимся в справедливости неравенства

$$|\bar{w}(x, t, a, a')| \leq \hat{g}_\infty(t) + c_1^- \hat{g}_\infty^+(-\infty) \hat{g}_\infty^-(t) \in L_1 \quad (9')$$

в окрестности $t = -\infty$.

Доопределим $K_0^+(x, t, a, t', a') = 0$ при $t' < t$.

Положим

$$K_0^-(x, t, a, t', a') = F(x, t, a, t', a') + \\ + \int_t^\infty d\bar{t} \int_{-1}^1 K_0^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) F(x, \bar{t}, \bar{a}, t', a') d\bar{a}, t' < t; \\ K_0^-(x, t, a, t', a') = 0, t' > t, \quad (10)$$

тогда $-K_0^+(x, t, a, t + 0, a') = K_0^-(x, t, a, t - 0, a')$.

Введем операторы

$$K_{x,0}^+ \varphi = \int_t^\infty \int_{-1}^1 K_0^+(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) \varphi(\bar{t}, \bar{a}) d\bar{t} d\bar{a}; \\ K_{x,0}^- \varphi = \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 K_0^-(x, t, a, \bar{t}, \bar{a}) \varphi(\bar{t}, \bar{a}) d\bar{t} d\bar{a}$$

на функциях из пространства $L_\infty(-\infty, \infty; -1, 1)$. Тогда равенства (8), (10) эквивалентны такому равенству

$$(I + K_{x,0}^-) \varphi = (I + K_{x,0}^+)(I + F_x) \varphi. \quad (11)$$

5. Вывод интегрального представления.

Пусть $\varphi(t, a)$ — произвольная функция из $L_\infty(-\infty, \infty; -1, 1)$. Положив $\psi = (I + F) \varphi$, тогда $T_x \psi = (I + F_x) T_x \varphi$. Из равенства (11) следует.

Лемма 3. Функции

$$y^-(x, t, a) = \varphi(x - at, a) + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 K_0^-(x, t, a, t', a') \times \\ \times \varphi(x - a't', a') dt' da',$$

$$y^+(x, t, a) = \psi(x - at, a) + \int_t^\infty \int_{-1}^1 K_0^+(x, t, a, t', a') \times \\ \times \psi(x - a't', a') dt' da'$$

равны.

Лемма 4. Функция $y(x, t, a)$ $y^+(x, t, a)$ является решением эволюционной задачи с управлением

$$u_0(x, t, a, a') = -(1 - a/a') K_0^+(x, t, a, t + 0, a') = \\ = (1 - a/a') K_0^-(x, t, a, t - 0, a').$$

и оператором перехода $S = I + F$.

Доказательство. Проверим сначала второе утверждение. Из равенств

$$T_x \varphi(t, a) = G_t \varphi(x, a) = \varphi(x - at, a), \quad y^+(x, t, a) = y^-(x, t, a)$$

находим

$$y(t) = y(x, t, a) = G_t \varphi + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 K_0^-(x, t, a, t', a') G_{t'} \varphi(x, a') dt da' = \\ = G_t \psi + \int_t^\infty \int_{-1}^1 K_0^+(x, t, a, t', a') G_{t'} \psi(x, a') dt da';$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} G_{-t} y(t) = \varphi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G_{-t} y(t) = S \varphi = \psi.$$

Докажем теперь, что функция $y(x, t, a)$ удовлетворяет уравнению

$$L_0(y) \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + a \frac{\partial y}{\partial x} - \int_{-1}^1 u_0(x, t, a, a') y(x, t, a') da' = 0,$$

где $u_0(x, t, a, a') = -(1 - a/a') K_0^+(x, t, a, t, a') = (1 - a/a') \times$
 $\times K_0^-(x, t, a, t, a')$. Не теряя в общности можем считать, что
 функция $y(x, t, a)$ дифференцируема. Подставляя вместо
 функции $y(x, t, a)$ ее выражение, находим

$$\begin{aligned} L_0(y) = & - \int_{-1}^1 K_0^+(x, t, a, t, a') \psi(x - a't, a') da' + \\ & + \int_t^{\infty} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial K_0^+}{\partial t} + a \frac{\partial K_0^+}{\partial x} \right\} \psi(x - a't', a') dt' da' + \\ & + \int_t^{\infty} \int_{-1}^1 a K_0^+ \frac{\partial \psi(x - a't', a')}{\partial x} dt' da' - \int_{-1}^1 u_0(x, t, a, a') \times \\ & \times y(x, t, a') da'. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $\psi(x - a't', a')$ удовлетворяет уравне-
 нию $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{a'} \frac{\partial \psi}{\partial t'} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} L_0(y) = & - \int_{-1}^1 \left\{ K_0^+(x, t, a, t, a') \left(1 - \frac{a}{a'} \right) + u_0(x, t, a, a') \right\} \times \\ & \times \psi(x - a't, a') da' + \int_t^{\infty} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial K_0^+}{\partial t} + a \frac{\partial K_0^+}{\partial x} + \frac{a}{a'} \frac{\partial K_0^+}{\partial t'} - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^1 u_0(x, t, a, \tilde{a}) K_0^+(x, t, \tilde{a}, t', a') d\tilde{a} \right\} \psi(x - a't', a') dt' da'. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} L_1(K_0^+) = & \frac{\partial}{\partial t} K_0^+ + a \frac{\partial}{\partial x} K_0^+ + \frac{a}{a'} \frac{\partial}{\partial t'} K_0^+ - \\ & - \int_{-1}^1 u_0(x, t, a, \tilde{a}) K_0^+(x, t, \tilde{a}, t', a') d\tilde{a}, \end{aligned}$$

тогда

$$L_0(y) = \int_t^{\infty} \int_{-1}^1 L_1(K_0^+) \psi(x - a't', a') dt' da'.$$

Вычислим $L_1(K_0^+)$ при помощи основного уравнения. Принимая
 во внимание равенство

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a}{a'} \frac{\partial}{\partial t'} \right\} F(x, t, a, t', a') = 0,$$

находим

$$L_1(K_0^+) + \int_t^\infty \int_{-1}^1 L_1(K_0^+) F(x, \bar{t}, \bar{a}, t', a') d\bar{t} d\bar{a} = 0.$$

В силу единственности решения основного уравнения получаем $L_1(K_0^+) \equiv 0$, следовательно, $L_0(y) = 0$. Случай $u_0(x, t, a, a') = (1 - a/a') K_0^-(x, t, a, t, a')$ рассматривается аналогично.

6. Алгоритм восстановления управления по оператору перехода

Из предыдущего следует, что по функции $F(x, a, x', a')$, являющейся ядром оператора $F = S - I$ и обладающей свойствами 1—4 теоремы 4, управление $u(x, t, a, a')$ из множества допустимых управлений для $t > -\infty$ восстанавливается при помощи такого алгоритма:

1) положим $F(x, t, a, t', a') = |a'| F(x - at, a, x - a't', a')$;

2) составим уравнение $k^+(t', a') + \int_t^\infty \int_{-1}^1 F(x, \bar{t}, \bar{a}, t', a') \times \\ \times k_+(\bar{t}, \bar{a}) d\bar{t} d\bar{a} = -F(x, t, a, t', a'), t' \geq t > -\infty$;

3) находим $k_{x,t,a}^+(t', a') \equiv K_0^+(x, t, a, t', a')$ решение предыдущего уравнения, удовлетворяющее условию $\text{supp } K_0^+ \subset n(a)$

4) функция $u(x, t, a, a') = -(1 - a/a') K_0^+(x, t, a, t, a')$ — искомое допустимое управление при $t > -\infty$.

По функции $G(x, a, x', a')$, являющейся ядром оператора $G = S^{-1} - I$, управление $u(x, t, a, a')$ из множества U допустимых управлений для $t < +\infty$ восстанавливается при помощи такого алгоритма:

а) положим $G(x, t, a, t', a') = |a'| G(x - at, a, x - a't', a')$;

б) составим уравнение $k^-(t', a') + \int_{-\infty}^t \int_{-1}^1 G(x, \bar{t}, \bar{a}, t', a') \times \\ \times k^-(\bar{t}, \bar{a}) = -G(x, t, a, t', a'), t' \leq t < +\infty$;

в) находим $k_{x,t,a}^-(t', a') \equiv K_0^-(x, t, a, t', a')$ — решение предыдущего уравнения, удовлетворяющее условию $\text{supp } K_0^- \subset n(a)$;

2) функция $u(x, t, a, a') = (1 - a/a') K_0^-(x, t, a, t, a')$ — искомое допустимое управление при $t < +\infty$.

Список литературы: 1. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. К., 1972. 219 с. 2. Нижник Л. П. Нестационарная задача рассеяния. К., 1973. 182 с. 3. Сохин А. С. Преобразование решений нестационарного уравнения переноса // Вестн. Харьк. ун-та. 1984. № 254. Механика, математика и процессы управления. С. 42—48. 4. Сохин А. С. Наблюдение билинейной эволюционной системы, описываемой уравнением переноса // Вестн. Харьк. ун-та (в печати). 5. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., 1971. 104 с.

Поступила в редколлегию 06.09.89

УДК 517.91

Т. М. НЕСТЕРОВА

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ О СОСТОЯНИИ

Основные обозначения

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A — (n \times n), \quad B — (n \times r), \quad x \in E_n, \quad u \in E_r. \quad (1)$$

Классическая задача стабилизации [1] состоит в построении для системы (1) управления вида

$$u = Px, \quad P — (r \times n)$$

так, чтобы система (1) с данным управлением, т. е. система

$$\dot{x} = (A + BP)x$$

была асимптотически устойчивой.

Очевидно, что для стабилизируемости системы (1) необходимо и достаточно выбрать матрицу P так, чтобы спектр матрицы $A + BP — \sigma(A + BP)$ лежал в левой полуплоскости, т. е. $\operatorname{Re} \sigma(A + BP) < 0$.

Критерий стабилизируемости системы (1) состоит в том, чтобы все собственные и корневые вектора матрицы A , соответствующие собственным значениям с неотрицательной вещественной частью (в дальнейшем будем называть их положительными), лежали в пространстве управляемости $L_y = L(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$.

Предположим, что информация о состоянии системы (1) задана с помощью выхода $y = Cx$, где $C — (m \times n)$, $m < n$, $y — m$ — мерный вектор, т. е. информация о состоянии системы неполная. В этом случае задача стабилизации состоит в построении матрицы $P — (r \times m)$, такой, чтобы система (1) с управлением

$$u = Py = PCx \quad (3)$$

была асимптотически устойчива, или $\operatorname{Re} \sigma(A + BPC) < 0$. Для этой задачи в предположении $\operatorname{rg} B + \operatorname{rg} C > n$ показано, что

если система вполне управляема и наблюдаема, т. е. $L_y = E_n$ и $L_n = \mathcal{L}(C^*, A^*C^*, \dots, A^{*n-1}C^*) = E_n$, спектр матрицы $A + BPC$ может быть сделан почти произвольным вещественным [2, 3], иначе говоря, для любого вещественного множества $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset R$ можно выбрать матрицу P так, чтобы $\sigma(A + BPC) = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\} \subset R$, $|\lambda_i - \lambda_i^*| < \varepsilon$, $i = 1, n$. В работе [3] получен конструктивный алгоритм построения искомой матрицы P .

Другой разновидностью задачи стабилизации для системы (1) является задача стабилизации относительно подпространства. Пусть $D — (k \times n)$ матрица $z = Dx$ (4). Задача стабилизации системы (1) относительно подпространства $\{x : Dx = 0\}$ состоит в построении матрицы $P — (r \times n)$ так, чтобы для любого решения $x(t)$ системы $\dot{x} = (A + BP)x$ выполнялось

$$z(t) = Dx(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Критерии стабилизируемости относительно подпространства получены в [4, 5].

В данной работе рассмотрена общая задача стабилизируемости относительно подпространства с учетом неполной информации о состоянии: необходимо стабилизировать величину (4), т. е. выбрать матрицу $P — (r \times m)$ так, чтобы при управлении (3) для любого решения $x(t)$ системы $\dot{x} = (A + BPC)x$ было выполнено $z(t) = Dx(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$.

Получен критерий разрешимости этой задачи в предположениях, что

$$\text{rg } B + \text{rg } C > n \quad (5), \quad \mathcal{L}(B) \cap \mathcal{L}(D^*)^\perp = \{0\} \quad (6).$$

Дан алгоритм построения искомой матрицы P .

Введем следующую классификацию собственных значений матрицы $A + BPC$.

Определение 1. а) собственные и корневые вектора оператора $A + BPC$ из $L_H^\perp$ назовем абсолютно неподвижными; б) собственные и корневые вектора оператора $A + BPC$, не принадлежащие пространству L_y , назовем условно неподвижными, если они не абсолютно неподвижны; в) остальные собственные и корневые вектора матрицы $A + BPC$ назовем подвижными.

Множество собственных значений матрицы $A + BPC$ с учетом их кратности, соответствующее абсолютно неподвижным, условно неподвижным и подвижным собственным и корневым векторам, назовем соответственно абсолютно неподвижной, условно неподвижной и подвижной частью спектра $\sigma(A + BPC)$.

Очевидно, что подпространство $L_H^\perp$ инвариантно относительно $A + BPC$. Тогда если x — собственный или корневой вектор матрицы A из этого подпространства, то

$$(A + BPC - \lambda I)^r x = (A - \lambda I)^r x + (K_0 C + K_1 C A + \dots + K_{n-1} C A^{n-1}) x$$

где $K_0, \dots, K_{n-1}$ — некоторые матрицы. Следовательно,

$$(A + BPC - \lambda I)^r x = (A - \lambda I)^r x, \quad (7)$$

Отсюда все абсолютно неподвижные собственные и корневые вектора матрицы $A+BPC$, а также соответствующие им собственные значения, остаются одинаковыми вне зависимости от P .

Условно неподвижные собственные и корневые вектора меняются в зависимости от P , однако условно неподвижная часть спектра не зависит от P .

Неподвижные собственные и корневые вектора матрицы $A+EPS$ разделим следующим образом.

Определение 2. а) собственные и корневые векторы матрицы $A+BPC$, не принадлежащие L_y , назовем векторами I рода; б) все собственные и корневые векторы матрицы $A+BPC$, являющиеся абсолютно неподвижными и лежащие в пространстве L_y , назовем векторами II рода.

Очевидно, что вектора II рода образуют инвариантное относительно $A+BPC$ подпространство $L_y \cap L_H^\perp$ как пересечение двух инвариантных подпространств.

1. Сведение произвольной системы к вполне управляемой.

Величина, количество, кратность собственных значений, соответствующих неподвижным собственным и корневым векторам матрицы $A+BPC$, остаются постоянными при любом P . Для этого достаточно привести вид $A+BPC$ в базисе, где первые вектора — базис L_y :

$$T(A+BPC)T^{-1} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} PC.$$

Отсюда спектр, соответствующий векторам I рода, сохраняется. Для векторов II рода это следует из (7).

Собственные значения, соответствующие подвижным векторам, могут, вообще говоря, изменяться при сдвиге A на BPC .

Рассмотрим систему (1), (2), на которую наложено условие (5). Известно утверждение [2, 3]: Если система (1), (2) вполне управляема и наблюдаема, то существует матрица P такая, что $\sigma(A+BPC)$ — почти произвольный вещественный. Отсюда система (1), (2) стабилизируема.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема. Подвижную часть спектра оператора A можно сделать почти произвольной сдвигом на BPC .

Доказательство. Пусть A_1 — ограничение оператора A на инвариантное подпространство L_y . Пусть $C^* = C_1^* + C_1^{*\perp}$, где $\mathcal{L}(C_1^*) \in L_y$, $\mathcal{L}(C_1^{*\perp}) \in L_y^\perp$. Тогда лежащая в L_y часть спектра оператора $A+BPC$ совпадает со спектром оператора $A_1 + B_1PC_1$, где B_1 представляет собой вектор B , рассматриваемый в пространстве L_y , P — матрица коэффициентов размера $(r \times m)$, C_1 — вектор C , рассматриваемый в L_y .

Покажем, что подвижная часть спектра $A+BPC$ совпадает с подвижной частью спектра $A_1 + B_1PC_1$. Для этого достаточно по-

казать, что неподвижные вектора II рода системы (1), (2) совпадают с неподвижными векторами II рода системы

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u, \quad (1.1)$$

$$y = C_1 x. \quad (1.2)$$

Пусть l — корневой вектор II рода для системы (1), (2), следовательно $l \in L_y \cap L_H^\perp$. Тогда, учитывая (1.1), имеем

$$\begin{aligned} (A + BPC - \lambda I)l &= (A - \lambda J)l = (A_1 - \lambda I)l = \\ &= (A_1 + B_1 PC_1 - \lambda I)l = 0, \end{aligned}$$

т. е. l — вектор II рода для системы (1.1), (1.2).

Легко показать обратное: если вектор l — вектор II рода для системы (1.1), (1.2), то l — вектор II рода для системы (1), (2). Следовательно, подвижные части спектров систем (1), (2) и (1.1), (1.2) совпадают.

Нетрудно видеть, что из наблюдаемости (1), (2) вытекает наблюдаемость (1.1), (1.2).

Проверим, что для системы (1.1), (1.2) выполняется условие, аналогичное условию (5) для системы (1), (2). Заметим, что $\text{rg} B = \text{rg} B_1$, изменение рангов $\text{rg} C - \text{rg} C_1 \leq n - n_1$, где n_1 — порядок A_1 . Следовательно,

$$\text{rg} B_1 - \text{rg} C_1 > n_1. \quad (1.3)$$

Отсюда имеем систему (1.1), (1.2) с условием (1.3), которая является вполне управляемой.

Аналогично, переходя к симметричной системе

$$\dot{x} = A_1^* x + C_1^* u_1;$$

$$y = B_1^* x,$$

вполне наблюдаемой, и проводя с ней описанные выше преобразования, получим, что подвижная часть спектра системы (1), (2) совпадает с подвижной частью спектра системы

$$\dot{x} = A_2 x + B_2 u; \quad (1.4)$$

$$y = C_2 x, \quad (1.5)$$

которая вполне управляема и наблюдаема. Отсюда, в силу теоремы [2, 3], спектр системы (1.4), (1.5) можно сделать почти произвольным.

Теорема доказана.

2. Необходимые условия стабилизируемости на подпространство систем с неполной информацией о состоянии

В этом параграфе получим два необходимых условия разрешимости задачи стабилизации на подпространство при неполной информации.

Утверждение 1. Если система стабилизируема, то все положительные векторы II рода оператора A должны лежать в $L(D^*)^\perp$.

Доказательство. Стабилизируемость системы означает, что существует P такая, что все положительные собственные и корневые векторы оператора $A + BP_0C$ лежат в $L(D^*)^\perp$. Тогда справедливость нашего утверждения следует из (7).

Известно [4], что в случае, когда $C = I$ (полная информация), справедлив следующий критерий стабилизации на подпространство.

Для стабилизации системы (1), (4) необходимо и достаточно, чтобы существовало подпространство $\chi \subset L(D^*)^\perp$, такое, что:

$$1) A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B);$$

2) все положительные собственные и корневые векторы оператора A включены в подпространство $\chi + L_y$.

Далее через M будем обозначать максимальное по включению подпространство, такое, что $M \subset \mathcal{L}(D^*)^\perp$ и $A(M) \subset M + \mathcal{L}(B)$.

Существование такого подпространства доказано в [2], где также дан конструктивный алгоритм его построения. Тогда сформулированный выше критерий стабилизации эквивалентен утверждению: все положительные собственные и корневые векторы оператора A включены в подпространство $M + L_y$.

Следующее утверждение дополняет критерий [4] на случай задачи с неполной информацией о состоянии системы.

Утверждение 2. Пусть система стабилизируема с помощью управления $u = BP_0Cx$. Тогда существует $\chi \subset L(D)^*(*)^\perp$, такое, что:

$$1) A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B),$$

$$2) A^*(\chi^\perp) \subset \chi^\perp + \mathcal{L}(C^*).$$

3) все положительные векторы I рода оператора A лежат в $\chi + L_y$.

Доказательство. Пусть система стабилизируема. χ — сумма всех положительных векторов матрицы $A + BP_0C$, тогда $\chi \subset \mathcal{L}(D^*)^\perp$. Кроме того, $(A + BP_0C)(\chi) \subset \chi$, следовательно, $A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B)$.

С другой стороны, из $(A^* + C^*P_0^*B^*)(\chi^\perp) \subset \chi^\perp$ следует, что $A^*(\chi^\perp) \subset \chi^\perp + \mathcal{L}(C^*)$. Подпространство $\chi + L_y$ инвариантно относительно $A + BP_0C$. Отсюда легко видеть, что так как все собственные и корневые вектора оператора $A + BP_0C$, не вошедшие в это подпространство, отрицательны и так как эти вектора являются неподвижными I рода, при любой P собственные и корневые вектора матрицы $A + BP_0C$, не вошедшие в $\chi + L_y$, останутся отрицательными (т. е. все положительные вектора $A + BP_0C$, а в частности, и A , лежат в $\chi + L_y$).

Утверждение 2 доказано.

В [4] показано, что если подпространство $A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B)$, то существует матрица P такая, что $(A + BP)(\chi) \subset \chi$. Следующее утверждение является обобщением этого факта.

Утверждение 3. Если подпространство χ обладает свойствами 1, 2 из утверждения 2, то существует матрица P такая, что подпространство χ инвариантно относительно оператора $A + BPC$.

Доказательство. Проведем доказательство как поиск искомой матрицы P . Заметим, что если $BP_1 = P_2C$, где $P_1 = (r \times n)$, $P_2 = (n \times m)$, то $BP_1 = P_2C \Rightarrow BP_3C$.

Действительно, если $BP_1 = P_2C$, то перейдя к базису, в котором B имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dots & \\ & 1 & \dots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) \Bigg\} r,$$

имеем:

$$\left(\begin{array}{c} I_r \\ 0 \end{array} \right) P_1 = T P_2 C,$$

T — матрица перехода. Матрица

$$T P_2 = \left(\begin{array}{c} \overbrace{U_1}^m \\ U_2 \end{array} \right) \Bigg\} r.$$

Отсюда $P_1 = U_1 C$. Следовательно, $P_2 C = B P_1 = B U_1 C$. Полагая $P_3 = U_1$, имеем $B P_1 = P_2 C = B P_3 C$. Приведем матрицу A к базису, где первые l_1 векторов базис χ , затем l_2 векторов — базис дополнения χ до $L(B)$ из столбцов B , а остальные векторы базиса произвольны. Тогда из условия 1 утверждения 2

$$T A T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & \\ \hline 0 & I & A_{23} \end{array} \right).$$

Без ограничения общности можно сказать, что

$$T B = \left(\begin{array}{c} 0 \\ I_{l_2} \\ 0 \end{array} \right),$$

где B_{12} — фиксированная матрица. Тогда, полагая

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c} -A_{21} & X \\ \hline 0 & \end{array} \right),$$

где X — переменная матрица, имеем

$$TAT^{-1} + TBP_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{0} & \frac{A_{12}}{X + A_{22}} \\ \hline & A_{23} \end{array} \right).$$

С другой стороны, если матрица CT^{-1} имеет вид

$$CT^{-1} = (\tilde{C}_{11}^{l_1} | C_{12}),$$

то из условия 2 все столбцы A_{21}^* включены в подпространство $L(c_{11}^*)$. Поэтому, соответствующим образом выбирая матрицу P_2 вида

$$P_2 = \left(\frac{0}{v} \right) \}^{l_1},$$

имеем

$$TAT^{-1} + P_2CT^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{0} & \frac{A_{12}}{G} \\ \hline & A_{23} \end{array} \right),$$

где G — некоторая фиксированная матрица. Подбирая X так, чтобы $X + A_{22} = G$, имеем $TBP_1 = P_2CT^{-1}$. Способом, указанным ранее, выбираем P_3 такую, что $TBP_1 = P_2CT^{-1} = TBP_3CT^{-1}$. Следовательно,

$$T(A + BP_3C)T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{0} & \frac{A_{12}}{G} \\ \hline & A_{23} \end{array} \right),$$

отсюда P_3 — искомая матрица.

3. Подпространство m и его существование.

Лемма о подпространстве

Пусть на систему (1) — (4) наложено условие (6). Заметим, что вследствие критерия [4] для стабилизируемости системы необходимо, чтобы подпространство $M + L_y$ включало все векторы I рода оператора A . Пусть это условие выполнено.

Определение. Назовем m — подпространством системы (1) — (4), на которую наложено условие (6), минимальное по включению подпространство χ , удовлетворяющее условиям:

1) $\chi \subset M$; 2) $A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B)$; 3) $\chi + L_y$ включает все положительные векторы I рода оператора A .

Лема 1. Подпространство m существует, если $M + L_y$ включает все векторы I рода оператора A .