УДК 517.53.57

Н. Н. БИЛОЦКИЙ

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ФАТУ

Последовательность комплексных чисел $S = \{S_n\}$ называют почти сходящейся к числу L, если

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_p + S_{p+1} + \ldots + S_{p+m}}{m+1} = L$$

равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots$ и коротко пишут $F - \lim S_n = L$ (см. [4, с. 30—32; 5, с. 167—168]). Если последовательность почти сходится, то она будет ограниченной [5, с. 169]. Примеры почти сходящихся последовательностей приведены в работах [4—7]. В частности, почти сходящимися будут сходящиеся последовательности, а среди расходящихся последовательностей — периодические и почти периодические последовательности [6].

Известна теорема Фату следующего содержания: если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ при } |z| < 1, \text{ и } a_n \to 0 \ (n \to \infty), \tag{1}$$

тогда данный степенной ряд сходится в каждой точке единичной окружности, в которой функция $f(z)$ регулярна к значению этой функции в этой точке [1, с. 225; 2, с. 67; 3, с. 531].

В данной работе предлагается доказательство утверждения типа теоремы Фату.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке $z = 1$ и*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ при } |z| < 1, \text{ и } F - \lim a_n = 0. \tag{2}$$

Тогда $F - \lim S_n = f(1)$, где $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы Фату, приведенного в [1, с. 225—227].

Можем считать, что $f(1) = 0$. Необходимо доказать, что при условиях теоремы $F - \lim S_n = 0$, где $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Так как $S_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{1-z} \frac{1}{z^{n+1}} dz$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$),

где в качестве контура интегрирования Γ может быть взята окружность $|z| = r$ при $0 < r < 1$, то

$$\sigma_{pm}(s) = \frac{S_p + S_{p+1} + \ldots + S_{p+m}}{m+1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - re^{i\theta}} \sum_{k=0}^{m} r^{-(p+k)} e^{-(p+k)i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{p+m}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - re^{i\theta}} \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} r^k e^{ik\theta} \right) e^{-i(p+m)\theta} d\theta$$

для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots, p = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $0 < \delta < \pi$. Определим функцию $\varphi(\theta) = \varphi(\theta, \delta, r)$ следующими условиями:

$$\varphi(\theta, \delta, r) = \begin{cases} (1 - re^{i\theta})^{-1} \text{ при } \delta < |\theta| \leqslant \pi; \\ a_0\theta^3 + a_1\theta^2 + a_2\theta + a_3 \text{ при } |\theta| \leqslant \delta, \end{cases}$$

где коэффициенты a_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ выбраны так, чтобы для $0 < r \leqslant 1$ были выполнены равенства

$$\varphi(\pm\delta) = (1 - re^{\pm i\delta})^{-1},\ \varphi'(\pm\delta) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(1 - re^{\pm i\theta})^{-1}\right)\Big|_{\theta=\delta} = = \frac{ire^{\pm i\delta}}{(1 - re^{\pm i\delta})^2}. \quad (3)$$

Положив $(1 - re^{i\theta})^{-1} = \Psi(r, \theta)$, из системы (3) получим:

$$a_0 = \frac{1}{4\delta^2}(\psi'_0(r\delta) + \psi'(r, -\delta)) - \frac{1}{4\delta^3}(\psi(r, \delta) - \psi(r, -\delta));$$

$$a_1 = \frac{1}{4\delta}(\psi'_\theta(r, \delta) - \psi'_\theta(r, -\delta)); \quad (4)$$

$$a_2 = \frac{3}{4\delta}(\psi(r, \delta) - \psi(r, -\delta)) - \frac{1}{4}(\psi'_\theta(r, \delta) + \psi'_\theta(r, -\delta));$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(\psi(r, \delta) - \psi(r, -\delta)) - \frac{\delta}{2}(\psi'_\theta(r, \delta) + \psi'_\theta(r, -\delta)).$$

Так как $|1 - re^{i\theta}|^2 = (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos\theta \geqslant 4r\sin^2\frac{\theta}{2}$ при $0 < |\theta| < \pi$ и $0 < r \leqslant 1$, легко показать, что при тех же значениях θ и r верны неравенства

$$|\psi(r, \theta)| \leqslant \left(2\sqrt{r}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)^{-1};\ |\psi'_\theta|(r, \theta)| \leqslant \left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1};$$

$$|\psi''_{\theta^2}(r, \theta)| \leqslant \left(4\sqrt{r}\left|\sin^3\frac{\theta}{2}\right|\right)^{-1}. \quad (5)$$

Наконец, учитывая условия определения функции $\varphi(\theta)$, соотношения (3) — (5), а также неравенства

$$\lim_{\theta\to-\delta-0}|\varphi''_{\theta^2}(\theta, \delta, r)| \leqslant \left(2\sqrt{r}\left|\sin^3\frac{\delta}{2}\right|\right)^{-1};$$

$$\lim_{\theta\to\delta+\theta}|\varphi''_{\theta^2}(\theta, \delta, r)| \leqslant \left(2\sqrt{r}\left|\sin^3\frac{\delta}{2}\right|\right)^{-1};$$

$$\lim_{\theta\to-\delta+0}|\varphi''_{\theta^2}(\theta, \delta, r)| \leqslant 6|a_0|\delta;$$

$$\lim_{\theta\to\delta-0}|\varphi''_{\theta^2}(\theta, \delta, r)| \leqslant 6|a_0|\delta,$$

справедливые при $0 < \delta < \pi$ и $0 < r \leqslant 1$, можно утверждать, что определенная выше функция $\varphi(\theta)$ удовлетворяет условиям:

1) для фиксированных $\delta \in]0; \pi[$ и $r \in]0; 1]$ функции $\varphi(\theta) = \varphi(\theta, \delta, r)$ и $\varphi'(\theta) = \varphi'_\theta(\theta, \delta, r)$ непрерывны на отрезке $[-\pi; \pi]$;

2) $|\varphi(\theta)| \leqslant H(r_0, \delta)$, $|\varphi'(\theta)| \leqslant H(r_0, \delta)$, $|\varphi''(\theta)| \equiv |\varphi''_{\theta^2}(\theta, \delta, r) \leqslant \leqslant H(r_0, \delta)$, где число $H(r_0, \delta) > 0$ не зависит от $r \in [r_0, 1]$ при $r_0 > 0$, но зависит от $\delta \in]0; \pi[$ и $H(r_0, \delta) \to +\infty$ $(\delta \to 0)$ (6).

Теперь можем написать

$$2\pi r^{p+m}\sigma_{pm}(s)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}}\cdot\frac{e^{-i(p+m)\theta}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{i\theta k}d\theta+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{i\theta k}\varphi(\theta)e^{-i(p+m)\theta}d\theta-$$

$$-\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{f(re^{i\theta})}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{i\theta k}\varphi(\theta)e^{-i(p+m)\theta}d\theta=$$

$$=J_1(p,\ m,\ r,\ \delta)+J_2(p,\ m,\ r,\ \delta)+J_3(p,\ m,\ r,\ \delta). \tag{7}$$

Из условия регулярности функции $f(z)$ при $z=1$ и $f(1)=0$ следует существование такого $\theta_0>0$, что $f(re^{i\theta})=O(1-re^{i\theta})$ при $|\theta|<\theta_0$ равномерно относительно $r\in[r_0,\ 1]$ и, стало быть, независимо от $r\in[r_0;\ 1]$

$$J_1(p,\ m,\ r,\ \delta)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}O(1)\,d\theta=O(\delta)\ \text{при}\ \delta\in]0;\ \theta_0]$$

$$\text{и всех}\ m,\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{8}$$

Пусть теперь δ фиксировано. В силу равномерной сходимости данного степенного ряда внутри круга $|z|<1$, справедливо равенство

$$J_2(p,\ m,\ r,\ \delta)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{ik\theta}\varphi(\theta)\,e^{-i(p+m)\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{m+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_k r^n e^{in\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{k+n}r^{n+m}e^{i(n+m)\theta}\right)\varphi(\theta)e^{-i(p+m)\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_k r^n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,e^{i(n-p-m)\theta}d\theta+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n+m}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k+n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,e^{i(n-p)\theta}d\theta=$$

$$=J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)+J_{22}(p,\ m,\ r,\ \delta)$$

для всех $m,\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $r\in[r_0;\ 1[$, где $J_{21}(p,\ 0,\ r,\ \delta)=0$. Оценим первое слагаемое J_{21}. Дважды интегрируя по частям, для каждого $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ получим

$$J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)=-\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{r^n}{(m+p-n)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi''(\theta)\,e^{i(n-p-m)\theta}\,d\theta.$$

Используя условия (6), можем для каждого фиксированного $\delta\in]0;\ \theta_0]$ получить такие оценки:

$$|J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)| \leqslant \frac{2\pi H(r_0,\ \delta)}{m+1}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{(m-n)^2}\left|\sum_{k=0}^{n}a_k\right| =$$

$$= 2\pi\cdot H(r_0,\ \delta)\sum_{n=0}^{m-1}b_{mn}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_k\right|$$

для всех $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ независимо от p и $r \in [r_0;\ 1[$, где элементы матрицы $B = (b_{mn})$ определяются равенствами

$$b_{mn} = \begin{cases} \dfrac{n}{(m+1)(m-n)^2} \text{ при } 0 \leqslant n < m,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \qquad 0 \qquad \text{при } n \geqslant m,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{cases}$$

и удовлетворяет условиям

а) $b_{mn} \to 0\ (m \to \infty)$ для каждого $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;

б) $\sup\limits_{0 < m < +\infty}\sum\limits_{n=0}^{m-1}|b_{mn}| \leqslant \sup\limits_{0 < m < +\infty}\dfrac{m-1}{m+1}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{1}{n^2} < +\infty.$

Таким образом, матрица $B = (b_{mn})$ преобразовывает всякую сходящуюся к нулю последовательность в последовательность также сходящуюся к нулю [3, с. 126—127]. Если после этого учесть условие (2), то

$$|J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)| \leqslant 2\pi\cdot H(r_0,\ \delta)\left|\sum_{n=0}^{m-1}b_{mn}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_k\right| \to 0\ (m \to \infty)$$

для каждого фиксированного $\delta \in]0;\ \theta_0]$, независимо от $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ при любом $r \in [r_0;\ 1]$. Оценим после этого второе слагаемое J_{22}. Дважды интегрируя по частям все члены ряда, кроме члена с номером $n = p$, получим равенство

$$J_{22}(p,\ m,\ r,\ \delta) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m}a_{k+p}}{m+1}\, r^{p+m}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{n\neq p}\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}a_{k+n}}{m+1}\times$$

$$\times\frac{r^{n+m}}{(n-p)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi''(\theta)\, e^{i(n-p)\theta}\, d\theta,$$

справедливое при всех $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p = 0,\ 1, 2,\ \ldots,\ r \in [r_0,\ 1[$ и для каждого фиксированного $\delta \in [0;\ \theta_0]$. Положим

$$\varepsilon_m = \max_{0 \leqslant p < +\infty}\left(\frac{1}{m+1}\left|\sum_{k=0}^{m}a_{k+p}\right|\right)\ (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда, в силу условия (2) $\varepsilon_m \to 0\ (m \to \infty)$. Отсюда и из условий (6) следует, что для каждого фиксированного $\delta \in]0;\ \theta_0]$

$$|J_{22}(p, m, r, \delta)| \leqslant 2\pi \cdot H(r_0, \delta) \cdot \varepsilon_m \cdot \left(1 + \sum_{n \neq p} \frac{1}{(n-p)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \cdot H(r_0, \delta) \cdot \varepsilon_m \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \cdot H(r_0, \delta) \cdot \varepsilon_m \cdot \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \to 0 \ (m \to \infty) \qquad (9)$$

равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots$ и независимо от $r \in [r_0, 1]$.

Далее,

$$J_3(p, m, r, \delta) = \frac{1}{m+1} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - re^{i\theta}} (1 - r^{m+1} e^{i(m+1)\theta}) \, e^{-i(p+m)\theta} \, \varphi(\theta) \, d\theta$$

и, как уже ранее отмечалось, из регулярности функции $f(z)$ в точке $z = 1$ и равенства $f(1) = 0$ следует существование такого $\theta_0 > 0$, что $f(re^{i\theta}) = 0(1 - re^{i\theta})$ при $|\theta| \leqslant \theta_0$ равномерно относительно $r \in [r_0; 1[$. Тогда, обратившись к условиям (6) еще раз, получаем, что

$$|J_3(p, m, r, \delta)| \leqslant \frac{4\delta \cdot H(r_0, \delta)}{m+1} O(\delta) \to 0 \ (m \to \infty) \qquad (10)$$

для каждого фиксированного $\delta \in]0; \theta_0]$ независимо от $p = 0, 1, 2, \ldots$ для всех $r \in [r_0; 1[$.

Наконец, используя последовательно соотношения (8) — (10), для любого $\varepsilon > 0$ можно сначала найти $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in]0; \theta_0]$, для которого $|J_1(p, m, r, \delta)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, а затем выбрать $m_0 = m_0(\varepsilon, \delta_1)$ такое, что для всех $m > m_0(\varepsilon, \delta_1)$: $|J_2(p, m, r, \delta_1)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, $|J_3(p, m, r, \delta_1)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots$ и независимо от $r \in [r_0; 1[$. Тогда равенство (7) позволяет заключить: $2\pi r^{p+m} |\sigma_{pm}(s)| < \varepsilon$ для всех $m > m_0(\varepsilon, \delta_1(\varepsilon))$ равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots$ и $r \in [r_0; 1[$. Так как r сколь угодно близко к единице, $|\sigma_{pm}(s)| < \varepsilon/2\pi$ равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots$. В силу произвольной малости $\varepsilon > 0$ теорема доказана.

Заметим, что с помощью доказанной теоремы можно получить теорему Фату. Действительно, пусть выполняются условия (1) и $z = e^{i\varphi_0}$ — точка регулярности функции $f(z)$ на единичной окружности. В этой точке частные суммы степенного ряда (1) имеют вид

$$\overline{S}_n = a_0 + a_1 e^{i\varphi_0} + a_2 e^{i2\varphi_0} + \ldots + a_n e^{in\varphi_0} \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда точка $z = 1$ будет точкой регулярности для функции $f(\tilde{z} \cdot e^{i\varphi_0})$, где $\tilde{z} = z \cdot e^{-i\varphi_0}$. Кроме того,

$$f(\tilde{z} \cdot e^{i\varphi_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi_0} \tilde{z} \quad \text{при } |\tilde{z}| < 1, \ a_n e^{in\varphi_0} \to 0 \ (n \to \infty)$$

и, следовательно, $F - \lim a_n e^{in\varphi_0} = 0$. То есть для функции $f(\widetilde{z}e^{i\varphi_0})$ выполняются условия доказанной выше теоремы и поэтому $F - \lim \bar{S}_n = f(e^{i\varphi_0})$, что вместе с условием $a_n e^{in\varphi_0} \to 0 \ (n \to \infty)$ приводит к утверждению: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = f(e^{i\varphi_0})$ (см. [4, теорема 4; 5, теорема 6; 7, следствие 1]).

Необходимо так же отметить, что условия (2) теоремы выполняются, например, для функции

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ при } |z| < 1, \tag{11}$$

где $a_n = (-1)^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$, и поэтому $F - \lim a_n = 0$. Так как

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 2k, \ k = 0, 1, 2, \ldots; \\ 0 \text{ при } n = 2k+1, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$F - \lim S_n = \frac{1}{2}$, что совпадает со значением функции (11) в ее точке регулярности $z = 1$.

Из доказанной нами теоремы, сославшись на теорему 3 работы [7], нетрудно получить

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке $z = 1$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n \text{ при } |z| < 1, \text{ и } F - \lim a_n = 0.$$

Если последовательность $S = \{S_n\}$ удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S_m - S_{n_k}| \leqslant r < +\infty \ (r \geqslant 0)$, когда $0 < m - n_k = O(1) \ (k \to \infty)$, или условию $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S_{n_k} - S_m| \leqslant r < +\infty \ (r \geqslant 0)$, когда $0 < n_k - m = O(1) \ (k \to \infty)$, где n_k — заданная возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S_{n_k} - f(1)| \leqslant r$.

Подобные следствия из основной теоремы данной работы могут быть получены после привлечения теорем тауберового типа для почти сходящихся последовательностей, содержащихся в работе [7].

Список литературы: 1. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1980. 463 с. 2. *Постников А. Г.* Тауберова теория и ее применения // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. М., 1979. Т. 144. 148 с. 3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., Мир, 1965. Т. 1. 615 с. 4. Лоренц Г. Г. Абсолютная сходимость // Учен. зап. ЛГУ, 1941. Сер. мат. Вып. 12. С. 30—41. 5. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory divergent sequences // Acta Math. 1948. 80. P. 167—190. 6. *Siddiqi J. A.* Infinite matrices summing everi almost periodic sequence // Pacific. J. Math. 1971. 39, № 1. P. 235—251. 7. *Билоцкий Н. Н.* Теоремы тауберового типа для матричных методов суммирования рядов, равномерно транслятивных справа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1982. Вып. 38. С. 12—15.

Поступила в редколлегию 01.09.89