

**Міністерство освіти і науки України**  
**Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна**  
**Фізичний факультет**  
**Кафедра астрономії та космічної інформатики**

«Допущено до захисту»  
Зав. кафедри астрономії та  
космічної інформатики  
проф. Юрій ШКУРАТОВ

Оцінка « відмінно »  
Голова ЕК  
проф. Віктор ТИШКОВЕЦЬ

14.06.2024 р.



21.06.2024 р.



Гапонцева Ілона Олександрівна

**Аналітична теорія ефектів Ярковського і Пойнтінга–Робертсона для  
невеликих метеороїдів**

Кваліфікаційна робота на здобуття  
освітньо–кваліфікаційного рівня  
«Бакалавр» спеціальність 104 –  
«фізика та астрономія»  
освітньо–професійна програма  
«астрономія»

*(підпис студента)*

Науковий керівник – професор  
кафедри астрономії та космічної  
інформатики О.А. Голубов

*(підпис керівника)*



**Харків 2024**

## АНОТАЦІЯ

### **Гапонцева І. О. Аналітична теорія ефектів Ярковського і Пойнтінга–Робертсона для невеликих метеороїдів**

Дипломна робота на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр» за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія». Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2024.

Негравітаційні сили, зокрема ефекти Ярковського і Пойнтінга–Робертсона, спричинені асиметричним випромінюванням електромагнітних хвиль, є важливим чинником еволюції метеороїдів і невеликих астероїдів. В ефекті Ярковського асиметрія викликана обертанням тіла, натомість як в ефекті Пойнтінга–Робертсона його орбітальним рухом. Два ефекти діють одночасно, однак ефект Ярковського є зазвичай домінуючим для великих тіл, натомість як ефект Пойнтінга–Робертсона для малих. В роботі побудована наближена аналітична теорія теплопровідності в метеороїдах, яка дозволяє зробити чисельні оцінки величин цих двох ефектів з єдиних позицій. Досліджена область переходу між ефектами Ярковського і Пойнтінга–Робертсона для метеороїдів з розмірами порядку 1 метра.

**Ключові слова:** астероїд, метеороїд, світловий тиск, теплопровідність, ефект Ярковського, ефект Пойнтінга–Робертсона

## Abstract

### **Harpontseva I. O. Analytical theory of Yarkovsky and Poynting–Robertson effects for small meteoroids**

Thesis for the degree of Higher Education "bachelor" in specialty 104 "Physics and astronomy". V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2024.

Non-gravitational forces, in particular the Yarkovsky and Poynting–Robertson effects, caused by asymmetric radiation of electromagnetic waves, are an important factor in the evolution of meteoroids and small asteroids. In the Yarkovsky effect, the asymmetry is caused by the rotation of the body, instead, as in the Poynting–Robertson effect, by its orbital motion. The two effects operate simultaneously, but the Yarkovsky effect is usually dominant for large bodies, rather than the Poynting–Robertson effect for small ones. In the work, an approximate analytical theory of thermal conductivity in meteoroids is built, which allows to make numerical estimates of the magnitudes of these two effects from single positions. The region of the transition between the Yarkovsky and Poynting–Robertson effects for meteoroids with dimensions of the order of 1 meter was investigated.

**Keywords:** asteroids, meteoroids, light pressure, heat conduction, Yarkovsky effect, Poynting–Robertson effect.

# Зміст

<b>Вступ .....</b>	<b>1</b>
<b>Розділ 1. Теплофізична модель астероїда .....</b>	<b>6</b>
1.1. Рівняння теплопровідності в астероїді .....	6
1.2. Теплові хвилі .....	10
1.3. Розв'язок лінеаризованого рівняння теплопровідності у вигляді теплових хвиль.....	14
<b>Розділ 2. Розрахунок ефектів Ярковського і Пойнтінга–Робертсона .....</b>	<b>20</b>
2.1. Світловий тиск .....	20
2.2. Розрахунок ефекту Ярковського в лінійній тепловій моделі.....	21
2.3. Розрахунок ефекту Пойнтінга–Робертсона.....	25
<b>Розділ 3. Теплофізична модель метеороїда і поєднання ефектів Ярковського і Пойнтінга–Робертсона ...</b>	<b>27</b>
3.1. Розв'язок одновимірного лінеаризованого рівняння теплопровідності для метеороїда скінченних розмірів .....	27
3.2. Сили світлового тиску для метеороїда скінченних розмірів .....	31
3.3. Поєднання ефектів Ярковського та Пойнтінга–Робертсона .....	37
<b>Висновки .....</b>	<b>41</b>
<b>Перелік використаної літератури .....</b>	<b>45</b>
<b>Додатки.....</b>	<b>47</b>

## Вступ

Сила світлового тиску — явище, при якому світло, що взаємодіє з поверхнею, передає їй свій імпульс, створюючи тиск. Першим силу світлового тиску передбачив теоретично Джеймс Клерк Максвелл в 1862 році, а виміряв експериментально Петро Лебедєв в 1900 році. Імпульс фотонів, який є основою цього явища, є важливим фактором багатьох астрофізичних процесів. Сила світлового тиску впливає на еволюцію космічних тіл, зокрема, може впливати на орбіти астероїдів та метеороїдів.

Однією з таких сил світлового тиску є ефект Ярковського[2][10] (Рисунок 2). Сонячне випромінювання падає на поверхню метеороїда і досягає свого максимуму опівдні. Але, через теплову інерцію ґрунту, температура поверхні досягає максимуму після полудня. З іншого боку температура вночі, через ту ж теплову інерцію, досягає свого мінімуму перед світанком. В результаті температура вечірньої півкулі систематично вища за температуру ранкової півкулі. В наслідок цього, з вечірньої півкулі відбувається більше теплового випромінювання. Через це на поверхню цієї півкулі діє більша сила віддачі

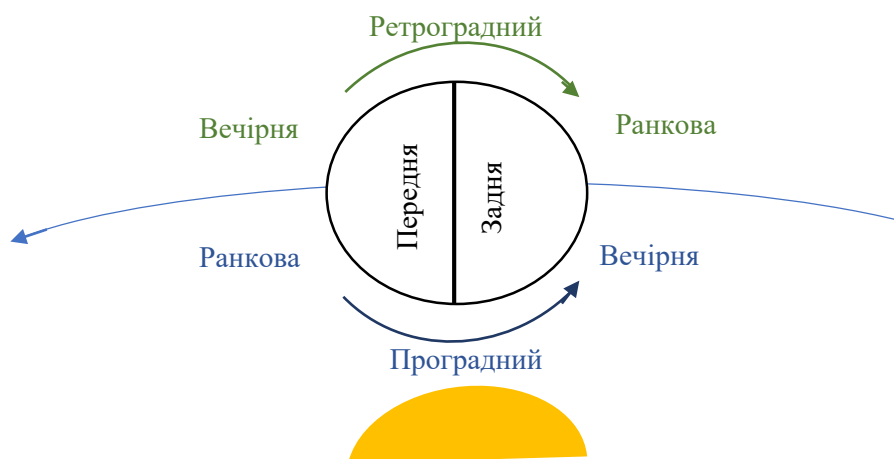


Рисунок 1. Ілюстрація півкуль метеороїда. Для проградних метеороїдів передня півкуля є ранковою, а задня вечірньою. Для ретроградних метеороїдів передня півкуля є вечірньою, а задня ранковою.

світлового тиску. Для проградних метеороїдів тобто тих, які обертаються навколо своєї осі в напрямку свого орбітального руху, вечірня півкуля є задньою (Рисунок 1), тому ця сила діє вздовж їхньої орбіти. У той же час для ретроградних метеороїдів, що обертаються протилежно напрямку орбітального руху, вечірня півкуля є передньою, тому ця сила направлена проти їхнього орбітального руху. Таким чином, проградні метеороїди з плином часу збільшують свою велику піввісь [7], а ретроградні зменшують.

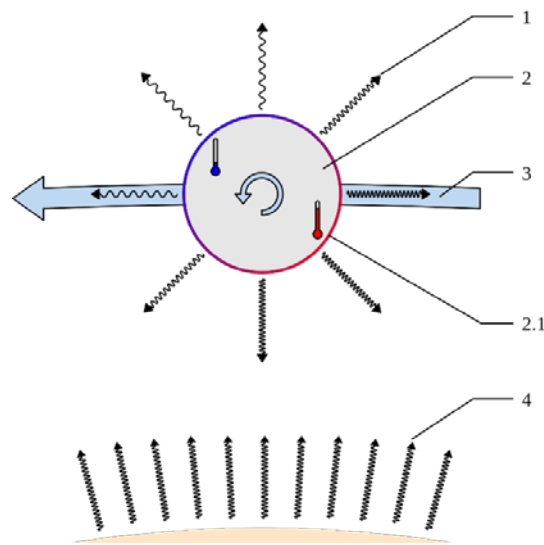


Рисунок 2. Ефект Ярковського. 1 — Теплове випромінювання астероїда, 2 — Обертання астероїда, 2.1 — Поверхня, що освітлюється Сонцем, 3 — Орбіта астероїду, 4 — Теплове випромінювання Сонця.

Ефект Пойнтінга–Робертсона[3] виникає рухом метеороїда відносно фотонів. Ефект можна зрозуміти двояко, в залежності від обраної системи відліку.

З точки зору пилінки, що обертається навколо зорі (панель (а) на Рисунку 3), здається, що випромінювання зорі приходить трохи спереду, через аберацію світла, при цьому кут аберації дуже малий, бо випромінювання рухається зі швидкістю світла, а пилінка – на багато порядків повільніше. Тому поглинання цього випромінювання призводить до сили з компонентом проти напрямку руху.

З точки зору зорі (панель (b) на Рисунку 3), пилинка поглинає сонячне світло в радіальному напрямку, тому це не впливає на кутовий момент частинки. Але перевипромінювання фотонів, ізотропне в системі пилінки (a), більше не є ізотропним в системі зорі (б). Це анізотропне випромінювання змушує фотони забирати кутовий момент пилінки.

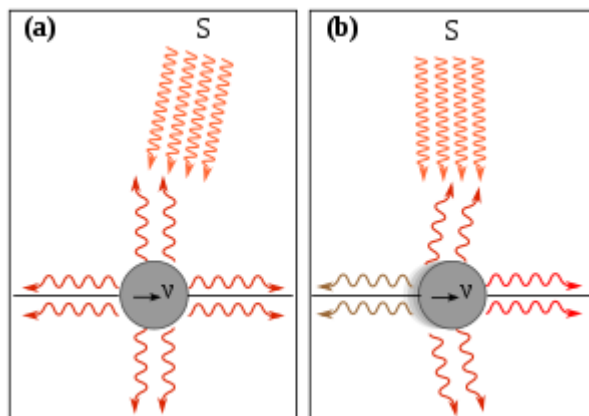


Рисунок 3. Ефект Пойнтінга–Робертсона. (a) у системі відліку, пов’язаної з метеороїдом; б) у системі відліку пов’язаною з Сонцем..

Таке анізотропне випромінювання не означає, що ізольоване випромінююче тіло під час руху сповільниться (що порушило б принцип відносності). Фотони справді унесуть імпульс від рухомого тіла, але оскільки маса тіла теж зменшуватиметься в міру випромінювання енергії, його швидкість може залишатися постійною. Важливо зазначити, що, оскільки частинка втрачає кутовий момент, ефект Пойнтінга–Робертсона завжди призводить до зменшення великої півосі орбіти частинки, поступово переміщуючи його ближче до Сонця [4].

Ефект Пойнтінга–Робертсона впливає на всі тіла, без залежності від напрямку обертання метеороїда та без залежності від розміру метеороїда, але цей ефект дуже слабкий [6]. Ефект Ярковського є домінуючим для великих тіл, оскільки теплове випромінювання є асиметричним через різницю температур на поверхні. Однак для менших тіл цей ефект зникає за рахунок наскрізної теплопровідності, яка вирівнює температуру по всій поверхні, в наслідок

цього для малих тіл Сонячної системи існує перехід між цими двома ефектами. Ефект Ярковського залежить і від швидкості обертання метеороїда: швидке обертання не допускає значних перепадів температур, а через занадто повільне обертання температура стає постійною по широті, таким чином теплове випромінювання стає однаковим по всіх напрямках. Таким чином, для малих тіл ефект Ярковського практично не проявляється, а їх орбітальна еволюція більше залежить від ефекту Пойнтінга–Робертсона.

У першому розділі буде розглянуто теплофізичну модель астероїда. Ми починаємо з формулювання рівняння теплопровідності в астероїді з урахуванням основних фізичних параметрів і припущень щодо властивостей матеріалу астероїда, таких як теплоємність і теплопровідність. Далі ми досліджуватимемо явище теплових хвиль, яке відіграє ключову роль у передачі тепла через поверхню астероїда. Завершимо цей розділ рішенням лінеаризованого рівняння теплопровідності у вигляді теплових хвиль, що дозволить краще зрозуміти розподіл температури на поверхні астероїда та його вплив на динаміку орбіти.

Другий розділ присвячений розрахунку ефектів Ярковського та Пойнтінга–Робертсона. Почнемо з опису природи світлового тиску та його впливу на малі космічні тіла. Далі переходимо до моделювання ефекту Ярковського в рамках лінійної теплової моделі, що дозволить визначити умови, за яких цей ефект є найбільш значущим. Після розрахуємо ефект Пойнтінга–Робертсона і порівняємо його вплив на орбіти малих тіл з іншими силами.

Третя глава буде присвячена теплофізичній моделі метеороїда та аналізу комбінації ефектів Ярковського та Пойнтінга–Робертсона. Спочатку розглянемо розв'язок одновимірного лінеаризованого рівняння теплопровідності для метеороїда скінченних розмірів з урахуванням конкретних умов теплообміну малих тіл. Потім розрахуємо сили світлового тиску для метеороїда з урахуванням його геометричних розмірів. Це дозволить

зробити висновки про вплив світлового тиску на еволюцію орбіти метеороїда і порівняти отримані результати з теоретичними прогнозами та іншими дослідженнями в цій галузі.

## Розділ 1. Теплофізична модель астероїда

### 1.1. Рівняння теплопровідності в астероїді

Для спрощення моделювання теплопровідності в метеороїді розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності. Основне рівняння теплопровідності в одновимірному вигляді для метеороїда має вигляд:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1)$$

де  $T$  – температура в точці  $z$  на глибині  $z$  у момент часу  $t$ ,  $c$  – теплоємність,  $\kappa$  – теплопровідність,  $\rho$  – густина. Вважаємо, що  $c$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$  не залежать від  $z$ ,  $t$ ,  $T$  і є константами.

Задаємо початкові та граничні умови. Нехай на одиницю поверхні астероїда від Сонця падає потужність  $I(t)(1 - A)$ .

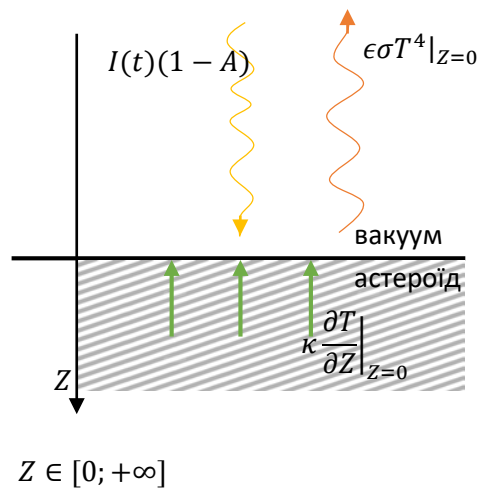


Рисунок 4. Ілюстрація геометрії граничних умов на поверхні астероїда

Випромінюється з одиниці площі потужність  $\epsilon\sigma T^4|_{Z=0}$ , де вісь  $Z$  направлена вниз, вглиб астероїда, а поверхня відповідає значенню  $Z = 0$ . Теплопровідність з глибини астероїда підводить на одиницю поверхні потужність  $\kappa \frac{\partial T}{\partial Z}|_{Z=0}$ . Записуючи баланс між всіма тепловими потоками до та від поверхні, отримуємо граничну умову:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon \sigma T^4 \Big|_{z=0} - I(T)(1 - A) \quad (2)$$

$I(t) = \Phi_0 \cos \omega t H(\cos \omega t)$ , де  $I$ —опроміненість  $[\text{Ватт}/\text{м}^2]$ ,  $\Phi_0$  світловий потік,  $H(\cos \omega t)$  функція Гевісайда, яка при  $\cos \omega t > 0$  дорівнює одиниці, а при  $\cos \omega t < 0$  дорівнює нулю.

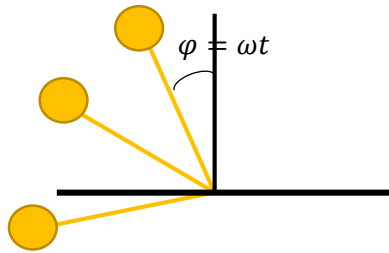


Рисунок 5. Ілюстрація кутів падіння променів Сонця на поверхню астероїда.

Задаючи граничні умови, ми робимо низку припущень. Будемо вважати, що у поверхні немає шорсткості і скривлення: розглядаємо астероїд як суцільне середовище, нехтуючи його неоднорідністю і гранулярною структурою, а також припускаємо, що астероїд опуклий, тобто немає затінення і підсвітки. Вважаємо, у астероїда немає підігріву з глибини і немає наскрізних теплових потоків  $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0$ . Коли астероїди тільки утворились, в них відбувався розпад короткоживучих радіоактивних ізотопів  $^{26}\text{Al}$   $^{60}\text{Fe}$ , і з надр до поверхні йшов значний тепловий потік. За перші мільйони років всі короткоживучі ізотопи розпались, довгоживучі  $\text{U}$  і  $\text{Th}$  виділяють тепло занадто повільно, і зараз потік тепла з надр астероїдів незначний. Робимо припущення, альбедо  $A$  не залежить від кута падіння променів Сонця, а також, що випромінювальна здатність  $\epsilon$  не залежить від температури поверхні. Припускаємо, що поверхня нагрівається лише від Сонця. Вважаємо, що обертання астероїда навколо своєї осі є набагато швидшим, ніж його обертання навколо Сонця. Вважаємо, що у астероїда немає нутацій. Початкова умова при цьому є періодичною:  $T(x, t + P) = T(x, t)$ .

Збираємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon \sigma T^4 \Big|_{z=0} - I(T)(1 - A) \\ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0 \\ T(Z, t + P) = T(Z, t) \end{array} \right. \quad (3)$$

Для системи необхідно зробити деякі спрощення для полегшення розв'язку: обезрозмірювання рівняння, та лінеаризацію граничної умови.

Припустимо, що  $T = T_0 + \tau$ , при чому  $\tau \ll T$ . Розкладаємо  $T$  через біном Ньютона, отримаємо:  $T^4 = T_0^4 + 4T_0^3\tau + 6T_0^2\tau^2 + 4T_0\tau^3 + \tau^4$ , оскільки  $\tau$  багато менше  $T$ , то останні 3 члени зникають, звідси отримаємо таку граничну умову:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon \sigma T_0^4 + 4T_0^3\tau - \Phi_0 \cos \omega t H(\cos \omega t) (1 - A)$$

Розкладемо  $\cos \omega t H(\cos \omega t)$  в ряд Фур'є і маємо:

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega t H(\cos \omega t) \cos n\omega t dt = -\frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)}$$

де  $n = 2k$ . Порахувавши  $A_n$  при  $n=0$  та  $n=1$ , маємо  $A_0 = \frac{1}{\pi}$  і  $A_1 = \frac{1}{2}$ .

Останнє спрощення це знерозмірювання рівняння та граничної умови. Знерозмірювання дозволяє зменшити кількість вільних параметрів, що значно полегшує дослідження задачі. Щоб зробити знерозмірювання, треба для кожної змінної в рівняннях обрати зручний масштаб, і виразити змінну в одиницях цього масштабу. За знерозмірену температуру природно взяти  $T = \tau * T_0$ . У якості знерозміреного часу зручно взяти фазу обертання астероїда  $t = \frac{\varphi}{\omega}$ . Це позбавить нас зайвих коефіцієнтів у виразах для освітленості, бо вони містять тригонометричні функції саме від  $\varphi$ . Нехай знерозмірювання координати задається формулою  $z = Z * L$ , де  $z$  — знерозмірена координата, а  $L$  — певний масштаб довжини, який нам ще треба

вибрати. Виразимо розмірні змінні через безрозмірні і підставимо їх у рівняння теплопровідності в системі рівнянь(3):

$$c\rho T_0\omega \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \kappa \frac{T_0}{L^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}$$

Найпростіший вигляд рівняння матиме, коли коефіцієнти в правій і лівій частинах скоротяться. А це й визначає масштаб L, який зручно використати для знерозмірювання довжини:

$$c\rho = \frac{\kappa}{L^2} \leftrightarrow L = \sqrt{\frac{\kappa}{c\rho\omega}} 2\pi$$

З таким L рівняння після скорочень набуде найпростішого можливого вигляду:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \quad (4)$$

Знерозміримо і граничну умову. Підставимо знерозміренні змінні до граничної умови. І очікуємо, що:

$$\epsilon\sigma T_0^4 = (1 - A)\Phi_0 \leftrightarrow T_0 = \sqrt[4]{\frac{(1-A)\Phi_0}{\epsilon\sigma}} \quad (5)$$

За такими умовами отримаємо:

$$\frac{\kappa T_0}{L(1 - A)\Phi_0} \frac{\partial \tau}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau^4 \Big|_{z=0} - \cos \omega t H(\cos \omega t)$$

де  $\frac{\kappa T_0}{L(1-A)\Phi_0} = \theta$  тепловий параметр. Перевіримо  $\theta$  на безрозмірність:

$$[\theta] = \frac{\frac{\text{Вт}}{\text{МК}} \text{К}}{\text{М} \frac{\text{Вт}}{\text{М}^2}} = \frac{\text{Вт} * \text{К} * \text{М}^2}{\text{М} * \text{К} * \text{М} * \text{Вт}} = 1$$

Тож тепер наша система рівнянь буде виглядати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \\ \theta \frac{\partial \tau}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau^4 \Big|_{z=0} - \alpha(\varphi) \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +\infty} = 0 \\ \tau(z, \varphi + P) = T(z, \varphi) \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{де } \alpha(\varphi) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \cos[2k\varphi]$$

## 1.2. Теплові хвилі

Розрахуємо спершу теплову хвилю в тепловій задачі першого роду без початкових умов:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \\ \tau(0, \varphi) = a \cos \varphi \end{cases}$$

Нехай  $\tau(z, \varphi) = f(z)g(\varphi)$ . Тоді застосовуємо метод розділення змінних і знаходимо часову частину:  $g(t) = C e^{\lambda \varphi}$ . За принципом симетрії Кюрі  $g(\varphi)$  має бути періодичним з періодом  $2\pi$ , тоді  $e^{\frac{2\pi\lambda}{\omega}} = 1$ . Позначимо, що  $\lambda = x + iy$ , тоді отримаємо, що:

$$e^{\frac{2\pi x}{\omega}} \left( \cos \frac{2\pi y}{\omega} + i \sin \frac{2\pi y}{\omega} \right) = 1 \Rightarrow x = 0 \quad y = k\omega \quad k \in \mathbb{Z}$$

Звідки знаходимо кутову частину:

$$g(\varphi) = e^{ik\varphi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Тепер рахуємо просторову частину. Розрахунок зводиться до рішення лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$f''(z) = i\varphi k f(z)$$

де  $f(z) = C e^{\mu z}$ . Підставляємо  $f(z)$  в рівняння і знаходимо, що:  $\mu = \pm \sqrt{\frac{i\varphi k}{z}}$

Застосовуючи формули Муавра, знаходимо  $\alpha$ :

$$\mu = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}}$$

Перевіряємо розв'язок:

$$\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

Відкидаємо корінь  $\frac{i+1}{\sqrt{2}}$  через відсутність теплових потоків з глибини метеороїда нескінченної глибини. В розділі 3.1 ми будемо розглядати метеороїд зі скінченною глибиною і застосуємо другий корінь. І збираємо весь розв'язок:

$$\tau(z, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\sqrt{\frac{n}{2}}z} \left( A_n \cos(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) + B_n \sin(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) \right) \quad (7)$$

Розраховуємо граничну умову, де  $B_n = 0$  для всіх  $n$ ,  $A_n = 0$  для всіх  $n \neq 1$  і  $A_1 = a$ :

$$\tau(0, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\omega\varphi) + B_n \sin(n\omega\varphi)) = a \cos \varphi$$

Тепер отримаємо остаточний розв'язок для  $\tau(z, t)$ :

$$\tau(z, \varphi) = a e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} \cos(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) \quad (8)$$

Підстановкою в рівняння перевіряємо, що розв'язок йому задовольняє:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = a e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} \sin(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = a e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} \sin(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z)$$

Перевіримо, що тепла хвиля є розв'язком початкового рівняння теплопровідності. Перевіряємо для одного члена  $\tau = \cos(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z}$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = n \sin(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \sqrt{\frac{n}{2}} \sin\left(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z\right) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} - \sqrt{\frac{n}{2}} \cos(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z}$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = n \sin(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z}$$

Теплові хвилі є частинним розв'язком рівняння теплопровідності з нульовим тепловим потоком на глибині з періодичністю  $2\pi$ . Але цей розв'язок

ще не задовольняє граничній умові на поверхні. Побудуємо графік теплових хвиль:

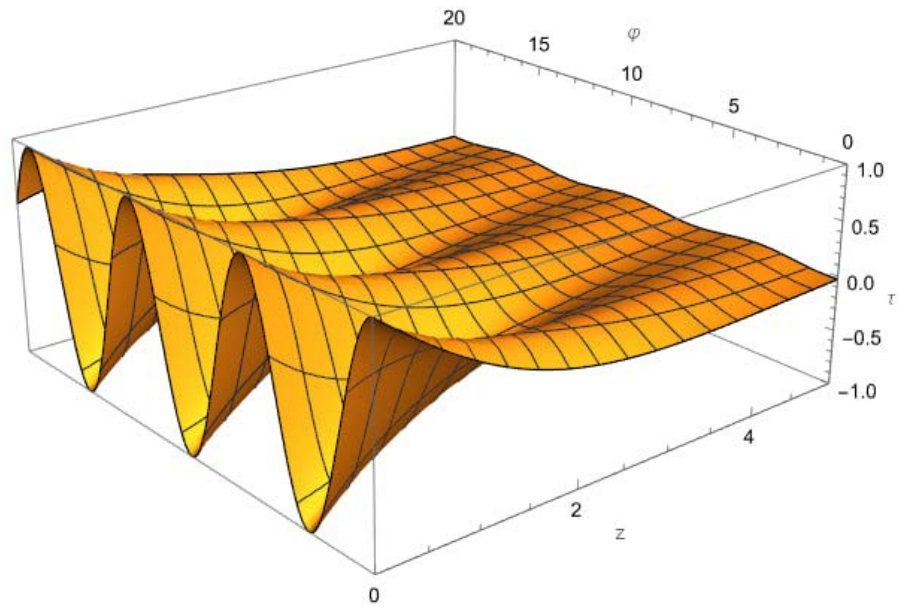


Рисунок 6. Графік залежності  $\tau(z, \varphi)$ .

Розглянемо фізичний зміст теплових хвиль. Косинусоїдальна і синусоїдальна складові представляють біжучі хвилі, які описують розподіл температури по простору. Таким чином, теплові хвилі вказують на те, як тепло поширюється і розсіюється всередині метеороїда, зменшуючи свою інтенсивність з плином часу.

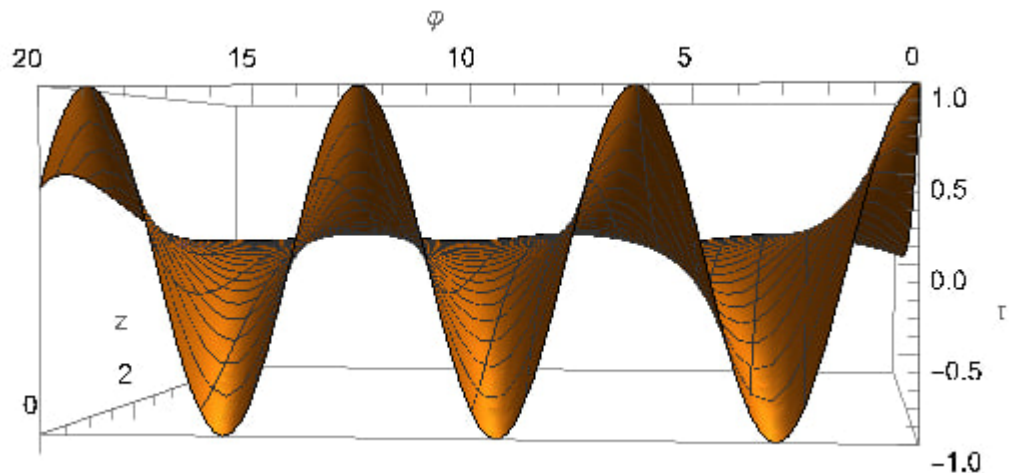


Рисунок 7. Зріз графіку з площини  $\tau\varphi$ . Графік слід читати зліва направо. Вісь абсцис—вісь часової змінної, вісь аплікату—вісь  $\tau$ .

З площини  $\tau\varphi$  бачимо біжучі хвилі синусоїди зі швидкістю  $c = \sqrt{\frac{n}{2}}$  має

період  $T = \frac{2\pi}{\varphi}$  і довжиною хвилі  $\lambda = \sqrt{\frac{2}{n}} 2\pi$ .

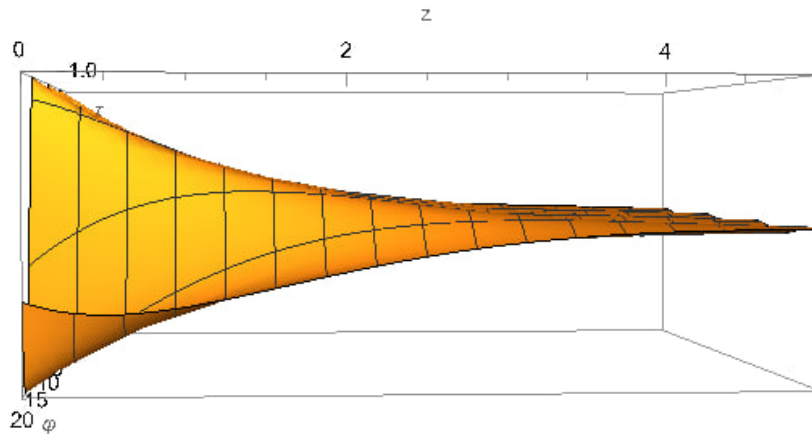


Рисунок 8. Зріз графіку з площини  $\tau z$ . Вісь абсцис – вісь координати  $z$ , вісь аплікату – вісь  $\tau$

З площини  $\varphi t$  бачимо спадаючу експоненту  $e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z}$ , глибину хвилі. Експоненційний множник вказує на згасання теплової хвилі з часом, що означає поступове зменшення амплітуди температурних коливань. На довжині хвилі згасає в  $e^{2\pi}$  разів.

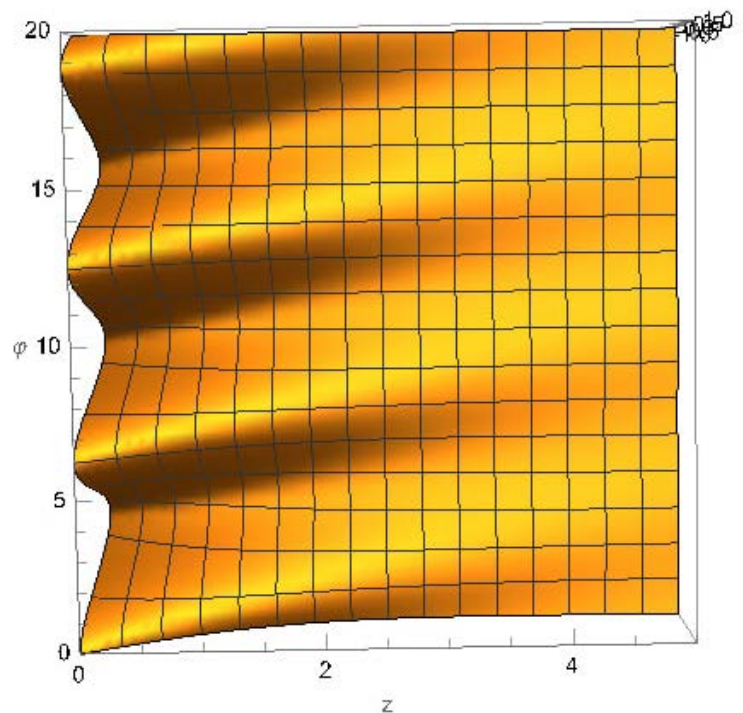


Рисунок 9. Зріз графіку з площини  $\varphi z$ .

Хребти, що ми бачимо на графіку уходять в глибину з затримкою в часі.

### 1.3. Розв'язок лінеаризованого рівняння теплопровідності у вигляді теплових хвиль

Розв'язуємо знерозмірену лінеаризовану систему рівнянь з параграфу 1.1 (6):

$$\tau(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z) + b_n \sin(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z)) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} \quad (9)$$

Перейдемо до визначення коефіцієнтів ряду Фур'є з граничної умови

$$\theta \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau^4 \Big|_{z=0} - \alpha(\varphi) \quad (10)$$

$$\text{де } \alpha(\varphi) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \cos[(2k+1)\varphi]$$

Підставляємо загальний розв'язок рівняння теплопровідності (9) в граничну умову:

$$\begin{aligned} & \theta \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} (a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi - a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi) \\ &= \frac{4}{\sqrt[4]{\pi^3}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) - \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\varphi \end{aligned}$$

Отримали рівняння з якого будемо виражати коефіцієнти  $a_n$  та  $b_n$ .

Підставляємо в рівняння  $n = 0$  і отримаємо, що синуси зникають, косинуси перетворюються в одиницю і залишається  $a_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$ . При  $n \neq 0$  отримаємо

систему з двох рівнянь з двома змінними  $a_n$  та  $b_n$ , де  $A_n = \frac{2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}$  при

$n = 2k$ :

$$\begin{cases} \theta \sqrt{\frac{n}{2}} a_n - \theta \sqrt{\frac{n}{2}} b_n = \frac{4}{\sqrt[4]{\pi}} b_n \\ -\theta \sqrt{\frac{n}{2}} b_n - \theta \sqrt{\frac{n}{2}} a_n = \frac{4}{\sqrt[4]{\pi}} a_n - A_n \end{cases}$$

Ділимо перше рівняння на  $\theta \sqrt{\frac{n}{2}}$  і підставляємо у друге рівняння, звідки отримаємо:

$$\begin{cases} b_n = \frac{\frac{A_n}{\theta} \sqrt{\frac{2}{n}}}{1 + \left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi^3} \theta} \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2} \\ a_n = \frac{\frac{A_n}{\theta} \sqrt{\frac{2}{n}} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi^3} \theta} \sqrt{\frac{2}{n}}\right)}{1 + \left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi^3} \theta} \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2} \end{cases} \quad (11)$$

Підставимо  $n = 1$  в перше рівняння і отримаємо:

$$b_1 = \frac{\frac{\theta}{2} \sqrt{2}}{\theta^2 + (\theta + 4\tau_0^4 \sqrt{2})^2} \quad (12)$$

Побудуємо графік залежності  $\tau(z, \varphi)$  при різних  $\theta$ :

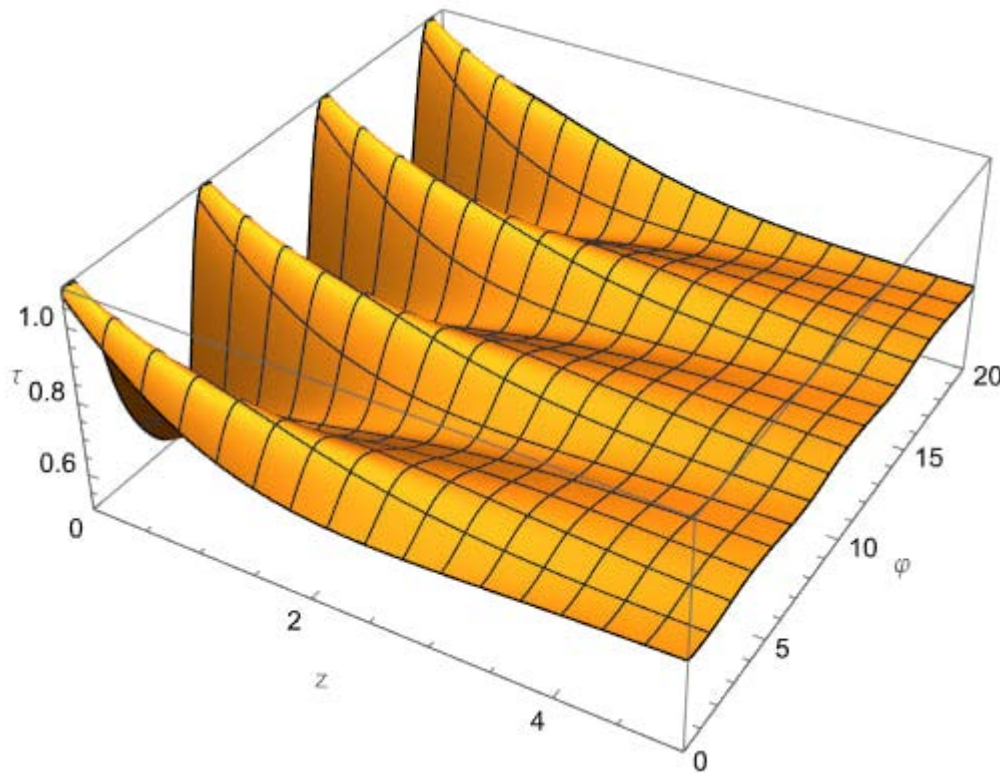


Рисунок 10. Графік залежності  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 1$

Бачимо синусоїдальні біжучі хвилі, що затухають з глибиною за експонентою.

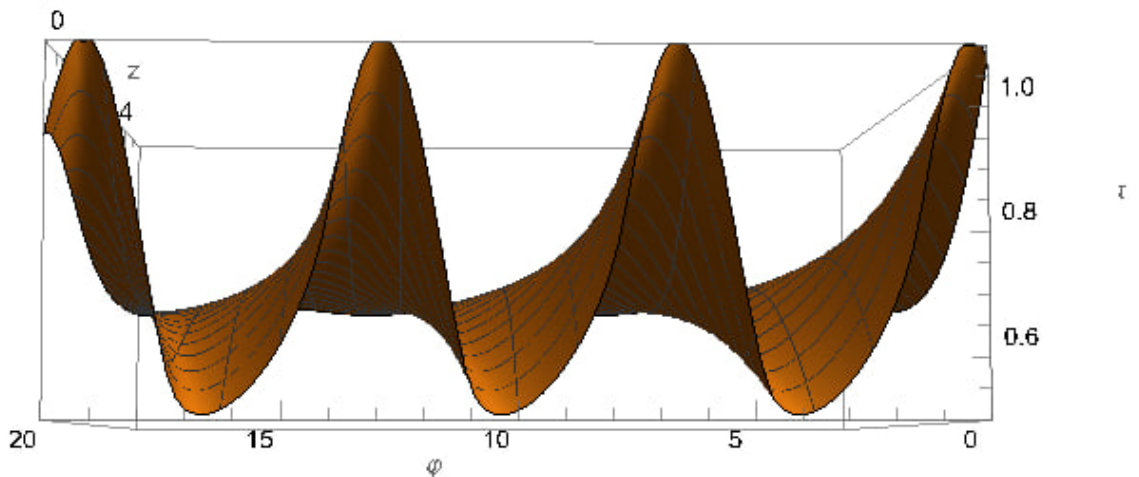


Рисунок 11. Зріз графіку графіку залежності  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 1$  з площини  $\tau\varphi$  Читати графік слід справа наліво.

Бачимо синусоїдальну хвилю, де максимум це захід Сонця, а мінімум це світанок. Після максимуму йде повільне спадання, що означає повільне охолодження поверхні вночі через велику теплову інерцію ґрунту. А після мінімуму, в першій половині дня, йде швидке зростання, через нагрів поверхні, але максимальна температура досягає свого максимуму після півдня.

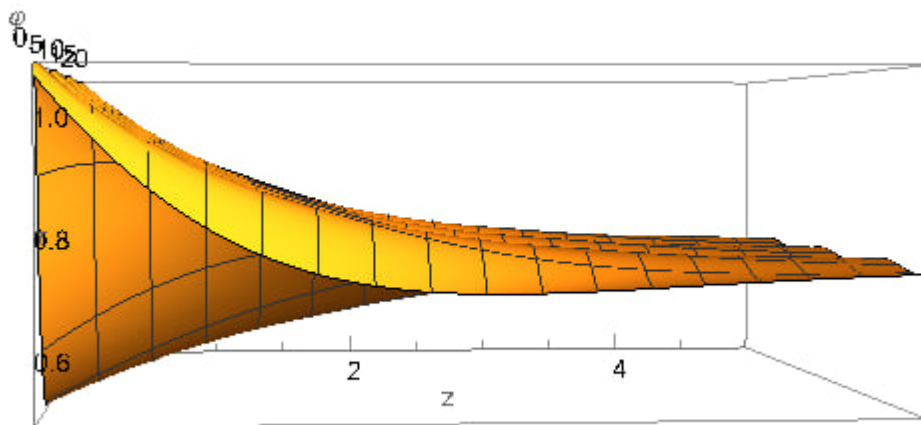


Рисунок 12. Зріз графіку залежності  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 1$  з площини  $\varphi z$ .

Бачимо синусоїду, що спадає за експонентою. Чим ближче до поверхні метеороїда, тим більше амплітуда коливань температури. На поверхні

амплітуда коливань максимальна, а на дуже великій глибині, амплітуда коливань прямує до нуля.

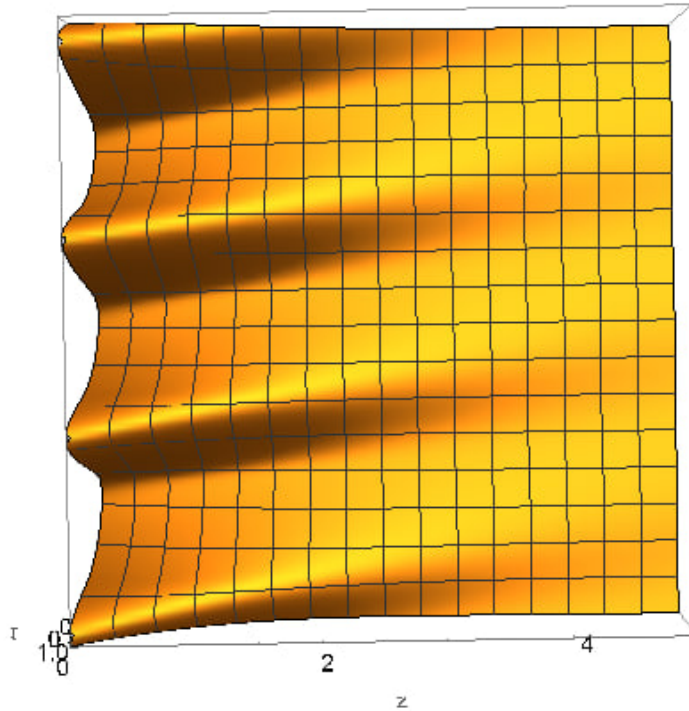


Рисунок 13. Зріз графіку залежності  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 1$  з площини  $\varphi t$

Бачимо теплові хвилі, що розповсюджуються з часом в глибину тіла. Це ми бачимо в гребнях та провалах хвиль, які зі збільшенням часу уходять на більші глибини. Але при цьому ці теплові хвилі дуже швидко затухають, так що кожна хвиля не встигає пройти свою повну довжину, зберігши свою амплітуду. На цьому графіку можна побачити такий нетривіальний факт, що при максимальній температурі на поверхні, є точка в глибині, де температура виявиться мінімальною, але якщо ми просунемося ще вдвічі глибше, то ми знову помітимо максимум теплової хвилі.

Побудуємо графік залежності  $\tau(z, \varphi)$  при параметрі  $\theta = 10$ . Графік побудований на просторі, на якому був збудований графік  $\tau(z, \varphi)$  при  $\theta = 1$ . Так наглядно видно, як сильно змінилася амплітуда теплових хвиль, в порівнянні з минулим графіком.

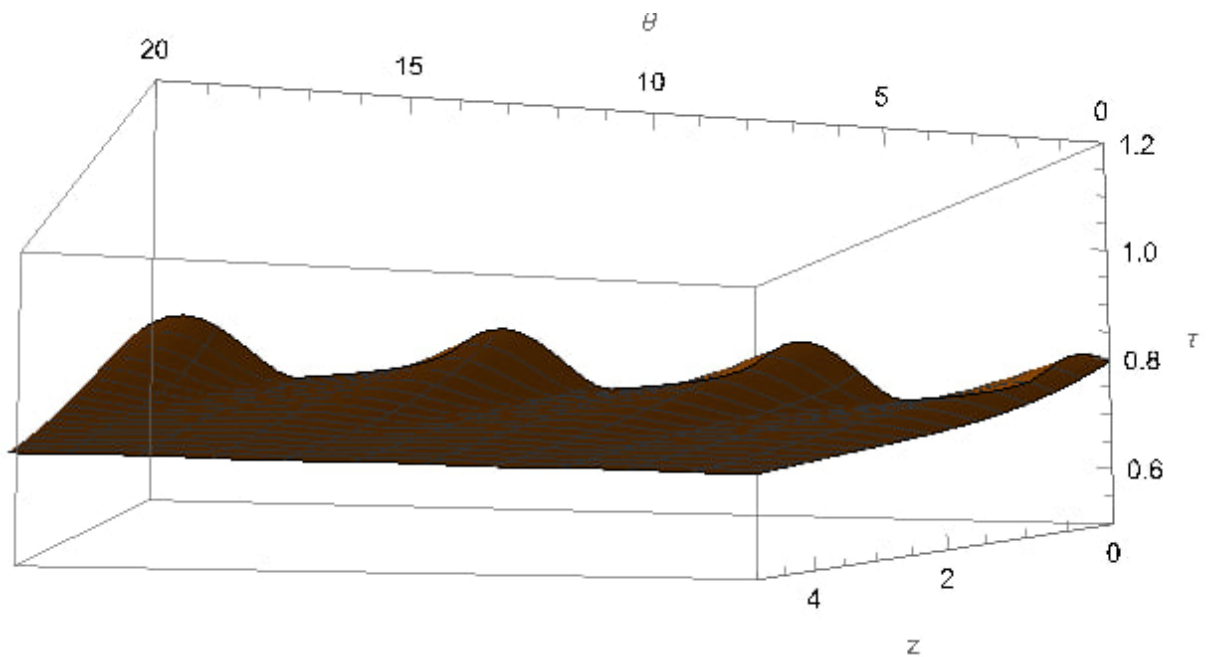


Рисунок 14. Зріз графіку залежності  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 10$  з площини  $\varphi\tau$  за розмірностями сітки минулого графіку.

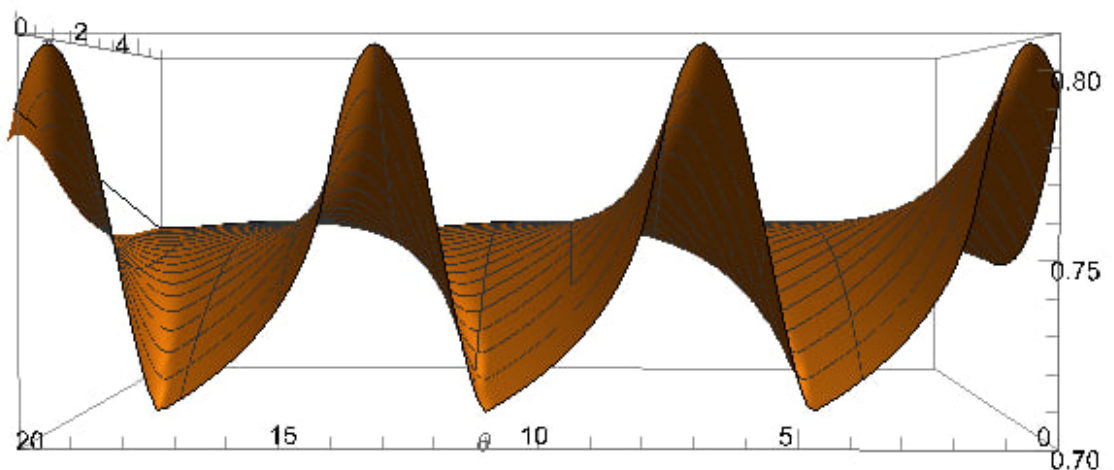


Рисунок 15. Зріз графіку  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 10$ . Вісь аплікату-вісь  $\tau$ , вісь абсцис-вісь  $\varphi$

На графіках бачимо, як сильно змінилася амплітуда теплових хвиль, але форма біжучих хвиль залишилась такою ж самою. Температура ґрунту через теплову інерцію повільно спадає вночі і досягає свого мінімуму вже перед світанком, а після світанку дуже стрімко зростає і досягає максимального значення, через туж теплову інерцію, вже після полудня.

Цікаво побудувати цю ж залежність при дуже маленьких значеннях параметру  $\theta$ :

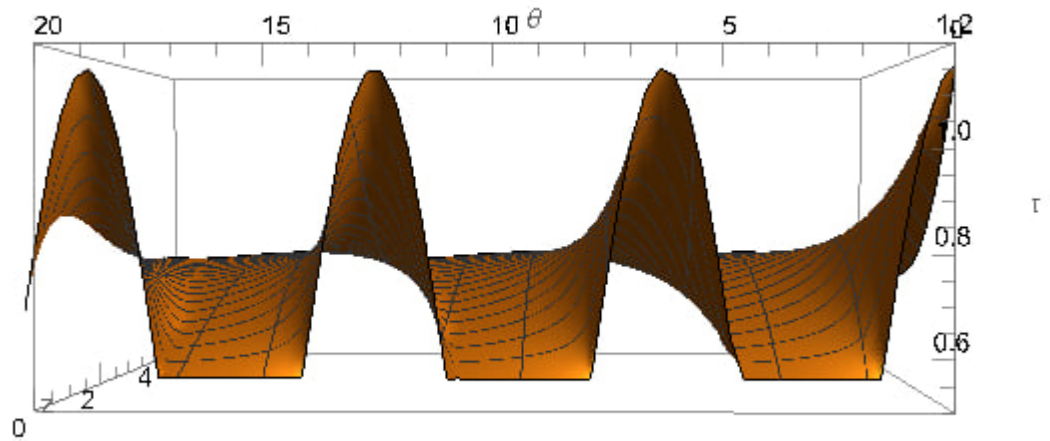


Рисунок 16. Зріз графіку  $\tau(z, \varphi)$  від  $\theta = 0,001$

Бачимо, що при дуже малих значеннях теплового параметра, температура ґрунту дуже стрімко зростає після світанку, і після заходу сонця, стрімко падає. При чому всю ніч температура залишається сталою аж до світанку.

## Розділ 2. Розрахунок ефектів Ярківського і Пойнтінга–Робертсона

### 2.1. Світловий тиск

Кожен фотон несе енергію  $E_1 = h\nu$  та імпульс  $p_1 = \frac{h\nu}{c}$ , де  $h$  — стала Планка, а  $\nu$  — частота світлової хвилі. Тому для кожного фотона виконується рівність  $p_1 = \frac{E}{c}$ . Підсумовуючи цю рівність за великою кількістю фотонів, отримуємо  $p = \frac{E}{c}$ , де  $p$  — сумарний імпульс всіх фотонів, а  $E$  — їхня сумарна енергія. Поділимо цей вираз на час  $t$ , отримаємо

$$F = \frac{N}{c}. \quad (13)$$

Таким чином ми отримали силу, яку створює пучок паралельних фотонів, випромінених з поверхні. Ця сила дорівнює потужності випромінювання, поділеній на швидкість світла. При цьому напрямки фотонів мають бути однаковими, однак фотони з поверхні випромінюються під різними кутами. В такому випадку необхідно додавати за векторами.

Вважатимемо, що потужність розподілена за законом Ламберта:

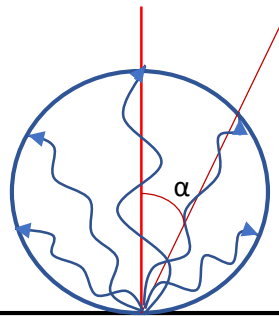


Рисунок 17. Ілюстрація випромінювання за законом Ламберта. Синє коло є індикатрисою випромінювання.

де  $\alpha$  — кут променя з нормаллю. Значить, у тілесний кут  $d\Omega$  випромінюється потужність  $dN = C \cos\alpha d\Omega$ , де  $C$  — константа. За рівнянням (13) ця потужність створює силу  $dF = \frac{dN}{c} = \frac{C \cos\alpha d\Omega}{c}$ . Однак для кожного тілесного кута ця сила спрямована в своєму напрямку.

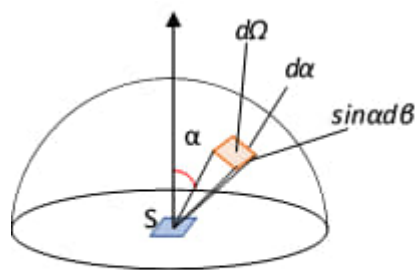


Рисунок 18. Ілюстрація виразу для тілесного кута

Дотичні до поверхні складові сили взаємно знищуються завдяки обертальній симетрії індикатриси випромінювання відносно нормалі, нормальні компоненти  $dF_n = dF \cos \alpha = \frac{C \cos^2 \alpha d\Omega}{c}$  додаються. В результаті сумарна сила тиску випроміненого поверхнею метеороїда світла дорівнює

$$F = \frac{C}{c} \int \cos^2 \alpha d\Omega \quad (14)$$

Азимутальний кут на сфері позначимо як  $\beta$ , тоді тілесний кут буде виражатися як  $d\Omega = d\alpha d\beta \sin \alpha$ . В результаті маємо

$$F = \frac{C}{c} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos^2 \alpha^2 d\alpha = \frac{2\pi C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \quad (15)$$

Порахувавши інтеграл маємо:

$$F = \frac{2\pi C}{3c}$$

Для розрахунку константи  $C$  застосуємо закон Стефана–Больцмана  $N = \epsilon \sigma T^4 S$ , де  $\epsilon$  – випромінювальна здатність.

$$\epsilon \sigma T^4 S = \int C \cos \alpha d\Omega = C\pi$$

Розрахувавши  $C$  маємо:

$$F = \frac{2\epsilon \sigma T^4 S}{3c} \quad (16)$$

## 2.2. Розрахунок ефекту Ярковського в лінійній тепловій моделі

Ефект Ярковського виникає внаслідок анізотропного випромінювання теплової енергії з поверхні обертового тіла [5]. Для кількісного опису цього

ефекту нам потрібно усереднити силу теплового випромінювання за кутом обертання.

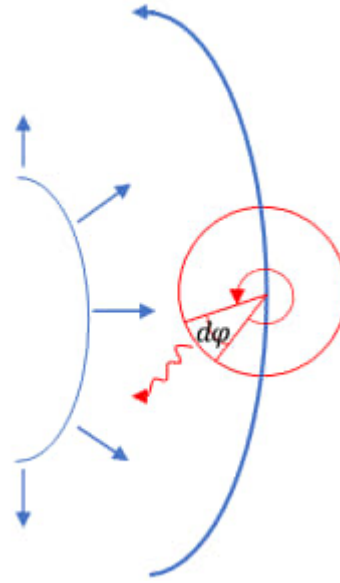


Рисунок 19. Ілюстрація руху астероїда з урахуванням кута обертання

$$F_{\text{Ярковського}} = \langle F \sin \varphi \rangle_{\varphi} = \frac{2S\epsilon\sigma T^4}{3c} \langle T^4 \sin \varphi d\varphi \rangle_{\varphi} \quad (17)$$

Температуру  $T^4$  можна лінеаризувати:

$$T|_{z=0} = T_0 \tau|_{z=0}$$

$$\tau|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

$$\tau^4|_{z=0} \approx \tau_0^4 + 4\tau_0^3(\tau - \tau_0)|_{z=0} = \tau_0^4 + 4\tau_0^3 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

Підставимо цей лінеаризований вираз для  $\tau^4|_{z=0}$  у раніше виведену формулу (16) для ефекту Ярковського:

$$F_{\text{Ярковського}} = \frac{2S\epsilon\sigma}{3c} T_0^4 \langle \tau^4|_{z=0} \sin \varphi \rangle_{\varphi}$$

Підставляємо вираз  $T_0 = \sqrt[4]{\frac{(1-A)\Phi_0}{\epsilon\sigma}}$  (5) отриманий в підрозділі 1.1 і вираз для  $\tau^4|_{z=0}$ . Отримаємо:

$$F_{\text{Ярковського}} = \frac{2S(1-A)\Phi_0}{3c} \langle (\tau_0^4 + 4\tau_0^3 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \sin n\varphi) \rangle_{\varphi}$$

Застосовуємо тригонометричні формули для приведення добутків в суму і усереднюємо, при цьому зникають усі члени, окрім  $b_1$ , отримаємо:

$$F_{\text{Ярковського}} = \frac{4S(1-A)\Phi_0}{3c^4\sqrt{\pi^3}} b_1$$

Підставимо  $b_1$  і отримаємо кінцеву формулу для ефекту Ярковського:

$$F_{\text{Ярковського}} = \frac{4S(1-A)\Phi_0}{3c^4\sqrt{\pi^3}} \frac{\frac{\theta}{2}\sqrt{2}}{\theta^2 + (\theta + 4\tau_0^4\sqrt{2})^2} \quad (18)$$

Виразимо через силу Ярковського знерозмірений тиск Ярковського (детальніше виведення описано в розділі 3.1) і побудуємо графіки залежності  $p(\theta)$  при різних значеннях  $\theta$ . Зауважимо, що значення тиску за параметром  $\theta \ll 1$  виходять за межі нашої лінійної моделі. Ці значення ми використали для повноти графіку і його аналізу, але вони можуть давати похибку в декілька разів.

$$p = \frac{F_{\text{Ярковського}}}{F_0} = \frac{4\tau_0^3}{3} * \frac{\frac{\theta}{2}\sqrt{2}}{\theta^2 + (\theta + 4\tau_0^4\sqrt{2})^2} \quad (19)$$

Для  $\theta \ll 1$  в знаменнику зникають члени, пропорційні  $\theta$  і  $\theta^2$ , і залишається тільки константа. Таким чином, весь вираз перетворюється на:

$$p \approx \frac{\theta^4\sqrt{\pi^3}}{24\sqrt{2}}$$

Якщо ж  $\theta \gg 1$ , то старшим членом у знаменнику є квадратичний, і рештою можна знехтувати у порівнянні з ним:

$$p \approx \frac{\sqrt{2}}{3\theta^4\sqrt{\theta^3}}$$

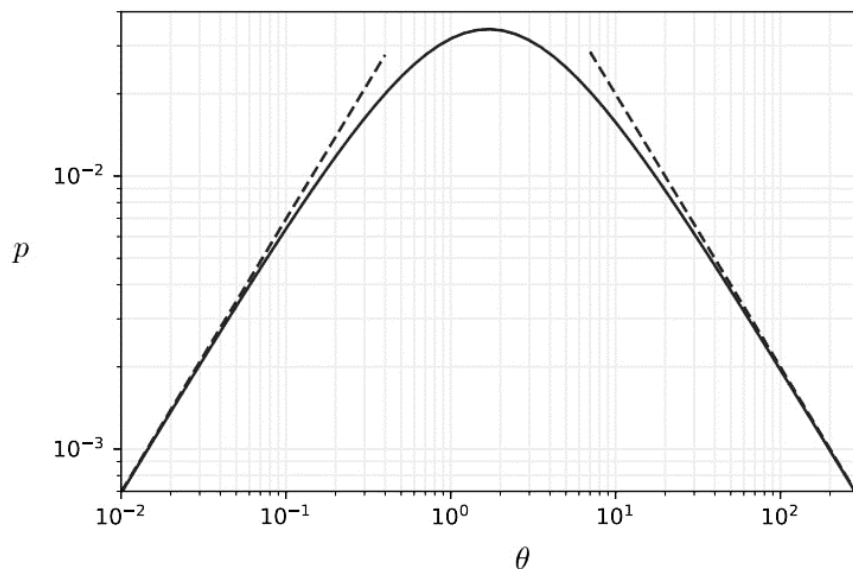


Рисунок 20. Графік залежності сили Ярковського від параметру  $\theta$  в логарифмічному масштабі.

Поведінку  $p(\theta)$  в лінійній моделі проілюстровано на Рисунку 20. Пунктиром зображені дві асимптоти, задані рівняннями асимптот, які в логарифмічному масштабі виглядають як симетрично розташовані прямі. Сама ж кінцева формула лінійної моделі плавно вигинається між двома асимптотами, зливаючись з ними на плюс і мінус нескінченності, уходячи в 0, а максимуму сягаючи для  $\theta \sim 1$ .

Аналізуючи графік, ми бачимо, що на початку сили Ярковського швидко зростає, але з часом затухає до нуля. Права асимптотика ( $F_{\text{Ярковського}} \rightarrow 0$   $\varphi \rightarrow \infty$ ): Великі  $\theta$  означають таке швидке обертання астероїда, що температура кожного його елемента поверхні майже не встигає змінитись протягом одного оберту. В результаті ранкова й вечірня півкулі астероїда мають приблизно однакові температури. Тож ефект Ярковського зменшується до нуля через те, що температура однакова по широті, тому випромінювання з поверхні відбувається у всіх напрямках одночасно. Ліва асимптотика ( $F_{\text{Ярковського}} \rightarrow 0$   $\varphi \rightarrow 0$ ): за малих  $\theta$  астероїд обертається так повільно, що кожна ділянка його поверхні майже миттєво встигає набути теплової рівноваги з падаючим сонячним випромінюванням. При цьому точки, розташовані симетрично відносно полудня, мають майже однакові температури. Тож ефект

Ярковського також нульовий, оскільки температура поверхні майже миттєво підлаштовується під освітлення. Таким чином, ефект Ярковського є максимальним у проміжному інтервалі  $\varphi \sim 1$ , де температурний градієнт є найбільш вираженим, оскільки обертання астероїда вже зміщує на захід область максимального нагріву, але ще не призводить до рівномірного нагріву всій поверхні астероїда. Але навіть в цьому випадку світловий тиск досягає максимальних значень 0.03–0.04. Тобто асиметрія випромінювання між західною і східною півкулями навіть в максимумі відносно мала. Побудована нами лінійна модель будувалась в припущенні  $\theta \gg 1$ . Так що асимптота, побудована в протилежному граничному випадку, взагалі знаходиться поза межами застосовності нашої моделі, і може досить значущо відрізнитись від реальних результатів.

### 2.3. Розрахунок ефекту Пойнтінга–Робертсона

Розглядаємо ефект Пойнтінга–Робертсона в системі відліку пов'язаній з астероїдом і рахуємо кут аберації  $\gamma$  через рух астероїда.

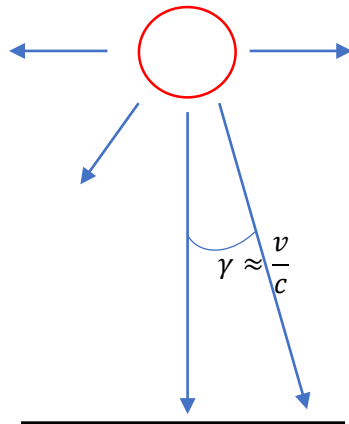


Рисунок 21. Ілюстрація аберації світла для ефекту Пойнтінга–Робертсона в системі відліку, пов'язаній з метеороїдом.

$$F_{\text{Гальмування}} = \frac{\Phi S v}{c} \gamma = \frac{\Phi S v}{c^2}$$

$$F_{\text{Пойнтінг-Робертсон}} = \frac{\Phi S v}{c^2} \langle \cos \varphi H(\cos \varphi) \rangle = \frac{\Phi S v}{\pi c^2} \quad (20)$$

Через світловий потік розраховуємо складову сили вздовж орбіти, яку спричиняють падаючі фотони на одиницю поверхні. Оскільки ми працюємо з елементом поверхні, ми рахуємо середній світловий потік і отримуємо середню силу. В наслідок усереднення отримуємо коефіцієнт  $\frac{1}{\pi}$ .

За порядком величини в  $\frac{c}{v}$  разів менше  $\sim 10^{-4}$  ніж повна сила світлового тиску від сонця, натомість як ефект Ярковського в максимумі в  $10^{-2}$  разів менше за силу світлового тиску. Тобто ефект Ярковського сильніше для астероїдів з притомними розмірами і притомними тепловими параметрами. Однак для дуже малих метеороїдів ефект Ярковського може спадати через наскрізні світлові потоки.

### Розділ 3. Теплофізична модель метеороїда і поєднання ефектів Ярковського і Пойнтінга–Робертсона

#### 3.1. Розв’язок одновимірного лінеаризованого рівняння теплопровідності для метеороїда скінченних розмірів

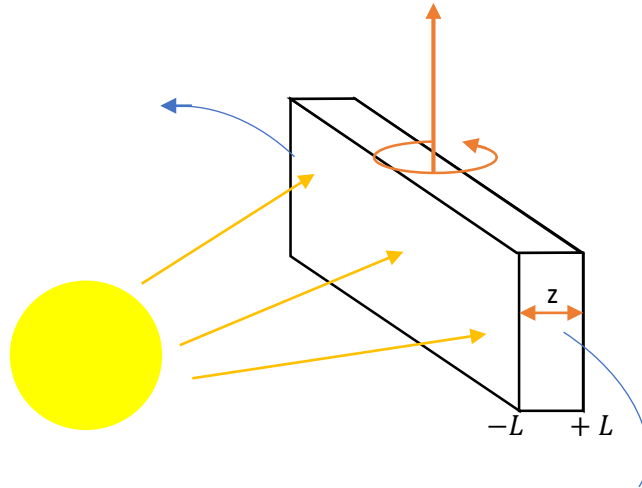


Рисунок 22. Ілюстрація метеороїда у вигляді пластини. Ілюстрація граничних умов.

В попередніх розділах ми розв’язували одновимірну задачу на метеороїді нескінченної глибини. Тепер ми хочемо промодельовати метеороїд скінченних розмірів[8][11]. Ми моделюємо метеороїд з одновимірною теплопровідністю через скінченних розмір, що фізично могло б реалізовуватись для астероїда у формі плити, яка обертається. Ми розуміємо, що ця задача не є абсолютно точною, але сподіваємось, що це буде хороше наближення за порядком величини, яке ми плануємо перевірити і уточнити в нашій наступній роботі, де ця задача буде моделюватися для сферичних астероїдів за допомогою сферичних функцій і для астероїдів ще складніших форм шляхом чисельного моделювання задач теплопровідності в їхньому об’ємі. Поки що розв’язуємо задачу, яка проілюстрована на Рисунку 10. Тут плита обертається навколо осі, яка перпендикулярна орбіті астероїда. Сонце підсвічує цю плиту. Температура залежить тільки від координати  $z$ . Ми обираємо вісь  $z$  так, щоб її нуль знаходився посередині плити, і товщина плити становить  $2l$  так, що плита

простягається по осі  $z$  від  $-L$  до  $+L$ . Ці координати потребують обезрозмірення, тому візьмемо  $l = \frac{L}{L_0}$ , де  $L_0$  це довжина теплової хвилі. Тому наші граничні умови будуть задаватися в точках  $-l$  та  $+l$ .

Утворюємо нову систему рівнянь теплопровідності. Майже все залишається як було, але замість нульового теплового потоку на глибині з'явилась друга границя. На цій другій границі освітленість зсунута за фазою на  $\pi$ . Це змінює знаки непарних членів ряду Тейлора в освітленості, яку ми розкладали за рядами в параграфі 1.1. Нас не має дивувати, що  $\tau_0$  не змінилося. Раніше у нас тепловий потік підходив тільки з одного боку, але й охолодження йшло тільки в один бік, тепер тепловий потік підходить з двох боків, але й охолодження йде з двох боків. Так що середня температура за якою досягається рівновага між середнім тепловим потоком, що приходить і випромінюванням одна і та ж сама. Система рівнянь вже є лінеаризованою і знерозміреною. Ті наближення, що ми робили раніше, залишаються в цій системі рівнянь.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \\ \theta \frac{\partial \tau}{\partial z} \Big|_{z=l} = -4\tau_0^3 (\tau - \tau_0) \Big|_{z=l} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n \cos n\varphi \\ -\theta \frac{\partial \tau}{\partial z} \Big|_{z=-l} = -4\tau_0^3 (\tau - \tau_0) \Big|_{z=-l} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n \cos n\varphi \\ \tau \Big|_{\varphi+2\pi} = \tau \Big|_{\varphi} \end{array} \right. \quad (21)$$

Розв'язок шукаємо у вигляді біжучих хвиль, що біжать вглибину і назад. Для цього треба використати формулу (9) з розділу 1.3. Ця формула для теплових хвиль застосовна для метеороїда нескінченної глибини і не відповідає початковій умови. Тому підбираємо коефіцієнти, використовуючи другий комплексний розв'язок, який ми раніше відкинули (підрозділ 1.2) і отримаємо:

$$\tau = \tau_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\left(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z\right) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} + b_n \sin\left(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z\right) e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}z} + c_n \cos\left(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z\right) e^{\sqrt{\frac{n}{2}}z} + d_n \sin\left(n\varphi - \sqrt{\frac{n}{2}}z\right) e^{\sqrt{\frac{n}{2}}z}] \quad (22)$$

Підставляємо це рівняння (22) в дві граничні умови з системи (21) і отримуємо два рівняння між рядами Фур'є. Вони дорівнюють один одному тоді і тільки тоді, коли вони дорівнюють один одному почлено, тобто всі коефіцієнти перед однаковими синусами і косинусами збігаються. І тоді для кожного  $n$  отримаємо наступні чотири рівняння:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} - 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & + b_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & + c_n \theta e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & + d_n \theta e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & a_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & + b_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & + c_n \theta e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & + d_n \theta e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} - 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\ & = A_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & a_n \theta e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& + b_n \theta e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& + c_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} - 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& + d_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & a_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& + b_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( -\cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} - 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& + c_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& + d_n \theta e^{\sqrt{\frac{n}{2}}l} \left[ \left( \cos\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right) \sqrt{\frac{n}{2}} + 4\tau_0^3 \sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}}l\right) \right] \\
& = A_n (-1)^n
\end{aligned}$$

Бачимо, що нескінченна система рівнянь розгалужилася на під системи для кожного  $n$  по чотири рівняння в кожній, які не змішуються одна з одною. Розв'язуємо цю систему рівнянь за допомогою Wolfram Mathematica. Коли ми рахуємо зараз ефект Ярковського то, як і раніше, внесок будуть давати тільки члени, у яких  $n=1$ . Саме тому тільки їх ми і намагаємося отримати:

$$a_1 = -c_1 =$$

$$= \frac{e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi^3}} \left[ (-8 + \sqrt{2}\sqrt{\pi^3}\theta + e^{\sqrt{2}l}(8 + \sqrt{2}\sqrt{\pi^3}\theta)) \cos\frac{l}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(-1 + e^{\sqrt{2}l})\sqrt{\pi^3}\theta \sin\frac{l}{\sqrt{2}} \right]}{4(16 + 16e^{2\sqrt{2}l} - 4\sqrt{2}\sqrt{\pi^3}\theta + 4\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}l}\sqrt{\pi^3}\theta + \sqrt{\pi^2}\theta^2 + e^{2\sqrt{2}l}\sqrt{\pi^3}\theta^2 + 2e^{\sqrt{2}l}(-16 + \sqrt{\pi^3}\theta^2) \cos\sqrt{2}l + 8\sqrt{2}e^{\sqrt{2}l}\sqrt{\pi^3}\theta \sin\sqrt{2}l}$$

$$b_1 = -d_1 =$$

$$= \frac{e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi^3}} \left[ \sqrt{2}(-1 + e^{\sqrt{2}l})\sqrt{\pi^3}\theta \cos\frac{l}{\sqrt{2}} + (8 - \sqrt{2}\sqrt{\pi^3}\theta + e^{\sqrt{2}l}(8 + \sqrt{2}\sqrt{\pi^3}\theta)) \sin\frac{l}{\sqrt{2}} \right]}{4(16 + 16e^{2\sqrt{2}l} - 4\sqrt{2}\sqrt{\pi^3}\theta + 4\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}l}\sqrt{\pi^3}\theta + \sqrt{\pi^2}\theta^2 + e^{2\sqrt{2}l}\sqrt{\pi^3}\theta^2 + 2e^{\sqrt{2}l}(-16 + \sqrt{\pi^3}\theta^2) \cos\sqrt{2}l + 8\sqrt{2}e^{\sqrt{2}l}\sqrt{\pi^3}\theta \sin\sqrt{2}l}$$

### 3.2. Сили світлового тиску для метеороїда скінченних розмірів

Як ми показали раніше, що сила тиску випромінювання світла на ділянку поверхні задається формулою:

$$F_0 = \frac{S(1-A)\Phi_0}{c}$$

Записуємо формулу для сили Янковського. Вона отримується додаванням двох поверхонь з протилежними знаками, проектуванням сили на напрямок орбіти астероїда і подальшим усередненням за кутом:

$$F_{\text{Янковського}} = \frac{2F_0T^4}{3} = \frac{2}{3c}S\epsilon\sigma(1-A)\Phi_0\langle[T^4(-l) - T^4(l)] \sin \varphi\rangle_\varphi$$

Обезрозмірюємо температуру: нехай  $T^4 = \frac{(1-A)\Phi_0}{\epsilon\sigma}\tau^4$ , тоді маємо:

$$F_{\text{Янковського}} = \frac{2}{3c}S(1-A)\Phi_0\langle[\tau^4(-l) - \tau^4(l)] \sin \varphi\rangle_\varphi$$

Виражаємо знерозмірений тиск Янковського:

$$p = \frac{F_{\text{Янковського}}}{F_0}$$

Лінеаризуємо  $\tau^4$ :  $[\tau^4(-l) - \tau^4(l)] = [\tau_0^4 + 4\tau_0^3(\tau(-l) - \tau_0) - \tau_0^4 - 4\tau_0^3(\tau(l) - \tau_0)] = 4\tau_0^3[\tau(-l) - \tau(l)]$  і підставляємо  $\tau$  на обох поверхнях у вигляді теплових хвиль у вираз для тиску Янковського. Спрощуємо формулу за допомогою гіперболічних функцій і формул для суми аргументів тригонометричних функцій, отримуємо вираз:

$$p = \frac{8\tau_0^3}{3} \left[ \sin \frac{l}{\sqrt{2}} \cosh \frac{l}{\sqrt{2}} (c_1 - a_1) + \cos \frac{l}{\sqrt{2}} \sinh \frac{l}{\sqrt{2}} (b_1 - d_1) \right]$$

Підставляємо коефіцієнти  $a_1, b_1, c_1$  і  $d_1$  у формулу для тиску і отримуємо остаточну формулу для  $p$ .

$$p = \frac{\sqrt{2}^4 \sqrt{\pi^3} \theta e^{-\sqrt{2}l} (-1 + e^{2\sqrt{2}l} - 2e^{\sqrt{2}l} \sin \sqrt{2}l)}{3((-16 + \sqrt[4]{\pi^3} \theta^2) \cos \sqrt{2}l + (16 + \sqrt{\pi^3} \theta^2) \cosh \sqrt{2}l + 4\sqrt{2}^4 \sqrt{\pi^3} \theta (\sin \sqrt{2}l + \sinh \sqrt{2}l))}$$

Дослідимо як ця формула поводиться. Будуємо три графіки:

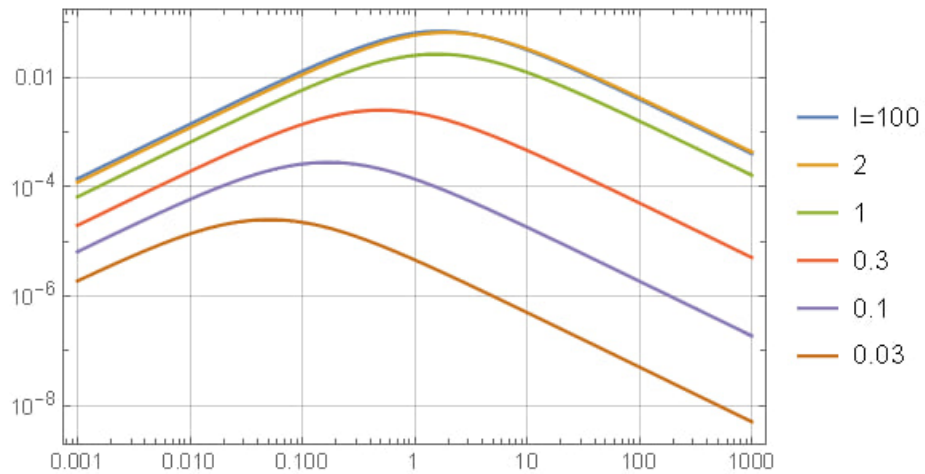


Рисунок 23. Залежність  $p$  від  $\theta$  при фіксованому  $l$ . Горизонтальна вісь—вісь  $\theta$ , вертикальна вісь—вісь  $p$

Бачимо що коли  $l$  велике, то графік практично не відрізняється від того графіку, що ми будували раніше для ефекту Ярковського, але він є вдвічі більше, це очікувано, бо тепер у нас дві поверхні. Для великих  $l$  графіки збігаються. Для малих  $l$  сила Ярковського падає тому, що тепер астероїд такий тонкий, що теплова хвиля проходить скрізь нього. В наслідок чого маємо однакові температури на лівій та правій границях, через це немає градієнта температур, то ж і немає і ефекту Ярковського. Відзначимо, що на цьому графіку наша лінійна теорія правильно описує область для великих параметрів  $\theta$ , тобто праву частину графіку. Але в лівій частині графіку наша теорія може помилятися в кілька разів.

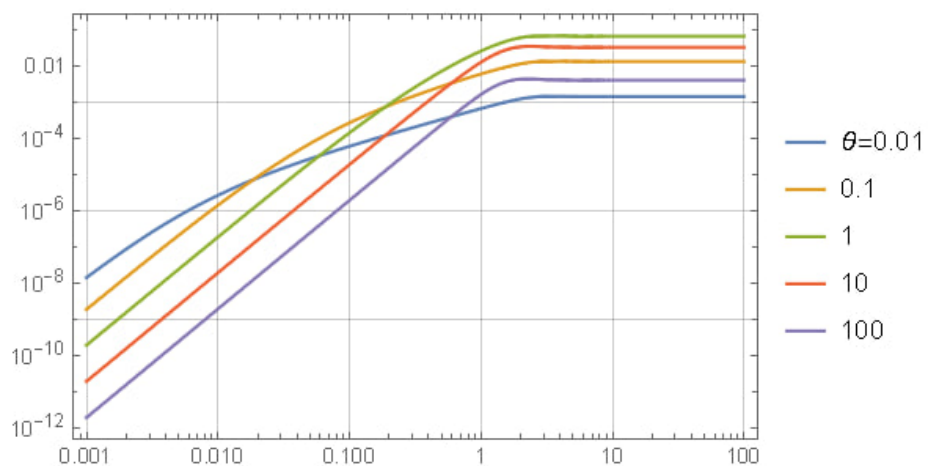


Рисунок 24. Залежність  $p$  від  $l$  при фіксованому  $\theta$ . Горизонтальна вісь—вісь  $l$ , вертикальна вісь—вісь  $p$

Досліджуємо залежність  $p$  від  $l$  при фіксованому  $\theta$ . Бачимо, що в правій частині при великих  $l$ , графік виходить на константу. Це відбувається тому, що метеороїд такий товстий, що товщина не впливає на ефект Ярковського, і можна вважати, що його поверхні повністю ізольовані один від одного. Значення константи на яке виходить графік найбільше для  $\theta$  порядку одиниці, а для більших та менших  $\theta$  воно спадає. Розглянемо також і поведінку ліворуч. Бачимо, що графік монотонно зростає зі зростанням  $l$ . Це пояснюється тим, що чим товщий астероїд, тим більше на ньому ефект Ярковського. Бачимо, що ліворуч всі лінії ідуть паралельно одна одній, чітко по порядку, тобто при малих  $l$ , чим більше  $\theta$ , тим більше ефект Ярковського. Уточнюємо, що на цьому графіку ми будували також і значення  $\theta$  менше за одиницю, що виходило за межі застосовності нашої лінійної теорії. Але ми побудували графік і для такої області для повноти аналізу теорії. Хоча тут треба проявити уважність, бо лінії в лівій частині можуть бути неточними.

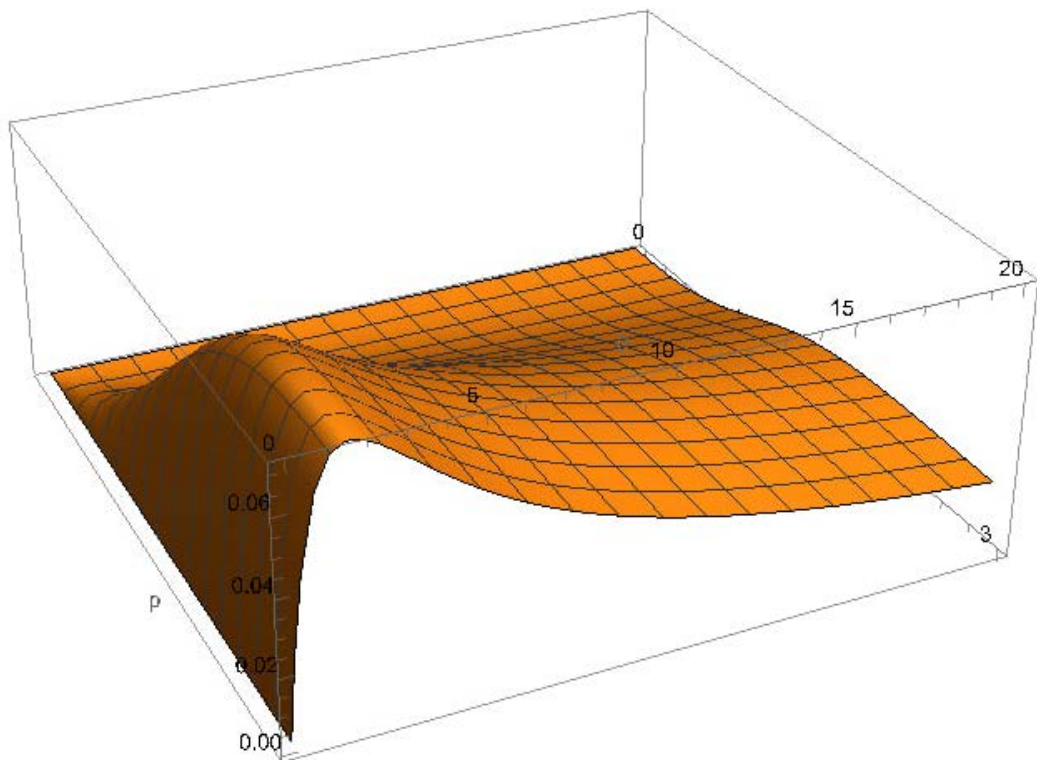


Рисунок 25. Залежність  $p$  від  $\theta$  та  $l$ . Вісь аплікату це вісь  $p$ , вісь абсцис це вісь  $l$ , а вісь ординат це вісь  $\theta$ .

Розуміємо, що попередня формула для  $p$  задана параметрично в залежності від двох параметрів  $l$  та  $\theta$ , тому зручніше досліджувати таку залежність на тривимірних графіках. Графіки, що ми побудували раніше є перерізами тривимірного графіка вертикальними площинами, перпендикулярними осям  $\theta$  та  $l$  відповідно.

Цікаво дослідити асимптотичну поведінку нашого кінцевого виразу для  $p$  для великих і малих значень  $l$ , виводимо формули:

Для  $l \rightarrow \infty$  гіперболічні функції стають значно більше тригонометричних і приблизно дорівнюють одна одній, тому отримуємо:

$$p_{l \rightarrow \infty} = \frac{\theta}{\frac{3\sqrt[4]{\theta^3}}{2\sqrt{2}}\theta^2 + 6\theta + \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi^3}}}$$

Бачимо, що отримали формулу рівно вдвічі більшу за кінцевий вираз з параграфу 2.2. І це логічно, оскільки тут задача для тіла з двома поверхнями. Тиск при цих значеннях  $l$  виходить на константу, що можна побачити на графіку праворуч (Рисунок 21) і на самому виразу, бо в такому випадку, тиск взагалі немає ніякої залежності від  $l$ .

Для  $l \rightarrow 0$  розкладаємо гіперболічні та тригонометричні формули в ряд Тейлора, таким чином, отримуємо вираз:

$$p_{l \rightarrow 0} = \frac{2l^3}{9\sqrt[4]{\pi^3}\theta} \quad (23)$$

Як бачимо, тиск на графіку ліворуч (Рисунок 21) монотонно зростає приблизно пропорційно  $l^3$ . Цей вираз ми будемо використовувати для поєднання ефектів Ярковського та Пойнтінга–Робертсона, оскільки саме при дуже малих значеннях  $l$  ефект Пойнтінга–Робертсона найбільший.

Розглянемо асимптотичну поведінку при великих та малих  $\theta$ . При  $\theta \rightarrow 0$  можна побачити, що тиск стає прямо пропорційним  $\theta$ . Це можна побачити на графіку (Рисунок 20) в лівій частині, де графік підіймається з кутовим коефіцієнтом  $+1$ . При цьому для  $\theta \rightarrow \infty$  тиск буде обернено пропорційним  $\theta$ . В правій частині графіку (Рисунок 20),  $p$  спадає з кутовим коефіцієнтом  $-1$ .

На тривимірному графіку ми бачимо наявність хребта. Спробуємо знайти максимальне значення  $p$  за фіксованими параметрами. Оскільки  $p_{max} = p(\theta_{max})$ , знаходимо  $\theta_{max}$ :

$$\theta_{max} = \sqrt{\frac{16 \cosh \sqrt{2}l - \cos \sqrt{2}l}{\sqrt{\pi^3} \cosh \sqrt{2}l + \cos \sqrt{2}l}}$$

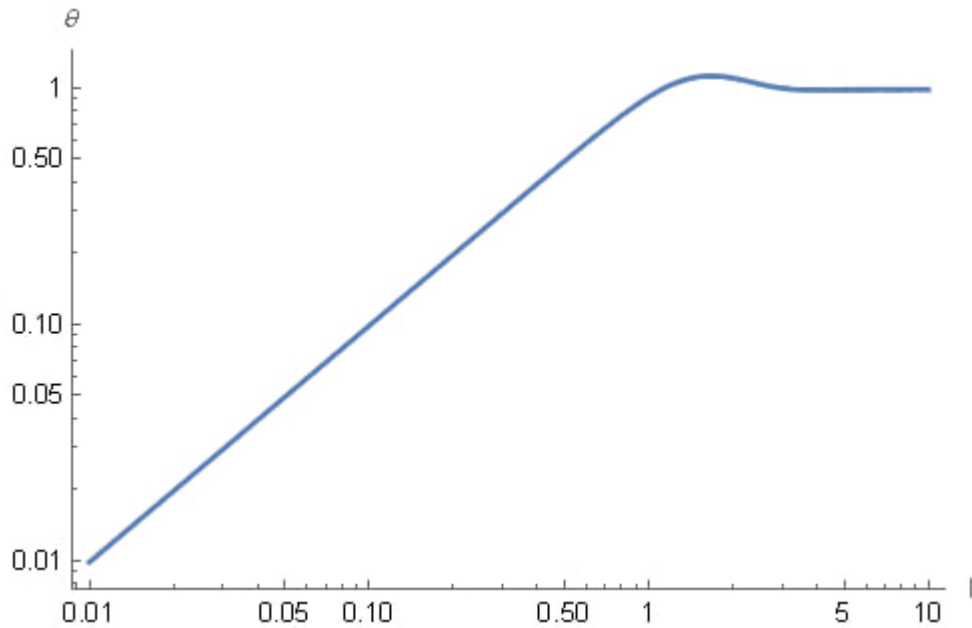


Рисунок 26. Ілюстрація графіку  $\theta_{max}(l)$ . Вісь абсцис – вісь  $l$ , вісь ординат – вісь  $\theta_{max}$

Бачимо, що при маленьких  $l$  параметр  $\theta$  монотонно зростає і досягає свого максимального значення при значеннях довжини порядку одиниці і після цього, трохи осцилюючи, виходить на константу.

Підставляємо  $\theta_{max}$  у вираз для тиску Ярковського і отримуємо  $p_{max} = p(\theta_{max})$ . і будемо графік:

$$p_{max} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\pi^3} \theta_{max} e^{-\sqrt{2}l} (-1 + e^{2\sqrt{2}l} - 2e^{\sqrt{2}l} \sin \sqrt{2}l)}{3((-16 + \sqrt[4]{\pi^3} \theta_{max}^2) \cos \sqrt{2}l + (16 + \sqrt{\pi^3} \theta_{max}^2) \cosh \sqrt{2}l + 4\sqrt{2} \sqrt{\pi^3} \theta_{max} (\sin \sqrt{2}l + \sinh \sqrt{2}l))}$$

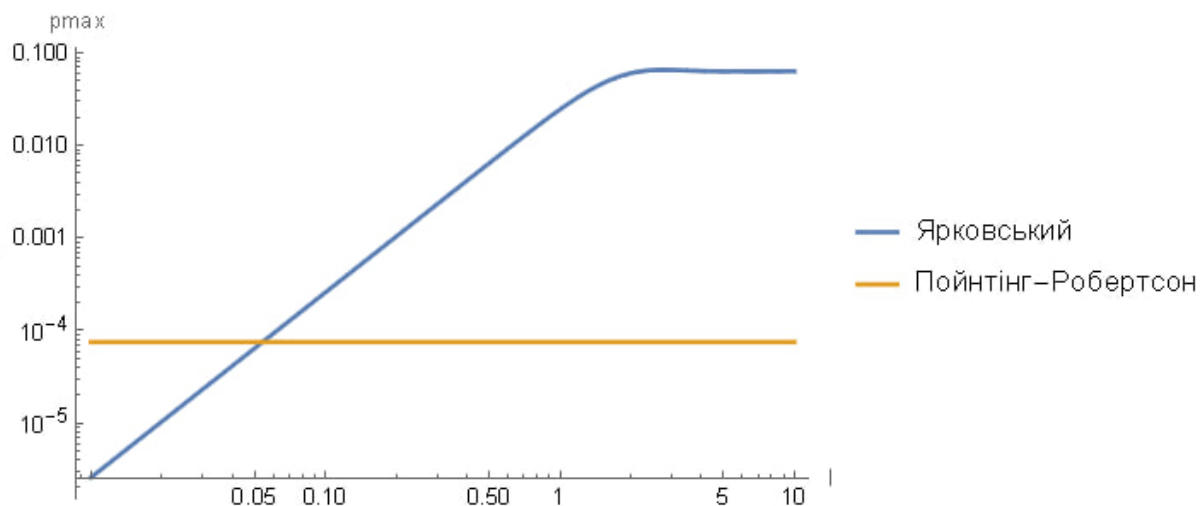


Рисунок 27. Ілюстрація графіку  $p_{max}(l)$ . Вісь абсцис – вісь  $l$ , вісь ординат – вісь  $p_{max}$ .

Як бачимо на графіку, свого максимального значення  $p_{max} \approx 6,57 * 10^{-2}$  при  $l \sim 2$ . З іншого боку для маленьких розмірів астероїдів максимальний тиск зменшується. І за значень товщини  $l \sim 0,05$  стає меншим за ефект Пойнтінга-Робертсона.

### 3.3 Поєднання ефектів Ярковського та Пойнтінга–Робертсона

Використовуючи формулу для сили Пойнтінга–Робертсона (20) і знерозмірюючи її за допомогою сили  $F_0 = \frac{(1-A)\Phi_0 S}{c}$ , отримаємо вираз для тиску Пойнтінга–Робертсона, який треба збільшити вдвічі, тому що тепер в нашій задачі дві поверхні:

$$P_{\text{Пойнтінг-Робертсон}} = \frac{2 * F_{\text{Пойнтінг-Робертсон}}}{F_0} = \frac{2v}{\pi c(1-A)} \quad (24)$$

В цю формулу підставляємо наступні константи:  $v \approx 30 \text{ км/с}$ , це швидкість руху тіл для Земної колової орбіти. Таке значення обране як компроміс, оскільки нам також цікаво дослідити і метеороїди Головного Поясу, де швидкість  $\sim 20 \text{ км/с}$ , та мікрометеороїди в сонячній короні, де швидкість значно більша  $\sim 40 \text{ км/с}$ ;  $c$ –швидкість світла  $\approx 300\,000 \text{ км/с}$ ; для метеороїдів значення альbedo маловідомі, але в нашій роботі ми розглядаємо як метеороїди, так і дрібні астероїди, тому за альbedo візьмемо значення  $A \approx 0.15$ , таке значення є типовим для астероїдів Сонячної системи. Отримуємо значення:

$$P_{\text{Пойнтінг-Робертсон}} \approx 0,75 * 10^{-4}$$

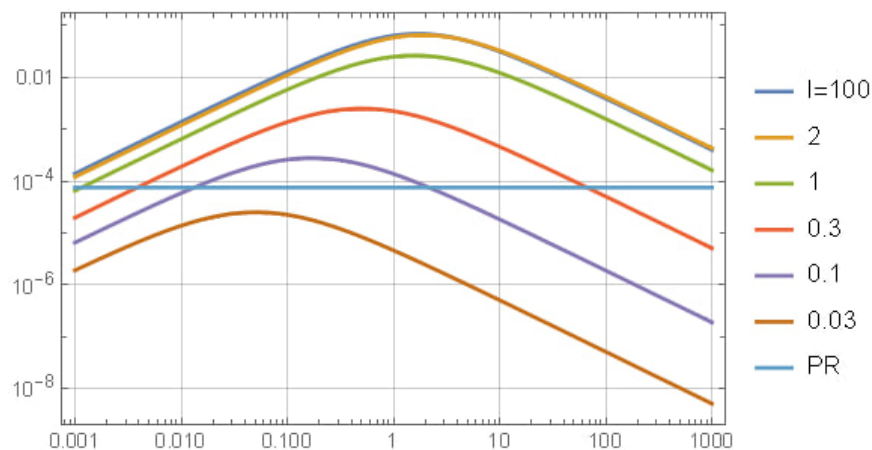


Рисунок 28. Ілюстрація графіку поєднання ефектів Пойнтінга–Робертсона на площині  $r\theta$  при фіксованій довжині  $l$ . Ефект Пойнтінга–Робертсона в легенді позначено як PR.

Отримали константу, що є очікувано, оскільки ефект Пойнтінга–Робертсона є дуже невеликим і мало залежить від форми астероїду. І тепер будуюмо графіки (Рисунок 26) та (Рисунок 27):

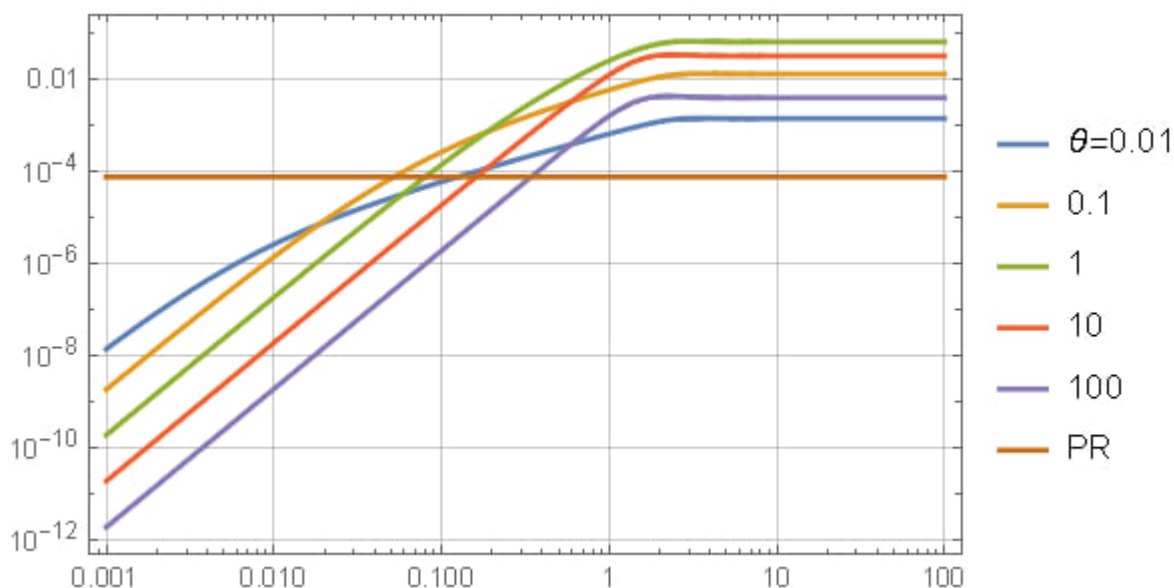


Рисунок 29. Ілюстрація графіку поєднання ефектів Пойнтінга–Робертсона на площині  $pl$  при фіксованому  $\theta$ . Ефект Пойнтінга–Робертсона в легенді позначено як PR.

Тепер хочемо отримати формулу для критичної довжини, де ефект Пойнтінга–Робертсона та ефект Ярковського входять в рівновагу. Для цього беремо формулу для тиску Пойнтінга–Робертсона (24) і прирівнюємо її до асимптотичного виразу для тиску Ярковського (23) при малих значеннях  $l$ . Отримуємо:

$$p_{\text{Пойнтінг-Робертсон}} = p_{l \rightarrow 0} = \frac{2l^3}{9\sqrt[4]{\pi^3\theta}} \Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{9^4\sqrt{\pi^3\theta v}}{\pi c(1-A)}}$$

де  $\theta = \frac{\Gamma}{\sqrt[4]{\epsilon\sigma}} \sqrt{\frac{2\pi}{P}} \sqrt[4]{\left(\frac{4\pi r^2}{(1-A)L_\odot}\right)^3}$ , де  $\Gamma = \sqrt{C\rho k}$ —теплова інерція,  $c$ —теплоємність,  $k$ —теплопровідність,  $\rho$ — густина[9],  $r$ —відстань від Сонця  $\sim 149,6 * 10^9$ м,  $\epsilon$ —випромінювальна здатність  $\sim 0,9$ ,  $\sigma$ —стала Стефана–Больцмана  $\sim 5,67 * 10^{-8}$  Ватт/м<sup>2</sup> \* К<sup>4</sup>,  $P$ —період обертання тіла навколо Сонця,  $L_\odot$ —світність Сонця  $\sim 3,8 * 10^{26}$ Ватт. Дослідимо поведінку двох типів

метеороїдів: залізних та кам'яних[1]. І відповідно беремо різні середні значення вище описаних параметрів:

Параметри	Залізні	Кам'яні
$C, \text{Дж}/\text{кг} * \text{К}$	364	500
$\rho, \text{г}/\text{см}^3$	7	3,3
$\kappa, \text{Ватт}/\text{м} * \text{К}$	40	2

Таблиця 1. Параметри для різних типів метеороїдів.

Підставляємо значення в формули, спрощуємо і отримуємо наступні вирази залежності  $\theta(P)$  і побудуємо графіки:

$$\theta_{iron} = 269.877 \sqrt{\frac{1}{P}}$$

$$\theta_{stony} = 48.5616 \sqrt{\frac{1}{P}}$$

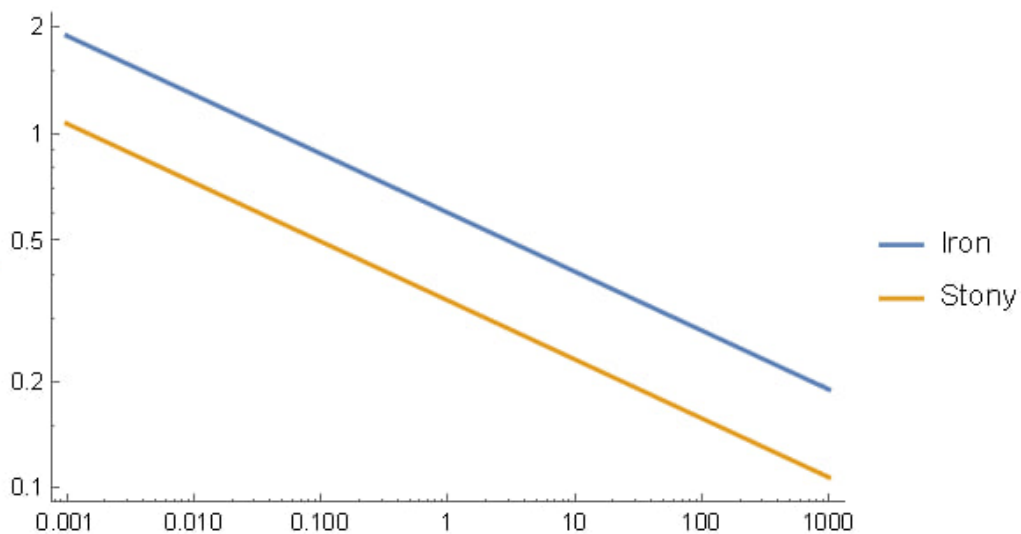


Рисунок 30. Графік залежності  $\theta(P)$ . По осі абсцис–вісь P, по осі ординат– $\theta$ . Залізні метеороїди в формулі та на графіку позначаються як iron, кам'яні метеороїди позначені–stony.

Як бачимо з графіку, параметр  $\theta$  обернено пропорційний періоду обертання: чим більше період обертання, тим менше  $\theta$ . При чому, як для

залізних, так і для кам'яних метеороїдів, залежність майже однакова: різниця тільки в коефіцієнті.

## Висновки

Ми почали наше дослідження з розглядання одновимірного рівняння теплопровідності для моделі астероїда нескінченної глибини. Виявили, що розв'язок рівняння треба шукати у вигляді теплових хвиль. Для цього визначили граничні умови на поверхні та глибині, підібрали початкові умови. Потім знерозмірили та лінеаризували їх та рівняння теплопровідності. Отримали спрощену модель, що дозволила нам знайти розв'язок, який задовольняє системі рівнянь. Ця модель дозволяє зрозуміти розподіл температури в астероїді під дією сонячного випромінювання. Побудували графіки теплових хвиль і зрозуміли, що тепла хвиля, маючи велику амплітуду, дуже швидко затухає з часом, проходячи вглиб поверхні. Не встигаючи пройти свою повну довжину, хвиля майже повністю загасає. На зрізі графіку побачили ефект теплової інерції ґрунту тіла: температура метеороїда досягає мінімуму вночі перед світанком, а максимуму—вдень після полудня. При чому амплітуда коливань хвиль сильно залежить від параметру  $\theta$ : при великому значенні теплової інерції, амплітуда коливань теплової хвилі дуже маленька, хоча тепла хвиля веде себе так само: досягає максимуму після полудня, а мінімуму—перед світанком. При малих значеннях теплової інерції, після світанку ґрунт дуже стрімко нагрівається, а після полудню стрімко падає, при цьому вночі температура ґрунту при своєму мінімальному значенні залишається константою.

Потім ми розглянули світловий тиск і розрахували сили ефектів Ярковського та Пойнтінга—Робертсона. Розрахували вираз для знерозміреного тиску Ярковського для тієї ж теплової моделі з тілом нескінченної глибини. Побудували графік розподілу тиску в залежності від теплової інерції і проаналізували асимптотику цього графіку (Рисунок 20). Проаналізувавши графік, побачили, що тиск при малих та великих значеннях  $\theta$  прямує до нуля, при цьому досягає свого максимуму при  $\theta \sim 1$ . Побудували на графіку

асимптоти. Проаналізувавши їх, зрозуміли, що при великих значеннях  $\theta$  астероїд так швидко обертається, що температура кожного його елемента поверхні на екваторі майже не встигає змінитись протягом одного оберту. Тож ефект Ярковського прямує до нуля через те, що температура однакова по широті, тому випромінювання з поверхні відбувається у всіх по площині екватору напрямках одночасно. При чому за малих  $\theta$  астероїд обертається так повільно, що кожна ділянка його поверхні майже миттєво встигає набути теплової рівноваги з падаючим сонячним випромінюванням, в такому випадку точки, розташовані симетрично відносно полудня, мають майже однакові температури. Тож ефект Ярковського також прямує до нуля, оскільки температура поверхні майже миттєво підлаштовується під освітлення. Таким чином, ефект Ярковського є максимальним у проміжному інтервалі  $\theta \sim 1$ , де температурний градієнт є найбільш вираженим. Але навіть в цьому випадку світловий тиск досягає максимальних значень 0.03–0.04. Тобто асиметрія випромінювання між західною і східною півкулями навіть в максимумі відносно мала. Треба зауважити, що, побудована нами лінійна модель будувалась в припущенні  $\theta \gg 1$ . Так що асимптота, побудована в протилежному граничному випадку, знаходиться поза межами застосовності нашої моделі, і може досить значущо відрізнитись від реальних результатів. В цьому ж розділі ми прорахували силу ефекту Пойнтінга–Робертсона і виразили знерозмірений тиск цього ефекту для порівняння зі знерозміреним тиском ефекту Ярковського. Ми розуміємо, що такий розрахунок є грубим наближенням, але враховуючі природу цього ефекту, таку що тиск мало залежить від товщини тіла, ми сподіваємось отримати результати правильного порядку величини. В наступній роботі ми плануємо розглянути тиск Пойнтінга–Робертсона більш детально.

У третьому розділі ми розглянули теплофізичну модель метеороїда скінченних розмірів. Для розв'язку такої моделі ми взяли тіло у вигляді плити.

В наступній роботі ми плануємо розв'язати цю задачу за допомогою сферичних функцій і розглянути астероїди сферичних та ще складніших форм.

Ми вирішили одновимірне лінеаризоване рівняння теплопровідності для метеороїда та визначили силу світлового тиску Ярковського. Ми виявили, що для малих тіл ефект Ярковського зникає через високу теплопровідність і швидке обертання, що врівноважує температуру по всій поверхні. Побудували графік для знерозміреного тиску Ярковського в залежності від двох параметрів: теплової інерції  $\theta$  ґрунту та товщини тіла  $l$ . На графіку (Рисунок 25) ми побачили гребінь, який показує максимальний тиск Ярковського при відповідних  $\theta$  та  $l$ . Побудували графіки для знаходження максимального тиску в залежності від товщини тіла. Побудували перерізи графіку тиску Ярковського (Рисунок 25) в двох площинах: при фіксованому  $\theta$  та при фіксованому  $l$ . Дослідили асимптотику графіку при  $l \rightarrow 0$  та при  $l \rightarrow \infty$ . При малих значеннях товщини тіла, тиск монотонно зростає, а при великих значеннях  $l$ , тиск вже не залежить від товщини тіла та виходить на константу. Але треба зауважити, що побудована нами лінійна теплова модель не працює на проміжку при маленьких значеннях  $\theta$ , і ці проміжки на графіках біли побудовані для повноти дослідження. Ми дослідили і такі проміжки графіків, хоча вони можуть хибити в значеннях в декілька разів, але поведінка графіка залишається такою ж.

Також ми поєднали два досліджувані ефекти, прирівнявши сили тиску цих двох ефектів. Виявили, що ефект Пойнтінга–Робертсона є константою, що немає залежності від товщини метеороїда. Знайшли критичну товщину  $l$ , за якої ефекти Пойнтінга–Робертсона та Ярковського входять в рівновагу і побудували це на графіках (Рисунки 28, 29). Це дослідження ми провели для залізних та кам'яних метеороїдів і за розв'язками побудували графік залежності теплової інерції від періоду обертання.

Загалом, наша робота демонструє важливість теплових ефектів у динаміці космічних тіл. Ефекти Ярковського і Пойнтінга–Робертсона, хоча і різні за

своєю природою, обидва відіграють ключову роль у довгостроковій еволюції орбіт дрібних астероїдів і метеороїдів. Ми показали, що ці ефекти можуть бути кількісно описані за допомогою моделей теплопровідності, і отримані результати можуть бути використані для прогнозування орбітальних змін космічних тіл.

## Перелік використаної літератури

1. Ostrowski, D., & Bryson, K. (2019). The physical properties of meteorites. *Planetary and Space Science*, 165, 148–178.
2. Vokrouhlický D., Bottke W. F., Chesley S. R., Scheeres D. J., and Statler T. S. (2015) The Yarkovsky and YORP effects. In *Asteroids IV* (P. Michel et al., eds.), pp. 509–531. Univ. of Arizona, Tucson.
3. Guess, A. W. (1962). Poynting–Robertson *Effect for a Spherical Source of Radiation*. *Astrophysical Journal*. 135: 855–866.
4. Klačka, J.; Kocifaj, M. (2008). *Times of inspiralling for interplanetary dust grains*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 390 (4). Oxford: 1491–1495.
5. Lagerros, J. S. V. (1996). Thermal physics of asteroids. I. Effects of shape, heat conduction and beaming. *Astronomy and Astrophysics*, v. 310, p. 1011–1020, 310, 1011–1020.
6. Burns; Lamy; Soter (1979). *Radiation Forces on Small Particles in the Solar System*. *Icarus*. 40 (1): 1–48.
7. Rubincam, D. P. (1995). *Asteroid orbit evolution due to thermal drag*. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 100(E1), 1585–1594.
8. Golubov, O., Kravets, Y., Krugly, Y. N., & Scheeres, D. J. (2016). *Physical models for the normal YORP and diurnal Yarkovsky effects*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 458(4), 3977–3989.
9. Dziadura, K., Oszkiewicz, D., Spoto, F., Carry, B., Tanga, P., & Bartczak, P. (2023). *The Yarkovsky effect and bulk density of near–Earth asteroids from Gaia DR3*. *Astronomy & Astrophysics*, 680, A77.
10. Greenberg, A. H., Margot, J. L., Verma, A. K., Taylor, P. A., & Hodge, S. E. (2020). *Yarkovsky drift detections for 247 near–earth asteroids*. *The Astronomical Journal*, 159(3), 92.

11. Lauretta, D.S., DellaGiustina, D.N., Bennett, C.A., Golish, D.R., Becker, K.J., Balram-Knutson, S.S., Barnouin, O.S., Becker, T.L., Bottke, W.F., Boynton, W.V. and Campins, H., (2019). *The unexpected surface of asteroid (101955) Bennu*. *Nature*, 568(7750), pp.55–60

## Додатки