ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ISSN 0321-4427

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

54 | 90

«ОСНОВА»

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Основан в 1965г.

SSN 0321-4427. Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1990. Вып. 54. 1—132.

«ОСНОВА»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский межведомственный научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 54

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1990

УДК 513.33

Сборник содержит статьи по теории целых и субгармонических функций, геометрии банаховых пространств, интегро-дифференциальным уравнениям, теории операторов в гильбертовых пространствах и спектральному анализу.

Для научных работников и специалистов.

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27.

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Т $\frac{1602070000-022}{М226(04)-90}$ 49-90

УДК 517.9

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ОЦЕНКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ТИПА ВО ВСЕМ R^n. 1. ВТОРОЙ ПОРЯДОК

В ряде работ [1—4] были получены достаточные условия существенной самосопряженности широких классов эллиптических операторов четных порядков в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ и одновременно — сходимости интегралов энергетического типа для них с некоторым весовым множителем*. При обсуждении этих работ М. Ш. Бирман привлек мое внимание к вопросу о получении оценок для названных интегралов в норме графика соответствующего оператора, т. е. энергетических (или коэрцитивных) оценок, за что я искренне ему признателен.

В настоящей работе такие оценки устанавливаются путем более тщательного проведения рассуждений [1—4]. Предварительно мы выводим неравенства типа Гординга во всем пространстве (с весом) для функций, не предполагаемых финитными. Для выражений второго порядка, возможно, несимметричных, мы рассматриваем обобщенные по ряду направлений условия типа Титчмарша — Сирса [1, 2, 6], в том числе и типа [8].

Обозначаем $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, $(\cdot,\ \cdot)$, $|\cdot|$ — то же в $\boldsymbol{C}^n$. В интегралах по всему $\boldsymbol{R}^n$ пределов не указываем. Полагаем всюду $0\cdot\infty=0$.

§ 1. Уравнение Шредингера. **Теорема 1.** *Пусть оператор*

$$L=-\Delta+q(x) \tag{1}$$

с комплекснозначным локально ограниченным потенциалом q удовлетворяет при некоторых $\varepsilon>0$, $K>0$ условию

$$\mathrm{Re}\langle Lv,\ v\rangle\geqslant\langle L_{\varepsilon K}v,\ v\rangle \tag{2}$$

при любых $v\in C_0^\infty$, где $L_{\varepsilon K}=-\varepsilon\Delta-KQ(x)$,

$$1\leqslant Q(x)\leqslant\infty,\quad |Q^{-1/2}(x)-Q^{-1/2}(\xi)|\leqslant K'|x-\xi|. \tag{3}$$

Тогда при любом $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$ найдется $C_1=C_1(\varepsilon_1,\varepsilon,K,K')$ такие, что справедливо неравенство типа Гординга

$$\mathrm{Re}\langle Q^{-1}Lu,\ u\rangle\geqslant\varepsilon_1\|Q^{-1/2}\nabla u\|^2-C_1\|u\|^2 \tag{4}$$

при $u\in D(L_{\max})=\{u\in L_2(\boldsymbol{R}^n):Lu\in L_2(\boldsymbol{R}^n)\}$ (Lu понимается в смысле обобщенных функций. Равенства $Q^{-1}(x)=0$, а впоследствии и $\nabla P(x)=0$ на множестве положительной меры не исключаются).

---

* Многочисленные признаки существенной самосопряженности дифференциальных операторов и литературные указания можно найти в монографиях [5—7, Ю. М. Березанского и Ю. Г. Кондратьева (1988), М. Рида и Б. Саймона (т. 2, 1978), в статьях [1—4].

Следствие 1. *При любом* $\varepsilon_2 > 0$ *найдется* $C_2 > 0$ *такое, что*

$$\langle Q^{-1}\nabla u, \nabla u\rangle \leqslant \varepsilon_2 \| Q^{-1}Lu \|^2 + C_2 \| u \|^2 \leqslant \leqslant \varepsilon_2 \| Lu \|^2 + C_2 \| u \|^2, \quad \forall u \in D(L_{\max}). \tag{5}$$

Замечание 1. Если в (2) допустить $\varepsilon = 0$, то утверждение теоремы 1 перестает быть верным даже при $Q \equiv 1$, $\mathrm{Im} q \equiv 0$, т. е. когда L полуограничен на C_0^∞, хотя, как показал А. Я. Повзнер еще в 1953 г. (см. также [7, 5]), оператор Шредингера (1) с непрерывным потенциалом в этом случае существенно самосопряжен. Пример одномерного позитивного на $C_0^\infty(1, \infty)$ оператора Шредингера $Lu = -u'' + q(x)u$, $q(x) = 2x^{-2} - 4x^2(7 \sin x^4 + 4x^4 \cos x^4)(2 + \cos x^4)^{-1}$, для которого не при всех $u \in D(L_{\max})$ существует предел интеграла Дирихле

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x (|u'|^2 + q(t)|u|^2)\,dt, \tag{6}$$

принадлежит Дж. Мозеру. Мы сейчас покажем, что также не для всех $u \in D(L_{\max})$ будет $u' \in L_2(1, \infty)$. Позитивность L следует из того. что уравнение $Lv = 0$ имеет решение $v = x^2(2 + \cos x^4) \neq 0$, $1 < x < \infty$, Второе решение $u(x) = v(x)\int_x^\infty v^{-2}(t)\,dt \in D(L_{\max})$, однако легко видеть, что $\int^\infty |u'(x)|^2\,dx = \infty$.

Доказательство теоремы 1. В [2, с. 742] построена такая функция $\varphi_R(x) \in C_0^\infty$, что $\varphi_R(x) = 0$, $(|x| \geqslant R)$; $0 \leqslant \varphi_R(x) \leqslant Q^{-1/2} \times (x) \leqslant 1$; $|\nabla\varphi_R(x)| \leqslant K_1 = K_1(K')$; $\varphi_R(x) \to Q^{-1/2}(x)$ локально равномерно по $x \in \boldsymbol{R}^n$ при $R \to \infty$. Пусть $u \in D(L_{\max}) \cap C^\infty$. Положим $u_R = \varphi_R(x)u(x) \in C_0^\infty$. Как показано в [2, с. 747]*,

$$\varepsilon^{-1}\,\mathrm{Re}\langle Lu_R, u_R\rangle + \varepsilon^{-1}K\|u\|^2 \geqslant \|\nabla u_R\|^2. \tag{7}$$

Но при любом $\alpha > 0$

$$\|\nabla u_R\|^2 = \|\varphi_R\nabla u + u\nabla\varphi_R\|^2 \geqslant \|\varphi_R\nabla u\|^2 - 2\|u\nabla\varphi_R\| \cdot \|\varphi_R\nabla u\| \geqslant \geqslant (1-\alpha^2)\|\varphi_R\nabla u\|^2 - \alpha^{-2}K_1^2\|u\|^2, \tag{8}$$

а так как $\bar{u}_R Lu_R = \varphi_R^2\bar{u}Lu + |u\nabla\varphi_R|^2 + 2i\,\mathrm{Im}(u\nabla\varphi_R, \varphi_R\nabla u) - \nabla(|u|^2 \times \varphi_R\nabla\varphi_R)$, то в силу теоремы Остроградского—Гаусса и свойств φ_R

$$\mathrm{Re}\langle Lu_R, u_R\rangle \leqslant \mathrm{Re}\langle\varphi_R^2 Lu, u\rangle + K_1^2\|u\|^2.$$

Отсюда и из (7), (8) при $u \in D(L_{\max}) \cap C^\infty$ следует:

$$\mathrm{Re}\langle\varphi_R^2 Lu, u\rangle \geqslant \varepsilon(1-\alpha^2)\langle\varphi_R^2\nabla u, \nabla u\rangle - [K + K_1^2(1 + \varepsilon\alpha^{-2})] \cdot \|u\|^2. \tag{9}$$

---

* В [2] $\mathrm{Im}\, q \equiv 0$. Сейчас в силу (2) имеем: $\|\nabla u_R\|^2 = -\langle\Delta u_R, u_R\rangle = \varepsilon^{-1}\langle(L_{\varepsilon K} + KQ)u_R, u_R\rangle \leqslant \varepsilon^{-1}\mathrm{Re}\langle Lu_R, u_R\rangle + \varepsilon^{-1}K\|u\|^2$.

Покажем, что (9) верно для всех $u \in D(L_{\max})$. Для этого заметим, что $D(L_{\max}) \subset W^2_{2,\,\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ (см., например, [6]), и положим $u_{R,\,\delta}(x) = \psi\left(\frac{|x|}{R}\right) u_\delta(x)$, где $u_\delta(x)$ — усреднение функции u с ядром из C_0^∞ по шару $|x-y| \leqslant \delta$ (так называемое усреднение по Соболеву), $\psi \in C_0^\infty$,

$$0 \leqslant \psi(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ \leqslant 1, & 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| \geqslant 2. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, $u_{R,\,\delta} \in C_0^\infty$ и в (9) можно подставить $u_{R,\,\delta}(x)$ вместо u, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$. После этого в (9) можно отбросить множитель ψ, так как $\psi\left(\frac{|x|}{R}\right) = 1$ при $x \in \operatorname{supp} \varphi_R$, и (9) доказано в общем случае. Теперь, переходя в (9) к пределу при $R \to \infty$, получаем (4) с

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(1-\alpha^2), \quad C_1 = K + (1 + \varepsilon\alpha^{-2}) K_1^2,$$

где $K_1 = K_1(K')$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть оператор Шредингера (1) и некоторая непрерывная функция $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$ таковы, что $\| Q^{-1/2} \nabla u \| < \infty$ при $u \in D(L_{\max})$ и $D(L_{\max})$ принадлежит локальному пространству С. Л. Соболева $W^2_{2,\,\mathrm{loc}}$ (Это выполнено, например, при условиях теоремы 1). Тогда, если существуют кусочно гладкая функция $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ и последовательность областей $\Omega_k = \{x \in \boldsymbol{R}^n : P(x) < N_k\}$, $N_k \to \infty$ такие, что*

$$|\nabla P(x)| \leqslant C N_k Q^{-1/2}(x), \quad x \in \Omega_k, \tag{11}$$

то интеграл Дирихле $D_q[u, v]$, отвечающий операции (1), существует для любых $u, \bar{v} \in D(L_{\max})$ в смысле суммирования с ядром $[(1 - P(x) N_k^{-1})_+]^\gamma$ при любом $\gamma \geqslant 1$:

$$D_q[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N_k \to \infty} \int\limits_{\Omega_k} \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)^\gamma \{(\nabla u, \nabla v) + q(x) u\bar{v}\}\, dx$$

и справедливы равенства

$$D_q[u, v] = \langle Lu, v \rangle, \quad D_{\bar{q}}[v, u] = \langle JLJv, u \rangle,$$

где J — оператор комплексного сопряжения. Следовательно,

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, JLJv \rangle, \ \forall u, \ \bar{v} \in D(L_{\max}),$$

т. е. оператор Шредингера (1) $L_{\max}$ J-самосопряжен в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, а при $q = \bar{q}$ — самосопряжен.*

---

* В смысле [7]. В частности, $L_{\max} = L_{\min}$ (т. е. замыканию с C_0^∞).

Следствие 2. При $\operatorname{Re} q(x) \geqslant \mathrm{const} > -\infty$, $\operatorname{Im} q(x) \geqslant C$ *(или* $\leqslant C$*) интеграл Дирихле для* L *сходится абсолютно:*

$$D[u, v] = \int \{(\nabla u, \nabla v) + q(x) u\bar{v}\} dx$$

(Этот факт известен [7, п. 16]).

Доказательство теоремы 2. Так как $\bar{v}Lu \in L_1(\boldsymbol{R}^n)$, то достаточно показать, что $\lim J_k = 0$, где

$$J_k \overset{\text{def}}{=} \int \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)_+^\gamma \{\nabla u, \nabla v) + q(x) u\bar{v} - \bar{v}Lu\} dx = \int (1 - P(x) N_k^{-1})_+^\gamma \times$$
$$\times \nabla(\bar{v}\nabla u)\, dx = \gamma N_k^{-1} \int\limits_{\Omega_k} \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)^{\gamma-1} \bar{v}(\nabla u, \nabla P(x))\, dx.$$

(Здесь было произведено интегрирование по частям). Отсюда, в силу (5) и (11) при $N_k \geqslant N_m^2 \to \infty$ имеем

$$|J_k|^2 \leqslant C^2\gamma^2 \|v\|^2 \left\{N_m^2 N_k^{-2} \int\limits_{\Omega_m} Q^{-1}(x) |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{R^n \setminus \Omega_m} Q^{-1}(x) |\nabla u|^2 dx\right\} \to 0,$$

и теорема 2 доказана. Ее требования можно ослабить, см. § 2.

§ 2. Оператор общего вида. Рассматриваются эллиптическое дифференциальное выражение

$$Mu = -\nabla(B(x)\nabla u) + i\{\nabla(b(x)u) + (\nabla u, c(x))\} + p(x)u, \quad (12)$$

формально сопряженное к нему

$$M^+u = -\nabla(B^*(x)\nabla u) + i\{(\nabla u, b(x)) + \nabla(uc(x))\} + \bar{p}(x)u, \quad (13)$$

и формально самосопряженное выражение («оператор сравнения»)

$$L_{\varepsilon K}u = -\varepsilon\{\nabla(A(x)\nabla u) - i[\nabla(a(x)u) + (\nabla u, a(x))] -$$
$$- |A^{-1/2}(x) a(x)|^2 u\} - KQ(x)u. \quad (14)$$

Матрица $B(x)$ не предполагается эрмитовой, вектор-функции $b(x)$ и $c(x)$ принимают значения в $\boldsymbol{C}^n$, $a(x) \in \boldsymbol{R}^n$. Коэффициенты выражения M считаем достаточно гладкими для того, чтобы $D(M_{\max})$ и $D(M_{\max}^+)$ принадлежали $W_{2,\,\mathrm{loc}}^2$. Для этого, как известно, достаточно потребовать $p \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}$, $b, c \in C^1$, $B(x) \in C^4$, а при $B = B^* > 0$, $-B \in C^2$. Полагаем также $a \in C^1$, $0 < A = A^* \in C^2$, $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$, $Q^{-1/2}$ — кусочно гладкая и, тем самым, $Q^{-1/2} \in \mathrm{Lip}_{1,\,\mathrm{loc}}$. Обозначаем $B = B_R + iB_J$, $\frac{1}{2}(b + \bar{c}) = h = h_R + ih_J$, где $B_R = B_R^*$, $B_J = B_J^*$, $h_R, h_J \in \boldsymbol{R}^n$.

Лемма. *Пусть при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *выполняется одно из двух следующих неравенств для* $u \in C_0^\infty$:

либо
$$\left.\begin{matrix}\operatorname{Re}\langle Mu, u\rangle \\ |\langle Mu, u\rangle|\end{matrix}\right\} \geqslant \langle L_{\varepsilon K}u, u\rangle \qquad \begin{matrix}(15_1) \\ (15_2)\end{matrix}$$

и пусть φ *— кусочно гладкая, финитная в* $\boldsymbol{R}^n$ *функция,* $\varphi Q^{1/2} \in L_\infty$.

Тогда для любой $u \in D(M_{\max})$ *справедливо при любом* $\alpha > 0$ *одно из следующих двух неравенств, соответственно условиям* (15_1) *или* (15_2), *если обозначить* $\boldsymbol{D} = A^{1/2}(x)\nabla - iA^{-1/2}a(x)$:

$$\operatorname{Re}\langle \varphi^2 Mu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon(1-\alpha^2)\|\varphi \boldsymbol{D}u\|^2 - \{K\|Q^{1/2}\varphi u\|^2 + \varepsilon(\alpha^{-2}-1)\|uA^{1/2}\nabla\varphi\|^2 + \|uB_R^{1/2}\nabla\varphi\|^2\} - 2\operatorname{Im}\langle \varphi(B_J\nabla - ih_J)u,\ u\nabla\varphi\rangle; \tag{16_1}$$

$$|\langle \varphi^2 Mu,\ u\rangle| \geqslant \varepsilon(1-\alpha^2)\|\varphi\boldsymbol{D}u\|^2 - \{K\|Q^{1/2}\varphi u\|^2 + \varepsilon(\alpha^{-2}-1)\|uA^{1/2}\nabla\varphi\|^2 + \|u(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)^{1/2}\|^2\} - 2\,|\operatorname{Im}\langle\varphi(B_J\nabla - ih_J)u,\ u\nabla\varphi\rangle - i\operatorname{Im}\langle\varphi(B_R\nabla - ih_R)u,\ u\nabla\varphi\rangle|. \tag{16_2}$$

Лемма верна и для нефинитных φ, *если финитна* $u \in D(M_{\max})$.

Доказательство. Пусть сначала $u \in D(M_{\max}) \cap C^\infty$, $0 \leqslant \varphi \in C_0^\infty$. Положим $u_\varphi(x) = \varphi(x)u(x) \in C_0^\infty$. Тогда $\boldsymbol{D}u_\varphi = \varphi\boldsymbol{D}u + uA^{1/2}\nabla\varphi$. Поэтому при $\forall\alpha > 0$

$$\|\boldsymbol{D}u_\varphi\|^2 \geqslant (1-\alpha^2)\|\varphi\boldsymbol{D}u\|^2 - (\alpha^{-2}-1)\|uA^{1/2}\nabla\varphi\|^2. \tag{17}$$

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем

$$\|\boldsymbol{D}u_\varphi\|^2 = \frac{1}{\varepsilon}\langle(L_{\varepsilon K} + KQ)u_\varphi,\ u_\varphi\rangle \leqslant \frac{1}{\varepsilon}K\|\varphi Q^{1/2}u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Re}\langle Mu_\varphi,\ u_\varphi\rangle\\ |\langle Mu_\varphi,\ u_\varphi\rangle|\end{array}\right. . \tag{18}$$

А так как

$$\bar u_\varphi Mu_\varphi = \varphi^2\bar u Mu + |u|^2(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi) - \nabla(\varphi|u|^2 B\nabla\varphi) - \bar u_\varphi((B\nabla - ib)u,\ \nabla\varphi) + u_\varphi(\nabla\varphi,\ (B^*\nabla - ic)u) = \varphi^2\bar u Mu + |u|^2(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi) + 2\operatorname{Im}\{\bar u_\varphi((B_J\nabla - ih_J)u,\ \nabla\varphi)\} - 2i\operatorname{Im}\{\bar u_\varphi((B_R\nabla - ih_R)u,\ \nabla\varphi)\} - \nabla(\varphi|u|^2 B\nabla\varphi), \tag{19}$$

где интеграл от последнего слагаемого равен нулю, имеем из (17)—(19) при условиях $(15_{1,2})$ соответственно неравенства $(16_{1,2})$, установленные пока для гладких функций. В общем случае они получаются предельным переходом от специальным образом сглаженных функций: u аппроксимируем усреднениями по Соболеву, а φ и одновременно $\nabla\varphi$ — функциями $\varphi_\delta^\frown \in C_0^\infty$ и $\nabla\varphi_\delta^\frown$ такими, что $0 \leqslant \varphi_\delta^\frown \leqslant \varphi$ и $(\varphi_\delta^\frown Q^{1/2}) \to \varphi Q^{1/2} \in L_\infty$ снизу. Конструкция $\varphi_\delta^\frown$ дана леммой 0.1 из [3]. Лемма доказана полностью, так как при доказательстве использована лишь финитность произведения $u_\varphi = \varphi(x)u(x)$, а не того или другого сомножителя. (Легко видеть, что при условии (15_1) $B_R(x) > 0$).

Отметим, что операция M (12) допускает эквивалентную запись:

$$Mu = -\nabla(B\nabla u) + i\{\nabla(hu) + (\nabla u,\ h)\} + \left\{p + i\nabla\left(\frac{b-\bar c}{2}\right)\right\}u. \tag{20}$$

Теорема 3. *При условиях леммы пусть*

$$A(x) \geqslant (BB^*(x) + B^*B(x))^{1/2} = \sqrt{2}\,(B_R^2 + B_J^2)^{1/2} \tag{21}$$

и пусть существуют кусочно гладкая функция $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *и монотонная последовательность* $0 < N_x \to \infty$ *такие, что*

$$|A^{1/2}(x)\nabla Q^{-1/2}(x)| \leqslant K' = \text{const}; \tag{22}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x;P(x)<N_k} |Q^{-1/2}(x) A^{1/2}(x) \nabla P(x)| \leqslant CN_k \to \infty; \tag{23}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x;P(x)<N_k\\ x<k<\infty}} |(Q^{-1/2}(h_J - B_J A^{-1}a),\ \nabla(Q^{-1/2}(1 - PN_k^{-1})))| < C, \tag{24}$$

а в случае (15$_2$), *кроме того,*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x:P(x)<N_k\\ 1<k<\infty}} |Q^{-1/2}(h_R - B_R A^{-1}a),\ \nabla(Q^{-1/2}(1 - PN_k^{-1})))| < C. \tag{25}$$

Тогда при любом $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ *найдется* $C_1 = C_1(\varepsilon_1, \varepsilon, K, K', C)$ *такое, что при* $u \in D(M_{\max})$ *справедливо неравенство*

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Mu,\ u\rangle\\ |\langle Q^{-1}Mu,\ u\rangle|\end{matrix}\right\} \geqslant \varepsilon_1 \|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 - C_1\|u\|^2, \tag{26$_{1,2}$}$$

где 1-*й или* 2-*й варианты отвечают условиям* (15$_{1,2}$) *соответственно. Одновременно неравенства* (26$_{1,2}$) *справедливы при условиях теоремы и для* *$u \in D(M^+_{\max})$, *если заменить в них* M на M^+.

Замечание 2. В силу (21) — (23) условия (24), (25) выполнены, если, соответственно,

$$\boldsymbol{Z}|Q^{-1/2}A^{-1/2}(h_J - B_J A^{-1}a)| \leqslant C,\ |Q^{-1/2}A^{-1/2}(h_R - B_R A^{-1}a)| \leqslant C \tag{27$_{1,2}$}$$.

Доказательство. Положим в лемме $\varphi(x) = Q^{-1/2}(x) \times \times \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right)_+$, и перейдем к пределу в (16$_{1,2}$) при $N_k \to \infty$, замечая, что в силу условий теоремы $0 \leqslant \varphi Q^{1/2} \leqslant 1$,

$$\max\{2^{1/4}|B_R^{1/2}\nabla\varphi|,\ |(B\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)|^{1/2}\} \leqslant |A^{1/2}\nabla\varphi| \leqslant A^{1/2}\nabla Q^{-1/2}| + \\ + |Q^{-1/2}A^{1/2}\nabla P/N_k| \leqslant K' + C; \tag{28$_1$}$$

$$|\langle\varphi(B_J\nabla - ih_J)u,\ u\nabla\varphi\rangle| \leqslant |\langle\varphi A^{-1/2}B_J A^{-1/2}\boldsymbol{D}u; \\ uA^{1/2}\nabla\varphi\rangle| + |\langle i\varphi A^{-1/2}(-h_J + B_J A^{-1}a)u,\ uA^{1/2}\nabla\varphi\rangle| \leqslant \\ \leqslant 2^{-1}\beta^2\|\varphi\boldsymbol{D}u\|^2 + 2^{-2}\beta^{-2}(K' + C)^2\|u\|^2 + \|u\|^2\{\operatorname{vrai\,sup}|Q^{-1/2} \times \\ \times ((h_J - B_J A^{-1}a),\ \nabla(Q^{-1/2}(1 - PN_k^{-1})))|\}, \tag{28$_2$}$$

так как $|A^{-1/2}B_J A^{-1/2}| \leqslant 2^{-1/2}$. Учитывая (24) и произвольную малость $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, получаем (26$_1$) из (16$_1$). Оценивая в (16$_2$) последнее слагаемое по схеме (28$_2$) с учетом (25) и так как $|A^{-1/2}B_R A^{-1/2}| \leqslant \leqslant 2^{-1/2}$ и используя (28$_1$) и (28$_2$), получаем (26$_2$). Теорема доказана, ибо (15$_{1,2}$) справедливы одновременно и для M^+.

---

* Следовательно, $\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}w\| < \infty$ при $w \in D(M_{\max}) + D(M^+_{\max})$.

Теорема 4. *Пусть операция* M (12) *и кусочно гладкая функция* $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *таковы, что для некоторой монотонной последовательности* $0 < N_k \to \infty$ *и финитной кусочно гладкой функции* $\theta(t) \geqslant 0,\ \theta(0) = 1,\ \theta(t) = 0$ *при* $t \geqslant 1$,

$$\int \left| \theta'\left(\frac{P(x)}{N_k}\right) \right| \cdot |((B(x)\nabla - ib(x))u,\ \nabla P(x))|^2\, dx = O(N_k^2) \qquad (29)$$

при каждом $u \in D(M_{\max})$. *Тогда интеграл Дирихле* $D_M[u, v]$, *отвечающий операции* M, *существует в смысле суммирования с ядром* $\theta_1(P(x)/N_k)$ *при любых* $u \in D(M_{\max})$, $v \in W^1_{2,\mathrm{loc}} \cap L_2$:

$$D_M[u, v] \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k \to \infty} \int \theta_1(P(x)/N_k)\{((B\nabla - ib)u,\ \nabla v) + $$
$$+ i(\nabla u,\ c)\bar{v} + p(x)u\bar{v}\}\, dx, \qquad (30)$$

причем $D_M[u, v] = \langle Mu, v\rangle$; $\theta_1(t) = \theta(t) - \theta'(+0)(t - t^2/\delta)_+$.

Доказательство. Будем считать, что $\theta'(+0) = 0$, так как в противном случае можно заменить $\theta(t)$ на $\theta_1(t) = \theta(t) - \theta'(+0) \times \times (t - t^2/\delta)_+$, где $0 < \delta \leqslant 1$ и $|\theta'(t)| \geqslant \frac{1}{2}|\theta'(+0)|$ при $t \in (0, \delta)$. Тогда $\theta_1'(+0) = 0$ и $|\theta_1'(t)| \leqslant 3|\theta'(t)|$ при $t \in (0, 1)$, а потому (29) справедливо и при замене θ на θ_1. Так как $\bar{v}Mu \in L_1$, то достаточно показать, что $J_k \to 0$, $(N_k \to \infty)$, где

$$J_k \overset{\mathrm{def}}{=} \int \theta(P(x)/N_k)\{((B(x)\nabla - ib(x))u,\ \nabla v) + i(\nabla u,\ c(x))\bar{v} +$$
$$+ p(x)u\bar{v} - \bar{v}Mu\}\, dx = \int \theta(P(x)/N_k)\{((B\nabla - ib)u,\ \nabla v) +$$
$$+ \bar{v}\nabla((B\nabla - ib)u)\}\, dx = \int \theta(P(x)/N_k)\nabla(\bar{v}(B\nabla - ib)u)\, dx =$$
$$= -\frac{1}{N_k}\int \theta'(P(x)/N_k)\bar{v}((B\nabla - ib)u,\ \nabla P)\, dx.$$

Отсюда следует в силу (29):

$$|J_k|^2 \leqslant N_k^{-2}\int |\theta'(P/N_k)| \cdot |v|^2\, dx \cdot \int |\theta'(P/N_k)| \times$$
$$\times |((B\nabla - ib)u,\ \nabla P)|^2\, dx = N_k^{-2} \cdot o(\|v\|^2) \cdot O(N_k^2) \to 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *Если при каждом* $v \in D(M^+_{\max})$ *при* $N_k \to \infty$

$$\int |\theta'(P(x)/N_k)| \cdot |((B^*(x)\nabla - ic(x))v,\ \nabla P)|^2\, dx = O(N_k^2), \qquad (31)$$

то при $\forall u \in W^1_{2,\mathrm{loc}} \cap L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *существует интеграл Дирихле*

$$D_{M^+}[v, u] \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k \to \infty} \int \theta_1(P(x)/N_k)\{((B^*\nabla - ic)v,\ \nabla u) +$$
$$+ i(\nabla v,\ b)\bar{u} + \bar{p}(x)v\bar{u}\}\, dx, \qquad (32)$$

причем $D_{M^+}[v, u] = \langle M^+v, u\rangle$.

Следствие 4. *Если одновременно выполнены условия теоремы 4 и следствия 3, то при любых* $u \in D(M_{\max})$, $v \in D(M^{+}_{\max})$

$$D_M[u, v] = \overline{D_{M^+}[v, u]}, \qquad (33)$$

а потому $\langle Mu, v\rangle = \overline{\langle M^+v, u\rangle} = \langle u, M^+v\rangle$ *и* $M_{\max} = M_{\min}$, $M^{+}_{\max} = M^{+}_{\min}$. *В частности, если выражение* M *формально самосопряжено, то оператор* M *на* C_0^∞ *существенно самосопряжен, а* $M_{\max}$ *самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$.

Доказательство. Равенство (33) непосредственно вытекает из (30) и (32) в силу приведения подобных членов, а остальные утверждения следуют из (33) с очевидностью.

Укажем достаточные условия, при которых выполнено (29), т. е. применима теорема 4 (ср. [3]):

Теорема 5. *Если оператор* M *имеет вид* (20) *(или* (12) *с* $b(x) = \overline{c}(x)$*), то при условиях теоремы 3* и (27) *с заменой* (23) *более жестким требованием*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x:P(x)<N_k} |Q^{1/2}(x)\,A^{1/2}(x)\,\nabla P(x)| \leqslant CN_k \to \infty \qquad (34)$$

выполняются одновременно условия (29) *и* (31). *Если же* M *имеет вид* (12) *с* $b \neq \overline{c}$, *то, кроме* (34), *следует потребовать*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x:P(x)<N_k} |((b(x) - \overline{c(x)}),\ \nabla P(x))| \leqslant CN_k \to \infty \qquad (35)$$

для обеспечения (29), (31), *а* (35) *обеспечивается требованием*

$$|Q^{-1/2}(x)\,A^{-1/2}(x)\,(b(x) - \overline{c(x)})| < C. \qquad (36)$$

Доказательство. Имеем $B\nabla - ib = BA^{-1/2}\boldsymbol{D} + i\,(BA^{-1}a - b) = BA^{-1/2}\boldsymbol{D} + (h_J - B_JA^{-1}a) - i\,(h_R - B_RA^{-1}a) + \frac{1}{2}\,i\,(\overline{c} - b)$. Соответственно левая часть (29) разбивается на слагаемые, каждое из которых допускает оценку вида CN_k^2, чем устанавливается (29) и аналогично — (31). Действительно, рассмотрим, учитывая (34):

$$\int \left|\theta'\left(\frac{P(x)}{N_k}\right)\right| \cdot |(BA^{-1/2}\boldsymbol{D}u,\ \nabla P)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_{P(x)<N_k} |(Q^{-1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})\,\boldsymbol{D}u,\ Q^{1/2}A^{1/2}\nabla P)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant CN_k^2\,\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 = O(N_k^2),$$

так как в силу $(26_{1,2})$ $\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 < \infty$. Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Например, в силу (34) и (27) имеем

$$\int |\theta'(P(x)/N_k)| \cdot |((h_R - B_RA^{-1}a)\,u,\ \nabla P)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C \int\limits_{P(x)<N_k} |Q^{-1/2}A^{-1/2}(h_R - B_RA^{-1}a)\,u,\ Q^{1/2}A^{1/2}\nabla P)|^2\,dx \leqslant C_1\,\|u\|^2\,N_k^2.$$

Теорема доказана. Ее условия обеспечивают применимость теоремы 4 и одновременно — справедливость $(26_{1,2})$, а потому — конечность интеграла энергетического типа $\langle Q^{-1}\boldsymbol{D}u, \boldsymbol{D}u\rangle$ при $u \in D(M_{max}) + D(M_{\max}^{+})$. Однако для справедливости (29) и применимости теоремы 4 последнее не обязательно, как и условие (22), от которого можно избавиться с помощью подходящего изменения потенциала оператора сравнения.

Теорема 6. *Пусть для операции* M (12) *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *и любых* $u \in C_0^\infty$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re}\langle Mu, u\rangle \geqslant \langle \Lambda_{\varepsilon K}u, u\rangle \tag{37}$$

где

$$\Lambda_{\varepsilon K} = L_{\varepsilon K} + (2^{-1/2} + \varepsilon)\, Q(x)\, |A^{1/2}(x)\, \nabla Q^{-1/2}(x)|^2, \tag{38}$$

операция $L_{\varepsilon K}$ *задана формулами* (14) *и* (21), *кусочно гладкие функции* $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$ *и* $0 \leqslant P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *удовлетворяют условиям* (23) *и* (24), *а также*

$$|A^{-1/2}(x)\, B_J(x)\, \nabla Q^{-1/2}(x)| \leqslant K'/\sqrt{2} = \text{const}. \tag{39}$$

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon, C, K, K') \geqslant 0$, *что при любых* $u \in D(M_{\max})$

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Mu, u\rangle \geqslant \varepsilon_1 \| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 + \varepsilon_2 \| uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 - C_1 \|u\|^2. \tag{40}$$

Если же (23) *заменить более жестким требованием* (34), *то при* (35) *и* (27_1) *обеспечиваются условия применимости теоремы 4 и ее следствий. В этом случае в частности* $M_{\max} = M_{\min}$.

Доказательство. Так как $\Lambda_{\varepsilon K}$ отличается от $L_{\varepsilon K}$ лишь добавкой к потенциалу (38), первый вариант леммы остается справедливым при замене условия (15_1) на (37) и одновременной добавке к правой части (16_1) слагаемого

$$(2^{-1/2} + \varepsilon)\, \| Q^{1/2}\varphi u A^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2.$$

Отсюда, полагая $\varphi = Q^{-1/2}(x)\left(1 - \frac{P(x)}{N}\right)_+$ и учитывая справедливость (28_2) при условии (39) вместо (22), (но с учетом (24)), а также учитывая, что $B_R \leqslant 2^{-1/2}A$, получаем следующую оценку, где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ — любые, $N = N_k$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle (1 - P(x)/N)_+^2 Q^{-1}(x)\, Mu, u\rangle \geqslant \varepsilon(1 - \alpha^2)\, \| (1 - P(x)/N)_+ \times \\ \times Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 - K\|u\|^2 - [\varepsilon(\alpha^{-2} - 1) + 2^{-1/2}]\{(1 + \beta^2) \times \\ \times \|(1 - P/N)_+ uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 + (1 + \beta^{-2})\, \|uQ^{-1/2}A^{1/2}\nabla P/N\|^2_{\{P(x)<N\}}\} + \\ + (2^{-1/2} + \varepsilon)\, \|(1 - P/N)_+ uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 - \beta^2 \|(1 - P/N)_+ Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|^2 - \\ - 2^{-1}\beta^{-2}(K' + C)^2 \|u\|^2 - 2C\|u\|^2.\end{aligned} \tag{41}$$

Выберем теперь $\alpha < 1$ достаточно близким к 1, а $\beta > 0$ — достаточно малым, чтобы при данном $\varepsilon > 0$ было $\varepsilon_2 = 2^{-1/2} + \varepsilon - [\varepsilon(\alpha^{-2} - 1) +$

$+2^{-1/2}](1+\beta^2)>0$, $\varepsilon_1=\varepsilon(1-\alpha^2)-\beta^2>0$, после чего, учитывая (23) и переходя к пределу при $N_k\to\infty$, получаем из (41) неравенство (40) с некоторым $C_1\geqslant 0$, не зависящим от u. Поэтому в частности $\|Q^{-1/2}\boldsymbol{D}u\|<\infty$, и если выполнены условия (34), (35), (24) и (27), то применимость теоремы 4 и ее следствий доказываются точно так же, как и в теореме 5. Теорема доказана. Ее следствием является

Теорема 7. *Пусть для операции M (12) при некоторых $\varepsilon>0$, $K\geqslant 0$ и любых $u\in C_0^\infty$ выполняются* (37) *и* (38), *но с*

$$L_{\varepsilon K}=\varepsilon\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}-KQ(x)P^2(x),\ Q(x)P^2(x)\geqslant 1, \tag{14'}$$

*а кусочно гладкие функции $Q^{-1/2}(x)\geqslant 0$, $0<P(x)\to\infty$, $(|x|\to\infty)$, удовлетворяют условиям**

$$|P^{-2}(x)Q^{-1/2}(x)A^{1/2}(x)\nabla P(x)|\leqslant C; \tag{23'}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\substack{x:P(x)<N_k\\ 1<k<\infty}}|(Q^{-1/2}(h_J-B_JA^{-1}a),\ P^{-1}\nabla(Q^{-1/2}(P^{-1}-N_k^{-1})))|<C, \tag{24'}$$

а также

$$\sup_{x,N}\left|A^{-1/2}(x)B_J(x)\nabla\left(Q^{-1/2}(x)\left(\frac{1}{P(x)}-\frac{1}{N}\right)_+\right)\right|\leqslant K_1. \tag{39'}$$

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon)>0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon)>0$, $C_1=C_1(\varepsilon, C, K, K_1)\geqslant 0$, что при любых $u\in D(M_{\max})$,

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\langle Q^{-1}P^{-2}Mu,\ u\rangle\geqslant\varepsilon_1\|Q^{-1/2}P^{-1}\boldsymbol{D}u\|^2+\\ +\varepsilon_2\|uA^{-1/2}\nabla(Q^{-1/2}P^{-1})\|^2-C_1\|u\|^2.\end{gathered} \tag{40'}$$

Если же (23′) заменить более жестким требованием

$$|Q^{1/2}(x)A^{1/2}(x)\nabla P(x)|\leqslant C, \tag{34'}$$

а также потребовать (35) *и*

$$|Q^{-1/2}P^{-1}A^{-1/2}(h_J-B_JA^{-1}a)|\leqslant C, \tag{27$_1$}$$

то обеспечиваются условия применимости теоремы 4 и ее следствий. В этом случае в частности $M_{\max}=M_{\min}$.

Доказательство. Положим $Q_1(x)=Q(x)P^2(x)\geqslant 1$. Тогда оказываются выполненными условия первой части теоремы 6 при замене Q на Q_1 в формулах (14), (23) и (24) в силу (14′), (23′) и (24′), а также в (39) в силу (39′). Поэтому при этих условиях справедливо (40) с заменой Q на Q_1, что эквивалентно (40′), если только показать справедливость (37), (38) при замене Q на Q_1. Докажем справедливость этих формул.

---

* Здесь $Q(x)\geqslant 1$ не требуется, достаточно $Q(x)>0$.

Прежде всего, (14′) означает, что $L_{\varepsilon K} = \varepsilon \boldsymbol{D}^* \boldsymbol{D} - K Q_1(x)$, а это совпадает с $L_{\varepsilon K}$ (14) при замене там Q на Q_1. Переходя к (38), рассмотрим величину

$$\begin{aligned}(2^{-1/2}+\varepsilon)\, Q\,|\, A^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\,|^2 &= (2^{-1/2}+\varepsilon)\, Q_1 P^{-2}\,|\, A^{1/2}\nabla(Q_1^{-1/2}P)\,|^2 = \\ &= (2^{-1/2}+\varepsilon)\, Q_1\,|\, A^{1/2}\nabla Q_1^{-1/2} + P^{-2}Q^{-1/2}A^{1/2}\nabla P\,|^2 \geqslant \\ &\geqslant (2^{-1/2}+\varepsilon)(1-\gamma^2)\, Q_1\,|\, A^{1/2}\nabla Q_1^{-1/2}\,|^2 - (2^{1/2}+\varepsilon)(\gamma^{-2}-1)\, C^2 Q_1 \geqslant \\ &\geqslant (2^{-1/2}+\varepsilon')\, Q_1\,|\, A^{1/2}\nabla Q_1^{-1/2}\,|^2 - C' Q_1 \end{aligned} \tag{42}$$

при достаточно малых $\gamma > 0$, $\varepsilon' > 0$ и достаточно большом $C' > 0$. Здесь была учтена оценка (23′). Сопоставляя (42) с (14′), с (37) и (38), видим, что (37) и (38) остаются в силе при замене в (38) Q на $Q_1 = QP^2$ с одновременной заменой ε на достаточно малое $\varepsilon' > 0$ и K на $K + C'$. Итак, (40′) доказано. В частности, $\| Q_1^{-1/2} \boldsymbol{D} u \| = \| Q^{-1/2} P^{-1} \boldsymbol{D} u \| < \infty$ и, учитывая остальные условия теоремы 7, убеждаемся в применимости теоремы 4 и ее следствий точно так же, как в теоремах 5 и 6, но с заменой Q на Q_1. Теорема доказана.

Замечание 3. При условиях теоремы 7 конечность нормы $\| Q^{-1/2} \boldsymbol{D} u \|$, очевидно, не обязательна. Можно лишь утверждать, что существует зависящая от $u \in D(M_{\max})$ константа $K_1[u] = \| Q_1^{-1/2} \boldsymbol{D} u \|^2 \geqslant 0$ такая что

$$\int\limits_{P(x) < N_k} Q^{-1}(x)\, |\boldsymbol{D} u(x)|^2\, dx \leqslant K_1[u] \cdot N_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

§ 3. Симметрическое выражение. Здесь мы особо сформулируем вытекающие из результатов § 2 теоремы о существенной самосопряженности, так как они представляют наибольший интерес, а звучат наиболее просто. Положим

$$L = (i\nabla + b(x))^* A(x)(i\nabla + b(x)) + q(x), \tag{43}$$

где $q(x) \in \boldsymbol{R}$, $b(x) \in \boldsymbol{R}^n$, $A(x) = A^*(x) > 0$ — вещественная позитивная матрица. Очевидно, $L = \boldsymbol{D}_1^* \boldsymbol{D}_1 + q$, где $\boldsymbol{D}_1 \equiv A^{1/2}(x)(i\nabla + b(x)) = i\boldsymbol{D} \equiv i(A^{1/2}\nabla - iA^{-1/2}a)$ при $a(x) = A(x)\, b(x)$, и пусть

$$L_{\varepsilon K} = \varepsilon \boldsymbol{D}_1^* \boldsymbol{D}_1 - K Q(x); \tag{44}$$

$$\Lambda_{\varepsilon K} = L_{\varepsilon K} + (1+\varepsilon)\, Q(x)\,|\, A^{1/2}(x)\nabla Q^{-1/2}(x)\,|^2; \tag{45}$$

$$\Lambda_{\varepsilon K}^P = \varepsilon \boldsymbol{D}_1^* \boldsymbol{D}_1 - K Q(x) P^2(x) + (1+\varepsilon)\, Q(x)\,|\, A^{1/2}(x)\nabla Q^{-1/2}(x)\,|^2, \tag{46}$$

где $0 \leqslant Q^{-1/2}(x) \leqslant 1$, $0 < P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ — так же, как и прежде, кусочно гладкие функции. Из теоремы 3 следует

Теорема 8. *Пусть при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *для* (43), (44) *выполняется при любых* $u \in C_0^\infty$ *неравенство*

$$\langle Lu, u\rangle \geqslant \langle L_{\varepsilon K} u, u\rangle,$$

и пусть существуют такие P *и* Q *указанного выше вида, что выполнены условия* (22) *и* (23). *Тогда при любом* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ *найдется* $C_1 =$

$= C_1(\varepsilon_1, \varepsilon, K, K', C) \geqslant 0$ *такое, что при всяком* $u \in D\ (L_{\max})$ *выполняется неравенство типа Гординга:*

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1 \| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}_1 u\|^2 - C_1\|u\|^2.$$

Следующая теорема вытекает из теоремы 5 (ср. [3]).

Теорема 9. *При условиях теоремы* 8 *с заменой* (23) *более жестким* (34) *оператор* L (43) *существенно самосопряжен на* C_0^∞, *т. е.* $L_{\max}$ *самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, *и для оператора* L *при любых* $u \in D(L_{\max})$, $v \in W^1_{2,\,\mathrm{loc}} \cap L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *существует интеграл Дирихле в смысле суммирования с ядром* $\theta(P(x)/N)$, *где* $\theta(t)$ — *финитная, кусочно гладкая функция,* $\theta(t) \geqslant 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta(t) = 0$ *при* $t \geqslant 1$, *а в остальном — любая;*

$$D_L[u,\ v] \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{N_k\to\infty} \int \theta(P(x)/N_k)\{(A(x)(i\nabla + b(x))u,\ (i\nabla + b(x)v) + q(x)u\bar{v}\}\,dx, \tag{47}$$

причем

$$D_L[u,\ v] = \langle Lu,\ v\rangle. \tag{48}$$

Из теоремы 6 непосредственно вытекает следующая.

Теорема 10. *Пусть для операций* L (43) *и* $\Lambda_{\varepsilon K}$ (45) *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *и любых* $u \in C_0^\infty$ *выполнено неравенство*

$$\langle Lu,\ u\rangle \geqslant \langle \Lambda_{\varepsilon K} u,\ u\rangle$$

и функции P *и* Q *удовлетворяют* (23). *Тогда найдутся такие числа* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon, K, C)$, *что при любых* $u \in D\ (L_{\max})$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1\| Q^{-1/2}\boldsymbol{D}_1 u\|^2 + \varepsilon_2\| uA^{1/2}\nabla Q^{-1/2}\|^2 - C_1\|u\|^2.$$

Если же (23) *заменить более жестким условием* (34), *то оператор* L *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *и для него существует интеграл Дирихле в смысле* (47) *и справедливо* (48).

Следующая теорема 11 является частным случаем теоремы 7, а также следствием теоремы 10.

Теорема 11. *Пусть для операций* L (43) *и* $\Lambda^P_{\varepsilon K}$ (46) *при некоторых* $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$ *и любых* $u \in C_0^\infty$ *выполнено неравенство*

$$\langle Lu,\ u\rangle \geqslant \langle \Lambda^P_{\varepsilon K} u,\ u\rangle, \tag{49}$$

а функции $Q(x) > 0$, $0 < P(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ *подчинены условию*

$$Q(x)P^2(x) \geqslant 1 \tag{50}$$

(*но* $Q(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$ *не требуется, как и в теореме* 7). *Тогда при условии* (23′) $|P^{-2}(x)Q^{-1/2}(x)A^{1/2}(x)\nabla P(x)| \leqslant C$ *найдутся такие числа* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(\varepsilon, K, C) \geqslant 0$, *что при любых* $u \in D(L_{\max})$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1}P^{-2}Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon_1\|Q^{-1/2}P^{-1}\boldsymbol{D}_1 u\|^2 + \varepsilon_2\|uA^{1/2}\nabla(Q^{-1/2}P^{-1})\|^2 - C_1\|u\|^2, \tag{51}$$

а при замене (23′) *более жестким требованием* (34′): $|Q^{1/2}(x)A^{1/2}\times$ $\times(x)\nabla P(x)|\leqslant C$ *оператор* L *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$ *и для него существует интеграл Дирихле* (47), *причем допустимо непрерывное стремление* $N\to\infty$ *в* (47), *а не только по последовательности* N_k, *и выполняется равенство* (48).

Замечание 4. Б. Гелльвиг [8] принадлежит следующая интересная теорема, которая оказывается важным частным случаем теоремы 11.

Теорема Б. Гелльвиг. *Оператор* L (43) *существенно самосопряжен в* $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, *если выполнены следующие условия.*

Существуют такие функции $0<\varphi(x)\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\nabla\varphi\neq 0$, $\varphi(x)\to$ $\to 0$ *при* $|x|\to\infty$ *и* $0<M(t)\in C^1(\boldsymbol{R})$, *что если положить*

$$\rho(t)=\sup_{\varphi(x)=t}(A(x)\nabla\varphi,\ \nabla\varphi); \tag{52}$$

$$P_0(t)=\int_t^{t_0}\{\rho(\tau)M(\tau)\}^{-1/2}\,d\tau, \tag{53}$$

то

$$\lim_{t\to+0}P_0(t)=\infty \tag{54}$$

и при некоторых $C_1>0$, $C_2>0$, $0<\alpha<2$, $t_0>t_1>0$

$$M^{-1}(t)\leqslant C_1P_0^2(t),\quad 0<t<t_1<t_0; \tag{55}$$

$$\frac{2}{\alpha}(A(x)\nabla\varphi,\nabla\varphi)\left[\frac{d}{dt}M^{-1/2}(\varphi(x))\right]^2-\frac{q(x)}{M(\varphi(x))}\leqslant C_2P_0^2(t)$$

при достаточно малых $t>0$, $\varphi(x)=t$.

Легко видеть, что если положить в теореме 11

$$Q(x)=M(\varphi(x)),\ P(x)=P_0(\varphi(x)), \tag{57}$$

то ее условия удовлетворяются при условиях теоремы Б. Гелльвиг для достаточно больших $|x|$, например, при $|x|>N$ при некотором $N>0$. Для существенной самосопряженности оператора L с гладкими, как в [8], коэффициентами и для сходимости интегралов энергетического типа*, отвечающих оператору L, но без оценок для них в норме графика и без неравенств типа Гординга этого достаточно, так как самосопряженность рассматриваемого оператора L обеспечивается его симметричностью на тех функциях из $D(L_{\max})$, носители которых лежат вне произвольно большого шара. Поясним, что условие (50) теоремы 11 следует из условия (55) теоремы Б. Гелльвиг, учитывая произвольность выбора множителя K в (46), условие (34′), а тем более и (23′), следует из (52) и (53) в силу (57), а (49) является прямым следствием условия (56), так как $2/\alpha=1+\varepsilon$. Выведем, например, (34′). Имеем

$$|Q^{1/2}A^{1/2}\nabla P|=|M^{1/2}A^{1/2}\{\rho(\varphi)M(\varphi)\}^{-1/2}\nabla\varphi|=$$
$$=|A^{1/2}\nabla\varphi|\cdot\{\sup(A\nabla\varphi,\ \nabla\varphi)\}^{-1/2}\leqslant 1.$$

---

* В [8] она не установлена, имеется лишь неравенство типа Замечание 3, но без вида $K_1[u]$.

Теорема 11 является более общей по ряду причин, в том числе вместо неравенства для коэффициентов (56) требуется лишь неравенство (49) для операторов в смысле форм на C_0^∞, не требуется функциональной зависимости между $Q(x)$ и $P(x)$, которая следует из (57), нет ограничительного требования $\nabla P \neq 0$, вытекающего из условия Б. Геллывиг $|\nabla\varphi| > 0$ в силу (57), (53). А именно допущение равенства $\nabla P = 0$ на множестве положительной меры позволяет из теорем установленного вида получить, как следствие, условия существенной самосопряженности, задающие ограничения на коэффициенты лишь на последовательности телесных слоев, как, например, в [2—4]. С другой стороны в [8] рассматривается L_2 с весом, а также оператор в конечных и бесконечных областях, однако наш метод легко распространяется и на эти случаи.

Список литературы: 1. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О неполуограниченных дифференциальных операторах // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1966. Вып. 2. С. 178—184. 2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности оператора Шредингера // Мат. заметки. 1970. **8**, № 6. С. 741—751. 3. *Рофе-Бекетов Ф. С., Холькич А. М.* Условия самосопряженности операторов эллиптического типа второго порядка общего вида // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1973. Вып. 17. С. 41—51. 4. *Брусенцев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка // Мат. сб. 1974. **95**, № 1(9). С. 108—129. 5. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 6. *Березин Ф. А., Шубич М. А.* Уравнение Шредингера. М., 1983. 392 с. 7. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963. 340 с. 8. *Hellwig B.* A criterion for self-adjiointness of singular elliptic differential operators // J. Math. anal. and appl. 1969. **26**, N 2. P. 279-291.

Поступила в редколлегию 30.12.88

УДК 517.535

М. Н. ШЕРЕМЕТА

ДВУЧЛЕННАЯ АСИМПТОТИКА ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

1°. Введение. Для целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{1}$$

пусть $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а $n_f(r)$ — количество нулей в $\{z : |z| \leqslant r\}$. Из более общих теорем теории целых функций вполне регулярного роста можно для функций (1) с нулями на одном луче получить условия на $n_f(r)$, при выполнении которых $\ln M_f(r) = (1 + o(1))\Delta r^\rho (r \to +\infty)$, $\rho \in]0, +\infty[$, $\Delta \in]0, +\infty[$. Э. Линделеф показал [1], что это соотношение выполняется тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $\ln|a_n| \leqslant -\frac{n}{\rho} \ln \frac{n}{e\rho(\Delta + \varepsilon)}$ $(n \geqslant n_0(\varepsilon))$ и существует последовательность (n_k) такая, что $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$ $n_{k+1}/n_k \to 1$ $(k \to \infty)$ и $\ln|a_n| \geqslant -\frac{n}{\rho} \ln \frac{n}{e\rho(\Delta - \varepsilon)}$ при $n = n_k$.

Связь между ростом функции (1) с нулями на одном луче и ростом $n_f(r)$ в терминах двучленной асимптотики изучалась в работах различных авторов. Основной вклад в решение этой проблемы сделал В. Н. Логвиненко [2, 3]. Связь же роста $\ln M_f(r)$ с убыванием коэффициентов a_n в терминах двучленной асимптотики не изучена. Этому вопросу посвящена настоящая работа. Из более общей доказанной для целых рядов Дирихле теоремы 6 вытекает следующий аналог теоремы Линделефа: для того чтобы $\ln M_f(r) = \Delta r^{\rho} + (1 + o(1))\Delta_1 r^{\rho_1}$, $0 < \rho_1 < \rho < +\infty$, $0 < \Delta < +\infty$, $\Delta_1 \in \boldsymbol{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $\ln|a_n| \leqslant -\frac{n}{\rho} \times \times \ln\frac{n}{e\rho\Delta} + (\Delta_1 + \varepsilon)\left(\frac{n}{\rho\Delta}\right)^{\rho_1/\rho}$ $(n \geqslant n_0(\varepsilon))$ и существовала возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\ln|a_n| \geqslant \geqslant -\frac{n}{\rho}\ln\frac{n}{e\rho\Delta} + (\Delta_1 - \varepsilon)\left(\frac{n}{\rho\Delta}\right)^{\rho_1/\rho}$ при $n = n_k$ и $n_{k+1} - n_k = o(n_k^{(\rho+\rho_1)/2\rho}) \times \times (k \to \infty)$.

2°. Связь между ростом максимума модуля, максимального члена и убыванием коэффициентов целого ряда Дирихле. Целым рядом Дирихле называется абсолютно сходящийся в $\boldsymbol{C}$ ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n),\ s = \sigma + it, \tag{2}$$

где $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$. Положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \boldsymbol{R}\}$, и пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \in \boldsymbol{N}\}$ — максимальный член, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|\exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ — центральный индекс ряда (2). Через $n(t)$ обозначим считающую функцию последовательности (λ_n). Зависимость между ростом величины $M(\sigma, F)$ и убыванием коэффициентов a_n обычно характеризуется в терминах R-порядка ρ_R и R-типа T_R, определенных равенствами

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{1}{\sigma} \ln\ln M(\sigma, F),\ T_R = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} e^{-\sigma\rho_R} \ln M(\sigma, F).$$

Важную роль при доказательстве формул для нахождения R-порядка и R-типа через коэффициенты играют неравенство Коши $\mu(\sigma, F) \leqslant \leqslant M(\sigma, F)$ и оценки сверху $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$. Так как мы будем изучать двучленную асимптотику, нам будут нужны более гибкие оценки $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$, чем ранее известные.

Теорема 1. *Если*

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \ln n(t)/\ln t = h < +\infty, \tag{3}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *при* $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$ *имеет место неравенство*

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant \ln\mu(\sigma, F) + (h + \varepsilon)\ln\left\{\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\mu(\sigma + 2\varepsilon, F)}{\mu(\sigma + \varepsilon, F)}\right\}. \tag{4}$$

Доказательство. При $\lambda_n > 2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}$ имеем

$$|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = |a_n| \exp\{(\sigma+\varepsilon)\lambda_n\} \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\sigma+\varepsilon, F) \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} = |a_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}| \exp\{(\sigma+\varepsilon)\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}\} \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} =$$
$$= |a_{\nu(\sigma+\varepsilon)F)}| \exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}\} \exp\{\varepsilon(\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)} - \lambda_n)\} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\sigma, F) \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{1}{2}\lambda_n - \lambda_n\right)\right\} = \mu(\sigma, F) \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_n\right\}.$$

Поэтому

$$M(\sigma, F) \leqslant \Big(\sum_{\lambda_n \leqslant 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)} + \sum_{\lambda_n > 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)}\Big) |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) \leqslant$$
$$\leqslant \mu(\sigma, F)\, n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}) + \mu(\sigma, F) \sum_{\lambda_n > 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_n\right\}. \quad (5)$$

Из (3) вытекает, что $\ln n(t) \leqslant \left(h + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \ln t$ для всех достаточно больших t. Поэтому для всех достаточно больших σ имеем

$$\sum_{\lambda_n > 2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda_n\right\} \leqslant \int\limits_{2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon t\right\} dn(t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \int\limits_{2\lambda\nu(\sigma+\varepsilon,F)}^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon t\right\} dt \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{3} t\right\} dt =$$
$$= \frac{3}{2} \exp\left\{-\frac{2}{3}\varepsilon\lambda\nu(\sigma+\varepsilon, F)\right\} \to 0 \ (\sigma \to +\infty).$$

Таким образом, из (5) получаем

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}) + o(1) \leqslant$$
$$\leqslant \ln \mu(\sigma, F) + (h+\varepsilon) \ln \lambda\nu(\sigma+\varepsilon, F) \ (\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)) \quad (6)$$

Так как

$$\ln \mu(\sigma+2\varepsilon, F) - \ln \mu(\sigma+\varepsilon, F) = \int\limits_{\sigma+\varepsilon}^{\sigma+2\varepsilon} \lambda_{\nu(t,F)}\, dt \geqslant \varepsilon\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon,F)}),$$

из (6) легко получаем (4). Теорема 1 доказана.

Обозначим через Ω класс положительных на $]-\infty, +\infty[$ функций Φ таких, что производная Φ' непрерывна на $]-\infty, +\infty[$ и возрастает к $+\infty$. Функция $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ называется (см., например, [4]) ассоциированной с Φ функцией Ньютона. Покажем, что если $\Phi \in \Omega$, то Ψ — возрастающая к $+\infty$ функция. Действительно, для любых $x \in \boldsymbol{R}$ и $\delta > 0$ имеем

$$\Phi'(x)\Phi(x+\delta) - \Phi'(x+\delta)\Phi(x) = (\Phi'(x) - \Phi'(x+\delta))\Phi(x) +$$
$$+ \Phi'(x)(\Phi(x+\delta) - \Phi(x)) < \Phi'(x) \int\limits_{x}^{x+\delta} \Phi'(t)\, dt < \delta\Phi'(x)\Phi'(x+\delta),$$

т. е. $\Phi(x+\delta)/\Phi'(x+\delta)-\Phi(x)/\Phi'(x)<\delta=x+\delta-x$ и, значит, $\Psi(x)<\Psi(x+\delta)$. Таким образом, Ψ — возрастающая функция. Если бы она была ограничена числом M, то при $x\geqslant M+1$ выполнялось бы неравенство $\Phi'(x)/\Phi(x)\leqslant 1/(x-M)$, т. е. $\Phi(x)\leqslant(x-M)\,\Phi(M+1)$, что невозможно, так как из условия $\Phi'(x)\uparrow+\infty\,(x\to\infty)$ вытекает, что $\frac{1}{x}\Phi(x)\to+\infty\,(x\to+\infty)$. В дальнейшем через φ будем обозначать функцию, обратную к Φ'.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi\in\Omega$. *Для того чтобы* $\ln\mu(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma)$ *для всех* $\sigma>\sigma_0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\ln|a_n|\leqslant\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всех* $n>n_0$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что $\sigma_0=-\infty$. Если $\ln\mu(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma)$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{R}$, то $\ln|a_n|\leqslant\leqslant\ln\mu(\sigma,\ F)-\sigma\lambda_n\leqslant\Phi(\sigma)-\sigma\lambda_n$ для всех $\sigma\in\boldsymbol{R}$ и $n\in\boldsymbol{N}$. Взяв $\sigma=\varphi(\lambda_n)$, получим

$$\ln|a_n|\leqslant\Phi(\varphi(\lambda_n))-\lambda_n\varphi(\lambda_n)=-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))\ \ (n\in\boldsymbol{N}).$$

Наоборот, если $\ln|a_n|\leqslant-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n\in\boldsymbol{N}$, то

$$\begin{aligned}\ln\mu(\sigma,\ F)&\leqslant\max\{-t\Psi(\varphi(t))+\sigma t: t\geqslant 0\}=\\&=\max\{-\Phi'(x)\,\Psi(x)+\sigma\Phi'(x): x\geqslant\varphi(0)\}\leqslant\\&\leqslant\max\{(\sigma-x)\,\Phi'(x)+\Phi(x): x\in\boldsymbol{R}\}=\Phi(\sigma),\end{aligned}$$

так как в силу условия $\Phi'(x)\uparrow+\infty\,(x\to+\infty)$ для любых $x\in\boldsymbol{R}$ и $\sigma\in\boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $\Phi(\sigma)-\Phi(x)=\int\limits_x^\sigma\Phi'(t)\,dt\geqslant(\sigma-x)\Phi'(x)$. Теорема 2 доказана.

Обозначим

$$\varkappa_n=(\ln|a_{n-1}|-\ln|a_n|)/(\lambda_n-\lambda_{n-1}).$$

Теорема 3. *Пусть* $\Phi\in\Omega$, *а* $j\in\boldsymbol{N}$ — *фиксированное число. Если* $\varkappa_n\uparrow+\infty\,(n\to\infty)$ *и* $\ln|a_j|\leqslant-\lambda_j\Psi(\varphi(\lambda_j))$, *то* $\ln\mu(\varkappa_j,\ F)\leqslant\Phi(\varkappa_j)$.

Доказательство. Известно, что если $\varkappa_n\uparrow+\infty\,(n\to\infty)$, то $\mu(\sigma,\ F)=|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)$ при $\varkappa_{n-1}\leqslant\sigma\leqslant\varkappa_n$. Поэтому при $n=j$, как при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\begin{aligned}\ln\mu(\varkappa_j,\ F)&=\ln|a_j|+\lambda_j\varkappa_j\leqslant-\lambda_j\Psi(\varphi(\lambda_j))+\lambda_j\varkappa_j\leqslant\\&\leqslant\max\{-t\Psi(\varphi(t))+t\varkappa_j: t\geqslant 0\}\leqslant\Phi(\varkappa_j),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3⁰. Тип и нижний тип второго члена асимптотики. Предположим, что $0<\rho_R<+\infty$, $0<T_R<+\infty$, а $0<\rho<\rho_R$. Положим

$$\Phi(\sigma,\ \tau)=T_R\exp(\rho_R\sigma)+\tau\exp(\rho\sigma).$$

Величину

$$\tau^*=\inf\{\tau: (\forall\sigma\geqslant\sigma_0(\tau))\,\{\ln M(\sigma,\ F)\leqslant\Phi(\sigma;\ \tau)\}\}$$

назовем типом, а

$$\tau_*=\sup\{\tau: (\forall\sigma\geqslant\sigma_0(\tau))\,\{\ln M(\sigma,\ F)\geqslant\Phi(\sigma;\ \tau)\}\}$$

— нижним типом второго члена асимптотики целого ряда Дирихле (2). Положим

$$V(x;\ t) = -\frac{x}{\rho_R}\ln\frac{x}{e\rho_R T_R} + t\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} (x > 0),$$

$$t^* = \inf\{t : (\forall n \geqslant n_0(t))\{\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ t)\}\}$$

и

$$t_* = \sup\{t : (\forall n \geqslant n_0(t))\{\ln|a_n| \geqslant V(\lambda_n;\ t)\}\}.$$

Теорема 4. *Если показатели ряда* (2) *удовлетворяют условию* (3), *то* $\tau^* = t^*$.

Доказательство. Пусть $\tau^* < +\infty$, а $\tau > \tau^*$ — произвольное число. Тогда $\ln\mu(\sigma, F) \leqslant \ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma;\ \tau)$ при $\sigma \geqslant \sigma_0(\tau)$ и по теореме 2 $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ при $n \geqslant n_0$, где Ψ — ассоциированная с $\Phi(\sigma;\ \tau)$ функция Ньютона, а φ — функция, обратная к функции $\Phi'(\sigma;\ \tau) = \rho_R T_R\exp(\rho_R\sigma) + \rho\tau\exp(\rho\sigma)$. Легко видеть, что

$$\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{1}{\rho_R} - \tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\frac{1}{\rho_R T_R\exp\{\sigma(\rho_R - \rho)\} + \tau\rho} =$$

$$= \sigma - \frac{1}{\rho_R} - (1 + o(1))\frac{\tau}{\rho_R T_R}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\exp\{-\sigma(\rho_R - \rho)\}\ (\sigma \to +\infty). \quad (7)$$

Асимптотику функции φ находим, исходя из уравнения $\rho_R T_R\exp(\rho_R\sigma) + \rho\tau\exp(\rho\sigma) = x$, решение которого ищем в виде $\sigma = \frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x-y}{\rho_R T_R}$, где, очевидно, $y = y(x) = o(x)\ (x \to +\infty)$. Более того, подставляя это значение σ в уравнение, получаем

$$y = \tau\rho\exp\left\{\frac{\rho}{\rho_R}\ln\frac{x-y}{\rho_R T_R}\right\} = (1 + o(1))\,\tau\rho\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} (x \to +\infty).$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{\rho_D T_R} + \frac{1}{\rho_R}\ln\left(1 - \frac{y(x)}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{\rho_R T_R} - (1 + o(1)\frac{\tau\rho}{x\rho_R}\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} (x \to +\infty). \quad (8)$$

Из (7) и (8) вытекает

$$\Psi(\varphi(x)) = \frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{e\rho_R T_R} - (1 + o(1))\frac{\tau}{x}\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} (x \to +\infty). \quad (9)$$

Если теперь $t > \tau$, то из (9) следует, что для всех $n \geqslant n_1 \geqslant n_0$ имеет место неравенство $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) \leqslant V(\lambda_n;\ t)$. Отсюда следует, что $t^* \leqslant t$, и в силу произвольности t и τ получаем неравенство $t^* \leqslant \tau^*$, которое очевидно, если $\tau^* = +\infty$.

Доказательство противоположного неравенства проведем от противного. Допустим, что $t^* < \tau^*$. Выберем числа t и τ так, чтобы $t^* < t < \tau < \tau^*$. Тогда при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ t)$. Как и выше, возьмем $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma;\ \tau)$. Тогда в силу

(9) имеем $-\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) \geqslant V(\lambda_n;\ t)$, т. е. $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех достаточно больших n. Поэтому по теореме 2 $\ln\mu(\sigma,\ F) \leqslant \Phi(\sigma;\ \tau)$, $\tau < \tau^*$ для всех достаточно больших σ. Используя неравенство (4) с $\varepsilon = 1$, получаем, что $\ln M(\sigma,\ F) \leqslant \ln\mu(\sigma,\ F) + O(\ln\ln\mu(\sigma+2)) \leqslant \Phi(\sigma,\ \tau) + O(\sigma)\ (\sigma \to +\infty)$. Отсюда легко вытекает, что $\tau^* \leqslant \tau$, что невозможно. Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (3), $\varkappa_n \uparrow +\infty\ (n \to \infty)$ *и* $\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\lambda_n^{\alpha})\ (n \to \infty)$, $\alpha = (\rho + \rho_R)/2\rho_R$. *Тогда* $\tau_* = t_*$.

Доказательство. Пусть $t_* < +\infty$. Тогда для любого $t > t_*$ существует возрастающая последовательность (n_j) натуральных чисел такая, что $\ln|a_{n_j}| \leqslant V(\lambda_{n_j};\ t)$. Взяв $\tau > t$ и $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma;\ \tau)$, как выше, получим $\ln|a_{n_j}| \leqslant V(\lambda_{n_j};\ t) \leqslant -\lambda_{n_j}\Psi(\varphi(\lambda_{n_j}))$, и по теореме 3 с $\sigma_j = \varkappa_{n_j}$ имеем $\ln\mu(\sigma_j,\ F) \leqslant \Phi(\sigma_j;\ \tau)$. Отсюда, используя неравенство (4) с $\varepsilon = 1$, как при доказательстве теоремы 4, получаем, что $\ln M \times (\sigma_j,\ F) \leqslant T_R \exp(\rho_R \sigma_j) + (1 + o(1))\tau \exp(\rho\sigma_j)\ (j \to \infty)$. Таким образом, $\tau_* \leqslant \tau$ и в силу произвольности t и τ приходим к неравенству $\tau_* \leqslant t_*$, которое очевидно, если $t_* = +\infty$.

Пусть теперь $t_* > -\infty$. Тогда для любого $t < t_*$ при $n \geqslant n_0$ имеем $\ln|a_n| \geqslant V(\lambda_n;\ t)$. Взяв $\tau < t$ и $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma;\ \tau)$, в силу (9), как при доказательстве теоремы 4, получим, что $\ln|a_n| \geqslant V(\lambda_n;\ t) \geqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех достаточно больших n.

Пусть $\varphi(\lambda_n) \leqslant \sigma \leqslant \varphi(\lambda_{n+1})$. Тогда $\sigma = \varphi(\lambda_n + x)$, где $0 \leqslant x \leqslant \lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\lambda_n^{\alpha})\ (n \to \infty)$. Ясно, что $\lambda_n = \Phi'(\sigma) - x$ и $x = o(\lambda_n) = o(\Phi'(\sigma))\ (n \to \infty)$. Поэтому для указанных значений σ в силу (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned}
\ln\mu(\sigma,\ F) &\geqslant \ln|a_n| + \lambda_n \varphi(\lambda_n + x) \geqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) + \lambda_n \varphi(\lambda_n + x) = \\
&= -\frac{\lambda_n}{\rho_R} \ln \frac{\lambda_n}{e\rho_R T_R} + (1 + o(1))\tau \left(\frac{\lambda_n}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} + \frac{\lambda_n}{\rho_R} \ln \frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R} - \\
&\quad - (1 + o(1)) \frac{\tau\rho}{\sigma_R} \left(\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{\lambda_n}{\rho_R}\left\{1 + \ln\left(1 + \frac{x}{\lambda_n}\right)\right\} + \\
&\quad + (1 + o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{\lambda_n}{\rho_R} + \\
&\quad + \frac{\lambda_n}{\rho_R}\left\{\frac{x}{\lambda_n} - (1 + o(1))\frac{x^2}{2\lambda_n^2}\right\} + (1 + o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\lambda_n + x}{\lambda_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&= \frac{\lambda_n + x}{\rho_R} - (1 + o(1))\frac{x^2}{2\rho_R \lambda_n} + (1 + o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\lambda_n + x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&= \frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R} + o(\lambda_n^{\rho/\rho_R}) + (1 + o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&= \frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R} + (1 + o(1))\tau\left(1 - \frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{\Phi'(\sigma)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \\
&= T_R \exp(\sigma\rho_R) + (1 + o(1))\tau \exp(\sigma\rho)\ \ (\sigma \to +\infty).
\end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Коши, легко получаем, что $\tau_* \geqslant \tau$, а в силу произвольности τ и t приходим к неравенству $\tau_* \geqslant t_*$, которое очевидно, если $t_* = -\infty$. Таким образом, $\tau_* = t_*$.

4°. Целые ряды Дирихле с регулярной двучленной асимптотикой. Из теорем 4 и 5 вытекает, что *при выполнении условий теоремы 5, для того чтобы*

$$\ln M(\sigma,\ F) = T_R \exp(\rho_R\sigma) + (1 + o(1))\, T \exp(\rho\sigma)\,(\sigma \to +\infty),\ \ T \in \boldsymbol{R},\quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\ln|a_n| = -\frac{\lambda_n}{\rho_R}\ln\frac{\lambda_n}{e\rho_R T_R} + (1 + o(1))\, T\left(\frac{\lambda_n}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} (n \to \infty).$$

Если выполнено соотношение (10), то будем говорить, что ряд (2) имеет регулярную двучленную асимптотику. Следующий критерий регулярности двучленной асимптотики уточняет теорему Линделефа.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (3). *Для того чтобы целый ряд Дирихле имел регулярную двучленную асимптотику, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнялось неравенство* $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ T + \varepsilon)\,(n \geqslant n_0(\varepsilon))$ *и существовала возрастающая последовательность* (n_k) *натуральных чисел такая, что* $\ln|a_{n_k}| \geqslant V(\lambda_{n_k};\ T - \varepsilon)\,(k \in \boldsymbol{N})$ *и* $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_k}^{\alpha})\,(k \to \infty)$.

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (10). Тогда по теореме $4\,t^* = \tau^* = T$ и, значит, $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ T + \varepsilon)$ $(n \geqslant n_0(\varepsilon))$.

Доказательство существования последовательности (n_k) проведем от противного. Допустим, что существуют числа $\eta > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ T - \eta)$ на бесконечном множестве интервалов вида $n'_\nu < n < n''_\nu$ таких, что $\lambda_{n''_\nu} - \lambda_{n'_\nu} > \delta\lambda_{n'_\nu}^{\alpha}$. В то же время $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n;\ T + \varepsilon)$ для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Поэтому при больших ν имеем

$$M(\sigma,\ F) \leqslant \sum_{n < n_0(\varepsilon)} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) + \sum_{n'_\nu < n < n''_\nu} \exp\{V(\lambda_n;\ T - \eta) + \sigma\lambda_n\} + \left(\sum_{n_0(\varepsilon) < n < n'_\nu} + \sum_{n \geqslant n''_\nu}\right) \exp\{V(\lambda_n;\ T + \varepsilon) + \sigma\lambda_n\}. \quad (11)$$

Ясно, что

$$\sum_{n < n_0(\varepsilon)} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \exp\{O(\sigma)\}\,(\sigma \to +\infty). \quad (12)$$

Вторая сумма в правой части (11) оценивается рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\{V(\lambda_n;\ T - \eta) + \sigma\lambda_n\}$. Оценивая, как обычно, его максимальный член и используя неравенство (4), для любого $\varepsilon > 0$ при $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$ получаем, что логарифм суммы этого ряда не превышает $\Phi(\sigma;\ T - \eta + \varepsilon)$. Таким образом,

$$\sum_{n'_\nu < n < n''_\nu} \exp\{V(\lambda_n;\ T - \eta) + \sigma\lambda_n\} \leqslant \exp\{\Phi(\delta;\ T - \eta + \varepsilon)\} \quad (13)$$

Обозначим

$$B(x;\ \sigma) = V(x;\ T + \varepsilon) + \sigma x = -\frac{x}{\rho_R}\ln\frac{x}{e\rho_R T_R} + (T + \varepsilon)\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} + \sigma x.$$

Тогда

$$B'(x;\ \sigma) = -\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x}{\rho_R T_R} + \frac{\rho(T+\varepsilon)}{x\rho_R}\left(\frac{x}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} + \sigma$$

и $B''(x;\ \sigma) < 0$. Отсюда следует, что $B(x;\ \sigma)$ — вогнутая функция имеет единственную точку максимума $x(\sigma)$, на $[a, x(\sigma)]$ она возрастает а на $[x(\sigma),\ +\infty[$ убывает. Ясно, что

$$\frac{1}{\rho_R}\ln\frac{x(\sigma)}{\rho_R T_R} - \frac{\rho(T+\varepsilon)}{x\rho_R}\left(\frac{x(\sigma)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} \equiv \sigma. \tag{14}$$

Левая часть (14) с точностью до множителя $(1+o(1))$ во втором члене асимптотики такая, как правая часть (8). Поэтому легко видеть, что проделав операцию, обратную к нахождению функции φ, из (14) получим соотношение

$$x(\sigma) = \rho_R T_R \exp(\sigma\rho_R) + (1+o(1))\,\rho(T+\varepsilon)\exp(\sigma\rho)\quad (\sigma\to+\infty). \tag{15}$$

Положим, для краткости, $l_1 = \lambda_{n_\nu}$, $l_2 = \lambda_{n''_\nu}$ и выберем $\sigma = \sigma_\nu$ так, чтобы $x(\sigma_\nu) = l_1 + \frac{1}{2}\delta l_1^\alpha$. Тогда $l_1 < x(\sigma_\nu) < l_1 + \delta l_1^\alpha \leqslant l_2$. Из изложенного выше вытекает, что для экспоненциального многочлена $F_1(\sigma_\nu) = \sum\limits_{n=n_0(\varepsilon)}^{n_\nu} \exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu\lambda_n\}$ максимальным членом будет $\mu(\sigma_\nu, F_1) = \exp\{V(\lambda_{n_\nu},\ T+\varepsilon) + \sigma_\nu\lambda_{n_\nu}\}$, для которого в силу (14), (15) имеем

$$\ln\mu(\sigma_\nu,\ F_1) = -\frac{l_1}{\rho_R}\ln\frac{l_1}{e\rho_R T_R} + (T+\varepsilon)\left(\frac{l_1}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} +$$

$$+\frac{l_1}{\rho_R}\ln\frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R} - \frac{\rho(T+\varepsilon)\,l_1}{\rho_R\left(l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha\right)}\left(\frac{l_1+\frac{\delta}{2}l_1^\alpha}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} =$$

$$= \frac{l_1}{\rho_R}\left\{1 + \ln\left(1+\frac{\delta}{2}l_1^{\alpha-1}\right)\right\} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} =$$

$$= \frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R} - (1+o(1))\frac{\delta^2}{4\rho_R}l_1^{\rho/\rho_R} + (1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = \frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R} + (1+o(1))\left\{T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R} = T_R\exp(\rho_R\sigma_\nu) +$$

$$+(1+o(1))\left\{T+\varepsilon-\frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\exp(\sigma_\nu\rho) =$$

$$= \Phi\left(\sigma_\nu;\ (1+o(1))\left\{T+\varepsilon-\frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\right)\ (\sigma_\nu\to\infty).$$

Отсюда, как при доказательстве (4), получаем неравенство

$$\sum_{n_0<n<n'_\nu} \exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)+\sigma_\nu\lambda_n\} \leqslant \exp\Big\{\Phi\Big(\sigma_\nu;\ T- -\frac{\delta^2}{4\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}+2\varepsilon\Big)\Big\} \tag{16}$$

для всех достаточно больших ν. Аналогично для ряда Дирихле $F_2(\sigma_\nu)=\sum_{n=n''_\nu}^{\infty}\exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)+\sigma\lambda_n\}$ максимальным будет член $\mu(\sigma_\nu,\ F_2)=\exp\{V(\lambda_{n''_\nu};\ T+\varepsilon)+\sigma_\nu\lambda_{n''_\nu}\}$, для которого в силу (14) и (15) имеем

$$\ln\mu(\sigma_\nu,\ F_2)\leqslant V(l_1+\delta l_1^\alpha;\ T+\varepsilon)+\sigma_\nu(l_1+\delta l_1^\alpha)=$$

$$=-\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\ln\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{e\rho_R T_R}+(T+\varepsilon)\left(\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}+$$

$$+\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\ln\frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R}-\frac{\rho(T+\varepsilon)}{\rho_R}\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}\left(\frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}=$$

$$=\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\left\{1+\ln\left(1-\frac{\delta l_1^\alpha}{2(l_1+\delta l_1^\alpha)}\right)\right\}+(1+o(1))(T+\varepsilon)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}=\frac{l_1+\delta l_1^\alpha}{\rho_R}\left\{1-\frac{\delta l_1^\alpha}{2(l_1+\delta l_1^\alpha)}-\right.$$

$$\left.-(1+o(1))\frac{\delta^2}{8}\frac{l_1^{2\alpha}}{(l_1+\delta l_1^\alpha)^2}\right\}+(1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}=$$

$$=\frac{l_1+\frac{1}{2}\delta l_1^\alpha}{\rho_R}-(1+o(1))\frac{\delta^2}{8\rho_R}l_1^{\rho/\rho_R}+(1+o(1))(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}=\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R}+(1+o(1))\left\{(T+\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{\rho_R}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}\left(\frac{x(\sigma_\nu)}{\rho_R T_R}\right)^{\rho/\rho_R}\leqslant\Phi(\sigma_\nu;\ (1+o(1))\times$$

$$\times\left\{T+\varepsilon-\frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\})\ (\nu\to\infty).$$

Отсюда как выше, получаем

$$\sum_{n=n''_\nu}^{\infty}\exp\{V(\lambda_n;\ T+\varepsilon)+\sigma_\nu\lambda_n\}\leqslant\exp\left\{\Phi\left(\sigma_\nu;\ T-\frac{\delta^2}{8\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}+2\varepsilon\right)\right\} \tag{17}$$

для всех достаточно больших ν. Положим $\gamma = \min\left\{\eta, \frac{\delta^2}{\delta\rho_R}(T_R\rho_R)^{\rho/\rho_R}\right\}$. Тогда из (11), (12), (16) и (17) следует, что $M(\sigma_\nu, F) \leqslant 4\exp\times \times\{\Phi(\sigma_\nu; T-\gamma+2\varepsilon)\} \leqslant \exp\{\Phi(\sigma_\nu; T-\gamma+3\varepsilon\}$ для любого $\varepsilon > 0$ при $\nu \geqslant \nu_0(\varepsilon)$. Отсюда вытекает неравенство $\tau^* \leqslant T - \eta$, что невозможно. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Из неравенства $\ln|a_n| \leqslant V(\lambda_n; T+\varepsilon)\times \times(n \geqslant n_0(\varepsilon))$ вытекает, что $t^* \leqslant T$, и по теореме 4 $\tau^* = t^* \leqslant T$. Далее, взяв $\tau < T - \varepsilon$, $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma; \tau)$, из неравенства $\ln|a_{n_k}| \geqslant \geqslant V(\lambda_{n_k}; T-\varepsilon)$, как обычно, получим что $\ln|a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$. Поэтому, как при доказательстве теоремы 5, для всех $\sigma\in[\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ получим неравенство $\ln\mu(\sigma, F) \geqslant T_R\exp(\rho_R\sigma) + (1+o(1))\times \times\tau\exp(\rho\sigma)$ $(\sigma\to+\infty)$. Отсюда, как обычно, получаем неравенство $\tau_* \geqslant t_* \geqslant T$. Таким образом, $T \leqslant \tau_* \leqslant \tau^* \leqslant T$, т. е. имеет место соотношение (10).

Список литературы: 1. *Lindelöf E.* Sur la détermination de la croissance des fonctions entiéres définies par un developpement de Taylor // Bull. Soc. Math. 1903. **27,** N 1. P. 1—62. 2. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. I // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1972. Вып. 16. С. 154—158. 3. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. II // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1973. Вып.17. С.84—99. 4. *Urenko J. B.* Improbability of nonconvergent chaos in Newton's method // J. Math. Anal. and Appl. 1986. **117,** N 1. P. 42—47.

Поступила в редколлегию 10.10.87

УДК 513.33

В. С. ШУЛЬМАН

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ТЕОРЕМЫ ФУГЛИДА — ПАТНЭМА — РОЗЕНБЛЮМА

Известная теорема Фуглида — Патнэма устанавливает эквивалентность в пространстве $L(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, уравнений $N_1X = XN_2$ и $N_1^*X = XN_2^*$ для любых нормальных операторов N_1, N_2. Обозначив через Δ, $\tilde{\Delta}$ действующие в $L(H)$ операторы $X\to N_1X - XN_2$ и $X\to N^*X - XN_2^*$, это утверждение можно записать в виде $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Ker}\tilde{\Delta}$, или, что то же, $\operatorname{Ker}(\Delta_A + i\Delta_B) = \operatorname{Ker}(\Delta_A - i\Delta_B)$, где $\Delta_A(X) = A_1X - XA_2$; $\Delta_B(X) = B_1X - XB_2$, а A_k, B_k — эрмитовы компоненты операторов N_k. Поэтому оно является немедленным следствием такого результата (по существу, принадлежащего Розенблюму [1]):

если T, S — коммутирующие операторы в банаховом пространстве и $\|\exp itT\| = \|\exp itS\| = 1$ при $t\in R$ (в этом случае T, S называются эрмитовыми), то $\operatorname{Ker}(T + iS)$ совпадает с $\operatorname{Ker}T \cap \operatorname{Ker}S$.

Условие эрмитовости здесь можно ослабить до $\|\exp itT\| = 0\,(|t|)$, $\|\exp itS\| = 0\,(|t|)$ при $t \to \infty$. Более того, достаточно, сохранив это условие роста экспоненты для одного оператора, от другого требовать лишь вещественности спектра: этот неожиданный результат вместе с далеко идущими обобщениями (в том числе — на некоммутирующие T, S) получен Е. А. Гориным [2]. Иное также весьма интересное обобщение теоремы Розенблюма найдено Бояджиевым [3]: если $T_1, \ldots, T_n$ — коммутирующие эрмитовы операторы, а P — многочлен от n переменных, не имеющий нулей в $\mathbb{R}^n - \{0\}$, то $\operatorname{Ker} P(T_1, \ldots, T_n) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} T_k$.

Цель данной работы — выяснение связи рассматриваемой тематики со спектральным синтезом. Этот подход позволяет включить в единый контекст результаты Горина, Бояджиева, теорему Капланского об идеалах C^*-алгебр, а также получить новые критерии эквивалентности систем линейных операторных уравнений. Самостоятельный интерес могут представлять и некоторые вспомогательные утверждения о гомоморфизмах регулярных алгебр и об алгебрах с синтезируемой диагональю.

Условимся для произвольного семейства E элементов банаховой алгебры A (с единицей) обозначать через E' его коммутант (множество элементов алгебры, перестановочных со всеми элементами из E), через E'' — бикоммутант $(=(E')')$ и через $J(E)$ $(I_e(E),\ J_r(E))$ — порожденный E двусторонний (соответственно левый, правый) замкнутый идеал. Если $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор элементов из центра алгебры А, то его спектром называется множество $\sigma(\vec{a})$ всех наборов $\vec{\lambda}$ из C^n, для которых $J(\{a_i - \lambda_i 1\}_{i=1}^n) \neq A$. Хорошо известны существование функционального исчисления на алгебре ростков аналитических в окрестности $\sigma(\vec{a})$ функций и теорема об отображении спектра: $\sigma(F_1(\vec{a}), \ldots$ $\ldots, F_k(\vec{a})) = \{(F_1(\vec{\lambda}), \ldots, F_k(\vec{\lambda})) : \vec{\lambda} \in \sigma(\vec{a})\}$. Для произвольного коммутативного набора $\vec{a}$ элементов алгебры A под $\sigma(\vec{a})$ понимается его спектр в алгебре $(\vec{a})'$ (в центре которой $\vec{a}$ содержится); соответствующий смысл придается и термину $F(\vec{a})$. В случае, когда набор состоит из одного элемента, это определение совпадает с обычным; в общем случае справедливо включение $\sigma(\vec{a}) \subset \prod_{i=1}^{n} \sigma(a_i)$.

Если алгебра A коммутативна, то через M_A обозначается пространство ее максимальных идеалов, а через $x \to \hat{x}$ — преобразование Гельфанда $A \to C(M_A)$. Множество $h(E) = \{m \in M_A : E \subset m\}$ называется оболочкой семейства $E \subset A$; E называется синтезируемым, если содержится в любом замкнутом идеале, оболочку которого содержит $h(E)$. Для $S \subset M_A$ положим $J_S = \bigcap_{m \in S} m$, $J_S^{(0)} = \{x \in A : S \cap \operatorname{supp} \hat{x} = \varnothing\}$; если A регулярна и полупроста, то J_S, J_S^0 являются соответственно наибольшим и наименьшим из идеалов с оболочкой S. S называется множеством синтеза, если $J_S = \overline{J_S^{(0)}}$. Если $\Phi: A \to B$ непрерывный (в дальнейшем непрерывность подразумевается) гомоморфизм коммутативных банаховых алгебр, то индуцированное отображение пространств максимальных идеалов обозначается Φ^*.

Алгебру всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X мы будем обозначать $L(X)$. Для $E \subset L(X)$ символом $\operatorname{Ker} E$ обозначается пересечение ядер всех операторов из E.

1. Связь между синтезом и теоремами Фуглида — Патнэма — Розенблюма выявляет уже следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $E \subset A$, $F \subset A$ и $h(F) \subset h(E)$. Если E синтезируемо, то* $\operatorname{Ker}(\Phi(F)) \subset \operatorname{Ker}(\Phi(E))$ *для любого гомоморфизма* $\Phi: A \to L(X)$.

Доказательство. Из условия сразу следует, что $E \subset I(F)$, и потому в силу непрерывности $\Phi\,\Phi(E) \subset J_e(\Phi(F))$. Так как $J = \{A \in L(X): \operatorname{Ker}\Phi(F) \subset \operatorname{Ker} A\}$ — замкнутый левый идеал алгебры $L(X)$, содержащий $\Phi(F)$, $\Phi(E) \subset I$.

Этот простой результат имеет нетривиальные следствия, поскольку позволяет использовать тонкие критерии синтезируемости. Рассмотрим, например, вопрос о справедливости непосредственного обобщения теоремы Фуглида — Патнэма, т. е. об эквивалентности линейных операторных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} N_k X M_k = 0 \quad (1); \qquad \sum_{k=1}^{n} N_k^* X M_k^* = 0, \tag{2}$$

где $\{N_k\}_{k=1}^n$, $\{M_k\}_{k=1}^n$ — коммутативные наборы нормальных операторов в H. Вопрос этот в общем случае открыт*; мы решим его для достаточно гладких коэффициентных семейств. По определению, семейство нормальных операторов обладает гладкостью порядка $\alpha > 0$, если оно состоит из Lip_α-функций одного эрмитова оператора.

Следствие 1. *Если семейства $\{M_i\}_{i=1}^n$, $\{N_i\}_{i=1}^n$ обладают гладкостью порядка $\alpha > \frac{1}{2}$, то уравнения (1), (2) эквивалентны в $L(H)$.*

Доказательство. Пусть $N_k = \varphi_k(N)$, $M_k = \psi_k(M)$, где N, M — эрмитовы операторы, а φ_k, ψ_k — липшицевы порядка α функции на отрезках Δ_1, Δ_2, содержащих их спектры. Алгебра $A = C(\Delta_1) \widehat{\otimes} C(\Delta_2)$ изоморфна алгебре всех функций на $\Delta_1 \times \Delta_2 = M_A$, представимых рядами вида $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) g_j(y)$, где $f_j \in C(\Delta_1)$, $g_j \in C(\Delta_2)$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\| \cdot \|g_j\| < \infty$. Гомоморфизм $\Phi: A \to L(L(H))$ зададим формулой $\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes g_j\right) \times (X) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(N) X g_j(N)$. Тогда пространство решений уравнения (1)

---

* Вопрос об эквивалентности уравнений (1), (2) решен отрицательно в работе автора «Операторы умножения и спектральный синтез. Докл. АН СССР. 1990.

совпадает с $\operatorname{Ker}\Phi(s)$, где $s(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$, а пространство решений уравнения (2) — с $\operatorname{Ker}\Phi(\bar{s})$. Функции $s, \bar{s}$ принадлежат $\operatorname{Lip}_\alpha(\Delta_1 \times \times \Delta_2)$ и, в силу теоремы 7.2.2 работы [4], синтезируемы в A. Так как очевидно $h(s) = h(\bar{s})$, равенство $\operatorname{Ker}\Phi(s) = \operatorname{Ker}\Phi(\bar{s})$ следует из теоремы 1.

Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра. Для дальнейшего важен вопрос об условиях, которым должно удовлетворять множество $E \subset A$, для того, чтобы образ алгебры A в любом представлении содержался в бикоммутанте образа E. Нетрудно убедиться в необходимости следующего условия: E должно разделять точки пространства M_A. Мы сейчас выделим класс алгебр, для которых это необходимое условие является достаточным.

Обозначим через D_A диагональ декартова квадрата $M_A \times M_A$ $(= M_{A \hat{\otimes} A})$. Будем говорить, что A обладает свойством синтезируемости диагонали (кратко $A \in (SD)$), если D_A — множество синтеза для $A \hat{\otimes} A$.

Следствие 2. *Если $A \in (SD)$, то $\Phi(A) \subset \Phi(E)''$ для любого разделяющего точки семейства $E \subset A$ и любого гомоморфизма Φ алгебры A в произвольную банахову алгебру.*

Доказательство. Пусть $\Phi: A \to B$ — гомоморфизм; зададим гомоморфизм $\Psi: A \hat{\otimes} A \to L(B)$ формулой

$$\Psi\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \otimes y_j\Big)(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(x_j)\, b\, \Phi(y_j).$$

Положим также, $\tilde{x} = x \otimes 1 - 1 \otimes x$ $(x \in A)$, $\tilde{E} = \{\tilde{x} : x \in E\}$. Ввиду равенства $\Phi(x)' = \operatorname{Ker}\Psi(\tilde{x})$, нам достаточно доказать включени $\operatorname{Ker}\Psi(\tilde{E}) \subset \operatorname{Ker}\Psi(\tilde{A})$. Но $h(\tilde{E}) = D_A = h(\tilde{A})$, и, так как D_A — множество синтеза, то $\tilde{A}$ синтезируемо; остается применить теорему 1.

Для того чтобы доказанная «теорема о бикоммутанте» была эффективной, необходима более конкретная информация о классе (SD). Легко показать, что в него входят групповые алгебры дискретных групп. Действительно, $l^1(\Gamma \times \Gamma) \cong l^1(\Gamma) \hat{\otimes} l^1(\Gamma)$, и $D_{l^1(\Gamma)}$ — подгруппа в $\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}$, поэтому ее синтезируемость — следствие теоремы о синтезируемости смежных классов. Следующий результат позволяет значительно расширить список примеров.

Теорема 2. *Пусть алгебры A, B — регулярны, Φ: $A \to B$ — гомоморфизм и $\overline{\Phi(A)} = B$. Если $A \in (SD)$, то $B \in (SD)$.*

Доказательство. Гомоморфизм Φ естественно порождает гомоморфизм $\tilde{\Phi}: A \hat{\otimes} A \to B \hat{\otimes} B$; легко проверить, что $\tilde{\Phi}^*(D_B) \subset D_A$. Следовательно, если преобразование Гельфанда элемента $f \in A \hat{\otimes} A$ обращается в нуль в окрестности U множества D_A, то $\tilde{\Phi}(f)\hat{}$ обращается в нуль в окрестности $(\tilde{\Phi}^*)^{-1}(U) \supset D_B$. Иными словами, Φ отображает $J^{(0)}_{D_A}$ в $J^{(0)}_{D_B}$. По условию $\overset{(0)}{J_{DA}} = I_{D_B}$, так, что $a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \overline{J^{(0)}_{D_A}}$ и, следовательно, $\Phi(a) \otimes 1 - 1 \otimes \Phi(a) = \tilde{\Phi}(a \otimes 1 - 1 \otimes a) \in \overline{J^{(0)}_{D_B}}$ для любого $a \in A$. В силу плотности образа гомоморфизма Φ отсюда следует, что $b \otimes 1 - 1 \otimes b \in \overline{J^{(0)}_{D_B}}$ для любого $b \in B$. Пусть теперь $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \otimes c_n \in J_{D_B}$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n c_n = 0$ и $f = f - 1 \otimes \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n c_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n \otimes 1 - 1 \otimes b_n)(1 \otimes c_n) \in \overline{J^{(0)}_{D_B}}$, т. е. $J_{D_B} = \overline{J^{(0)}_{D_B}}$.

Из теоремы 2 следует, что в (SD) входит любая регулярная алгебра, порожденная ограниченной подгруппой (она содержит плотный образ групповой алгебры). Более того, как показывает доказательство теоремы, для принадлежности к (SD) достаточно, чтобы множество всех элементов, порождающих ограниченные подгруппы, было множеством образующих алгебры. В частности, (SD) содержит все алгебры $C(K)$, регулярные фактор-алгебры мер на ЛКАГ, тензорные алгебры $C(K_1) \hat{\otimes} C(K_2)$.

Одним из следствий теоремы 1 является теорема Бояджиева. В самом деле, пусть F_n — алгебра преобразований Фурье конечных мер на $\boldsymbol{R}^n$. Если $T_1, \ldots, T_n$ — коммутативное семейство эрмитовых операторов в банаховом пространстве X, то формула

$$\Psi(\hat{\mu}) = \int \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \pi_k(\vec{\lambda})\, T_k\right) d\mu \tag{3}$$

(где $\pi_k(\cdot)$ — координатные функции) задает представление алгебры F_n в X. Если $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ — куб, содержащий $\prod\limits_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$, то идеал $J(\Delta)$ всех функций из F_n, обращающихся в нуль на Δ, содержится в $\operatorname{Ker} \Psi$, так что Ψ определяет гомоморфизм $\Phi: F_n/I(\Delta) \to L(X)$. Алгебра $A = F_n/I(\Delta)$ (состоящая из сужений на Δ функций из F_n) регулярна и удовлетворяет условию Диткина, из которого следует, что все точки куба Δ — множества синтеза. Следовательно, семейство $\pi/\Delta = (\pi_1/\Delta, \ldots, \pi_n/\Delta)$ синтезируемо, его оболочка состоит из точки $\vec{0}$ или пуста. Пусть $f = P|_\Delta$ — сужение многочлена P на Δ, тогда $f \in A$, и из условия $P^{-1}(0) \cap \mathbf{R}^n \subset \{\vec{0}\}$ вытекает включение $h(f) \subset h(\pi/\Delta)$. Применяя теорему 1, получаем $\operatorname{Ker} \Phi(f) \subset \operatorname{Ker} \Phi(\pi/\Delta)$. Так как $\Phi(\pi_k/\Delta) = T_k$ и $\Phi(f) = P(T_1, \ldots, T_n)$, $\operatorname{Ker} P(T_1, \ldots, T_n) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} T_k$. Разумеется, многочлен здесь можно заменить любой достаточно гладкой функцией, не имеющей нулей в $\prod\limits_{i=1}^{n} \sigma(T_i) \setminus \{\vec{0}\}$.

Для того чтобы получить аналогичные результаты о ядрах операторов, подчиненных лишь условиям на спектр (a priori не допускающих применения неаналитических функций), принятый подход необходимо расширить. Точнее говоря, требуется модификация теоремы 1, в которой ядро семейства операторов из образа некоторой регулярной алгебры сравнивалось бы с ядром семейства, этому образу не принадлежащего.

2. Установим некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть банахова алгебра A содержится в центре банаховой алгебры B. Если все простые идеалы алгебры A примарны, то для любого максимального левого идеала $I \subset B$ идеал $I \cap A$ алгебры A максимален.*

Доказательство. Положим $J = I \cap A$. Если $x_1, x_2 \in A$, $x_1 x_2 \in J$, $x_1 \notin J$, то $(Bx_1 + I)x_2 \subset I$ и потому $Bx_1 + I \neq B$. В силу максимальности I это означает, что $Bx_1 + I = I$, т.е. $x_1 \in I$ и, значит, $x_1 \in J$. Мы доказали, что J — простой идеал, откуда по условию следует, что он примарен. Пусть m — максимальный идеал алгебры A, содержащий J. Так как алгебра m/J радикальна, для любого элемента $x \in m$ выполняется условие $\operatorname{dist}(x^n, J)^{1/n} \to 0$. Поскольку $Bx + I = B$, найдется элемент $a \in B$ такой, что $1 - ax \in I$. Отсюда, ввиду перестановочности x с α, $1 - a^n x^n \in I$ и, следовательно, $\operatorname{dist}(a^n x^n, I) \geqslant 1$. Поэтому $\operatorname{dist}(x^n, I) \geqslant \operatorname{dist}(x^n, I) \geqslant \| a \|^{-n} \operatorname{dist}(a^n x^n, a^n I) \geqslant \| a \|^{-n} \times \operatorname{dist}(a^n x^n, I) \geqslant \| a \|^{-n}$ — противоречие. Лемма доказана.

Замечание. Класс (PP) коммутативных банаховых алгебр, все простые идеалы которых примарны, содержит все регулярные полупростые алгебры (в самом деле, если $m_1, m_2 \in M_A$, $m_1 \neq m_2$, то найдутся $x_1 \notin m_1$, $x_2 \notin m_2$ такие, что $x_1 x_2 = 0$; следовательно, для любого идеала $J \subset m_1 \cap m_2$ выполняются соотношения $x_1 \notin J$, $x_2 \notin J$, $x_1 x_2 \in J$, т. е. J не прост). Кроме того, если $A \in (PP)$, то $\overline{\Phi(A)} \in (PP)$ для любого непрерывного гомоморфизма Φ алгебры A (если идеал $J \subset \overline{\Phi(A)}$ не примарен, то для любых $m_1, m_2 \in h(J)$ идеалы $\Phi^*(m_1)$ и $\Phi^*(m_2)$ входят в $h(\Phi^{-1}(J))$ так, что $\Phi^{-1}(J)$ не примарен и, следовательно, не прост, откуда немедленно следует, что J не прост).

Лемма 2. *Пусть $\Phi : A \to B$ — гомоморфизм банаховых алгебр, причем A регулярна и полупроста, и $\Phi(A)$ содержится в центре алгебры B. Тогда для любого замкнутого собственного левого идеала $J \subset B$ и любого $m \in h(\Phi^{-1}(J))$ найдется собственный левый идеал $I \subset B$, содержащий $\Phi(m)$ и J.*

Доказательство. Покажем, что в собственном левом идеале содержится $\Phi(m^{(0)}) \cup J$, где $m^{(0)} = J^{(0)}_{\{m\}}$ — минимальный из идеалов с оболочкой $\{m\}$. Действительно, если левый идеал, порожденный $\Phi(m^{(0)}) \cup J$, совпадает с B, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \Phi(x_i) + b = 1$ при некоторых $x_i \in A$, $a_i \in B$, $b \in J$. Так как $m \notin \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{supp} x_i$, в силу регулярности A найдется элемент $y \in A$ такой, что $y(m) \neq 0$ и $y x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Следовательно,

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi(x_i)\Phi(y) + b\Phi(y) = b\Phi(y) \in J,$$

что невозможно, поскольку $y \notin m$.

Пусть теперь I — максимальный левый идеал, содержащий $\Phi(m^{(0)})$ и J. В силу замечания к лемме 1 $\overline{\Phi(A)} \in (PP)$; по лемме 1 идеал $I_0 = I \cap \overline{\Phi(A)}$ алгебры $\overline{\Phi(A)}$ максимален, и потому $\Phi^{-1}(I) = \Phi^{-1}(I_0) = \Phi^*(I_0) \in M_A$. Так как $m^{(0)} \subset \Phi^{-1}(I)$, то $\Phi^{-1}(I) = m$, $\Phi(m) \subset I$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть Φ: $A \to B$ — гомоморфизм банаховых алгебр. Если A регулярна и полупроста, то для любого $x \in A$ $\sigma(\Phi(x)) = \hat{x}(h(\operatorname{Ker}\Phi))$.*

Доказательство. Пусть B_1 — максимальная коммутативная подалгебра в B, содержащая $\Phi(A)$. Если $\lambda = \hat{x}(m)$ для некоторого $m \in h(\operatorname{Ker}\Phi)$, то в силу леммы 2, примененной к алгебрам A, B_1 и идеалу $J = \{0\}$, найдется собственный идеал $I \subset B_1$, содержащий m. Это означает, что $\Phi(x) - \lambda 1 \in I$, т. е. λ принадлежит спектру элемента $\Phi(x)$ относительно алгебры B_1. Так как B_1 — наполненная подалгебра в B, $\lambda \in \sigma(\Phi(x))$, т. е. $\hat{x}(h(\operatorname{Ker}\Phi)) \subset \sigma(\Phi(x))$. Пусть теперь $\lambda \notin \hat{x}(h(\operatorname{Ker}\Phi))$, тогда $h(x - \lambda \cdot 1)$ не пересекается с $h(\operatorname{Ker}\Phi)$ и, следовательно, $x - \lambda \cdot 1$ обратим по модулю $\operatorname{Ker}\Phi$: $y(x - \lambda \cdot 1) - 1 \in \operatorname{Ker}\Phi$ для некоторого $y \in A$. Отсюда $\Phi(y)(\Phi(x) - \lambda \cdot 1) = 1$, $\lambda \notin \sigma(\Phi(x))$. Мы показали, что $\sigma(\Phi(x)) \subset \hat{x}(h(\operatorname{Ker}\Phi))$.

Следствие 4. *Пусть алгебра A — регулярна, B — коммутативна, Φ: $A \to B$ — гомоморфизм. Если семейство $E \subset A$ синтезируемо, то $\Phi(E)$ синтезируемо.*

Доказательство. Пусть $J \subset B$ — замкнутый идеал такой, что $h(J) \subset h(\Phi(E))$. Если $m \in h(\Phi^{-1}(J))$, то по лемме 2 $\Phi^{-1}(\tilde{m}) + J$ содержится в некотором собственном идеале алгебры B. Следовательно, существует максимальный идеал $\tilde{m} \in M_B$, для которого $\Phi(m) \subset \tilde{m}$, $J \subset \tilde{m}$. Первое из этих включений влечет $m \subset \Phi^{-1}(\tilde{m})$ и, ввиду максимальности, $m = \Phi^{-1}(\tilde{m})$. Из второго следует

$$\tilde{m} \in h(J) \subset h(\Phi(E)),\ \Phi(E) \subset \tilde{m},\ E \subset \Phi^{-1}(\tilde{m}).$$

Итак, $h(\Phi^{-1}(J)) \subset h(E)$, $E \subset \Phi^{-1}(J)$, $\Phi(E) \subset J$.

Будем говорить, что семейство E элементов банаховой алгебры B удовлетворяет условию R_0, если оно является образом синтезируемого семейства элементов регулярной алгебры A при непрерывном гомоморфизме Φ: $A \to B$. Если к тому же $\Phi(A) \subset E''$, то по определению E удовлетворяет условию R.

Примером семейства со свойством R является всякое коммутативное семейство эрмитовых элементов: нужный гомоморфизм Φ алгебры $A = F_n/I(\Delta)$ строился ранее, а включение $\Phi(A) \subset E''$ следует из того, что координатные функции порождают A. В силу следствия 2 то же справедливо для любого разделяющего точки семейства достаточно гладких функций от коммутирующих эрмитовых элементов.

В частности, любой нормальный оператор в банаховом пространстве обладает свойством R, поскольку является результатом применения функции $f(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + i\lambda_2$ к паре коммутирующих эрмитовых операторов. Другие примеры операторов со свойством R: операторы, удовлетворяющие условию «неквазианалитичности» $\int_R \| \exp itT \| (1 + t^2)^{-1} dt < \infty$ (в качестве A здесь берется весовая алгебра Фурье), операторы, порождающие ограниченные или медленно растущие группы, скалярные и квазискалярные операторы. Говоря нестрого, семейство операторов удовлетворяет условию R_0, если оно допускает достаточно богатое функциональное исчисление; для проверки включения $\Phi(A) \subset E''$ используется следствие 2.

Следующее утверждение — основной результат работы.

Теорема 3. *Пусть* $(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k)$ — *коммутативное семейство элементов банаховой алгебры* B и $F(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$ — *функция, аналитическая в окрестности множества* $\sigma(\vec{a}, \vec{b})$, *причем выполнено условие*

$$\sigma(\vec{a}, \vec{b}) \cap F^{-1}(0) \subset \{\vec{0}\} \times C^k. \tag{4}$$

Если семейство $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *удовлетворяет условию* R, *то* $\vec{a} \subset J_l(F(\vec{a}, \vec{b})) \cap J_r(F(\vec{a}, \vec{b}))$.

Доказательство. По условию $\vec{a} = \Phi(\vec{x})$, где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — синтезируемое семейство элементов регулярной алгебры A; $\Phi: A \to B$ — непрерывный гомоморфизм, причем $\Phi(A) \subset (\vec{a})''$. Полагая $B_1 = (\vec{a}, \vec{b})'$, заметим, что Φ отображает A в центр алгебры B_1. Обозначим через J замкнутый идеал алгебры B_1, порожденный $F(\vec{a}, \vec{b})$; так как $J \subset J_l(F(\vec{a}, \vec{b})) \cap J_r(F(\vec{a}, \vec{b}))$, достаточно доказать, что $\vec{a} \subset J$. Если это неверно, то $\vec{x} \not\subset \Phi^{-1}(J)$, откуда в силу синтезируемости следует существование максимального идеала $m \in h(\Phi^{-1}(J))$, не содержащего $\vec{x}$. Пусть $\vec{\lambda} = \overrightarrow{x(m)} = (x_1(m), \ldots, x_n(m))$, тогда $\vec{\lambda} \neq 0$, $\vec{x} - \vec{\lambda} \cdot 1 \subset m$ и, следовательно, $\vec{a} - \vec{\lambda} \cdot 1 \subset \Phi(m)$. Применяя лемму 2 к алгебре B_1 и идеалам J, m, убеждаемся в том, что существует собственный левый идеал I, содержащий $\vec{a} - \vec{\lambda} \cdot 1$, $F(\vec{a}, \vec{b})$. Это означает, что набор $(\vec{\lambda}, 0)$ принадлежит спектру набора $(\vec{a}, F(\vec{a}, \vec{b}))$ в алгебре B_1. По теореме об отображении спектра найдется такой набор $\vec{\mu} \in C^k$, что $(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \in \sigma(\vec{a}, \vec{b})$, $F(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = 0$. Из (4) следует, что $\vec{\lambda} = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 5. *Если* $(\vec{T}, \vec{S}) = (T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_k)$ — *коммутативное семейство операторов, причем* $\vec{T}$ *удовлетворяет* *условию* R *то* $\operatorname{Ker} \vec{T} \supset \operatorname{Ker} F(\vec{T}, \vec{S})$ *для любой аналитической в окрестности* $\sigma(\vec{T}, \vec{S})$ *функции* F, *удовлетворяющей условию (4).*

Доказательство. Достаточно заметить, что операторы, ядра которых содержат $\operatorname{Ker} F(\vec{T}, \vec{S})$, образуют замкнутый левый идеал в алгебре всех операторов.

Замечания. 1) Пусть T — неквазианалитический оператор, S — коммутирующий с T оператор с вещественным спектром; полагая $F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + i\lambda_2$ и применяя теорему 3, получаем $\operatorname{Ker}(T + iS) \subset \operatorname{Ker} T$. Отсюда следует равенство $\operatorname{Ker}(T + iS) = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} S$, доказанное Е. А. Гориным [2].

2) Следствие 5 можно модифицировать, выбирая иные конструкции левых идеалов в $L(X)$. В частности, рассматривая идеалы $\{T \in L(X) : Tx_n \to 0\}$, где $\{x_n\}$ — фиксированная последовательность векторов, легко получать «аппроксимационные» варианты теоремы Фуглида — Патнэма — Розенблюма.

3) Условие $\Phi(A) \subset (\vec{a})''$ (входящее в R) теоремы 3 может быть ослаблено до $\Phi(A) \subset (\vec{a})'$, если в ограничениях на F заменить $\sigma(\vec{a}, \vec{b})$ спектром семейства $(\vec{a}, \vec{b})$ относительно наполненной подалгебры $B_0 \subset B$, порожденной $\Phi(A)$, $\vec{b}$ (либо еще более обширным множеством $\prod_{i=1}^{n} \sigma(a_i) \times \prod_{j=1}^{k} \sigma(b_j)$. Доказательство то же, но с заменой алгебры B_1 алгеброй B_0. Это используется при доказательстве следующего результата об эквивалентности линейных операторных уравнений.

Следствие 6. *Пусть семейства* $\{M_i\}_{i=1}^n$, $\{N_i\}_{i=1}^n$ *коммутирующих нормальных операторов обладают гладкостью порядка* $\alpha > \frac{1}{2}$ *и пусть* $\{P_j\}_{j=1}^k$, $\{Q_j\}_{j=1}^k$ — *коммутативные семейства операторов, перестановочные с* $\{M_i\}_{i=1}^n$, $\{N_i\}_{i=1}^n$ *соответственно. Если* $\{P_j\}_{j=1}^k$ *состоит из квазинильпотентных операторов, то линейное операторное уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} M_i X N_i + \sum_{j=1}^{k} P_j X Q_j = 0$$

в $L(H)$ *эквивалентно системе уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} M_j X N_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{k} P_j X Q_j = 0.$$

Доказательство. Оператор $X \mapsto \sum_{i=1}^{n} M_i X N_i$ в $L(H)$ обозначим через T, а оператор $X \mapsto \sum_{j=1}^{k} P_j X Q_j$ — через S. При доказательстве следствия 1 было установлено, что T — образ синтезируемого элемента регулярной алгебры $A = C(\Delta_1)\widehat{\otimes} C(\Delta_2)$ при непрерывном гомоморфизме ее в $L(L(H))$. Нетрудно видеть, что $\Phi(A) \subset \{S\}'$, и, так как функция $F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ на множестве $\sigma(T) \times \sigma(S) = \sigma(T) \times \{0\}$ удовлетворяет условию $F^{-1}(0) = \vec{0}$, учитывая замечание 3, получаем $\operatorname{Ker}(T+S) \subset \operatorname{Ker} T$, т. е. $\operatorname{Ker}(T+S) = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} S$. Следствие доказано.

С заменой односторонних идеалов двусторонними теорема 3 допускает обобщение на некоммутативные семейства элементов. Мы ограничимся рассмотрением двухэлементных наборов.

Пусть $a, b \in B$. Для любой функции $F(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda) g_i(\mu)$, где f_i, g_i аналитичны в окрестностях $\sigma(a)$ и $\sigma(b)$, положим $F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) g_i(b)$.

Теорема 4. *Если a удовлетворяет условию $\boldsymbol{R}_0$ и $F(\lambda, \mu) \neq 0$ при $\lambda \in \sigma(a) \setminus \{0\}$, $\mu \in \sigma(b)$, то $a \in J(F(a, b))$.*

Доказательство. Пусть Φ: $A \to B$ — гомоморфизм регулярной алгебры, переводящий синтезируемый элемент $x \in A$ в a. Как и при доказательстве теоремы 3, достаточно установить, что $x \in m$ для любого $m \in h(\Phi)^{-1}(J))$, где $J = J(F(a, b))$. Пусть p: $B \to B/J$ — канонический гомоморфизм и $\Psi = p \circ \Phi$. Так как $\Phi^{-1}(J) = \operatorname{Ker} \psi$, в силу следствия 4 число $\lambda = \hat{x}(m)$ принадлежит $\sigma(\psi(x)) = \sigma(p(a))$. Если I — собственный правый идеал в B/J, содер жащий $p(a) - \lambda \cdot 1$, то $F(\lambda \cdot 1, p(b)) = F(\lambda \cdot 1, p(b)) - F(p(a), p(b)) = \sum_{=1}^{n} (f_i(\lambda) \cdot 1 - f_i(p(a))) g_i(p(b)) \in I$ и, следовательно, $0 \in \sigma(F \times \times (\lambda 1, p(a)))$. По теореме об отображении спектра $0 = F(\lambda, \mu)$ для некоторого $\mu \in \sigma(p(b))$. Из условия (и очевидных включений $\sigma(p(a)) \subset \sigma(a)$, $\sigma(p(b)) \subset \sigma(b)$) следует, что $\lambda = 0$, т. е. $x \in m$. Теорема доказана.

Следствие 7. *Пусть $a \in B$, $b \in B$, $\sigma(a) \cap \sigma(b) \subset \{0\}$. Если a удовлетворяет условию R_0, то $J(a-b) = J(a) + J(b)$.*

Доказательство. Применяя теорему 4 к функции $F(\lambda, \mu) = \lambda - \mu$, получаем $a \in J(a-b)$, откуда $b \in J(a-b)$ и, следовательно, $\overline{J(a) + J(b)} \subset J(a-b)$. Обратное включение очевидно.

Отметим, что следствие 7 обобщает теорему Капланского о симметричности замкнутых двусторонних идеалов в C^*-алгебрах: если a, b— эрмитовы, то $J(a+ib) = \overline{J(a) + J(b)} = J(a-ib)$.

Следствие 8. *Если $a \in B$ удовлетворяет условию R_0,* а $b \in B$ *квазинильпотентен, то $J(a-b) = \overline{J(a) + J(b)}$.*

3. Сделаем несколько дополнительных замечаний.

Пусть A — регулярная алгебра с эрмитовой инволюцией. Будем говорить, что для A имеется аналог теоремы Фуглида, если при любом $a \in A$ уравнения $a\xi = \xi a$ и $a^*\xi = \xi a^*$ эквивалентны в любом унитальном A-бимодуле. Легко видеть, что класс таких алгебр довольно узок:

он не содержит групповых алгебр некомпактных групп и, более общим образом, алгебр, обладающих несимметричными идеалами (если I — несимметричный идеал, то положим $X = A/J$, $a(x+J) = ax+J$, $(x+J)a = a(m)x+J$, где m — фиксированный идеал из $h(J)$; имеем при $a \in J$, $a^* \notin J$: $a(1+J) = (1+J)a = 0$, $a^*(1+J) = a^*+J \neq 0$, $(1+J)a^* = \overline{\widehat{a}(m)}(1+J) = 0$). Однако для алгебр, обладающих свойством SD, рассматриваемые уравнения эквивалентны, если a разделяет точки. Более того, для $A \in (SD)$ любые две системы уравнений вида $\{a_i\xi = \xi a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $\{a_i\}_{i=1}^n$ — разделяющее точки семейство, эквивалентны в любом A-бимодуле. Это утверждение, анонсированное в [5], доказывается аналогично следствию 2. Его частными случаями являются теорема об эквивалентности системы $T^2X = XT^2$, $T^3X = XT^3$ уравнению $TX = XT$ для нормальных T (см. [6]) и результаты [7].

Класс (SD) обладает важным характеристическим свойством восстановимости действия по совокупности спектральных подпространств.

Пусть X — модуль над регулярной полупростой алгеброй A. Для $A_1 \subset A$, $X_1 \subset X$ положим

$$\operatorname{ann} A_1 = \{\xi \in X : A_1\xi = \{0\}\},\ \operatorname{ann} X_1 = \{a \in A : aX_1 = \{0\}\}.$$

Каждому замкнутому подмножеству $\alpha \subset M_A$ сопоставим спектральное подпространство $X(\alpha) = \{\xi \in X : h(\operatorname{ann}\xi) \subset \alpha\}$. Нетрудно видеть, что $X(\alpha) = \operatorname{ann} J_\alpha^{(0)}$ и что $aX \subset X(\operatorname{supp}\widehat{a})$ для любого $a \in A$. Отсюда легко следует, что если X_1, X_2 — A-модули, то всякий гомоморфизм $T : X_1 \to X_2$ сохраняет спектральные подпространства.

Теорема 5. *Если $A \in (SD)$, то всякое линейное отображение A-модуля X_1 в A-модуль X_2, сохраняющее спектральные подпространства, является A-гомоморфизмом.*

Доказательство. Полагая $E_1 = \{a \otimes 1 - 1 \otimes a : a \in A\}$, $E_2 = \{a \otimes b : \operatorname{supp}\widehat{a} \cap \operatorname{supp}\widehat{b} = \varnothing\}$, имеем $h(E_1) = h(E_2) = D_A$, откуда ввиду синтезируемости D_A $I(E_1) = I(E_2)$. В пространстве $L(X_1, X_2)$ введем структуру $A\widehat{\otimes}A$-модуля, полагая $(a \otimes b)Y = L_a^{X_2}YL_b^{X_1}$, где $L_a^{X_i}$ — операторы умножения на a в X_i. Ясно, что подпространство $Y_1 \subset L(X_1, X_2)$, состоящее из всех A-гомоморфизмов, совпадает с $\operatorname{ann} E_1$. Если Y_2 — совокупность всех отображений из $L(X_1, X_2)$, сохраняющих спектральные подпространства, то для любого $T \in Y_2$ и любых a, b из A

$$(a \otimes b)T(X_1) \subset aT(X_1(\operatorname{supp}\widehat{b})) \subset aX_2(\operatorname{supp}\widehat{b}) \subset X_2(\operatorname{supp}\widehat{a} \cap \operatorname{supp}\widehat{b}).$$

Откуда следует, что $Y_2 \subset \operatorname{ann} E_2 = \operatorname{ann} J(E_2) = \operatorname{ann} E_1 = Y_1$. Теорема доказана.

Применяя теорему 5 к тождественному отображению, заключаем, что структура A-модуля однозначно восстанавливается по совокупности спектральных подпространств. Покажем, что вне класса (SD) этот результат, а следовательно, и теорема 5 перестают быть справедливыми.

Рассмотрим аннулятор X идеала $J_{DA}^{(0)}$ в $(A\widehat{\otimes} A)^*$. Формулы $a\xi(F)= \xi((a\otimes 1)F)$, $\xi a(F)=\xi((1\otimes a)F)$ определяют в X две структуры A-модуля; возникающие таким образом A-модули мы будем обозначать X_1 и X_2. Покажем, что $X_1(\alpha)=X_2(\alpha)$ для любого замкнутого $\alpha\subset M_A$. Для этого достаточно доказать, что $h(\mathrm{ann}_1\xi)=h(\mathrm{ann}_2\xi)$ при любом $\xi\in X$. Пусть $m\in M_A\setminus h(\mathrm{ann}_1\xi)$. Это означает, что $\hat{a}(m)\neq 0$ для некоторого $a\in \mathrm{ann}_1\xi$. Пусть b — такой элемент алгебры A, что $\hat{b}(m)\neq 0$ и $\mathrm{supp}\,\hat{b}\cap h(a)=\varnothing$. Докажем, что $\xi b=0$. Пусть $I= \mathrm{ann}_1(\xi b)$. Ясно, что $a\in I$ (поскольку $a\xi=0$) и $J^{(0)}_{\mathrm{supp}\,\hat{b}}\subset I$ (если $x\in J^{(0)}_{\mathrm{supp}\,\hat{b}}$, то $x\otimes b\in J_{DA}^{(0)}$ и потому $x\xi b(F)=\xi((x\otimes b)F)=0$ для $F\in A\widehat{\otimes} A$). Поэтому $h(I)\subset h(a)\cap h(J^{(0)}_{\mathrm{supp}\,\hat{b}})=h(a)\cap \mathrm{supp}\,b=\varnothing$. Это означает, что $I=A$, так, что $\xi b=0$. Следовательно, $b\in \mathrm{ann}_2\xi$, $m\notin h(\mathrm{ann}_2\xi)$. Таким образом, $h(\mathrm{ann}_2\xi)\subset h(\mathrm{ann}_1\xi)$. Аналогично доказывается обратное включение. Мы доказали совпадение спектральных подпространств. Теперь заметим, что совпадение действий, т. е. равенство $a\xi=\xi a$ при $\xi\in X$, $a\in A$, имеет место в том и только том случае, когда все функционалы из X аннулируют элементы $a\otimes 1 - 1\otimes a$. В силу соотношений двойственности это означает, что $a\otimes 1 - 1\otimes a\in \overline{J_{DA}^{(0)}}$ для любого $a\in A$. Так как замкнутый идеал, порожденный элементами $a\otimes 1-1\otimes a$ в $A\widehat{\otimes} A$, совпадает с J_{D_A} (см. доказательство теоремы 2), $\overline{J_{DA}^{(0)}}=J_{D_A}$, т. е. совпадение действий эквивалентно синтезируемости диагонали.

Для групповых алгебр свойство восстановимости действия по спектральным подпространствам было доказано и с успехом использовано в работе [8].

Автор глубоко признателен Е. А. Горину и А. С. Файнштейну за полезные обсуждения рассмотренных в работе вопросов.

Список литературы: 1. *Rosenblum M.* On a theorem of Fuglede and Putnam // J London Math. Soc. 33. 1958. P. 376—377. 2. *Горич Е. А.* О подпространствах банаховой алгебры, выделяемых аналитически // XI Всесоюз. шк. по теории операторов. Ч. II. Челябинск, 1986. С. 36.3. *Boyadziev K.* Commuting C_0-groups and the Fuglede—Putnam theorem // Stud. Math. 1985. **81**, N 3. P. 303—306. 5. *Шульман В. С.* Линейные операторные уравнения с нормальными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1983. **270**, № 5. С. 726—729. 6. *Kittaneh F.* On the commutants modulo C_p of A^2 and A^3 // J. Australian Math. Soc. 1986. A-41, N 1. P. 47—50. 7. *Du Hongke* On normal operators and its adjoints // Шусюэ цзиньчжан. Adv. Math. 1987. **16**, N 1. P. 67—71. 8. *Arveson W.* On groups of automorphisms of operator algebras // I. Funct. Anal. 1974. **15**, N 2. P. 217—243.

Поступила в редколлегию 04.11.87

УДК 513.88

В. П. ФОНФ

О РАСШИРЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ БАЗИСОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Согласно [1—3, с. 325] полная минимальная система $\{x_i\}$ в банаховом пространстве X называется операторным базисом, если существует последовательность непрерывных операторов $\{T_n\}$, $T_n: [x_i]_1^n \to [x_i]_1^n$ такая, что для каждого элемента $x \in X$ $x = \lim T_n S_n x$, где S_n — оператор взятия n-частной суммы по минимальной системе $\{x_i\}$ (если $\{x_i^*\}$ — сопряженная к $\{x_i\}$ система, то $S_n x = \sum\limits_1^n x_i^*(x)\ x_i$). Если операторы T_n линейны, то система $\{x_i\}$ называется линейным операторным базисом. М. И. Кадец доказал [2], что если сопряженная система $\{x_i^*\}$ (к полной минимальной системе $\{x_i\}$ является нормирующей (т. е. подпространство $[x_i^*]$ является нормирующим), то $\{x_i\}$ — операторный базис. В [4] автором доказано обратное утверждение, т. е. сопряженная система к операторному базису — нормирующая (в [1] этот факт доказан для линейных операторных базисов). Таким образом, можно дать эквивалентное определение операторного базиса: операторным базисом называется полная минимальная система с нормирующей сопряженной. Хорошо известно (см., например, [3]), что всякое сепарабельное банахово пространство имеет операторный базис, но не всякое — линейный. Полная минимальная система с тотальной сопряженной называется M-базисом.

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с расширением операторных базисов, аналогичные вопросам о расширении M-базисов (см. [3], с. 231).

Прежде чем переходить к основным результатам напомним некоторые определения и сформулируем ряд вспомогательных утверждений. Подмножество $A \subset X^*$ сопряженного банахова пространства X^* называется нормирующим, если

$$\inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{f \in A \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} > 0.$$

Пусть E_1 и E_2 — подпространства банахова пространства X. E_1 и E_2 называются квазидополнительными, если $E_1 \cap E_2 = 0$ и $\overline{E_1 + E_2} = X$. Раствором подпространств E_1 и E_2 называют число

$$\theta(E_1,\ E_2) = \max\{\sup_{x \in S(E_1)} d(x,\ E_2),\ \sup_{x \in S(E_2)} d(x,\ E_1)\},$$

где $S(E)$ — единичная сфера пространства E (единичный шар обозначим $U(E)$). Наклоном подпространства E_1 к E_2 называют число $\delta(E_1,\ E_2) = \inf\{\|x + y\| : x \in S(E_1),\ y \in E_2\}$. Хорошо известное равенство $\theta(E_1,\ E_2) = \theta(E_1^\perp,\ E_2^\perp)$ вместе с соображениями устойчивости ([5], с. 126) позволяют доказать следующее утверждение

Лемма 1. *Пусть* $\{x_i\}$ — *М-базис банахова пространства* X *с сопряженной системой* $\{x_i^*\}$. *Тогда для всякой последовательности положительных чисел* $\{\varepsilon_i\}$ *существует последовательность* $\{\delta_i\}$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ *такая, что всякая последовательность* $\{y_i\} \subset X$, *обладающая свойством* $\|x_i - y_i\| < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$ *является М-базисом* X *и для ее сопряженной* $\{y_i^*\}$ *справедливы соотношения*

$$\theta([x_i^*]_1^n, [y_i^*]_1^n) < \varepsilon_n, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Лемма 2. *Пусть* $\{x_i\}$ — *операторный базис подпространства* E *сепарабельного банахова пространства* X. *Тогда сопряженная система* $\{f_i\} \subset X^*$ *может быть выбрана так, чтобы подпространство* $[f_i] \subset X^*$ *было нормирующим.*

Доказательство. Пусть $\{x_i^*\}$ — сопряженная система к $\{x_i\}$ в E^*, тогда подпространство $M = [x_i^*] \subset E^*$ нормирующее. Обозначим через A естественное вложение E в X. Нетрудно убедиться, что подпространство $A^{*-1}(M) \subset X^*$ нормирующее. Пользуясь сепарабельностью пространства X, выберем в единичном шаре $U(A^{*-1}(M))$ счетное w^*-плотное подмножество $\{t_n\}$ и для каждого номера n найдем элемент $g_n = \sum\limits_1^{m_n} a_i^n x_i^*$ такой, что $\|g_n - A^* t_n\| < n^{-1}$. Без ущерба общности можно считать, что $m_1 < m_2 < \ldots$ и $a_{m_n}^n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть u_n — продолжение с сохранением нормы функционала $g_n - A^* t_n$ подпространства E на все X. Построим сопряженную систему $\{f_i\} \subset X^*$ следующим образом: выберем элементы $f_i \in A^{*-1}(x_i^*)$ $(i = 1, \ldots, m_1 - 1)$ произвольно, а в качестве f_{m_1} возьмем

$$f_{m_1} = \frac{1}{a_{m_1}^1}\left(t_1 + u_1 - \sum_1^{m_1-1} a_i^1 f_i\right),$$

далее выберем $f_i \in A^{*-1}(x_i^*)$, $i = m_1 + 1, \ldots, m_2 - 1$ произвольно, а

$$f_{m_2} = \frac{1}{a_{m_2}^2}\left(t_2 + u_2 - \sum_1^{m_2-1} a_i^2 f_i\right)$$

и т. д. построим последовательность $\{f_i\} \subset X^*$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $T: X \to Y$ *линейное ограниченное взаимнооднозначное отображение сепарабельного банахова пространства* X *в такое же* Y, *причем* $\overline{TX} = Y \neq TX$, *т. е.* T^{-1} *неограниченное отображение. Тогда для всякого* М-базиса $\{y_i\}$ *в* Y *и для всякой последовательности* $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i > 0$ *существует базисная последовательность* $\{u_i\} \subset X$ *такая, что* $\{Tu_i\}$ — *М-базис пространства* Y *и* $\|y_i - Tu_i\| < \varepsilon_i$.

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$ — произвольный M-базис пространства Y. Пользуясь устойчивостью M-базиса, найдем последовательность $\{\delta_i\}$ такую, что если $\|y_i - v_i\| < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\{v_i\}$ — M-базис Y. Будем считать, что $\varepsilon_i < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Воспользовавшись плотностью образа: $\overline{TX}=Y$, выберем элемент $u_1 \in X$ так, чтобы $\|y_1 - Tu_1\| < \varepsilon_1$, и пусть функционал $f_1^1 \in S(X^*)$ таков, что $f_1^1(u_1) = \|u_1\|$. Так как оператор T^{-1} неограничен, то для любого компактного по норме множества $K \subset X^*$ множество $\operatorname{Lin} K + T^*Y^*$ имеет первую категорию в X^* ($\operatorname{Lin} K$ — линейная оболочка множества K). Выберем функционал $h_1^1 \in X^* \setminus T^*Y^*$ так, чтобы $\|f_1^1 - h_1^1\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Так как $h_1^1 \overline{\in} T^*X^*$, то $\overline{T(\operatorname{Ker} h_1^1)} = Y$ и, следовательно, существует элемент $u_2 \in \operatorname{Ker} h_1^1$ такой, что $\|y_2 - Tu_2\| < \varepsilon_2$. Положим $E_2 = [u_1, u_2]$ и пусть $\{f_i^2\}_1^{n_2} \subset S(X^*)$ такой набор функционалов, что множество $\{f_i^2|_{E_2}\}$ есть $\frac{\varepsilon_2}{2^2}$ — сеть для $S(E_2^*)$. Выберем последовательно функционалы $\{h_i^2\}_1^{n_2}$ так: $\|h_1^2 - f_1^2\| < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, $h_1^2 \overline{\in} [h_1^1] + T^*Y^*$; $\|h_2^2 - f_2^2\| < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, $h_2^2 \overline{\in} [h_1^1, h_1^2] + T^*Y^*$; $\|h_3^2 - f_3^2\| < \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, $h_3^2 \overline{\in} [h_1^1, h_1^2, h_2^2] + T^*Y^*$ и т. д. По построению $[h_1^1, h_1^2, \ldots, h_{n_2}^2] \cap T^*Y^* = 0$, откуда следует что $\overline{T([h_1^1, h_1^2, \ldots h_{n_2}^2]^\top)} = Y$. Выберем элемент $u_3 \in [h_1^1, h_1^2, \ldots, h_{n_2}^2]^T$ так, чтобы $\|y_3 - Tu_3\| < \varepsilon_3$ и т. д.

Последовательность $\{u_i\}$ — требуемая. Лемма доказана.

Теорема 1*. *Пусть $\{x_i\}$ — операторный базис подпространства E_1, сепарабельного банахова пространства X и E_2 квазидополнительное, но не дополнительное подпространство к E_1. Тогда существует базисная последовательность $\{y_i\} \subset E_2$ такая, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ — операторный базис всего пространства X.*

Доказательство. Согласно [3], с. 231 существует последовательность $\{z_i\} \subset E_2$ такая, что $\{x_i\} \cup \{z_i\}$ M-базис X. Обозначим $\{x_i^*\} \cup \{z_i^*\}$ сопряженную систему и положим $E_3 = [z_i]$. По лемме 2 существует последовательность $\{u_i\} \subset E_1^\perp$ такая, что $[x_i^* + u_i]$ нормирующее подпространство. Без ущерба общности можно считать последовательность $\{u_i\}$ конечно линейно независимой. По теореме 1.6 ([5], с. 122) в фактор-пространстве X/E_1 существует M-базис $\{t_i\}$ с сопряженной системой $\{t_i^*\}$, обладающей свойством $[t_i^*]_1^n = [u_i]_1^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ обозначим через $\gamma_n = \delta([u_i]_1^n, [x_i^*]_1^n)$ наклон подпространства $[u_i]_1^n$ и $[x_i^*]_1^n$. По лемме 1, взяв в ней $\varepsilon_i = 2^{-i}\gamma_i$ и в качестве $\{x_i\}$ последовательность $\{t_i\}$ найдем последовательность $\{\delta_i\}$ такую, что если $\|t_i - v_i\| < \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\{v_i\}$ — M-базис фактор-пространства X/E_1 и $\theta([t_i^*]_1^n, [v_i^*]_1^n) < 2^{-n}\gamma_n$, или, что то же самое, $\theta([u_i]_1^n, [v_i^*]_1^n) < 2^{-n}\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через T — сужение фактор-отображения $X \to X/E_1$ на E_3. Пользуясь тем, что $\overline{E_1 + E_3} = X \neq E_1 + E_3$, нетрудно установить,

* Как стало известно автору, эта теорема без свойства базисности последовательности $\{y_i\}$ недавно была доказана П. Теренци.

что $\overline{TE_3} = X/E_1$ и отображение T^{-1} неограничено. По лемме 3 существует базисная последовательность $\{y_i\} \subset E_3$ такая, что $\|t_i - Ty_i\| < \delta_i$. Полагая $v_i = Ty_i$, $i = 1, 2, \ldots$, получим, что $\{Ty_i\}$ — M-базис X/E_1, откуда следует, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ M-базис X. Кроме того, если $\{y_i^*\} \subset E_1^\perp$ сопряженная система к $\{Ty_i\}$, то $\theta([y_i^*]_1^n, [u_i]_1^n) < 2^{-n}\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Возьмем теперь произвольный элемент $f \in S([x_i^*]_1^n + [u_i]_1^n)$, $f = x^* + u$, $x^* \in [x_i^*]_1^n$, $u \in [u_i]_1^n$. Так как $\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma_n}$ и существует элемент $v \in [y_i^*]_1^n$ такой, что $\left\|\frac{u}{\|u\|} - v\right\| < 2^{-n}\gamma_n$, то $\|f - (x^* + \|u\| v)\| = \|u\| \left\|\frac{u}{\|u\|} - v\right\| \leqslant 2^{-n}$. Но элемент $x^* + \|u\| v \in [x_i^*]_1^n + [y_i^*]_1^n$ и, следовательно, $[\{x_i^*\}_1^\infty, \{y_i^*\}_1^\infty] \supset [\{x_i^* + u_i\}_1^\infty]$, откуда следует, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ — операторный базис ($[x_i^* + u_i]$ нормирующее подпространство, значит и $[x_i^*, y_i^*]_1^\infty$ — нормирующее). Теорема доказана.

Как замечено И. Зингером ([3], с. 234), не всегда возможно так расширить M-базис $\{x_i\}$ подпространства E_1 элементами $\{y_i\}$ из заданного квазидополнения E_2, чтобы $[y_i] = E_2$. С другой стороны, согласно одному результату В. Г. Винокурова ([5], с. 123) всегда существует M-базис $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ всего пространства, что $[x_i] = E_1$, $[y_i] = E_2$. Следующее предложение суммирует результаты в этом направлении, касающиеся операторных базисов.

Предложение. *Пусть сепарабельное банахово пространство X есть квазипрямая сумма своих подпространств E_1 и E_2 (т. е. $E_1 \cap E_2 = 0$, $\overline{E_1 \dotplus E_2} = X \neq E_1 \dotplus E_2$). Пусть далее $P_1 : E_1 \dotplus E_2 \to E_1$ проектор из $E_1 \dotplus E_2$ на E_1 параллельно E_2, $P_2 = I - P_1$, $Y = (E_1 \oplus E_2)_{l_1}$ и T — естественное вложение пространства Y в X. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *P_1 и P_2 — отображения первого класса Бэра (норма на $E_1 \dotplus E_2$ индуцирована пространством X);*

2) *T^{-1} — отображение первого класса Бэра;*

3) *$E_1^\perp + E_2^\perp$ — нормирующее линейное многообразие;*

4) *$E_1^\perp|_{E_2}$ и $E_2^\perp|_{E_1}$ — нормирующие линейные многообразия соответственно для E_2 и E_1;*

5) *одно из многообразий $E_1^\perp|_{E_2}$ или $E_2^\perp|_{E_1}$ нормирующее;*

6) *существуют операторные базисы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ подпространств E_1 и E_2 такие, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ M-базис X;*

7) *существуют операторные базисы $\{x_i\}$ E_1 и $\{y_i\}$ в E_2 такие, что $\{x_i\} \cup \{y_i\}$ — операторный базис пространства X.*

Доказательство. Обозначим через Q_1 и Q_2 проекторы из Y на E_1 и E_2 соответственно параллельно E_2 и E_1. Эквивалентность 1) $\leftrightarrow$ 2) следует из равенств $P_i = TQ_iT^{-1}$, $i = 1, 2$; $T^{-1} = T^{-1}|_{E_1}P_1 + T^{-1}|_{E_2}P_2$. Импликации 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) очевидны. Для доказательства 5) $\Rightarrow$ 3) заметим, что линейное многообразие $E_1^\perp + E_2^\perp = (T|_{E_1})^{*-1} \times (E_2^\perp|_{E_1})$ является нормирующим как прообраз нормирующего линейного многообразия $E_2^\perp | E_1$. Докажем 4) $\Rightarrow$ 2). Для этого достаточно проверить ([6], с. 188), что T^*X^* нормирующее линейное многообразие. Однако $T^*X^* \supset E_1^\perp | E_2 + E_2^\perp | E_1$, что и влечет нормируемость T^*X^*. Прежде чем доказывать 1) $\Rightarrow$ 5) обозначим через φ_1 сужение фактор-отображения $X \to X/E_1$ на E_2. Для доказательства 1) $\Rightarrow$ 5) достаточно проверить ([6], с. 188), что φ_1^{-1} отображение первого класса Бэра. Пусть непрерывные отображения $f_n : E_1 + E_2 \to E_2$, $(n = 1, 2, \ldots)$ таковы, что для всех $x \in E_1 + E_2$ $\lim f_n(x) = P_2 x$ и ψ — непрерывный селектор для фактор-отображения $q_1 : X \to X/E_1$, т. е. для всех $x \in X$ $q_1 \psi_1 q_1(x) = x$. Тогда для всех $x \in E_2$ $\lim f_n \psi_1 \varphi_1(x) = x$, откуда следует, что φ_1^{-1} — первого класса Бэра. Импликации 7) $\Rightarrow$ 6) и 6) $\Rightarrow$ 4) очевидны. Докажем 3) $\Rightarrow$ 7). Выберем последовательность $\{u_n\} \subset E_1^\perp + E_2^\perp$, $u_n = v_n + w_n$, $v_n \in E_1^\perp$, $w_n \in E_2^\perp$, обладающую следующими свойствами:

$$\text{а) } \dim [u_i]_1^n = \dim [v_i]_1^n = \dim [w_i]_1^n = n;$$

$$\text{в) } \operatorname{Lin} \{u_i\}_1^\infty \text{ — нормирующее многообразие.}$$

Так как $E_1^\perp \cap E_2^\perp = 0$, то из а) следует, что

$$\dim [v_i]_1^n |_{E_2} = \dim [w_i]_1^n |_{E_1} = n$$

и по теореме 1,6 ([5], с. 122) существуют полные минимальные системы $\{x_i\}$ в E_1 и $\{y_i\}$ в E_2 с сопряженными $\{x_i^*\} \subset E_1^*$ и $\{y_i^*\} \subset E_2^*$ такими, что

$$[x_i^*]_1^n = [w_i]_1^n |_{E_1} \quad \text{и} \quad [y_i^*]_1^n = [v_i]_1^n |_{E_2}.$$

Пусть $\hat{x}_i^* \in E_2^\perp$ и $\hat{y}_i^* \in E_1^\perp$ продолжения функционалов x_i^* и y_i^*, $(i = 1, 2, \ldots)$, тогда $[\hat{x}_i^*]_1^n = [w_i]_1^n$ и $[\hat{y}_i^*]_1^n = [v_i]_1^n$ и, следовательно, по свойству в) $[\hat{x}_i^*, \hat{y}_i^*]$ — нормирующее подпространство.

Таким образом, $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ — операторные базисы. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть E_1 и E_2 квазидополнительные подпространства сепарабельного банахова пространства X, $P_1 : E_1 \dotplus E_2 \to E_1$, проектор из $E_1 + E_2$ на E_1 параллельно E_2, $P_2 = I - P_1$, причем P_1 и P_2 — отображения не первого класса Бэра (скажем, второго). Тогда никакой операторный базис пространства E_1 не может быть дополнен до М-базиса X с помощью полной минимальной системы в E_2.*

Список литературы: 1. *Гапошкин В. Ф., Кадец М. И.* Операторные базисы в пространствах Банаха // Мат. сб. 1963. **61**, № 1. С. 3—12. 2. *Кадец М. И.* Нелинейные операторные базисы в пространстве Банаха // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1966. Вып. 2. С. 128—130. 3. *Singer I.* Bases in Banach Spaces, II. Berlin—Heidelberg—New-York. 1981. 668 p. 4. *Фонф В. П.* Операторные базисы и обобщенные базисы суммирования // Докл. АН УССР. 1986. № 11. С. 16—18. 5. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространства Банаха // Успехи мат. наук. 1970. **25**, № 3. С. 113—174. 6. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с.

Поступила в редколлегию 25.01.88

УДК 513.33

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК

МАКСИМАЛЬНЫЕ И γ-ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. I

§ 1. Введение. Пусть H — некоторый класс функций, определенных на множестве B, со значениями в линейном нормированном пространстве F с нормой $|\cdot|$ ($H \subset F^B$). Подмножество S множества B назовем H-максимальным, если $\forall y \in H$

$$\sup\{|y(\tau)| : \tau \in S\} = \sup\{|y(t)| : t \in B\}.$$

Приведем некоторые примеры максимальных множеств. Пусть H^{α}_{ρ} — класс всех функций, голоморфных в угле D раствора $\frac{\pi}{\alpha}$, имеющих порядок роста ρ в угле и непрерывных на границе Γ угла. Согласно теореме Фрагмена — Линделефа (см., например, [1], стр. 69), Γ — H^{α}_{ρ} — максимальное множество при $\rho < \alpha$.

Известны также примеры и дискретных максимальных множеств. При этом под дискретным множеством понимается множество точек в C^p, $p \geqslant 1$, не имеющее предельных точек на конечном расстоянии. Пусть, как обычно, $[\rho, \sigma)$ — класс всех целых функций, у которых или порядок $< \rho$, или порядок равен ρ, но тип меньше, чем σ $(0 < \sigma \leqslant \infty)$. Пусть далее S — множество точек $\{\pm\lambda_n, \pm i\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lambda_n > 0$; $\mu_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n} = D_1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n} = D_2$; $\inf\limits_{n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$; $\inf\limits_{n}(\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$. Теорема Левинсона (см. [1], стр. 267) утверждает, что S является $[1, \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$-максимальным множеством.

В настоящей статье выделяются довольно общие классы максимальных множеств, образованных с помощью введенных в работе γ-достаточных множеств. Полученные общие результаты применяются к некоторым классам целых функций. Следует заметить, что γ-достаточные множества являются естественным обобщением слабо достаточных множеств, введенных Шнейдером [2] и довольно интенсивно исследуемых в последнее время (см., например, [3—7]).

В работе излагаются также результаты, относящиеся к следующей задаче. Пусть $\rho(r) \to \rho > 0$ — уточненный порядок по Валирону (см. [1], стр. 46); $[\rho(r), \infty)$ — класс всех целых функций $y(z)$ роста не выше, чем нормального типа относительно $\rho(r)$; $g(\theta)$ — ограниченная 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция (см. [1], стр. 72—76; класс всех таких функций будет в дальнейшем обозначаться символом T_ρ). Предположим, что $g \in T_\rho$, $y(z) \in [\rho(r), \infty)$ и что $g_y(\theta_j) < g(\theta_j)$, $j = 1, 2, \ldots p$, где $g_y(\theta)$ — индикатор $y(z)$ при порядке $\rho(r)$, а $\{\theta_j\}_{j=1}^{p}$ — некоторая совокупность p чисел из $[0, 2\pi)$.

Требуется указать дискретное множество S такое, что если $y(z)$ растет достаточно медленно на S, то отсюда следует, что неравенство $g_y(\theta) < g(\theta)$ справедливо уже для всех θ из $[0, 2\pi]$.

§ 2. γ-достаточные множества. Всюду далее $R^+=[0, +\infty)$; $(R^+)^B$ — множество всех отображений B в R^+. Пусть $h \in (R^+)^B$, $E_{(0)}$ — подпространство F^B. Положим

$$E_\alpha = \left\{ y \in E_{(0)} \mid |y|_\alpha := \sup_{t \in B} \frac{|y(t)|}{\exp \alpha h(t)} < \infty \right\} \quad (0 \leqslant \alpha < \infty);$$

$$E^\beta(h) = \bigcup_{0 \leqslant \alpha < \beta} E_\alpha \quad (0 < \beta \leqslant \infty).$$

Определим на $E^\beta_\omega(h)$ топологию μ индуктивного предела семейства линейных нормированных пространств E_α:

$$E^\beta, \ \mu = \lim_{0 \leqslant \alpha < \beta} \operatorname{ind} E_\alpha.$$

Пусть $0 \leqslant \alpha_n \uparrow \beta$. Тогда, очевидно, $E^\beta(h)$, $\mu = \lim\limits_n \operatorname{ind} E_{\alpha_n}$. Пользуясь тем, что топология μ мажорирует топологию d поточечной сходимости, легко получить, что каждый шар $I_\alpha = \{x \in E_\alpha : |x|_\alpha \leqslant 1\}$ замкнут в $E^\beta(h)$, μ (см., например, [6, 7]). Отсюда следует, что пространство $E^\beta(h)$, μ обладает свойством F_1 (см. [8], стр. 52) и потому $\lim\limits_n \operatorname{ind} E_{\alpha_n}$ — регулярный индуктивный предел (определение регулярного индуктивного предела см. в [9], стр. 406).

Пусть теперь S — произвольное подмножество B и $E^S_\alpha = \left\{ y \in \right.$ $\left. \in E^\beta(h) \mid |y|^S_\alpha := \sup\limits_{t \in S} \dfrac{|y(t)|}{\exp \alpha h(t)} < \infty \right\}$, $0 \leqslant \alpha < \beta$. Пространства E^S_α полунормированные. Так как $E_\alpha \hookrightarrow E^S_\alpha \subseteq E^\beta(h)$, то $\bigcup\limits_{0 \leqslant \alpha < \beta} E^S_\alpha = E^\beta(h)$. Положим $E^\gamma_S = \bigcup\limits_{0 \leqslant \alpha < \gamma} E^S_\alpha$ $(0 < \gamma \leqslant \beta)$;

$$E^\gamma_S, \ \mu_{S,\gamma} = \lim_{0 \leqslant \alpha < \gamma} \operatorname{ind} E^S_\alpha.$$

Множество S назовем γ-достаточным для $E^\beta(h)$, если E^γ_S, $\mu_{S,\gamma} \hookrightarrow E^\beta(h)$, μ. В частности, множество S β-достаточно для $E^\beta(h)$ тогда и только тогда, когда на $E^\beta(h)$ совпадают две индуктивные топологии $\lim\limits_{0 \leqslant \alpha < \beta} \operatorname{ind} E_\alpha$ и $\lim\limits_{0 \leqslant \alpha < \beta} \operatorname{ind} E^S_\alpha$. Следуя Шнейдеру [2], будем называть β-достаточное для $E^\beta(h)$ множество слабо достаточным (для $E^\beta(h)$).

Теорема 1. *Для того, чтобы множество S было γ-достаточным для $E^\beta(h)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \alpha \in [0, \gamma) \ \exists \delta \in [0, \beta) : E^S_\alpha \hookrightarrow E_\delta. \tag{1}$$

Достаточность. Если условие (1) выполнено, то $\forall \alpha \in [0, \gamma)$ $E^S_\alpha \hookrightarrow E_\delta \hookrightarrow E^\beta(h)$, μ; отсюда E^γ_S, $\mu_{S,\gamma} \hookrightarrow E^\beta(h)$, μ.

Необходимость легко следует из леммы 4 работы [4].

Теорема, которая будет сейчас доказана, является отправной для всех последующих результатов настоящего параграфа.

Теорема 2. *Пусть F — регулярная банахова алгебра; $E_{(0)}$ — алгебра относительно поточечногоо умножения в B; $\gamma \in (0, \beta]$ и S — γ-достаточное множество для $E^{\beta}(h)$. Пусть, далее, $y \in E^{\beta}(h)$ и $\exists n_k \uparrow \infty : y^{n_k} \in E^{\beta}(h)$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$\sup_{t \in S} |y(t)| = \sup_{t \in B} |y(t)|. \tag{2}$$

Перед доказательством напомним, что банахова алгебра F с нормой $|\cdot|$ называется регулярной, если $|f^2| = |f|^2$, $\forall f \in F$.

Положим $C_1 = \sup\limits_{t \in S} |y(t)|$; $C_2 = \sup\limits_{t \in B} |y(t)|$. Всегда $C_2 \geqslant C_1$. Если $C_1 = \infty$, то подавно $C_2 = \infty$. Пусть теперь $C_1 = 0$. Зафиксируем $\alpha \in [0, \gamma)$ и выберем $\delta \in [0, \beta)$ так, чтобы выполнялось соотношение (1). Тогда $\exists d < \infty : |f|_{\delta} \leqslant d |f|_{\alpha}^{S}$, $\forall f \in E_{\alpha}^{S}$. Так как $y \in E_{\alpha}^{S}$, $\forall \alpha \in [0, \beta)$, то $|y|_{\delta} = 0$ и $C_2 = C_1 = 0$. Пусть, наконец, $0 < C_1 < \infty$. Положим $v = y/C_1$. Ясно, что $v \in E^{\beta}(h)$, причем $|v(t)| \leqslant 1$, $\forall t \in S$. Тогда $\forall k \geqslant 1$

$$\sup_{t \in B} \frac{|v^{n_k}(t)|}{\exp \delta h(t)} \leqslant d \sup_{t \in S} \frac{|v^{n_k}(t)|}{\exp \alpha h(t)} \leqslant d \sup_{t \in S} \frac{|v(t)|}{\exp \alpha h(t)} \leqslant d.$$

Следовательно, $\forall t \in B$, $\forall k \geqslant 1$ $|v(t)| \leqslant d^{1/n_k} \exp \dfrac{\delta h(t)}{n_k}$. Устремляя k бесконечности, получим, что $|v(t)| \leqslant 1$, $\forall t \in B$, т. е. $|y(t)| \leqslant C_1$, $\forall t \in B$, и $C_2 \leqslant C_1$.

Следствие 1. *Пусть F и $E_{(0)}$ — те же, что в теореме 2, и пусть $E^{\beta}(h)$ — алгебра, $\gamma \in (0, \beta]$ и S — γ-достаточное множество для $E^{\beta}(h)$. Тогда S является $E^{\beta}(h)$-максимальным множеством.*

Следствие 2. *Пусть F — регулярная банахова алгебра; $E_{(0)}$ — алгебра (относительно поточечного умножения на B); $0 < \gamma \leqslant \infty$ и S — γ-достаточное множество для $E_0(h)$. Тогда S является $E^{\infty}(h)$-максимальным множеством.*

Применим следствие 2 к одной конкретной ситуации. Пусть $F = B = \boldsymbol{C}$; $E_0 = H(\boldsymbol{C})$ — пространство всех целых функций;

$$E_{\alpha} = \{y(z) \in H(\boldsymbol{C}) : \sup_{z \in C} |y(z)| \exp[-\alpha |z|^{\rho}] < \infty\};$$

$$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n \leqslant 2\pi; \quad \varphi_{k+1} - \varphi_k < \frac{\pi}{\rho}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi; \quad W = \{re^{i\varphi_k} : 0 < r < \infty; \quad k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

В работах [10, 11] доказано, что если $\Lambda \subset \boldsymbol{C}$; $d(z, \Lambda) = \inf\{|z - t| : t \in \Lambda\}$ и $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in W}} d(z, \Lambda) |z|^{\rho - 1} = 0$, то Λ — слабо достаточное множество для $[\rho, \infty)$. По следствию 2 Λ — $[\rho, \infty)$-максимальное множество. Заметим, что этот результат точен: для любого как угодно малого положительного числа τ можно построить множество Λ такое, что

$$\varlimsup_{\substack{z \to \infty \\ z \in W}} d(z, \Lambda) |z|^{\rho - 1} < \tau,$$

но Λ — не $[\rho, \infty)$-максимальное множество и даже не множество единственности для $[\rho, \infty)$.

Следствие 3. *Пусть* $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi$; $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$; $\gamma = \max\limits_{1<k<n} \{\varphi_{k+1} - \varphi_k\}$. *Пусть, далее,* Λ — *произвольное множество на плоскости такое, что* $\overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\notin W}}} \frac{\ln d(z, \Lambda)}{\ln |z|} \leqslant 1 - \frac{\pi}{\gamma}$. Тогда Λ — $\left[\frac{\pi}{\gamma}, 0\right)$-*максимальное множество.*

Следствие 1 в случае, когда $F = \mathbf{C}$; $B = \mathbf{C}^p$; $p \geqslant 1$; $E_{(0)} = H(\mathbf{C}^p)$, получено ранее [2].

Введем важную характеристику любого элемента y из $E_{(0)}$. Именно, положим $H(y) = \inf\{\alpha > 0 : y \in E_\alpha\}$ и $H(y) = +\infty$, если $y \notin E_\alpha$, $\forall \alpha \in (0, +\infty)$. Очевидно, что $y \in E^\beta(h) \leftrightarrow H(y) < \beta$. Обозначим еще символом E_b^S множество всех функций $x(t)$ из $E^\beta(h)$, ограниченных на $S: \sup\limits_{t\in S} |x(t)| < +\infty$. Ясно, что $E_b^S \subseteq \bigcap\limits_{0<\alpha<\beta} E_\alpha^S$. Всюду далее до конца параграфа предполагается, что $\beta < +\infty$.

Теорема 3. *Пусть* F, $E_{(0)}$ *и* S — *те же, что и в теореме 2. Пусть, далее,* $H(y) < \beta/2$, $\forall y \in E_b^S$. *Тогда* S — $E^\beta(h)$-*максимальное множество.*

Перед доказательством для краткости полагаем всюду далее $E = E^\beta(h)$. Пусть $y \in H$. Если $y \notin E_b^S$, то $\sup\limits_{t\in S} |y(t)| = +\infty$ и подавно $\sup\limits_{t\in B} |y(t)| = +\infty$. Пусть теперь $y \in E_b^S$. Тогда $H(y) < \beta|2$ и $\exists \eta < \beta|2 : y \in E_\eta$. Отсюда $y^2 \in E_{2\eta} \subseteq E$. При этом $y^2 \in E_b^S$ и потому $H(y^2) < \beta/2$. Продолжая рассуждения, найдем, что $y^4 \in E$ и т. д. Остается применить теорему 2.

Следствие 1. *Пусть* F, $E_{(0)}$, γ *и* S — *те же, что в теореме 2, и пусть* $E_b^S \subseteq E_\alpha$ *при некотором* $\alpha < \beta/2$. *Тогда* S — E — *максимальное множество.*

Введем одну характеристику множества S. *Пусть* $0 \leqslant \alpha < \beta$. Положим $\lambda(\alpha) = \inf\{\delta \in [0, \beta) : E_\alpha^S \hookrightarrow E_\delta\}$ и $\lambda(\alpha) = \beta$, если множество таких δ пусто. Пусть, далее, $\psi(\lambda) = \max\{\lambda(\alpha), \alpha\}$. Функция $\psi(\lambda)$ не убывает на $[0, \beta)$. Положим $\psi_0 = \lim\limits_{\alpha\to+0} \psi(\alpha)$. Из теоремы 1 следует, что S — γ-достаточное множество для $E \leftrightarrow \lambda(\alpha) < \beta$, $\forall \alpha < \gamma$.

Следствие 2. *Пусть* F, E_0, γ *и* S — *те же, что и в теореме 2, и пусть* $\psi_0 < \beta/2$. *Тогда* S *является* E-*максимальным множеством.*

Укажем теперь несколько иное достаточное условие максимальности множества S. Назовем функцию $v_\delta(t)$ из E функцией правильного δ-роста, если $H(v_\delta) \leqslant \delta$ и если из соотношений $y \in E$, $y \cdot v_\delta \in E$, $H(v_\delta y) \leqslant \alpha$, где $\alpha \in [\delta, \beta)$, всегда следует, что $H(y) \leqslant \beta - \delta$.

Положим еще для любого y из E $H_S(y) = \inf\{\alpha \in [0, \beta) : y \in E_\alpha^S\}$. Всегда $0 \leqslant H_S(y) \leqslant H(y) < \beta$.

Теорема 4. *Пусть F, E_0, γ и S — те же, что в теореме 2, и пусть для любого δ из $[0, \gamma)$ в E имеется функция v_δ правильного δ-роста. Тогда $\forall y \in E$*

$$H(y) \leqslant H_S(y) + \beta - \gamma. \tag{3}$$

Доказательство. Допустим, что в E найдется функция y, для которой $H(y) > H_S(y) + \beta - \gamma$. Очевидно, что тогда $H_S(y) < H(y)$. Зафиксируем любое ε из интервала $\left(0, \frac{\beta - H(y)}{3}\right)$ и положим $\eta = \beta - H(y) - \varepsilon$. Пусть $v_\eta(t)$ — функция правильного η-роста. Тогда $v_\eta y \in E$, причем $v_\eta y \in E_\delta^S$, $\forall \delta > \eta + H_S(y)$. В частности, $v_\eta y \in E^S_{\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2}}$.

При этом $\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2} < \gamma - \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $H(v_\eta y) \leqslant \psi \times \left(\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Но тогда

$$H(y) \leqslant \psi\left(\eta + H_S(y) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \eta = H(y) - \beta + \varepsilon + \psi\left(\eta + \frac{\varepsilon}{2} + H_S(y)\right).$$

Отсюда $\beta \leqslant \varepsilon + \psi\left(\eta + \frac{\varepsilon}{2} + H_S(y)\right) = \varepsilon + \psi(\eta + \varepsilon + H_S(y)) = \varepsilon + \psi \times (\beta - H(y) + H_S(y))$. Так как $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым, то $\beta \leqslant \psi(\beta - H(y) + H_S(y))$, и мы пришли к противоречию.

Следствие 1. *Пусть F — регулярная банахова алгебра; E_0 — алгебра; $\frac{\beta}{2} < \gamma < \beta$; S — γ-достаточное множество. Пусть, далее, для любого δ из $(0, \gamma)$ в E имеется функция v_δ правильного δ-роста. Тогда S является E-максимальным множеством.*

Действительно, $\forall y \in E_b^S$ $H_S(y) = 0$. Из неравенства (3) следует, что $H(y) \leqslant \beta - \gamma < \frac{\beta}{2}$, $\forall y \in E_b^S$, и остается сослаться на теорему 3.

Рассмотрим более конкретную ситуацию, когда B — область в $\boldsymbol{C}^p$, $p \geqslant 1$, а функция $h(z)$ удовлетворяет условию: для любого компакта T области $(T \in k(B))$

$$\inf_{z \in T} h(z) > 0; \quad \sup_{z \in T} h(z) < +\infty. \tag{4}$$

Из условий (3) следует, что если $y \in E$, то $\forall T \in k(B)$ $\sup\limits_{z \in T} |y(z)| < \infty$ (по-прежнему $|\cdot|$ — норма в нормированном пространстве F). Положим $\forall y \in E$

$$h_0(y) = \varlimsup_{\substack{z \to \partial B \\ z \in B}} \frac{\ln |y(z)|}{h(z)}; \quad h_0^S(y) = \varlimsup_{\substack{z \to \partial B \\ z \in S}} \frac{\ln |y(z)|}{h(z)}.$$

Будем предполагать еще, что

$$\lim_{\substack{z \to \partial B \\ z \in B}} h(z) = +\infty. \tag{5}$$

Тогда, как легко проверить, $\forall y \in E$:

$$H(y) = h_0(y); \qquad H_S(y) = h_0^S(y).$$

Из теоремы 4 получаем

Следствие 2. *Пусть имеют место предположения теоремы 4 и пусть выполнены условия* (4), (5). *Тогда* $Ay \in E$:

$$\varlimsup_{\substack{z\to\partial B\\ z\in S}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} \leqslant \varlimsup_{\substack{z\to\partial B\\ z\in B}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} \leqslant \varlimsup_{\substack{z\to\partial B\\ z\in S}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} + \beta - \gamma. \qquad (6)$$

§ 3. Маркированные пространства целых функций. В этом параграфе рассматривается, пожалуй, самый важный модельный случай, когда $B = \boldsymbol{C}^p$, $p \geqslant 1$; $F = \boldsymbol{C}$; E — подалгебра алгебры $H(C^p)$, где $H(\boldsymbol{C}^p)$ — пространство всех целых функций, определенных на $\boldsymbol{C}^p$. Положим $\forall z \in \boldsymbol{C}^p\ |z|_p = [\sum_{k=1}^{p} |z_k|^2]^{1/2}$. Укажем вначале условия, при которых в E имеются функции правильного β-роста. Назовем совокупность шаров $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $K_n = \{z \in \boldsymbol{C}^p : |z - a_n|_p < b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, стандартной, если $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{|a_n|_p} = 0$. Далее, будем говорить, что функция $b(z)$, действующая из $\boldsymbol{C}^p$ в $\boldsymbol{R}$, является функцией относительно медленного роста, если для любого компакта D из $\boldsymbol{C}^p$ $0 < \inf_{z\in D} b(z) \leqslant \sup_{z\in D} b(z) < \infty$ и если для любой стандартной системы $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ шаров $\lim_{\substack{z_1, z_2 \in K_n\\ n\to\infty}} \frac{b(z_1)}{b(z_2)} = 1$, причем стремление к единице равномерно относительно z_1, z_2 из K_n (при $n \to \infty$). Наконец, назовем функцию $g_\alpha(z)$ из $E_{(0)}$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ α-маркировочной, если $g_\alpha(z) \in E_\delta$, $\forall \delta \in (\alpha, +\infty)$ и если имеется множество $\mathscr{E}_\alpha$ шаров $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $P_n = \{z \in \boldsymbol{C}^p : |z - \gamma_n|_p < c_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — нулевой линейной плотности такое, что $\lim_{n\to\infty} |\gamma_n|_p = \infty$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon > 0$: $|g_\alpha(z)| > A_\varepsilon \exp(\alpha - \varepsilon) h(z)$, $\forall z \in \boldsymbol{C}^p \setminus \mathscr{E}_\alpha$.

Теорема 5. *Пусть* $h(z)$ — *функция относительно медленного роста,* $\alpha \in [0, +\infty)$, *и пусть* $g_\alpha(z)$ — α-*маркировочная функция. Тогда* $g_\alpha(z)$ — *функция правильного* α-*роста.*

Доказательство. Из определения α-маркировочной функции следует, что $H(g_\alpha) \leqslant \alpha$. Пусть теперь $y \in E^\beta(h)$; $yg_\alpha \in E^\beta(h)$; $\delta \in (\alpha, \beta)$ и $H(yg_\alpha) \leqslant \delta$. Тогда $\forall \gamma \in (\delta, \beta)$

$$\sup_{z\in \boldsymbol{C}^p} |y(z)|\,|g_\alpha(z)| \exp[-\gamma h(z)] = D_\gamma < \infty.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \forall z \in \boldsymbol{C}^p \setminus \mathscr{E}_\alpha$

$$A_\varepsilon |y(z)| \leqslant D_\gamma \exp(\gamma - \alpha + \varepsilon) h(z).$$

Как показано, в [12, стр. 537—539], множество $\mathscr{E}_\alpha$ можно «погрузить» в множество T_α попарно не пересекающихся шаров нулевой линейной плотности, причем множество центров этих шаров дискретно. Используя принцип максимума модуля и относительно медленный рост $h(z)$, получим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon < \infty$:

$$\forall z \in \boldsymbol{C}^p\ \ |y(z)| \leqslant B_\varepsilon \exp(\gamma - \alpha + 2\varepsilon) h(z).$$

Отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $y \in E_{\gamma-\alpha+2\varepsilon}$, и потому $H(y) \leqslant \gamma - \alpha$. Так как число $\gamma > \delta$ можно взять как угодно близким к δ, то $H(y) \leqslant \delta - \alpha$.

Назовем пространство $E^{\beta}(h)$ маркированным, если для любого α из $[0, \beta)$ в $E^{\beta}(h)$ найдется α-маркировочная функция.

Из теоремы 5 и следствий 1, 2 теоремы 4 получаем.

Следствие 1. *Пусть $p \geqslant 1$, $E_{(0)}$ — подалгебра $H(\boldsymbol{C}^p)$; $h(z)$ — функция относительно медленного роста; пространство $E^{\beta}(h)$ маркировано и S — γ-достаточное множество, причем $\frac{\beta}{2} < \gamma \leqslant \beta$. Тогда S — максимальное множество для $E^{\beta}(h)$.*

Пусть еще $\gamma \in (0, \beta]$ $\left(\text{не обязательно } \gamma > \frac{\beta}{2}\right)$, а функция $h(z)$ такова, что

$$\lim_{|z|_p \to \infty} h(z) = +\infty. \tag{7}$$

Тогда $\forall y \in E^{\beta}(h)$:

$$\varlimsup_{|z|_p \to \infty} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} \leqslant \varlimsup_{\substack{z \in S \\ |z|_p \to \infty}} \frac{\ln|y(z)|}{h(z)} + \beta - \gamma. \tag{8}$$

Приведем примеры маркированных пространств.

1. Пусть $u(z)$ — неотрицательная субгармоническая функция конечного порядка ρ. Тогда при любом $\gamma > 0$ такой же будет и функция $\gamma u(z)$. Согласно теореме 5 работы [13] найдется целая функция $f_{\gamma}(z)$ такая, что $|\gamma u(z) - \ln|f(z)|| < C_1 \ln|z|$, $z \notin E_{\rho}$; при этом исключительное множество E_{ρ} можно покрыть кружками $K_j = \{z : |z - z_j| < t_j\}$ так, чтобы $\sum_{j=1}^{\infty} t_j < \infty$.

Предположим, что функция $u(z)$ удовлетворяет такому условию:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\ln|z|}{u(z)} = 0. \tag{9}$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R_{\varepsilon} < \infty : \forall R > R_{\varepsilon}$, $|z| = R$, $z \notin E_{\rho}$

$$\exp(\gamma - \varepsilon) u(z) < |f_{\gamma}(z)| < \exp(\gamma + \varepsilon) u(z).$$

Пусть $u(z)$ — функция относительно медленного роста. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_{\varepsilon}$, $d_{\varepsilon} \in (0, +\infty)$:

$$|f_{\gamma}(z)| \leqslant d_{\varepsilon} \exp(\gamma + \varepsilon) u(z), \quad z \in \boldsymbol{C};$$

$$|f_{\gamma}(z)| > c_{\varepsilon} \exp(\gamma - \varepsilon) u(z), \quad z \notin E_{\rho}.$$

Таким образом, $f_{\gamma}(z)$ — γ-маркировочная функция, и справедливо

Следствие 2. *Пусть $E_{(0)}$ — подалгебра $H(\boldsymbol{C})$; $u(z)$ — неотрицательная субгармоническая функция относительно медленного роста, удовлетворяющая условию (9); $\gamma \in (0, \beta]$ и S — γ-достаточное множество для $E^{\beta}(h)$.*

Тогда

$$\text{А) } \forall y \in E^{\beta}(h)\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\ln|y(z)|}{u(z)} \leqslant \overline{\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}}} \frac{\ln|y(z)|}{u(z)} + \beta - \gamma;$$

$$\text{Б) } \textit{если } \gamma > \frac{\beta}{2}, \textit{ то } \forall y \in E^{\beta}(h) \sup_{z\in C}|y(z)| = \sup_{z\in S}|y(z)|.$$

2. Пусть $h(z) = |z|^{(\rho|z|)} g(\arg z)$, где $g(\varphi)$ — положительная функция из класса T_{ρ}, а $\rho(r)$ — уточненный порядок:

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho; \quad \lim_{r\to\infty} \rho'(r)\, r \ln r = 0.$$

Легко проверить,что $h(z)$ — функция относительно медленного роста, условие (9) выполняется для $u = h$, а $E^1(h) = [\rho(r), g(\theta))$ — класс всех целых функций роста не выше, чем нормального типа при порядке $\rho(r)$, индикатор которых строго меньше, чем $g(\theta)$.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. **197.** P. 161—180. 3. *Напалков В. В.* О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР. 1982. **264,** № 4. С. 827—830. 4. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers N. H.* A projective Description of Weighted Inductive Limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. **272,** N 1. P. 107—161. 5. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. **50,** № 3. С. 639—665. 6. *Абанин А. В.* О некоторых признаках слабой достаточности // Мат. заметки. 1986. **40,** № 4. С. 442—454. 7. *Коробейник Ю. Ф.* Проективные топологии в индуктивный пределах функциональных пространств.Достаточные множества. М., 1986. 96 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 27.08.85, 1Б911ДЕП. 8. *Макаров Б. М.* Индуктивные пределы нормированных пространств // Вестн. ЛГУ. 1965. **20,** № 13. С. 50—58. 9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959. 684 с. 10. *Шрайфель И. С.* Построение целых функций с положительным индикатором и приложения к представляющим системам и достаточным множествам// М., 1984. 43 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 29.02.84, 6Б189 ДЕП. 11. *Рахимкулов Н. И.* Достаточные множества для пространств целых функций; представление фунций рядами экспонент: Дис. .... канд. физ-мат. наук. Уфа, 1984. 106 с. 12. *Красичков-Терновский* И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. 1978. **24,** № 4. С. 531—546. 13. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica. 1985. **11,** N 3. P. 257—282.

Поступила в редколлегию 27.01.88

УДК 517.521.8

А. П. КОХАНОВСКИЙ

СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ АБЕЛЯ И ВОРОНОГО СУММИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье результаты работы [1] переносятся на соответствующие интегральные методы суммирования функций.

Пусть функции $p(t) \geqslant 0$ и $s(t)$ таковы, что для любого $y > 0$ существуют интегралы

$$\dot{J}(y) = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-t/y} s(t)\,dt; \tag{1}$$

$$W(y) = \frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-t)\,s(t)\,dt, \tag{2}$$

где $P(y) = \int\limits_0^y p(t)\,dt$.

Если $\lim\limits_{y\to\infty} \dot{j}(y) = s\, (\lim\limits_{y\to\infty} W(y) = s)$, то функция $s(t)$ называетвя суммируемой к числу s методом Абеля (методом Вороного).

Далее будем рассматривать только такие методы Вороного, определяющая функция $p(t)$ которых удовлетворяет в интервале $(0; \infty)$ условиям

$$p(t) = \exp h(t);\ h'(t) > 0;\ h''(t) < 0;\ \lim_{t\to\infty} h'(t) = 0; \tag{3}$$

функция $th'(t)$ монотонно стремится к бесконечности. Этим условиям удовлетворяют, например, функции $h(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$; $h(t) = \ln^\lambda(t+a)$, $\lambda > 1$.

Каждому, достаточно большому числу y поставим в соответствие число m_y такое, что $h'(m_y) = \frac{1}{y}$. Так как m_y является обратной функцией к функции $h'(t)\left(m_y = h'^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)\right)$, то m_y — непрерывна и, следовательно, принимает все достаточно большие действительные значения. Заметим, что $\frac{m_y}{y} = m_y h'(m_y) \to \infty$ $(y \to \infty)$.

Теорема. *Для любой интегрируемой функции* $s(t) = o(th'(t))$ *справедливо соотношение*

$$\dot{J}(y) - W(m_y) = o(1)\ (y \to \infty). \tag{4}$$

Таким образом, если функция $s(t)$ суммируется к какому-либо числу одним методом, то она суммируется к тому же числу и другим методом.

Следствие. *Если $s(t)$ удовлетворяет условию теоремы, то ядра преобразований $\dot{J}(y)$ и $W(y)$ совпадают.*

Это утверждение следует из (4) и теоремы 6.3 II [3]. Определение ядра см. в [2, с. 77].

Доказательство теоремы. Для $h(t)$ справедливы свойства:

а) $\frac{h'(x)}{h'(y)} \to 1$ при $\frac{x}{y} \to 1$;

в) $-h''(t) \leqslant h'(t)/t$ $(t > 0)$.

Действительно, если $x > y$, то имеем

$$1 > \frac{h'(x)}{h'(y)} = \frac{xh'(x)}{yh'(y)} \cdot \frac{y}{x} \geqslant \frac{y}{x}.$$

Аналогичное соотношение получаем и для случая $x < y$. Этим доказано свойство а). Свойство в) следует из условия монотонного возрастания функции $th'(t)$.

Для всех достаточно больших y справедливы неравенства

$$\frac{p(y)}{h'(y)}\left(1 - \frac{\alpha_y}{yh'(y)}\right) \leqslant P(y) \leqslant \frac{p(y)}{h'(y)} (\alpha_y \to 2,\ y \to \infty). \tag{5}$$

Действительно, используя разложение $h(t)$ по формуле Тейлора

$$h(y-t) = h(y) - h'(y)t + \frac{1}{2}h''(\xi)t^2 (y - t < \xi < y), \tag{6}$$

имеем

$$P(y) = \int_0^y p(y-t)\,dt \leqslant p(y)\int_0^\infty e^{-th'(y)}\,dt = \frac{p(y)}{h'(y)}.$$

Для оценки $P(y)$ снизу, воспользуемся функцией $n_y = \frac{1}{h'(y)} \ln yh'(y)$. Так как $\frac{n_y}{y} \Rightarrow 0$ $(y \to \infty)$, то для всех достаточно больших y получим

$$P(y) = \int_0^y p(y-t)\,dt \geqslant \int_0^{n_y} p(y-t)\,dt =$$

$$= p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)} \cdot e^{\frac{1}{2}h''(\xi)t^2}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 + \frac{1}{2}h''(\xi)t^2\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{h'(\xi)}{\xi}\cdot t^2\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h'(y-n_y)}{y-n_y}\cdot t^2\right)dt =$$

$$= p(y)\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}\left(1 - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_y\frac{h'(y)}{y}t^2\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant p(y)\left(\int_0^{n_y} e^{-th'(y)}dt - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_y\frac{h'(y)}{y}\int_0^\infty e^{-th'(y)}t^2dt\right) =$$

$$= p(y)\left(-\frac{1}{yh'^2(y)} + \frac{1}{h'(y)} - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}\cdot\frac{h'(y)}{y}\frac{2}{h'^3(y)}\right) = \frac{p(y)}{h'(y)}\left(1 - \frac{\alpha_y}{yh'(y)}\right).$$

В этих выкладках $\tilde{\alpha}_y = \frac{h'(y-n_y)}{h'(y)} \cdot \frac{y}{y-n_y} \to 1 \ (y \to \infty)$, $\alpha_y = 1 + \tilde{\alpha}$, $y - t < \xi < y$.

Итак, неравенства (5) доказаны.

Введем обозначения:

$$J^*(y) = \frac{1}{y} \int_0^{m_y} s(t)\, e^{-t/y} dt, \quad R(y) = \frac{1}{y} \int_{m_y}^{\infty} s(t)\, e^{-t/y}\, dt;$$

$$W^*(y) = \frac{h'(y)}{p(y)} \int_0^{y} p(y-t)\, s(t)\, dt.$$

Если $s(t)$ удовлетворяет условию теоремы, то справедливы такие соотношения:

$$R(y) = o(1); \ J^*(y) - W^*(m_y) = o(1); \ W(y) - W^*(y) = o(1). \tag{7}$$

Первое из соотношений (7) доказывается просто. Действительно, введя обозначение $\tau_y = \sup\limits_{m_y < t < \infty} \frac{|s(t)|}{th'(t)}$ $(\lim\limits_{y \to \infty} \tau_y = 0)$, будем иметь

$$|R(y)| \leqslant \frac{1}{y} \int_{m_y}^{\infty} |s(t)|\, e^{-t/y}\, dt \leqslant \frac{\tau_y}{y} \int_{m_y}^{\infty} th'(t)\, e^{-t/y}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau_y h'(m_y)}{y} \int_0^{\infty} te^{-t/y}\, dt = \tau_y = o(1) \ (y \to \infty).$$

Далее нам понадобится функция i_y такая, что $i_y \to \infty$ и $i_y h'(y) \to 0$ $(y \to \infty)$. Поскольку $\frac{i_y}{y} = \frac{i_y h'(y)}{y h'(y)} \to 0$ $(y \to \infty)$, то можно считать, что для всех достаточно больших y справедливы неравенства $i_y < y < m_y$.

Воспользовавшись равенством (6) и свойствами функции $h(t)$, получим

$$0 \leqslant \psi(t;\ y) = e^{-t/y} - \frac{p(m_y - t)}{p(m_y)} = e^{-t/y}\left(1 - e^{\frac{1}{2} h''(\xi) t^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-t/y}\left(-\frac{1}{2} h''(\xi)\, t^2\right) \leqslant \frac{1}{2} e^{-t/y} \frac{h'(\xi)}{\xi} t^2$$

$$(m_y - t < \xi < m_y).$$

Перейдем к доказательству второго из соотношений (7):

$$J^*(y) - W^*(m_y) = \frac{1}{y} \int_0^{m_y} s(t)\left(e^{-t/y} - \frac{p(m_y - t)}{p(m_y)}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{y}\left(\int_0^{i_y} + \int_{i_y}^{m_y}\right) \psi(t;\ y)\, s(t)\, dt = A(y) + B(y).$$

Покажем, что $A(y)=o(1)$ и $B(y)=o(1)$ при $y\to\infty$.

$$|A(y)|\leqslant\frac{1}{y}\int\limits_0^{i_y}|s(t)|\left(\frac{1}{2}e^{-t/y}\frac{h'(\xi)}{\xi}t^2\right)dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2y}\frac{h'(m_y-i_y)}{m_y-i_y}\int\limits_0^{i_y}|s(t)|t^2dt=o(1)\frac{h'(m_y)}{ym_y}\int\limits_0^{i_y}th'(t)\cdot t^2dt=$$

$$=o(1)\frac{h'(m_y)\cdot m_yh'(m_y)\cdot i_y^3}{ym_y}=o(1)\left(\frac{i_y}{y}\right)^3=o(1)\ (y\to\infty).$$

Введем обозначение $\varepsilon_y=\sup\limits_{\alpha_y<t<m_y}\frac{|s(t)|}{th'(t)}(\varepsilon_y\to 0,\ y\to\infty)$. Используя неравенства (5), будем иметь

$$|B(y)|\leqslant\frac{\varepsilon_y}{y}\int\limits_{i_y}^{m_y}th'(t)\psi(t;\ y)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon_ym_yh'(m_y)}{y}\int\limits_0^{m_y}\psi(t;\ y)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_y\cdot m_y}{y^2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-t/y}\,dt-\int\limits_0^{m_y}\frac{p(m_y-t)}{p(m_y)}\,dt\right)=\frac{\varepsilon_ym_y}{y^2}\left(y-\frac{P(m_y)}{p(m_y)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_ym_y}{y^2}\left(y-\frac{1}{h'(m_y)}\left(1-\frac{\alpha_{m_y}}{m_yh'(m_y)}\right)\right)=\frac{\varepsilon_ym_y}{y^2}\cdot\frac{y\alpha_{m_y}}{m_yh'(m_y)}=\varepsilon_y=o(1)\,(y\to\infty).$$

Второе из соотношений (7) доказано. Аналогично доказывается и третье соотношение. Так, воспользовавшись неравенством (5), получим

$$0\leqslant\frac{1}{P(y)}-\frac{h'(y)}{p(y)}\leqslant\frac{h'(y)}{p(y)}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha_y}{yh'(y)}}-1\right)=\frac{\varphi(y)}{yp(y)},$$

где через $\varphi(y)$ обозначено выражение в скобках.
Поэтому

$$|W(y)-W^*(y)|\leqslant\left(\frac{1}{P(y)}-\frac{h'(y)}{p(y)}\right)\int\limits_0^y p(y-t)|s(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi(y)}{py(y)}\left(\int\limits_0^{i_y}+\int\limits_{i_y}^{y}\right)p(y-t)|s(t)|\,dt=C(y)+D(y);$$

$$C(y)=O(1)\frac{1}{y}\int\limits_0^{i_y}|s(t)|\,dt=o(1)\frac{1}{y}\int\limits_0^{i_y}th'(t)\,dt=$$

$$=o(1)\frac{yh'(y)\,i_y}{y}=o(1)\ (y\to\infty);$$

$$O(y)=\frac{o(1)}{yp(y)}\int\limits_{i_y}^{y}th'(t)\,p(y-t)\,dt=o(1)\,\frac{yh'(y)\,P(y)}{yp(y)}\,o(1)\ (y\to\infty).$$

Соотношения (7) доказаны. Из них легко следует утверждение теоремы. Действительно,

$$|J(y)-W(m_y)| \sum |J^*(y)-W^*(m_y)| + |W^*(m_y)-W(m_y)| + \\ + |R(y)| = o(1) \ (y \to \infty).$$

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Кохановский А. П.* Связь метода Абеля с некоторым подклассом методов суммирования рядов Вороного // Укр. мат. журн. 1984. **36**, № 6. С. 771—774. 2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951. 504 с. 3. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960. 471 с.

Поступила в редколлегию 05.11.88

УДК 517.982

В. М. КАДЕЦ

СКОЛЬКО ТОЧЕК МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОБЛАСТЬ СУММ РЯДА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ?

Как известно из курса математического анализа, сумма ряда может изменяться при перестановке слагаемых. Пусть Σx_i — ряд в банаховом пространстве X. Следуя терминологии работ [1, 2], будем говорить, что точка x принадлежит области сумм ряда Σx_i, если существует перестановка $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} = x$. Область сумм ряда Σx_i будем обозначать ОС (Σx_i). Согласно теореме Штейница, ОС любого ряда в конечномерном пространстве — линейное множество, т. е. вместе с любыми двумя своими несовпадающими точками содержит и всю соединяющую их прямую. В бесконечномерном пространстве [1 — 3] это не так.

Во всех известных примерах, за исключением тривиальных случаев пустой ОС и ОС, состоящей из одной точки, область сумм имеет мощность континуума. К. Возьняковским и М. И. Кадецом [4] был построен ряд, ОС которого состоит ровно из двух точек. В настоящей работе, опираясь на конструкцию [4], покажем, что ОС может быть счетным множеством или состоять из любого конечного числа точек.

Напомним основные свойства конструкции ряда из работы [4]. Это ряд Σu_i функций $u_i(t)$ из $L_2(T)$, где T — некоторое вероятное пространство. Функции $u_i(t)$ принимают только целые значения: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = 0$ (сходимость везде в смысле $L_2(T)$), для некоторой перестановки π ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{\pi(i)}$ сходится к тождественной единице, и никаких сумм, кроме 0 и 1, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_{\sigma(i)}$ не может иметь ни при какой перестановке σ. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n(\varepsilon)$, что $\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} u_k = 0$ и $\| \sum_{k=n}^{n+m} u_k \| \leqslant \varepsilon$ при $n > n(\varepsilon)$. Понятно, что ОС $(\sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} u_k)$ также состоит из двух точек: 0 и 1. Ниже обозначения u_k, T, $n(\varepsilon)$ мы будем использовать только в указанном смысле.

Теорема 1. *В бесконечномерном гильбертовом пространстве существует ряд со счетной областью сумм.*

Доказательство. Рассмотрим множество $u = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, где T_k — непересекающиеся копии вероятностного пространства T. Зададим меру на U естественным образом. Требуемый ряд будем строить в $L_2(U)$. В качестве членов ряда возьмем функции $v_{n,k}(t)$, $n, k \in \mathbb{N}$, задаваемые следующим образом: при $n \leqslant n(4^{1-k})$ положим $U_{n,k} = 0$; при $n > n(4^{1-k})$ функция $v_{n,k}(t)$ равна $u_n(t)$ на множестве T_k, а на остальных множествах T_i функция $v_{n,k}(t)$ — тождественный нуль. Другими словами, множество $\{v_{n,1}\}_{n>n(1)}$ — это члены ряда $\sum_{n>n(1)} u_n$, взятые с носителями на T_1, $\{v_{n,2}\}_{n>n(1/4)}$ — члены ряда $\sum_{n>n(1/4)} u_n$, взятые с носителями на T_2, и т.д. Понятно, что при любом упорядочении слагаемых ряд $\sum_{n,k} v_{n,k}$ может на каждом из T_k сходится либо к тождественному нулю, либо к тождественной единице. Так как сумма ряда — элемент $L_2(U)$, мера множества, на котором эта сумма равна единице,— конечна. Вто же время для любого конечного множества индексов $A \subset \mathbb{N}$ нетрудно построить упорядочение слагаемых, при котором ряд $\sum v_{n,k}$ сходится к единице на $\bigcup_{i \in A} T_i$ и сходится к нулю на остальных T_i. Итак, область сумм построенного ряда — счетное множество.

Лемма 1. *Пусть V — некоторое вероятностное пространство, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ — ряд в $L_2(V)$, состоящий из функций, принимающих только целые значения; $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — стремящаяся к нулю последовательность чисел. Тогда для сходимости в $L_2(U)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + a_k)$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда: Σx_k и Σa_k.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + a_k)$ сходится. Для каждого $\varepsilon \in]0; 1/4[$ выберем такой номер $m(\varepsilon)$, что

$$\| \sum_{k=m_1}^{m_2} (x_k + a_k) \| < \varepsilon \qquad (1)$$

для любых $m_2 \geqslant m_1 > m(\varepsilon)$ и $|a_k| < \varepsilon$ для всех $k > m(\varepsilon)$. Докажем индукцией по m_2, что для $m_2 \geqslant m_1 > m(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=m_1}^{m_2} a_k\right| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Это будет означать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и соответственно ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} x_k$.

При $m_2 = m_1$ неравенство (2) выполняется. Пусть существует такой номер $m_2 > m_1$, что $\left|\sum\limits_{k=m_1}^{m_2-1} a_k\right| \leqslant \varepsilon$, а $\left|\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} a_k\right| > \varepsilon$. Тогда, так как $|a_{m_2}| < \varepsilon$, $\varepsilon < \left|\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} a_k\right| < 2\varepsilon$. Ввиду того что функция $\sum\limits_{k=m_1}^{m_2} x_k$ принимает только целые значения, получаем

$$\left\|\sum_{k=m_1}^{m_2} x_k + \sum_{k=m_1}^{m_2} a_k\right\| > \varepsilon,$$

что противоречит неравенству (1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — множество из 2^n вершин гиперкуба в n-мерном евклидовом пространстве E. Тогда для любого $m \in N$, $1 \leqslant m \leqslant 2^n$ найдется такое подпространство $F \subset F$, что ортогональная проекция множества A на подпространство F состоит ровно из m точек.*

Лемма 2 геометрически очевидна. Строгое доказательство можно провести индукцией по размерности.

Теорема 2. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ можно построить такой ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x_i$ в гильбертовом пространстве, что ОС $(\Sigma\, x_i)$ состоит ровно из m точек.*

Доказательство. Выберем номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $2^n \geqslant m$. Рассмотрим пространство $L_2(U)$, $U = \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k$, где T_k — непересекающиеся копии вероятностного пространства T. На каждом из T_i рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{k,i}$ — копию ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, положив вне T_i функции $v_{k,i}(t)$ равными нулю. Построим в $L_2(U)$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$, взяв в качестве его членов все элементы $v_{k,i}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Очевидно, что ОС $(\Sigma\, b_j)$ состоит из кусочно-постоянных функций, равных на каждом из T_i либо тождественному нулю, либо тождественной единице. Эти функции образуют в E — своей линейной оболочке — вершины гиперкуба. Количество этих функций равно 2^n, $\dim E = n$. Согласно лемме 2 можно выбрать подпространство $F \subset E$, ортогональная проекция на которое множества ОС (Σb_j) состоит из m точек. Обозначим через G ортогональное дополнение в $L_2(U)$ подпространства E, через H — прямую сумму $F \oplus G$, через P — ортогональный проектор пространства $L_2(U)$ на подпространство H. Ясно, что $P(\text{ОС}(\Sigma b_i))$ содержится в F и состоит из m точек. Рассмотрим ряд $\Sigma P(b_j)$. Так как $P(x) - x \in E$ для любого x, разность $P(b_j) - b_j$ на каждом из T_j является постояной величиной, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{j \to \infty} a_{i,j} = 0$. Функции $b_j(t)$ принимают только целые значения. Воспользовавшись леммой 1 и непрерывностью оператора P, получим, что ряд $\Sigma P(b_j)$ сходится в $L_2(U)$ при тех и только тех упорядочениях слагаемых, при которых сходится ряд Σb_j, $\text{ОС}(\Sigma P(b_j)) = P(\text{ОС}(\Sigma b_j))$, и $\text{ОС}(\Sigma P(b_j))$ состоит ровно из m точек. Теорема доказана.

Замечание. Мощность ОС (Σx_i) не может превосходить мощности континуума, следовательно, в предположении гипотезы континуума теоремы 1 и 2 дают полный ответ на вопрос о возможном числе элементов области сумм условно сходящегося ряда в гильбертовом пространстве. Воспользовавшись техникой работ [1, 2], можно показать, что все упомянутые варианты реализуются в каждом бесконечномерном банаховом пространстве.

Вопрос. Любое ли конечное множество элементов бесконечномерного гильбертова пространства может служить областью сумм некоторого ряда? Тот же вопрос для бесконечных множеств.

Список литературы: 1. *Кадец В. М.* Об одной задаче С. Банаха (проблема 106 из «Шотландской книги») // Функцион. анализ и его приложения. 1986. **20**, № 4. С. 74—75. 2. *Кадец В. М.* Теорема Штейница и B-выпуклость // Изв. вузов. Сер. математика. 1986. № 12. С. 32—36. 3. *Никишин Е. М.* Перестановки функциональных рядов // Мат. сб. 1971. **85**, № 2. С. 272—286. 4. *Kadec M. I., Wozniakowski K.* On series whose permutations have only two sums // Bull. Pol. Acad. Sci.

Поступила в редколлегию 27.03.88

УДК 517.986.7

А. И. МИЛОСЛАВСКИЙ

ОБ АБСТРАКТНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. II

Данная статья является непосредственным продолжением работы [1]. Ссылки на формулы работы [1] имеют вид (1, n), $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. 1) *Решение* $\varphi(\lambda)$ *уравнения* (1.11) *продолжается до мероморфной в* Π *в.-ф., представимой в виде*

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_{-1}(\lambda) = S_0(\lambda)\omega(\lambda), \tag{1}$$

где мероморфные в.-ф. $\varphi_{\pm 1}(\lambda)$ *представимы в виде* (1.54), *в.-ф.* $\psi_{\pm 1}(\lambda)$

мероморфны в П, *голоморфны и ограничены при* $\operatorname{Im}\lambda \to \pm\infty$.

2) *Справедливы соотношения*

$$\varphi(\lambda) = Q(\lambda) k_{-1}(\lambda) \varphi(\lambda - i) + Q(\lambda) \psi_1(\lambda); \tag{2}$$

$$\varphi(\lambda) = P(\lambda) k_1(\lambda) \varphi(\lambda + i) + P(\lambda) \psi_{-1}(\lambda). \tag{3}$$

3) *Полосы в.-ф.* $\varphi(\lambda)$ *могут находится лишь в точках* $\sigma_{nk} = \sigma_k + in$ $(k = 1, 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *где* $0 \leqslant \operatorname{Im}\sigma_k < 1$, *последовательность* σ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *не имеет предельных точек в* П. *Кратность полюсов в точках* σ_{nk} *не превосходит* δ_k, *где* δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — *некоторая последовательность натуральных чисел.*

4) *Вне дисков с центрами в точках* σ_{nk} радиуса r, *где* r *достаточно мало, для* $\varphi(\lambda)$ *справедливы соотношения*

$$\varphi(\lambda) = O(1), \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \varepsilon > 0, \tag{4}$$

$$F^{-1}\varphi(\lambda) = O(|\lambda^{-1}|), \tag{5}$$

$$F^{-1}\varphi(\lambda) = O(b(\lambda)). \quad |\operatorname{Im}\lambda| \to \infty, \tag{6}$$

5) *Вычеты* $\varphi(\lambda)$ *в полюсах* σ_{nk} *убывают при* $|n| \to \infty$, *как* $\varkappa^{|n|}$, *где* $\varkappa$ — *сколь угодно мало* $(\varkappa > 0)$.

6) *Последовательности* $\{\sigma_{nk}\}$ и $\{\delta_k\}$ *не зависят от* $x_0 \in X$ и $f(t)$.

Доказательство первого утверждения вытекает из установленных в [1] свойств. в.-ф. $\psi_{+1}(\lambda)$ и формул (1.22), (1.47)—(1.50)

2) Выведем формулу (2), соотношение (3) выводится аналогично. Пользуясь формулами (1.52)—(1.54), (1), имеем ($\operatorname{Re}\lambda > R$):

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i) = Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i);$$
$$Q(\lambda)\psi_1(\lambda) + Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)\psi_{-1}(\lambda - i). \tag{7}$$

Применяя к первому слагаемому формулу (1.38), а ко второму — (1.40), продолжаем равенство (7):

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i) = [S_0(\lambda) - Q(\lambda)]\psi_1(\lambda) + S_0(\lambda)k_1(\lambda);$$

$$P(\lambda - i)\psi_{-1}(\lambda - i) = S_0(\lambda)\psi_1(\lambda) - Q(\lambda)\psi_1(\lambda) \to \tilde{S}_0(\lambda)S_{-1}(\lambda)\psi_{-1}(\lambda - i).$$

Применяя к последнему слагаемому формулу (1.55) ($k_0 = 1$), получаем равенство

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i) = S_0(\lambda)\psi_1(\lambda) + S_0(\lambda)\psi_{-1}(\lambda) -$$
$$- S_0(\lambda)\omega(\lambda) - Q(\lambda)\psi_1(\lambda),$$

из которого с учетом (1) вытекает (2).

3) Третье утверждение выводится из формул (2), (3) так же, как аналогичное утверждение об о.-ф. $S_0(\lambda)$ в лемме 3 [1] выводилось из формул (1.38), (1.39). При этом получается ограниченность в-ф. $\varphi(\lambda)$. (4).

4) Для вывода формулы (6) понадобятся соотношения, вытекающие из (1.26), (1.28), (1.31), (1.33):

$$W(\lambda) = k_1(\lambda) W_1(\lambda) = k_1(\lambda) k_{-1}(\lambda + i) + k_1(\lambda) k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) W_2(\lambda);$$

$$Q(\lambda) = I + W(\lambda) W_3(\lambda); \; F^{-1}Q(\lambda) = F^{-1} + O(b(\lambda)), \tag{8}$$

где $W_k(\lambda) = Q(1)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$ $(k = 1, 2, 3)$ и оценка ($q = \mathrm{const}$)

$$F^{-1}k_{\pm 1}(\lambda) k_{\pm 1}(\lambda + iq) = L^{-1}(\lambda) B_{\pm 1} L^{-1}(\lambda +$$
$$+ iq) B_{\pm 1} F^{-1} = O(b(\lambda)), \tag{9}$$

вытекающая из (1.32). Покажем, что

$$F^{-1}\psi_1(\lambda) = F^{-1}\omega(\lambda) + O(b(\lambda)), \ \operatorname{Im}\lambda \to \infty. \tag{10}$$

Записывая для этого $F^{-1}\psi_1(\lambda)$ в виде

$$F^{-1}\psi_1(\lambda) = F^{-1}\omega(\lambda) + F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda + i)\omega(\lambda + i) + \\ + F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda + i)k_1(\lambda+i)Q(\lambda + 2i)\,\psi_1(\lambda + 2i), \tag{11}$$

оцениваем $F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda + i)\,k_1(\lambda + i)$:

$$F^{-1}k_1(\lambda)Q(\lambda + i)k_1(\lambda + i) = h^{-1}(\lambda)B_1F^{-1}Q(\lambda + i)k_1(\lambda + i) = \\ = L^{-1}(\lambda)B_1(F^{-1} + F^{-1}W(\lambda + i)\,W_3(\lambda))k_1(\lambda + i) = \\ = L^{-1}(\lambda)B_1L^{-1}(\lambda + i)B_1F^{-1} + L^{-1}(\lambda)B_1L^{-1}(\lambda+ i)B_1F^{-1}; \\ W_1(\lambda + i)\,W_3(\lambda + i)\,k_1(\lambda + i) = O(b(\lambda)). \tag{12}$$

При выводе соотношения (12) использованы неравенства (8), (9). Оценивая аналогично (12) второе слагаемое в (11) и учитывая ограниченность о.-ф. $Q(\lambda)$, $\psi_1(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$, получаем (10). Интегрируя (2), имеем

$$F^{-1}\varphi(\lambda) = F^{-1}Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)Q(\lambda - i)k_{-1}(\lambda - i)\varphi(\lambda - 2i) + \\ + F^{-1}Q(\lambda)k_1(\lambda)Q(\lambda - i)\Psi_1(\lambda - i) + Q(\lambda)\psi_1(\lambda).$$

Применяя к правой части этого равенства оценки (8), (10), (12), получаем (6) при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$. Аналогично выводится (6) при $\operatorname{Im}\lambda \to -\infty$ и оценка (5).

5) Предположим для простоты, что $\delta_k = 1$. Тогда при больших n в силу (2) справедливы равенства

$$\varphi_{nk} = Q(\sigma_{nk})\,k_{-1}(\sigma_{nk})\,\varphi_{n-k,\,k}, \tag{13}$$

где φ_{nk} — вычет в.-ф. $\varphi(\lambda)$ в точке σ_{nk}. Переходя в (13) к оценкам по норме, получаем для последовательности $\|\varphi_{nk}\|$ $(n \geqslant N)$ мажоранту в виде геометрической прогрессии со знаменателем $\varkappa = \sup\|Q(\lambda) \times \times k_{-1}(\lambda)\|$ $(\operatorname{Im}\lambda > N)$, который в силу (1.12), (1.26), (1.37) может быть сделан сколь угодно малым за счет выбора N. Случаи $n \to -\infty$ и δ_k произвольно рассматриваются аналогично.

6) В случае $f(t) \equiv 0$ утверждение очевидно, поскольку $\varphi(\lambda)$ представимо в виде $\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda)\,x_0$, где $\Phi(\lambda)$ — к.м. о.-ф., полосы которой имеют вид, указанный в 3). Для рассмотрения общего случая положим (1.11)

$$\omega(\lambda) = \omega_t(\lambda) = l(\lambda)\,e^{-\lambda t}y \ \ (y \in X, \ t \geqslant 0).$$

Решение $\varphi_t(\lambda)$ уравнение (1.11) представимо в виде (1.22):

$$\varphi_t(\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_r(\lambda)\,\omega_t(\lambda + ir) = e^{-\lambda t}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_r(\lambda)\,e^{-irt}l(\lambda + ir)\,y = \\ = e^{-\lambda t}\Phi(t, \lambda)\,y. \tag{14}$$

Покажем, что полюсы о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ не зависят от t. Введем о.-ф.

$$\Psi_1(t, \lambda) = l(\lambda) + e^{-it}\tilde{S}_1(\lambda)\, l(\lambda + i) + \\ + e^{-2it}\tilde{S}_1(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda + i)\, l(\lambda + 2i) + \ldots, \tag{15}$$

$$\Psi_{-1}(t, \lambda) = l(\lambda) + e^{it}\tilde{S}_{-1}(\lambda)\, l(\lambda - i) + \\ + e^{2it}\tilde{S}_{-1}(\lambda)\tilde{S}_1(\lambda - i)\, l(\lambda - 2i) + \ldots . \tag{16}$$

В силу оценок (1.51) при больших $\pm \operatorname{Im}\lambda$ независимо от t о.-ф. $\Psi_{\pm 1}(t, \lambda)$ голоморфны, ограничены и продолжаются как к. м. о.-ф. в полуплоскость П. О.-ф. $\Phi(t, \lambda)$, также к. м. в П, поскольку представима в виде

$$\Phi(t, \lambda) = S_0(\lambda)\,[\Psi_1(t, \lambda) + \Psi_{-1}(t, \lambda) - l(\lambda)]. \tag{17}$$

Для $\Phi(t, \lambda)$ аналогично (2), (3) выводятся формулы

$$\Phi(t, \lambda) = e^{it}Q(\lambda)\, k_{-1}(\lambda)\, \Phi(t, \lambda - i) + Q(\lambda)\, \Psi_1(t, \lambda); \tag{18}$$

$$\Phi(t, \lambda) = e^{-it}P(\lambda)\, k_1(\lambda)\, \Phi(t, \lambda + i) + P(\lambda)\, \Psi_{-1}(t, \lambda). \tag{19}$$

В любой конечной области $D \subset \Pi$ для о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ справедливо представление

$$\Phi(t, \lambda) = \sum_{|r| \leqslant N-1} e^{-itr}B_r(\lambda) + e^{-itN}B_N(\lambda)\, \Psi_1(t, \lambda + iN) + \\ + e^{itN}B_{-N}(\lambda)\, \Psi_{-1}(t, \lambda - iN), \tag{20}$$

где о.-ф. $B_r(\lambda)$ к. м. в П, а о.-ф. $\Psi_{\pm 1}(t, \lambda \pm iN)$ голоморфны в D; следовательно, полюсы о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ в области D могут находиться только среди полюсов о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r| \leqslant N$) и не зависят от t. Из этого факта и из формулы (17), так же как при доказательстве леммы 3 [1], получаем независимость полюсов о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ от t. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — точка голоморфности о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ при всех t. Эта точка может быть полюсом о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r| \leqslant N$), где $N = N(\lambda_0)$. Предположим для простоты, что λ_0 — простой полюс. Тогда о.-ф. $B_r(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 представимы в виде

$$B_r(\lambda) = B_r(\lambda - \lambda_0)^{-1} + \tilde{B}_r(\lambda), \ |r| \leqslant N, \tag{21}$$

где о.-ф. $B_r(\lambda)$ голоморфны при $\lambda = \lambda_0$. Подставляя выражения (21) в (20), получаем

$$\sum_{|r| \leqslant N-1} e^{-itr}B_r + e^{-itN}B_N\Psi_1(t, \lambda_0 + iN) + e^{itN}B_{-N}\Psi_{-1}(t, \lambda_0 - iN) = 0. \tag{22}$$

Учитывая вид о.-ф. $\Psi_{\pm 1}(t, \lambda)$ (15), (16) в силу равенства (22), имеем $B_r = 0$ ($|r| \leqslant N$). Поскольку N в формуле (20) можно выбирать сколь угодно большим, все о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r| < \infty$) голоморфны в точке $\lambda = \lambda_0$. В точке голоморфности о-ф. $\Phi(t, \lambda)$ (14) является гладкой 2π-периодической функцией t. Решение уравнения (1.11) с $f(t) \not\equiv 0$, $x_0 = 0$ может быть записано в виде

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t, \lambda)\, f(t)\, dt. \tag{23}$$

Из формулы (23) следует, что все точки голоморфности о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ являюся точками голоморфности в.-ф. $\varphi(\lambda)$. Если $\lambda = \lambda_0$ — полюс в.-ф. $\varphi(\lambda)$, то $\lambda = \lambda_0$ — полюс о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$. Из формулы (20) и формулы типа (21) следует, что кратность полюса в.-ф. $\varphi(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ не превосходит максимальной по t кратности полюса о-.ф. $\Phi(t, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$. Теорема доказана.

Замечание. Уточним, что под ограниченностью в-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \to \infty$ понимается оценка

$$\| \Psi_{\pm 1}(\lambda) \| \leqslant C(\| x_0 \| + \| f \|_0), \tag{24}$$

где $\| f \|_0 = \int\limits_0^\infty \| f(t) \| \, dt$. Это неравенство получается из соответствующей оценки для в.-ф. $\omega(\lambda)$ (1.9). Всюду ниже под ограниченностью в.-ф. понимается неравенство вида (24), а под выражением $\psi(\lambda) = O(b(\lambda))$ — оценка

$$\| \psi(\lambda) \| \leqslant C b(\lambda)(\| x_0 \| + \| f \|_0).$$

Последовательность $\{\sigma_k\}$, *введенную в формулировке теоремы* 1 $(0 \leqslant \operatorname{Im}\sigma_k < 1, \operatorname{Re}\sigma_1 \geqslant \operatorname{Re}\sigma_2 \geqslant \ldots > 0)$, *назовем последовательностью показателей Флоке — Ляпунова для задачи Коши* (1.1), (1.2). *Из ее определения следует, что* $\forall k \exists t \exists n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ *такие, что число* $\sigma_{nk} = \sigma_k + in$ *является полюсом о.-ф.* $\Phi(t, \lambda)$, *причем максимальная по* n *и* t *кратность полюсов о.-ф.* $\Phi(t, \lambda)$ *в точках* σ_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \ldots)$ *равна* δ_k.

Лемма 4. *Положим*

$$z(t) = \int L^{-1}(\lambda)(x_0 + \hat{f}(\lambda)) e^{\lambda t} d\lambda. \tag{25}$$

Интегрирование в (25) *ведется по контуру* $\Gamma = \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda = \varepsilon, \ |\operatorname{Im}\lambda| > N\}$, *не содержащему полюсов о.-ф.* $L^{-1}(\lambda)$. *Справедлива оценка*

$$\| z(t) \| \leqslant C(\varepsilon, N) \exp(\varepsilon t)(\| x_0 \| + \| f \|_0), \ t \geqslant 0. \tag{26}$$

Доказательство. Согласно предположению V [1] о.-ф. $|\lambda|^{-1} T(\lambda)$ (1.15) интегрируема по лучам $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda = \varepsilon, \ |\operatorname{Im}\lambda| > R = R(\varepsilon)\}$. Представляя при больших $\operatorname{Im}\lambda$ о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$ в виде

$$L^{-1}(\lambda) = (F + \lambda I)^{-1} + (F + \lambda I)^{-1} T(\lambda)(I - T(\lambda))^{-1},$$

пользуясь ограниченностью при больших $\operatorname{Im}\lambda$ о.-ф. $(I - T(\lambda))^{-1}$, оценкой (1.3), заключаем, что для вывода оценки (26) достаточно получить неравенство

$$\left\| \int\limits_\Gamma (F + \lambda I)^{-1}(x_0 + \hat{f}(\lambda)) e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leqslant C(\varepsilon) e^{\varepsilon t}(\| x_0 \| + \| f \|_0). \tag{27}$$

В силу предположения I [1] можно подобрать $c > 0$ настолько большим, что для оператора $F_c = F + cI$ выполняется неравенство

$$\| (F_c + \lambda I)^{-1} \| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{28}$$

для всех λ, $|\arg\lambda| \leqslant \pi/2 + \varkappa_1$, где $\varkappa_1 > 0$. Известно (см., например, [2, с. 93]), что оператор $-F_c$, удовлетворяющий (28), порождает аналитическую полугруппу операторов $\exp(-tF_c)$, причем $\|\exp(-tF_c)\| \leqslant M < \infty$ $(t \geqslant 0)$. Решение уравнения $\dot{y} + F_c y = f(t)$, $y(0) = x_0$ дается формулой

$$y(t) = \exp(-tF_c)\, x_0 + \int_0^t \exp(-(t-\tau)F_c)\, f(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

Так как в.-ф. $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, в.-ф. $y(t)$ (29) [2, с. 169] непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$. Оценивая $y(t)$ по норме, получаем

$$\|y(t)\| \leqslant \|\exp(-tF_c)\|\, \|x_0\| + \int_0^t \|\exp(-(t-\tau)F_c)\|\, \|f(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant M(\|x_0\| + \|f\|_0). \tag{30}$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Лапласа

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}\lambda=\varepsilon} (F_c + \lambda I)^{-1} (x_0 + \hat{f}(\lambda))\, e^{\lambda t} d\lambda,$$

неравенством (30) и соотношением

$$(F + \lambda I)^{-1} = (F_c + \lambda I)^{-1} + c(F + \lambda I)^{-1}(F_c + \lambda I)^{-1} =$$
$$= (F_c + \lambda I)^{-1} + O(|\lambda|^{-2}),$$

имеем $(\lambda = \varepsilon + i\eta)$:

$$\left\| \int_\Gamma (F + \lambda I)^{-1} (x_0 + \hat{f}(\lambda))\, e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leqslant \int_\Gamma (F_c + \lambda I)^{-1} (x_0 + \hat{f}(\lambda))\, e^{\lambda t} d\lambda \Big\| +$$
$$+ c \int_{\mathrm{Re}\lambda=\varepsilon} e^{\varepsilon t} |\lambda|^{-2}\, d\eta\, (\|x_0\| + \|f\|_0) \leqslant 2\pi \|y(t)\| +$$
$$+ \int_{\varepsilon - iR}^{\varepsilon + iR} \|(F_c + \lambda I)^{-1}\|\, e^{\varepsilon t} d\eta\, (\|x_0\| + \|f\|_0) + C_1(\varepsilon)(\|x_0\| + \|f\|_0) \leqslant$$
$$\leqslant C_2(\varepsilon)\, e^{\varepsilon t} (\|x_0\| + \|f\|_0).$$

Неравенство (27) доказано, а вместе с ним и лемма 4.

Доказательство теоремы 2 [1]. Пользуясь формулой обращения преобразования Лапласа, представляем $x(t)$ в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_0 - i\infty}^{R_0 + i\infty} F^{-1} \varphi(\lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda, \tag{31}$$

где $\lambda = R_0 + i\eta$, R_0 — достаточно велико. Согласно теореме 1 в полосе $\{\lambda \mid \varepsilon \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant R_0\}$ полюсы в.-ф. $\varphi(\lambda)$ имеют вид $\sigma_{nk} = \sigma_k + in$ $(k = 1, \ldots N(\varepsilon),\ n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем

$$R_0 > \mathrm{Re}\,\sigma_1 \geqslant \mathrm{Re}\,\sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{Re}\,\sigma_N > \varepsilon > 0.$$

(Если на прямой $\mathrm{Re}\lambda=\varepsilon$ находятся полюсы в.-ф. $\varphi(\lambda)$, то ε следует несколько уменьшить). По теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\pi(\varepsilon,\,R_{0,1})} F^{-1}\varphi(\lambda)\,e^{\lambda t}d\lambda=\sum_{\sigma_{nk}\in\pi(\varepsilon,\,R_{0,1})}\operatorname{res}F^{-1}(\lambda)\,e^{\lambda t}. \tag{32}$$

Интегрирование в формуле (32) ведется по границе $\pi(\varepsilon, R_{0,1})$ прямоугольника $\{\lambda|\,\varepsilon\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant R_0,\ |\,\mathrm{Im}\lambda\,|\leqslant R_1\}$. Числа ε и $R_{0,1}$ удовлетворяют требованию: граница прямоугольника не пересекается с полюсами в.-ф. $\varphi(\lambda)$. В силу оценки (5) интеграл по горизонтальным сторонам $\pi(\varepsilon, R_{0,1})$ стремится к нулю при $R_1\to\infty$. Положим

$$x_\varepsilon(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\varepsilon} F^{-1}\varphi(\lambda)\,e^{\lambda t}d\lambda. \tag{33}$$

Каждой паре $(n,\ k)\,(k=1,\ \ldots\ N(\varepsilon),\ n=0,\ \mp1,\ \ldots)$ сопоставим главную часть в.-ф. $\varphi(\lambda)$ в полюсе σ_{nk}:

$$\varphi(\lambda)\sim\sum_{j=1}^{\delta_k}\frac{\varphi_n^{k,\,j}}{(\lambda-\sigma_k-in)^j}. \tag{34}$$

Согласно утверждению 5) теоремы 1 и замечанию, следующему за теоремой 1, для лорановских коэффициентов φ_n^{kj} справедлива оценка

$$\|\,\varphi_n^{k,\,j}\,\|\leqslant C(k,\ j)\,\varkappa^{|n|}(\|\,x_0\,\|+\|\,f\,\|_0) \tag{35}$$

с произвольно малым $\varkappa>0$ и некоторыми положительными постоянными $C(k,\,j)=C(k,\,j,\,\varkappa)$. Переходя к пределу в формуле (32) при $R_1\to\infty$, с учетом (33)—(35) получаем соотношение (1.5), где

$$A_{k,\,j}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F^{-1}\varphi_n^{k,\,j}e^{int}.$$

В силу оценки (35) $A_{k,j}(t)$ — целые 2π-периодические в.-ф., допускающие первую из оценок (1.6). Доказательство теоремы свелось к выводу второй из оценок (1.6), которая непосредственно следует из формулы (6) и леммы 4. Последнее утвержение теоремы 2 вытекает из теоремы 1, 6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 [1]. Покажем, что если $\sigma+in\notin\sum\cup\sum_0$ $(n=0,\ \pm1,\ \mp2,\ldots)$, то уравнение

$$S(\sigma)\,g=f \tag{36}$$

$\forall f\in L_2(X)$ имеет решение $g\in D(S)$, причем

$$\|\,g\,\|_2\leqslant C(\sigma)\,\|\,f\,\|_2. \tag{37}$$

Разлагая $f\in L_2(X)$ в ряд Фурье

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}f_ke^{ikt}\quad\Big(\|\,f\,\|_2^2=\sum_{-\infty}^{\infty}\|\,f_k\,\|^2\Big), \tag{38}$$

разыщем решение уравнения (36) в виде ряда Фурье

$$g(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} g_k e^{ikt}. \tag{39}$$

Подставляя выражения (38), (39) в уравнение (36), имеем

$$\begin{gathered}(\lambda_k I+F-\hat{G}(\lambda_k))\,g_k=f_k+B_1 g_{k+1}+B_{-1}g_{k-1},\\ \lambda_k=\sigma+ik,\ k=0,\ \pm1,\ \ldots .\end{gathered} \tag{40}$$

Полагая

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}f(t)\,e^{\sigma t}, & 0<t<2\pi\\ 0 & t>2\pi,\end{cases}$$

находим

$$\begin{gathered}\hat{f}(\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\tilde{f}(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t(\lambda-\sigma)}dt;\\ f_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt=\hat{f}(\lambda_k),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots .\end{gathered} \tag{41}$$

Рассмотрим уравнение

$$(\lambda I+F-\hat{G}(\lambda))\,\tilde{g}(\lambda)=\hat{f}(\lambda)+B_1\tilde{g}(\lambda+i)+B_{-1}\tilde{g}(\lambda-i). \tag{42}$$

Если существует решение $\tilde{g}(\lambda)$ уравнения (42), определенное в точках λ_k ($k=0,\ \pm1,\ \ldots$), то последовательность $g_k=\tilde{g}(\lambda_k)$ ($k=0,\ \pm1,\ \ldots$) определяет решение системы (40). Обращая оператор $L(\lambda)$ в левой части (42), действуя на обе части (42) оператором F, полагая $\varphi(\lambda)=F\tilde{g}(\lambda)$, получаем частный случай уравнения (1.11) ($x_0=0$). Согласно теореме 1 существует единственное решение $\varphi(\lambda)$ уравнения (1.11), мероморфное в Π. По предположению $\varphi(\lambda)$ и $l(\lambda)$ голоморфны в точках λ_k ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$). Обращая оператор $l(\lambda)$, получаем решение $\tilde{g}(\lambda)=F^{-1}\varphi(\lambda)$ уравнения (42). Покажем, что $g(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} F^{-1}(\lambda_k)\,e^{ikt}\in D(S)$, и выведем оценку (37).

Из голоморфности о.-ф. $\Phi(t,\lambda)$ в точках λ_k ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$), как при доказательстве теоремы 2, получаем голоморфность о.-ф. $B_r(\lambda)$ ($|r|<\infty$). При достаточно большом натуральном $N_0=N_0(k)$ в силу (1.51) справедливы неравенства

$$\|\tilde{S}_{\pm1}(\lambda_k\pm iN)\|\leqslant\varkappa<1\ \ (N\geqslant N_0).$$

Учитывая оценку

$$\|\,l(\lambda_k)\|\leqslant M<\infty\ \ (k=0,\ \pm1,\ \ldots),$$

получаем неравенство

$$\begin{gathered}\|\psi_1(\lambda_{k+N})\|\leqslant M\|f_{k+N}\|+M\varkappa\|f_{k+N+1}\|+M\varkappa^2\|f_{k+N+2}\|+\\ +\ \ldots\leqslant M\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\varkappa^{2r}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=k+N}^{\infty}\|f_j\|^2\Big)^{1/2}\leqslant M_1\|f\|_2\end{gathered} \tag{43}$$

и аналогичное ему неравенство

$$\| \psi_{-1} (\lambda_{k-N}) \| \leqslant M_1 \| f \|_2. \tag{44}$$

Представляя $\varphi(\lambda_k)$ в виде

$$\varphi(\lambda_k) = \sum_{|r|<N-1} B_r(\lambda_k) \hat{f}(\lambda_{k+r}) + B_N(\lambda_k) \psi_1(\lambda_{k+N}) + B_{-N}(\lambda_k) \psi_{-1}(\lambda_{k-N}),$$

где $N = N_0 = N_0(k)$, пользуясь неравенствами (43), (44) и голоморфностью о.-ф. $B_r(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_k$ ($|r| < \infty$), получаем оценку

$$\| F g_k \| = \| \varphi(\lambda_k) \| \leqslant M(k) \| f \|_2. \tag{45}$$

Полагая $\lambda = \lambda_k$ ($k = N, N+1, \ldots$) в соотношении (2), переписываем равенства

$$\varphi(\lambda_k) = Q(\lambda_k) k_{-1}(\lambda_k) \varphi(\lambda_{k-1}) + Q(\lambda_k) \psi_1(\lambda_k)$$

в виде одного уравнения

$$\psi = Q(KV\varphi + \psi_0 + Sf) \tag{46}$$

в пространстве $l_2(X)$, где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_N \\ \varphi_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{N-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_N \\ f_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

оператор S имеет вид

$$S = I + S_1 U + (S_1 U)^2 + \ldots,$$

операторы U, V действуют по правилам

$$Uz = \begin{pmatrix} z_{N+1} \\ z_{N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad Vz = \begin{pmatrix} 0 \\ z_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad z \in l_2(X), \quad z = \begin{pmatrix} r_N \\ z_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

операторы Q, K, S_1 — диагональные:

$$Q = \operatorname{diag}\{Q(\lambda_N), \ Q(\lambda_{N+1}), \ \ldots\};$$
$$K = \operatorname{diag}\{k_{-1}(\lambda_N), \ k_{-1}(\lambda_{N+1}), \ \ldots\};$$
$$S_1 = \operatorname{diag}\{\tilde{S}_1(\lambda_N), \ \tilde{S}_1(\lambda_{N+1}), \ \ldots\}.$$

Переходя к оценкам по норме в (46) с учетом равенств $\| U \| = \| V \| = 1$, имеем

$$\| \varphi \|_2 \leqslant \| Q \| (\| K \| \| \varphi \|_2 + \| \varphi_0 \|_2 + (1 - \| S_1 \|)^{-1} \| f_2 \|).$$

Натуральное N выбирается так, что $\| K \| = \sup \| k(\lambda_k) \| \leqslant \varkappa < 1$, $\| S_1 \| = \sup \| \tilde{S}_1(\lambda_k) \| \leqslant \varkappa < 1$, к $\geqslant N$. Из неравенства (45), (47) получаем

$$\Big(\sum_{k \geqslant N} \| F g_k \|^2\Big)^{1/2} = \| \varphi \|_2 \leqslant M(N) [\| f \|_2 + \| F g_{N-1} \|] \leqslant M'(N) \| f \|_2.$$

Аналогично выводится неравенство

$$\left(\sum_{k<-N} \| Fg_k \|^2\right)^{1/2} \leqslant M''(N) \| f \|_2.$$

Последние два неравенства вместе с (45) приводят к оценке

$$\| Fg \|_2 \leqslant C(\sigma) \| f \|_2,$$

означающей, что $Fg \in L_2(X)$, и влекущей неравенство (37). Близкими рассуждениями выводится соотношение $\dot{g} \in L_2(X)$.

Пусть σ_{nk} является полюсом о.-ф. $\Phi(t, \lambda)$ при некотором t и некотором целом $n = n_0$ Предположим для простоты, что $\delta_k = 1$. Положим $\omega_t(\lambda) = \exp(-\lambda t)\, l(\lambda)\, y$. В силу теоремы 1 вычеты φ_n в полюсах σ_{nk} $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ убывают при $|n| \to \infty$ как геометрическая прогрессия, поэтому в.-ф. $\varphi_t(\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi_t(\lambda) = e^{-\lambda t}\Phi(t, \lambda)\, y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda - \sigma_{nk}} + \psi_k(\lambda),$$

где в.-ф. $\psi_t(\lambda)$ голоморфна в точках σ_{nk} $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, при этом

$$\varphi_n = \lim_{\lambda \to \sigma_{nk}} (\lambda - \sigma_{nk})\, \varphi_t(\lambda).$$

Умножая уравнение

$$\varphi_t(\lambda) = \omega_t(\lambda) + k_1(\lambda)\, \varphi_t(\lambda + i) + k_{-1}(\lambda)\, \varphi_t(\lambda - i)$$

на $\lambda - \sigma_{nk}$ и устремляя $\lambda \to \sigma_{nk}$, после обращения оператора $l(\sigma_{nk})$ получаем соотношения $(n = 0, \pm 1, \ldots)$:

$$(\sigma_{nk} I + F - \hat{G}(\sigma_{nk}))\, g_n = B_1 g_{n+1} + B_{-1} g_{n-1},$$

где $g_n = F^{-1}\varphi_n$. Вектор $y \in X$ выбирается так, что $g_{n_0} = F^{-1}\varphi_{n_0} \neq 0$, поэтому $g(t) = \sum g_k e^{ikt} (\not\equiv 0)$ является решением уравнения $S(\sigma_{n_0 k}) \times \times g(t) = 0$. Делая замену $g(t) \mapsto g(t)\exp(-iNt)$, $\sigma_{n_0 k} \mapsto \sigma_{n_0 + N,\, k}$ (N — целое), убеждаемся, что вся последовательность σ_{nk} $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ принадлежит спектру оператора $S(\sigma)$.

Обратно, если $g(t)$ является решением уравнения $S(\sigma)\, g = 0$, то $x(t) = g(t)\exp(\sigma t)$ — решение уравнения (1.1) с

$$f(t) = \int_{-\infty}^{0} G(t - \tau)\, e^{\sigma\tau} g(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{\infty} G(t + S)\, x(-S)\, dS \in L_1[0, \infty).$$

Преобразование Лапласа в.-ф. $x(t)$ имеет вид $\hat{x}(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda - \sigma - in}$.

Поскольку $g(t) \not\equiv 0$, хотя бы одна из точек $\{\sigma + in\}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ является полюсом в.-ф. $\varphi(\lambda)$. В силу теоремы 1 имеем $\sigma + in_0 \in \sum$. Аналогично рассматривается случай кратных полюсов. Теорема 3 доказана.

Замечание. В работе рассматривался частный случай. Предполагалось, что $l = 1$, $B_0 = 0$, $a = c = 0$. Отметим дополнения, которые нужно внести в доказательства в общем случае.

Если $l > 1$, $B_0 \neq 0$, $c \neq 0$, то вместо уравнения (1.11) получим уравнение

$$\varphi(\lambda) = \omega(\lambda) + \sum_{|q|<l,\ q\neq 0} k_q(\lambda)\,\varphi(\lambda + iq), \tag{48}$$

где

$$\omega(\lambda) = l(\lambda)(x_0 + \hat{f}(\lambda)),\ \ l(\lambda) = F_c(\lambda I + F - B_0 - \hat{G}(\lambda))^{-1},$$
$$k_q(\lambda) = l(\lambda)\,B_q F_c^{-1}\ \ (0 < |q| \leqslant l). \tag{49}$$

Для о.-ф. $l(\lambda)$, $k_q(\lambda)$ (49) и в.-ф. $\omega(\lambda)$ справедливы все утверждения леммы 1 [1]. Введем пространство X^{2l-1}, равное прямой сумме $2l - 1$ экземпляров пространства X, и перепишем уравнение (48) в виде

$$\Phi(\lambda) = \Omega(\lambda) + K_1(\lambda)\,\Phi(\lambda + i) + K_{-1}(\lambda)\,\Phi(\lambda - i),$$

где $\Omega(\lambda),\ \Phi(\lambda) \in X^{2l-1}$,

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda + il - i) \\ \vdots \\ \varphi(\lambda + i) \\ \varphi(\lambda) \\ \varphi(\lambda - i) \\ \vdots \\ \varphi(\lambda - il + i) \end{pmatrix},\quad \Omega(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega(\lambda) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Операторные матрицы $K_{\pm 1}(\lambda)$ действуют в пространстве X^{2l-1} и имеют вид

$$K_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \ldots 0 & & \\ 0 & 0 & I & & \\ & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & I & \\ k_l & k_{l-1} & \ldots k_1 & 0 \ldots 0 & \\ & & 0 & & 0 \end{pmatrix},\ K_{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & & \\ 0 \ldots 0 & k_{-1} & k_{-2} \ldots & k_{-l} \\ & I & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ & 0 & & I\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для матриц $K_{\pm 1}(\lambda)$ справедливы следующие формулы:

$$K_1(\lambda_1)\,K_{-1}(\lambda_{-1}) = o(1),\ \ K_{-1}(\lambda_{-1})\,K_1(\lambda_1) = o(1);$$
$$K_{\pm 1}(\lambda_{\pm 1})(\lambda_{\pm 2})\ \ldots\ K_{\pm 1}(\lambda_{\pm l}) = o(1), \tag{50}$$
$$F^{-1}K_{\pm 1}(\lambda_{\pm 1})\,K_{\pm 1}(\lambda_{\pm 2})\ \ldots\ K_{\pm 1}(\lambda_{\pm l}) = O(|\lambda|^{-1}),$$

где $\lambda_{\pm k} = \lambda \pm iq_k$ (q_k — целые фиксированные числа), $|\mathrm{Im}\lambda| \to \infty$. Соотношения (50) заменяют формулы (1.12), (1.13), имеется соответствующий аналог формулы (9) [3]. Доказательства теорем 1—3 существенно не изменяются.

Случай $a > 0$ сводится к случаю $a = 0$ заменой

$$x(t) \mapsto x(t)\exp(at),\ \ F \to F - aI,\ \ G(t) \mapsto G(t)\exp(at),$$
$$f(t) \mapsto f(t)\exp(at).$$

Список литературы: 1. *Милославский А. И.* Об абстрактном интегро-дифференциальном уравнении с периодическим коэффициентом. I. // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1990. Вып. 53. С. 100—108. 2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. 464 с. 3. *Милославский А. И.* Аналог представления Флоке для решений абстрактного интегро-дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами / К., 1987. С. 1—52. Деп. в УкрНИИНТИ 13.04.87. № 1227 — Ук 87·

Поступила в редколлегию 05.09.88

УДК 517.432

С. А. КУЖЕЛЬ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВОЯКО J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

В статье устанавливается связь между устойчивостью ограниченного двояко J-нерастягивающего (д. J-н.) оператора и устойчивостью его канонической $\tilde{J}$-унитарной дилатации, что, с учетом известной теоремы Р. Филлипса об устойчивости J-унитарных операторов (см. [1—3]) дает возможность решать соответствующие вопросы и в случае д. J-н. операторов.

1. **Терминология.** В дальнейшем будем придерживаться общепринятой терминологии, относящейся к пространствам с индефинитной метрикой (J-метрика, J-унитарность, J-ортогональность и т. п. — см. [3—5]). При этом, как обычно, оператор J является самосопряженным и унитарным.

Гильбертово пространство X с индефинитной метрикой, порождаемой оператором J, будем называть J-пространством, или пространством $\langle X, J\rangle$.

В пространстве $\langle X, J\rangle$ рассмотрим ортопроекторы

$$P=\frac{1}{2}(I+J),\quad Q=\frac{1}{2}(I-J),$$

а также соответствующее разложение пространства X:

$$X = X_+[+]X_- \ (X_+ = PX,\ X_- = QX), \tag{1}$$

где $[+]$ — знак ортогональной суммы в $\langle X, J\rangle$.

Пусть M_- — максимальный равномерно отрицательный линеал. Тогда его угловой оператор $K_- = P(Q|_{M_-})^{-1}$ является строгим сжатием ($\|K_-\|<1$), отображающим X_- в X_+. При этом (см [3])

$$M_- = \{x \mid x = x_- + K_- x_-,\ x_- \in X_-\}. \tag{2}$$

Аналогично угловой оператор $K_+ = Q(P|_{M_+})^{-1}$ максимального равномерно положительного линеала $M_+ = M_-^{[\perp]}$ является строгим сжатием, отображающим X_+ в X_-, причем $K_+ = K_-^*$.

Самосопряженный в X оператор

$$K = K_+P + K_-Q \tag{3}$$

будем называть оператором поворота от разложения (1) к разложению $X = M_+ [+] M_-$. С учетом свойств угловых операторов находим, что $\| K \| = \|K_+\| = \|K_-\|$ и, таким образом, K есть строгое сжатие в X.

Использование оператора поворота дает возможность более компактно записать известное (см. [3, 6]) матричное представление произвольного J-унитарного оператора U, действующего в пространстве $\langle X, J \rangle$:

$$U = (I - K)^{-\frac{1}{2}} (I + K)^{\frac{1}{2}} W, \tag{4}$$

где K — оператор поворота от разложения (1) к разложению $X = UX_+ [+] UX_-$, а W — некоторый унитарный оператор.

2. **Канонические $\tilde{J}$-унитарные дилатации.** Наряду с пространством $\langle X, J \rangle$ рассмотрим пространство $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$, где

$$\tilde{X} = X \oplus X', \ \tilde{J} = J \oplus I', \tag{5}$$

а X' и I' — некоторое гильбертово пространство и единичный оператор, действующий в этом пространстве. Ортопроекторы $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ в $\tilde{X}$ определяются равенствами

$$\tilde{P} = P \oplus I', \ \tilde{Q} = Q \oplus O', \tag{6}$$

где O' — нулевой оператор в X'.

Следуя [7], оператор $\tilde{A} \in \mathscr{B}[\tilde{X}]$ будем называть дилатацией оператора $A \in \mathscr{B}[X]$, если

$$A^n = P_X \tilde{A}^n \qquad (n \in N), \tag{7}$$

где P_X — ортопроектор в $\tilde{X}$ на X.

$\tilde{J}$-унитарный оператор U, действующий в пространстве $\tilde{X}$ и являющийся дилатацией оператора A, будем называть канонической дилатацией оператора A.

Как известно [3], преобразование Потапова—Гинзбурга (в дальнейшем ПГ-преобразование) $F(A) = (PA + Q)(QA + P)^{-1}$ является биективным отображением множества ограниченных д. J-н. операторов* на множество сжатий в X и таких, что оператор $QT + P$, где $T = F(A)$, вполне обратим.

Рассматривая ПГ — преобразование в пространствах $\langle X, J \rangle$ и $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$, нетрудно установить связь между канонической дилатацией д. J-н. оператора A и унитарной дилатацией сжатия $T = F(A)$.

Лемма 1. *Пусть A ограниченный д. J-н. оператор, действующий в пространстве $\langle X, J \rangle$; $T = F(A)$ — его ПГ-преобразование; $W = \begin{pmatrix} T & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$ — унитарная дилатация сжатия T, действую-*

*То есть операторов A, удовлетворяющих условиям $J - A^*JA \geqslant 0$, $J - AJA^* \geqslant 0$

щая в некотором пространстве $\tilde{X} = X \oplus X'$. Тогда существует каноническая дилатация U оператора A, действующая в пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$ и представимая относительно разложения (5) в виде

$$U = \begin{pmatrix} A & -(AQ - P) W_{12} \\ W_{21}(QA + P) & W_{22} - W_{21} QAQ W_{12} \end{pmatrix}.$$

Верно и обратное — из существования в некотором пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$ канонической дилатации $U = \begin{pmatrix} A & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ д. J-н. оператора $A \in \mathscr{B}[X]$ следует существование в $\tilde{X}$ унитарной дилатации W сжатия $T = F(A)$, которая представима в виде

$$W = \begin{pmatrix} T & -(TQ - P) U_{12} \\ U_{21}(QT + P) & U_{22} - U_{21} QTQ U_{12} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, изучение канонической дилатации ограниченного д. J-н. оператора A сводится к изучению унитарной дилатации сжатия $T = F(A)$. Это дает возможность получить следующее утверждение, обобщающее известную теорему Б. Секефальви—Надя.

Теорема 1. *Для произвольного ограниченного д. J-н. оператора A, который действует в пространстве $\langle X, J \rangle$, существует в некотором пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$ каноническая дилатация U, минимальная в том смысле, что $\tilde{X} = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n X$. Такая минимальная $\tilde{J}$-унитарная дилатация оператора A определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Отметим, что существование $\tilde{J}$-унитарной дилатации рассматриваемого вида было другими методами обосновано Т. Я. Азизовым (см. [3]).

Предыдущие рассуждения дают возможность построить конкретную реализацию канонической дилатации д. J-н. оператора.

Пусть A — д. J-н. оператор и $T = F(A)$ — его ПГ-преобразование. Рассмотрим, как и в [8], дефектные операторы сжатия T: $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$, а также соответствующие дефектные подпространства $\mathscr{D}_T = \overline{D_T X}$, $\mathscr{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*} X}$. Образуем гильбертово пространство $\tilde{X}$ из векторов

$$h = (\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots), \tag{8}$$

где $h_0 \in X$, $h_{-n} \in \mathscr{D}_{T^*}$, $h_n \in \mathscr{D}_T$ $(n \in N)$ и

$$\| h \|_{\tilde{X}}^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \| h_i \|^2 < \infty. \tag{9}$$

Вложим X в $\tilde{X}$, отождествив вектор h_0 из X с вектором $h = (\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, \ldots)$.

Определим на $\tilde{X}$ оператор $\tilde{J}$ в соответствии с (5) равенством

$$\tilde{J}h = (\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{Jh_0}, h_1, h_2, \ldots), \tag{10}$$

и зададим в $\tilde{X}$ индефинитную метрику

$$[h, g]_{\tilde{X}} = (\tilde{J}h, g)_{\tilde{X}} = (Jh_0, g_0) + \sum_{i \neq 0} (h_i, g_i), \tag{11}$$

где $g = (\ldots, g_{-2}, g_{-1}, \boxed{g_0}, g_1, g_2, \ldots) \in \tilde{X}$. В результате получим пространство $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$.

Как известно [7, 8], оператор W, определенный в $\tilde{X}$ равенством

$$Wh = (\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + D_{T^*}h_{-1}}, D_T h_0 - T^* h_{-1}, h_1, \ldots),$$

является минимальной унитарной дилатацией сжатия T. Воспользовавшись теперь леммой 1 убеждаемся, что оператор U, определяемый в $\tilde{X}$ равенством

$$Uh = (\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Ah_0 - Mh_{-1}}, Nh_0 - Fh_{-1}, h_1, h_2, \ldots), \tag{12}$$

где $M = (AQ - P) D_{T^*}$, $N = D_T (QA + P)$, $F = T^* + D_T QAQD_{T^*}$, является минимальной канонической дилатацией оператора A.

Отметим, что операторы M и N удовлетворяют соотношениям

$$I - A^+A = JN^*N, \; I - AA^+ = MM^*J \tag{13}$$

и, таким образом, их можно рассматривать как некоторые аналоги дефектных операторов д. $\tilde{J}$-н. оператора A.

3. **Устойчивость д. Ĵ-н. операторов.** Оператор B, действующий в банаховом пространстве X, будем называть устойчивым вправо (или кратко: устойчивым), если существует такое число $c > 0$, что

$$\| B^n \| \leqslant c \qquad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

Теорема 2. *Ограниченный д. J-н. оператор A устойчив тогда и только тогда, когда устойчива его каноническая дилатация.*

□Пусть U — каноническая дилатация в $\tilde{X}$ д. J-н. оператора A. Как следует из (7) (с заменой $\tilde{A}$ на U), устойчивость оператора U влечет за собой устойчивость оператора A.

Предполагая теперь оператор A устойчивым, докажем устойчивость его канонической дилатации. Для этого, прежде всего, отметим, что относительно разложения $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \oplus \tilde{X}_1^\perp$, где

$$\tilde{X}_1 = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n X \supset X, \tag{14}$$

оператор U представим в виде

$$U = U_{\min} \oplus U', \tag{15}$$

где $U_{\min}$ — минимальная каноническая дилатация оператора A, а оператор U' с учетом (5) и (14) является унитарным в $\tilde{X}_1^\perp \subset X'$ (если $\tilde{X}_1 \neq \tilde{X}$).

Таким образом, для доказательства устойчивости канонической дилатации с учетом разложения (15) и теоремы 1 достаточно обосновать устойчивость минимальной канонической дилатации U, определяемой равенством (12), в пространстве $\langle \tilde{X}, \tilde{J} \rangle$, которое описывается соотношениями (8)—(11).

Для произвольного натурального n оператор $U^n \tilde{J}$ — унитарен в $\tilde{X}$ и согласно представлению (4)

$$U^n = (I - K_n)^{-\frac{1}{2}} (I + K_n)^{\frac{1}{2}} W_n, \tag{16}$$

где W_n — унитарный в $\tilde{X}$ оператор, а K_n — оператор поворота от разложения

$$\tilde{X} = \tilde{X}_+ [+] \tilde{X}_- \quad (\tilde{X}_+ = \tilde{P}\tilde{X},\ \tilde{X}_- = \tilde{Q}\tilde{X}),$$

к разложению $\tilde{X} = U^n \tilde{X}_+ [+] U^n \tilde{X}_-$.

В соответствии с определением оператора поворота $K_n = K_n^+ \tilde{P} + K_n^- \tilde{Q}$, где K_n^+ и K_n^- — угловые операторы максимальных равномерно дефинитных линеалов $U^n \tilde{X}_+$ и $U^n \tilde{X}_-$ соответственно. При этом на основании (2)

$$U^n \tilde{X}_- = U^n \tilde{Q} \tilde{X} = \{y \mid y = (I + K_n^-)\tilde{Q}U^n\tilde{Q}h,\ h \in \tilde{X}\}$$

где

$$K_n^- \tilde{Q} U^n \tilde{Q} h = \tilde{P} U^n \tilde{Q} h. \tag{17}$$

По индукции с учетом (6), (8), (10), и (12) находим, что

$$\tilde{Q}U^n\tilde{Q}h = (\ldots, 0, 0, \boxed{QA^nQh_0}, 0, 0, \ldots); \tag{18}$$

$$\tilde{P}U^n\tilde{Q}h = (\ldots, 0, 0, \boxed{PA^nQh_0}, NA^{n-1}Qh_0, \ldots, NQh_0, 0 \ldots). \tag{19}$$

После этого на основании (17) с учетом (13), (18) и (19)

$$\begin{aligned} \| K_n^- \tilde{Q}U^n\tilde{Q}h \|_{\tilde{X}}^2 &= \| PA^nQh_0 \|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \| NA^kQh_0 \|^2 = \\ &= \| PA^nQh_0 \|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} ([A^kQh_0, A^kQh_0] - [A^{k+1}Qh_0, A^{k+1}Qh_0]) = \\ &= \| PA^nQh_0 \|^2 + a, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} a = [Qh_0, Qh_0] - [A^nQh_0, A^nQh_0] = - \| Qh_0 \|^2 - ((P - \\ - Q) A^nQh_0, A^nQh_0) = - \| Qh_0 \|^2 - \|PA^nQh_0 \|^2 + \\ + \| QA^nQh_0 \|^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя в (20) вместо a его значение из (21), получаем

$$\| K_n^- \tilde{Q}U^n\tilde{Q}h \|_{\tilde{X}}^2 = \| QA^nQh_0 \|^2 - \| Qh_0 \|^2 \leqslant \| K_n^- \|^2 \|\tilde{Q}U^n\tilde{Q}h \|_{\tilde{X}}^2. \tag{22}$$

Или с учетом (18) и равенства $\| K_n^- \| = \| K_n \|$:

$$\| QA^n\varphi \|^2 - \| \varphi \|^2 \leqslant \| K_n \|^2 \| QA^n\varphi \|^2, \tag{23}$$

где $\varphi = Qh_0$. При этом, так как h_0 — произвольний элемент из X, то φ — произвольный элемент из X_-.

Пусть $B_n = QA^n|_{X_-}$. Тогда на основании (23)

$$\| B_n\varphi \|^2 \leqslant \frac{1}{1 - \| K_n \|^2} \| \varphi \|^2$$

и, таким образом,

$$\| B_n \|^2 \leqslant \frac{1}{1 - \| K_n \|^2}. \tag{24}$$

Покажем, что в действительности в (24) имеет место знак равенства. Для этого прежде всего заметим, что на основании (22) $\| B_n \| \geqslant 1$. Пусть

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\| B_n \|^2} \; (0 \leqslant \alpha < 1). \tag{25}$$

Тогда в силу (24) и (25) $\frac{1}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{1 - \| K_n \|^2}$, т. е. $\alpha \leqslant \| K_n \|^2$. При этом $\| B_n\varphi \|^2 \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \| \varphi \|^2$, откуда

$$\| B_n\varphi \|^2 - \| \varphi \|^2 \leqslant \alpha \| B_n\varphi \|^2. \tag{26}$$

Следовательно, на основании (22), (26) и (18)

$$\| K_n^- \psi \|_{\tilde{X}}^2 \leqslant \alpha \| \psi \|_{\tilde{X}}^2 \quad (\psi = \tilde{Q}U^n\tilde{Q}h). \tag{27}$$

В силу теоремы 3.1 из [9] оператор $\tilde{Q}U^n\tilde{Q}$ вполне обратим в $\tilde{X}_-$. Следовательно, на основании (27) $\| K_n^- \|^2 = \| K_n \|^2 \leqslant \alpha$, что с учетом противоположного неравенства доказывает равенство

$$\| B_n \|^2 = \frac{1}{1 - \| K_n \|^2}.$$

При этом, так как $\| B_n \| \leqslant \| QA^n \| \leqslant c$, то

$$\frac{1}{1 - \| K_n \|^2} \leqslant c^2$$

и, таким образом,

$$\alpha = \| K_n \|^2 \leqslant 1 - \frac{1}{c^2} \quad (\forall n \in N). \tag{28}$$

В силу (16)

$$\| U^n \| \leqslant \| (I - K_n)^{-\frac{1}{2}} (I + K_n)^{\frac{1}{2}} \|. \tag{29}$$

Пусть $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы оператора K_n. Тогда

$$\| (I - K_n)^{-\frac{1}{2}} (I + K_n)^{\frac{1}{2}} \| = \left\| \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \, dE_\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\lambda| \leqslant \sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \leqslant 2c,$$

откуда с учетом (29) следует устойчивость оператора U.

Список литературы: 1. *Phillips R. S.* The extension on dual subspaces invariant under an algebre // Proc. Interuat. Sumbos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960. 1961. P. 366—398. 2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 534 с. 3. *Азизов Т.Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986. 352 с. 4. *Кужель С. А.* J-нерастягивающие операторы // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1986. Вып. 45. С. 63—68. 5. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. Berlin. 1974. P. 226. 6. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами // Мат. исследования. 1967. 2, вып. 3. С. 64—96. 7. *Секефальви-Надь, Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970. 431 с. 8. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979. 587 с. 9. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой // Мат. исследования. 1966. 1, вып. 1. С. 131—161.

Поступила в редколлегию 03.01.89

УДК 517.55

А. Ю. РАШКОВСКИЙ, Л. И. РОНКИН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В КОНУСЕ. I (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

В данной работе, состоящей из трех частей, изучаются субгармонические функции в конусе. Здесь рассматривается ряд вопросов, обязанных своим происхождением исследованиям в области целых функций. Остановимся на этом несколько подробнее. В теории целых функций (одного и многих переменных) главными являются вопросы роста функций и распределения их корней. Эти же вопросы являются основными и при изучении классов функций, в некотором смысле родственных целым, а именно, — функций, голоморфных в конусе, в трубчатой области, в областях вида $G \times \boldsymbol{C}^k$ и др. В значительной степени интерес к указанным вопросам обусловлен и той большой ролью, которую они играют в приложениях теории функций к уравнениям в частных производных, к уравнениям свертки, к теории вероятности, к теории обобщенных функций. Одним из основных способов решения задач, относящихся к росту и распределению корней голоморфных функций, является сведение их к соответствующим задачам для более широкого класса субгармонических функций. При этом исходят из того, что $\ln|f(z)|$, где функция $f(z)$ голоморфна, является плюрисубгармонической и, следовательно, субгармонической функцией, а объем нулевого множества функции f в той или иной области G равен $\mu(G)$, где μ — мера, ассоциированная по Риссу (риссовская масса) функции $\ln|f(z)|$. Наиболее полно исследование роста субгармонических функций и распределения их риссовских масс проведено для класса функций конечного порядка в $\boldsymbol{R}^m$, (т. е. функций $u(x)$ таких, что $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$) и его подкласса — функций вполне регулярного роста.

В первоначальном своем определении (см. [1]), данном для целых функций одного переменного Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером в 1937—

1938 гг., функция вполне регулярного роста характеризовалась как функция, логарифм модуля которой вне достаточно редкого множества асимптотически близок позитивно однородной функции (точнее, своему индикатору). Основным фактом теории Левина — Пфлюгера является эквивалентность полной регулярности роста целой функции наличию определенной правильности распределения ее корней. Упомянутое определение и основные факты теории были в 1961—1962 гг. распространены В. С. Азариным на субгармонические функции в пространстве $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$. В дальнейшем был найден новый подход к изучению функций вполне регулярного роста. В работах П. З. Агранович и Л. И. Ронкина [2], В. С. Азарина [3] было показано, что полная регулярность роста субгармонической функции $u(x)$ эквивалентна сходимости в D' семейства функций $t^{-\rho}u(tx)$, $t \to \infty$[1]. Другое определение, также эквивалентное исходному, было дано Л. Груменом [4].

Ситуация значительно осложняется при рассмотрении функций не во всем пространстве $\boldsymbol{R}^m$, а в каком-нибудь его конусе. Уже для функций, голоморфных в полуплоскости, связь между ростом и распределением корней носит характер, отличный от целых функций, и требует введения новых понятий. Соответствующая теория, включая теорию функций вполне регулярного роста, была построена Н. В. Говоровым [5]. На субгармонические функции в полуплоскости она была распространена А. И. Хейфицем[2]. Отметим, что построения Н. В. Говорова основаны на тонких точечных оценках и их перенос на многомерный случай представляется нам маловероятным. Более того, оставаясь в рамках подхода к этим вопросам Н. В. Говорова, неясно и как формулировать соответствующие результаты в многомерном случае. Оказалось, однако, что, как и для целых функций или функций, субгармонических в $\boldsymbol{R}^m$, регулярность роста функции $u(x)$ в полуплоскости эквивалентна некоторой специальной сходимости функций $t^{-\rho}u(tx)$. Этот факт, а также некоторые другие новые факты о функциях вполне регулярного роста в полуплоскости были установлены одним из авторов ранее [6]. Изложенный там подход к построению теории функций в полуплоскости был нами распространен на функции, субгармонические в конусе. Полученные при этом результаты, а также предваряющие их результаты о произвольных субгармонических функциях конечного порядка в конусе анонсированы в [7]. Настоящая работа содержит расширенное изложение результатов, приведенных в [7] без доказательств и в более слабой форме. В ней рассматриваются функции $u(x)$, субгармонические в конусе пространства $\boldsymbol{R}^m$ и удовлетворяющие в нем условию $u(x) \leqslant a|x|^\rho + в$. Каждой такой функции ставятся в соответствие ее риссовская масса и вещественная мера

---

[1] Исследование слабой сходимости семейства $\{t^{-\rho}u(tx)\}$, $t \to \infty$ (и более общих семейств) в том случае, когда $u(x)$ — не субгармоническая, а обобщенная функция медленного роста с носителем в выпуклом остром конусе проводилось В. С. Владимировым, Ю. Н. Дрожжиновым, Б. И. Завьяловым. При этом постановки задач и характер полученных результатов существенно отличны от фигурирующих в теории функций вполне регулярного роста.

[2] *Хейфиц А. И.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. 1978. **239**, № 2. С. 282—285.

(заряд) на границе конуса, являющаяся предельным значением функции $u(x)$ в смысле слабой сходимости. Первая часть работы посвящена интегральным оценкам функций и ассоциированных с ними мер. Для получения этих оценок предварительно обосновываются некоторые предельные переходы, устанавливаются интегральные формулы типа формулы Карлемана (для функций, голоморфных в полуплоскости) и Грина. Полученные результаты, представляющие, на наш взгляд, самостоятельный интерес, вместе с данным в [8] представлением субгармонических функций в конусе составляют основу для проводимого во второй части работы исследования функций вполне регулярного роста в конусе. Мы даем несколько критериев регулярности роста и, в том числе, эквивалентность вполне регулярности роста функции $u(x)$ специальной правильности распределения порождаемых ею мер — риссовской и граничной. Получены формулы, связывающие характеристики роста функции с характеристиками распределения ассоциированных с нею мер.

Параллельно нам ряд фактов о функциях регулярного роста в конусе установил Л. Грумен [4]. Отметим, что в своем определении таких функций Л. Грумен исходил не из традиционного упоминавшегося выше определения функции вполне регулярного роста в $\boldsymbol{C}$ или $\boldsymbol{R}^m$, как это сделано у нас, а из данного им ранее для функций в $\boldsymbol{R}^m$ определения луча регулярного роста. Можно показать, что оба определения эквивалентны. Результаты, однако, различны, поскольку различны рассматриваемые нами и Л. Груменом задачи.

1. Основные понятия. На сфере $S_1 = \{x \in \boldsymbol{R}^m : |x| = 1\}$ рассмотрим область Γ с дважды гладкой границей и в этой области Γ краевую задачу $\Delta^*\varphi + \lambda\varphi = 0$, $\varphi|_{\partial\Gamma} = 0$, где Δ^* — сферическая часть оператора Лапласа Δ, имеющего в сферических координатах следующий вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta^*.$$

Через $\lambda_j = \lambda_j(\Gamma)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ обозначим собственные числа этой краевой задачи. Будет предполагать область Γ таковой, что соответствующие числам λ_j собственные функции $\varphi_j = \varphi_j^\Gamma$ принадлежат классу $C^2(\bar{\Gamma})$ и $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} > 0$ на $\partial\Gamma$ (здесь и всюду далее $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внутренней нормали).

Обозначим через $K = K^\Gamma$ конус $\left\{x \in \boldsymbol{R}^m : \frac{x}{|x|} \in \Gamma\right\}$. Элементы евклидова объема в $\boldsymbol{R}^m$ и индуцированного метрикой $\boldsymbol{R}^m$ $(m-1)$-мерного объема на ∂K обозначим соответственно через $d\omega$ и $d\sigma$, а элемент $(m-1)$-мерного объема сфера S_R — через dS_R. Все функции φ_j будем считать продолженными в конус K равенствами $\varphi_j(x) \overset{\text{def}}{=} \varphi_j\left(\frac{x}{|x|}\right)$ и нормированными условием $\int\limits_\Gamma |\varphi_j|^2 dS_1 = 1$. Положим также $B_R =$

$=\{x\in \boldsymbol{R}^m: |x|<R\}$, $S_R = gB_R$, $K_R = K\cap B_R$, $K_{r,R}=K_R\setminus\overline{B_r}$, $\Gamma_R = K\cap S_R$, $\Gamma_{r,R}=\partial\overline{K}\cap\overline{K_{r,R}}$; $\theta_m=(m-2)\int\limits_{S_1} dS_1$ $(m>2)$, $\theta_2 = 2\pi$;

$$\varkappa_j^{\pm}=\frac{1}{2}\left[-m+2\pm\sqrt{(m-2)^2+4\lambda_j}\right].$$

Отметим, что функции $\varphi_j(x)\,|x|^{\varkappa_j^{\pm}}$ гармоничны в конусе K, принадлежат классу $C^2(\overline{K}\setminus\{0\})$ и обращаются в нуль на $\partial K\setminus\{0\}$. В дальнейшем функция φ_1 для краткости обозначается через φ, а числа $\varkappa_1^{\pm}$ — через $\varkappa^{\pm}$.

Множество функций, субгармонических в области $G\subset\boldsymbol{R}^m$, обозначим через $SH(G)$. Через $\mu=\mu_u$ будем обозначать меру, ассоциированную по Риссу, субгармонической функции $u(x)$. Иными словами, $\mu_u\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\theta_m}\Delta u$, причем оператор Лапласа Δ рассматривается как оператор в пространстве обобщенных функций D'. Известно, что первые частные производные функции $u\in SH(G)$ существуют почти всюду и являются локально суммируемыми функциями, задающими соответствующие производные в пространстве $D'(G)$. Нам понадобится дополнительная информация о производных субгармонических функций.

Лемма 1. *Пусть область $G\subset\boldsymbol{R}^m$ содержит множества $\overline{\Gamma}_r$, $a<r<b$. Пусть функция $u\in SH(G)$, а последовательность функций $u_j\in SH(G)\cap C^\infty(G)$, монотонно убывая, сходится при $j\to\infty$ к функции u.* Тогда при любом $r\in(a,b)$, *удовлетворяющем условию $\overline{\mu}(\overline{\Gamma}_r)=0$, и для любой функции $\eta\in C_0^1(\overline{\Gamma}_r)=\{\psi\in C^1(S_r):\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Gamma}_r\}$ существует предел*

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u_j}{\partial r}\eta\,dS_r,$$

который не зависит от выбора последовательности u_j. Кроме того, для каждой функции $\eta\in D(K_{a,b})$ при почти всех $r\in(a,b)$ выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u_j}{\partial r}\eta\,dS_r=\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u}{\partial r}\eta\,dS_r. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь область $\Omega\subset\subset G$ с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющую условиям: 1) $\overline{\Gamma}_r\subset\partial\Omega$ 2) $\mu(\partial\Omega)=0$. Обозначим через $Q(x)$ решение задачи Дирихле в области Ω с краевым условием $Q\big|_{\partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}_r}=0$, $Q\big|_{\overline{\Gamma}_r}=\eta$. Согласно формула Грина имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega}u_j\frac{\partial Q}{\partial n}ds-\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\partial u_j}{\partial r}\eta\,dS_r=\int\limits_{\Omega}Q\,\Delta u_j d\omega.$$

Так как $u_j \searrow u$, $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\partial\Omega} u_j \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds$ и последовательность Δu_j слабо сходится к мере $\theta_m \mu = \Delta u$. Из последнего с учетом $\mu(\partial\Omega) = 0$ заключаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Delta u_j\, Q d\omega = \theta_m \int\limits_{\Omega} Q d\mu. \tag{2}$$

Таким образом, существует

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u_j}{\partial r}\, dS_r = -\theta_m \int\limits_{\Omega} Q d\mu + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds. \tag{3}$$

Заметим, что правая часть равенства (3) не зависит от выбора последовательности $\{u_j\}$, а левая — от выбора Ω.

Для доказательства справедливости равенства (1) достаточно показать, что для любой функции $\nu(t) \in D((a, b))$ имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \nu(r) \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u_j}{\partial r}\, dS_r dr = \int\limits_{K_{a,b}} \nu(|x|)\, \eta \frac{\partial u}{\partial r}\, d\omega.$$

Учитывая определение обобщенной функции $\frac{\partial u}{\partial r}$, получаем, что

$$\int\limits_{K_{a,b}} \nu(|x|)\, \eta \frac{\partial u}{\partial r}\, d\omega = -\sum_{i=1}^{m} \lim_{j\to\infty} \int\limits_{K_{a,b}} u_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\nu(|x|)\, \eta(x) \frac{\partial x_i}{\partial r}\right] d\omega =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{K_{a,b}} \nu(|x|)\, \eta(x) \frac{\partial u_j}{\partial r}\, d\omega =$$

$$= \int\limits_a^b \nu(r) \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u_j}{\partial r}\, dS_r dr.$$

Лемма доказана.

Замечание. Из изложенного видно, что в том случае, когда r таково, что равенства (1) нет, но $\mu(\overline{\Gamma}_r) = 0$ и, значит, предел $\lim\limits_{j\to\infty}$ $\int\limits_{\Gamma_r} \frac{\partial u_j}{\partial r} \eta\, dS_r$ существует, естественно этот предел обозначить через $\int\limits_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial r} \eta\, dS_r$.

При таком обозначении, используемом и в дальнейшем, равенство (3) принимает удобную форму

$$\int\limits_{\Gamma_r} \eta \frac{\partial u}{\partial r}\, dS_r = -\theta_m \int\limits_{\Omega} Q d\mu + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds.$$

2. Формула Карлемана (предварительная). Следующая ниже лемма 2 содержит равенство типа формулы Карлемана, относящейся к функциям, голоморфным в полуплоскости (см., например, [1]). Для того чтобы ее сформулировать, определим при $R > 0$ функцию $\psi_R(x) = \gamma_R(|x|)\,\varphi(x)$, где $\gamma_R(t) = t^{\varkappa^-} - R^{\varkappa^- - \varkappa^+} t^{\varkappa^+}$. Заметим, что функция ψ_R гармонична в $K_{r,R}$ при любом $r \in (0, R)$ и обращается в нуль на $\Gamma_R \cup \Gamma_{r,R}$.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — функция, субгармоническая в некоторой окрестности G множества $K_{r,R}$. Тогда, если $\mu(\overline{\Gamma}_r) = 0$, то*

$$\theta_m \int\limits_{K_{r,R}} \psi_R\, d\mu = -\gamma_R(r) \int\limits_{\Gamma_r} \varphi \frac{\partial u}{\partial n}\, dS_r + \gamma_R'(r) \int\limits_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_r -$$

$$- \gamma_R'(R) \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_R + \int\limits_{\Gamma_{r,R}} u\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma. \tag{4}$$

Доказательство. Вначале докажем (4) в случае, когда $u \in C^2(G)$. Для этого используем формулу Грина, примененную к области $K_{r,R}$ и функциям $u(x)$ и $\Psi_R(x)$. Получаем тогда

$$\theta_m \int\limits_{K_{r,R}} \psi_R\, d\mu = -\int\limits_{\Gamma_R} \left(\psi_R \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_R}{\partial n}\right) dS_R -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_r} \left(\psi_R \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_R}{\partial n}\right) dS_r - \int\limits_{\Gamma_{r,R}} \left(\psi_R \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi_R}{\partial n}\right) d\sigma =$$

$$= -\gamma_R'(R) \int\limits_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_R - \gamma_R(r) \int\limits_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi\, dS_r +$$

$$+ \gamma_R'(r) \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_r + \int\limits_{\Gamma_{r,R}} u\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Таким образом, в предположении, что $u \in C^2(G)$, равенство (4) доказано.

Пусть теперь $u(x)$ — произвольная субгармоническая функция в области $G \supset \overline{K}_{r,R}$. В каждой области G' такой, что $\overline{K}_{r,R} \subset G' \subset\subset G$, существует монотонно убывающая к $u(x)$ последовательность функций $u_j \in C^\infty(G') \cap SH(G')$. Для функций u_j, как было только что доказано, равенство (4) справедливо. Далее, очевидно, при $j \to \infty$

$$\int\limits_{\Gamma_r} u_j \varphi\, dS_r \to \int\limits_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_r;$$

$$\int\limits_{\Gamma_R} u_j \varphi\, dS_R \to \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_R;$$

$$\int\limits_{\Gamma_{r,R}} u_j\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma \to \int\limits_{\Gamma_{r,R}} u\,\gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

Из леммы 1 в силу сделанного в условии доказываемой леммы предположения $\mu(\overline{\Gamma}_r) = 0$ заключаем

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{\partial u_j}{\partial n} \varphi \, dS_r = \int_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, dS_r .$$

Наконец, равенство

$$\lim_{j\to\infty} \int_{K_{r,R}} \psi_R \Delta u_j d\omega = \int_{K_{r,R}} \varphi_R \Delta u d\omega$$

имеет место по тем же соображениям, что и равенство (2). Таким образом, в равенстве (4), справедливом, как было отмечено, для функций u_j, при $j \to \infty$ возможен переход к пределу, совершая который убеждаемся в наличии равенства (4) для функции $u(x)$. Лемма доказана.

3. Интегральные оценки. Прежде, чем сформулировать лемму 3, в которой будут даны важные для наших целей оценки субгармонических функций, условимся в дальнейшем через $D_j(\ldots, \ldots, \ldots)$, $j = 1, 2, \ldots$, обозначать функции, зависящие при данном конусе K только от указанных в них параметров, и локально ограниченные при рассматриваемых значениях этих параметров.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — функция, субгармоническая в окрестности G множества $\overline{K}_{\lambda,\infty}$, и при этом $\mu(\overline{\Gamma}_\lambda) = 0$. Пусть, далее, при некотором $\rho > \varkappa^+$ и некоторых положительных a, b, c и d выполняются неравенства*

$$u(x) \leqslant a|x|^\rho + b, \ \forall x \in K_{\lambda,\infty}; \tag{5}$$

$$\left| \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \, dS_\lambda \right| \leqslant c; \tag{6}$$

$$\int_{\Gamma_\lambda} |u\varphi| \, dS_\lambda \leqslant d. \tag{7}$$

Тогда при любых r и R, $\lambda \leqslant r < R$, справедливы неравенства

$$\int_{\Gamma_R} |u(x)|\varphi(x) \, dS_R \leqslant D_1 R^{\rho+m-1}; \tag{8}$$

$$\int_{K_{r,R}} |u(x)| \cdot |x|^\beta \varphi(x) \, d\omega \leqslant D_1 R^{\rho+m-1+\beta} \cdot (R-r), \quad r > \lambda; \tag{9}$$

$$\int_{\Gamma_{\lambda,R}} |u(x)| \cdot |x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \leqslant D_2 R^{\rho+m-2+\alpha}; \tag{10}$$

$$\int_{\Delta^\delta_{\lambda,R}} |u(x)| \cdot |x|^{-2} d\omega \leqslant \delta D_3 R^{\rho+m-2}, \tag{11}$$

где $D_j = D_j\ (a,\ b,\ c,\ d,\ \rho,\ \lambda),\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \Delta^{\delta}_{\lambda,R} = \{x \in K_{\lambda,R} : \varphi(x) < \delta\}$, *а на числа* α, β, δ *наложены условия:* $\beta \geqslant -\rho - m + 1$, $\alpha \geqslant \varkappa^-$, $\delta < \delta_1$, *где* δ_1 — *некоторое достаточно малое положительное число.*

Доказательство. Неравенство (8) получается из равенства (4) следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_R} |u|\,\varphi\,dS_R = \int\limits_{\Gamma_R} (2u^+ - u)\,\varphi\,dS_R = 2\int\limits_{\Gamma_R} u^+ \varphi dS_R +$$
$$+ \frac{\theta_m}{\gamma'_R(R)} \int\limits_{K_{\lambda,R}} \Psi_R\,d\mu + \frac{\gamma_R(\lambda)}{\gamma'_R(R)} \int\limits_{\Gamma_\lambda} \varphi \frac{\partial u}{\partial n}\,dS_\lambda -$$
$$- \frac{\gamma'_R(\gamma)}{\gamma'_R(R)} \int\limits_{\Gamma_\lambda} u\,\varphi\,dS_\lambda - \frac{1}{\gamma'_R(R)} \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} u\,\gamma_R(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{\Gamma_R} (aR^{\rho} + b)\,dS_R + c\,\frac{\gamma_R(\lambda)}{|(\gamma'_R(R)|} + d\left|\frac{\gamma'_R(\lambda)}{\gamma'_R(R)}\right| +$$
$$+ \frac{1}{|\gamma'_R(R)|} \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} (a|x|^{\rho} + b)\,\gamma_R(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma \leqslant D_1 R^{\rho+m-1}.$$

Неравенство (9) получается посредством перехода в правой его части к повторному интегралу с последующей оценкой внутреннего интеграла с помощью уже доказанного неравенства (8).

Для того чтобы получить соотношение (10), оценим предварительно

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u(x)|\,\gamma_R(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma.$$

Используя, как и ранее, равенство (4), имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,\gamma_R(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} (2u^+ - u)\,\gamma_R(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} u^+ \gamma_R(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma - \gamma_R(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda} u\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_\lambda +$$
$$+ \gamma'_R(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda} u\,\varphi\,dS_\lambda - \gamma'_R(R)\int\limits_{\Gamma_R} u\,\varphi\,dS_R \leqslant D_4 R^{\rho+m-2+\varkappa^-}, \qquad (12)$$

где $D_4 = D_4\ (a,\ b,\ c,\ d,\ \rho,\ \lambda,)$. Учитывая далее неравенство

$$\gamma_{2R}(|x|) \geqslant R^{\varkappa^-}(1 - 2^{\varkappa^- - \varkappa^+}),\ \ \forall\, x \in B_R,$$

получаем

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,|x|^{\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,|x|^{\alpha-\varkappa^-}(|x|^{\varkappa^-} - |x|^{\varkappa^+} R^{\varkappa^- - \varkappa^+})\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_{\lambda,R}} |u|\,|x|^{\alpha+\varkappa^+-\varkappa^-} R^{\varkappa^- - \varkappa^+}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma \leqslant D_4 R^{\alpha+\rho+m-2} +$$

$$R^{\alpha}\int\limits_{\Gamma\lambda, R}|u|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma\leqslant D_1R^{\alpha+\rho+m-2}+$$

$$+\frac{R^{\alpha-\varkappa^-}}{1-2^{\varkappa^--\varkappa^+}}D_4\cdot(2R)^{\rho+m-2+\varkappa^-}\leqslant D_2R^{\rho+m-2+\alpha}.$$

Тем самым доказано неравенство (10).

Для получения соотношения (11) заметим, прежде всего, что хотя функции D_1, D_2 зависят от выбора конуса K или, что то же самое, от множества Γ, однако, как показывает простой анализ, при проведении оценок в конусах $K^{(l)}=K^{\Gamma^{(l)}}$, где $\Gamma^{(l)}=\{x\in\Gamma:\varphi(x)<l\}$, их можно выбрать не зависящими от $l\in[0,\delta_0]$ где δ_0 таково, что $\varkappa^+(\Gamma^{(\delta_0)})<\rho$. Кроме того, поскольку мы предполагаем, что граница Γ дважды гладкая, соответствующие областям (на S_1) $\Gamma^{(l)}$ собственные функции $\varphi^{(l)}$, как известно, удовлетворяют при некотором достаточно малом $\delta_1<\delta_0$ условию:

$$\inf_{\partial\Gamma^{(l)}}\frac{\partial\varphi^{(l)}}{\partial n}=c>0,$$

$$0\leqslant l\leqslant\delta_1.$$

Учитывая это и обозначая через $d\sigma^{(l)}$ элемент объема гиперповерхности $\Gamma^{(l)}_{0,\infty}$, получаем, что

$$\int\limits_{\Delta^{\delta}_{r,R}}|u(x)|\,|x|^{-2}\,d\omega=\int\limits_0^{\delta}dl\int\limits_{\Gamma^{(l)}_{r,R}}|u(x)|\,|x|^{-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^{-1}d\sigma^{(l)}\leqslant$$

$$\leqslant c^{-2}\int\limits_0^{\delta}dl\int\limits_{\Gamma^{(l)}_{r,R}}|u(x)|\,\frac{\partial\varphi^{(l)}}{\partial n}\,d\sigma^{(l)}\leqslant\delta c^{-2}D_2R^{\rho+m-2}.$$

Лемма доказана.

Далее, вплоть до п. 6, мы предполагаем, что конус K «сдвигаем» в себя, т. е. существует такая точка $x^0\in S_1$, что при всех $h>0$ имеет место включение $\{\overline{K+hx^0}\}\subset K$. Отметим, что, в частности, все выпуклые конусы «сдвигаемы». В п.6 это требование на конус K будет снято и все полученные результаты будут распространены на общий случай.

Лемма 4. *Пусть функция $u\in SH(K)$ при некоторых $a>0$, $b>0$ и $\rho>\varkappa^+$ удовлетворяет условию $u(x)\leqslant a|x|^{\rho}+b$, $\forall x\in K$. Тогда для любого $\lambda>0$ существуют такие константы $C_j=C_j(\lambda,u)$, $j=1, 2, 3$, что при $0<\lambda<R$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_{K_{r,R}}|u(x)|\,|x|^{-2}\varphi(x)\,d\omega\leqslant C_1R^{\rho+m-3}(R-r);\tag{13}$$

$$\int\limits_{\Delta^{\delta}_{\lambda, R}} |u(x)|\,|x|^{-2}\,d\omega \leqslant \delta C_2 R^{\rho+m-2}; \tag{14}$$

$$\int\limits_{K_{r, R}} \varphi(x)\,d\mu \leqslant C_3 R^{\rho+m-2}\,[1]. \tag{15}$$

Доказательство. В области $K_{4\lambda}$ функция $u(x)$, поскольку она ограничена сверху, допускает представление

$$u(x) = -\int\limits_{K_{4\lambda}} G(x, y)\,d\mu(y) + H(x),$$

где $G(x, y)$ — функция Грина области $K_{4\lambda}$, а $H(x)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $u(x)$ в той же области. По функции $H(x)$ построим функцию $H_1(x)$, гармоническую в шаре $B_{3\lambda}$, совпадающую с $H(x)$ на $\Gamma_{3\lambda}$ и мажорирующую $H(x)$ на $K_{3\lambda}$. Нетрудно видеть, что это возможно. Далее введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = \begin{cases} u(x), & x \in K \setminus B_{4\lambda}, \\ H(x), & x \in K_{4\lambda} \setminus B_{3\lambda}, \\ H_1(x), & x \in B_{3\lambda}. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $V \in SH(K \cup B_{3\lambda})$ и при некотором $b_1 > 0$ удовлетворяет в конусе K оценке $V(x) \leqslant a|x|^{\rho} + b$. Обозначим $V_h(x) = V(x + hx^0)$, $h > 0$. При всех $h \in (0, \lambda)$ функции $V_h(x)$ субгармоничны в окрестности $\overline{K}$, гармоничны в $B_{2\lambda}$ и в конусе K удовлетворяют неравенству $V_h(x) \leqslant a_2|x|^{\rho} + b_2$, где a_2 и b_2 не зависят от h. Кроме того, поскольку гармонические в $B_{2\lambda}$ функции V_h при $h \to 0$ сходятся к функции V, выполняются также неравенства

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda}} \left|\frac{\partial V_h}{\partial n}\right| \varphi\,dS_{\lambda} \leqslant c;$$

$$\int\limits_{\Gamma_{\lambda}} |V_h|\,\varphi\,dS_{\lambda} \leqslant d$$

с некоторыми константами c и d, не зависящими от h. Следовательно, мы находимся в условиях применения леммы 3, согласно которой заключаем, что

$$\int\limits_{K_{r, R}} |V_h|\,|x|^{-2}\,\varphi\,d\omega \leqslant D_1 R^{\rho+m-3}(R - r); \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Gamma_{r, R}} |V_h| \frac{\partial \varphi}{\partial n}\,d\sigma \leqslant D_2 R^{\rho+m-2}; \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Delta^{\delta}_{r, R}} |V_h|\,|x|^{-2}\,d\omega \leqslant D_3 R^{\rho+m-2}, \tag{18}$$

---

[1] Отметим, что в [9] получена оценка величины $\mu(K'_{\lambda, R})$, когда $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$.

где $D_j = D_j(a_2, b_2, c, d, \rho, \lambda)$, $j = 1, 2, 3$; $0 < 4\lambda < r < R$. Переходя в (16) и (18) к пределу при $h \to 0$ и замечая при этом, что функции V_h в $D'(K_{4\lambda,\infty})$ сходятся к функции u, получаем оценки (13) и (14). Чтобы получить (15), воспользуемся равенством (4) для области $K_{\lambda,2R}$ и функции $V_h(x)$. Имеем

$$\theta_m \int\limits_{K_{\lambda,\,2R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h = -\gamma_{2R}(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda} \varphi\,\frac{\partial V_h}{\partial n}\,dS_\lambda +$$

$$+\gamma'_{2R}(\lambda)\int\limits_{\Gamma_\lambda} V_h\varphi\,dS_\lambda - \gamma'_{2R}(2R)\int\limits_{\Gamma_{2R}} V_h\varphi\,dS_{2R} +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_{\lambda,\,2R}} V_h\gamma_{2R}(|x|)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma$$

$\left(\text{здесь } \mu_h = \mu_{V_h} = \frac{1}{\theta_m}\Delta V_h\right)$. Отсюда, используя (8) и (12), заключаем, что

$$\int\limits_{K_{\lambda,\,2R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h \leqslant c\,[\lambda^{\varkappa^-} - \lambda^{\varkappa^+}(2R)^{\varkappa^- - \varkappa^+}] - d\,[\varkappa^-\lambda^{\varkappa^- - 1} -$$

$$-\varkappa^+\lambda^{\varkappa^+ - 1}(2R)^{\varkappa^- - \varkappa^+}] + D_4(2R)^{\rho+m-2+\varkappa^-} +$$

$$+D_1\,\frac{R^{\varkappa^- - 1}}{\varkappa^+ - \varkappa^-}\,R^{\rho+m-1}2^{\rho+m-2+\varkappa^-} \leqslant D_5 R^{\rho+m-2+\varkappa^-}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{K_{\lambda,\,R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h \geqslant \min_{t\in[\lambda,\,R]} \gamma_{2R}(t) \int\limits_{K_{\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu_h \geqslant$$

$$\geqslant R^{\varkappa^-}(1 - 2^{\varkappa^- - \varkappa^+}) \int\limits_{K_{4\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu_h.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{K_{4\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu_h \leqslant \frac{R^{-\varkappa^-}}{1 - 2^{\varkappa^- - \varkappa^+}} \int\limits_{K_{\lambda,\,2R}} \gamma_{2R}(|x|)\,\varphi\,d\mu_h \leqslant C_3 R^{\rho+m-2},$$

где C_3 не зависит от h. Отсюда, поскольку при $h \to 0$ меры μ_h сходятся в $D'(K_{4\lambda,\,\infty})$ к мере μ, немедленно следует, что

$$\int\limits_{K_{4\lambda,\,R}} \varphi\,d\mu \leqslant C_3 R^{\rho+m-2}.$$

Лемма доказана.

4. Предельные переходы, граничная мера. В лемме 5 дается обоснование ряда используемых в дальнейшем предельных переходов. При этом по функции $u \in SH(K)$ на границе конуса вводится мера, являющаяся в некотором смысле предельным значением функции u на ∂K.

Лемма 5. *Пусть функция $u \in SH(K)$ ограничена сверху на каждом ограниченном подмножестве конуса K и пусть $u_h(x) = u(x + hx^0)$, $h > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$a)\ \lim_{h\to 0} \int\limits_{K_{\lambda,\,R}} u_h Q\,d\omega = \int\limits_{K_{\lambda,\,R}} uQ\,d\omega,\ \forall Q \in C(\overline{K}_{\lambda,\,R}),\ 0 < \lambda < R;$$

б) для любых $\lambda > 0$ и $R > \lambda$, не принадлежащих множеству $\Lambda_u^1 = \{t : \mu(\Gamma_t) > 0\}$, выполняется равенство

$$\lim_{h\to 0} \int_{K_{\lambda,R}} Q\varphi\, d\mu_h = \int_{K_{\lambda,R}} Q\varphi\, d\mu, \quad \forall Q \in C^1(\overline{K}_{\lambda,R})\ (\mu_h = \mu_{u_h});$$

в) функции u_h, рассматриваемые как функционалы на пространстве функций из $C(\partial K)$ с ограниченными носителями в $\partial K \setminus \{0\}$, при $h \to 0$ слабо сходятся к некоторой мере $\nu = \nu_u$ (на ∂K);

г) функции $u_h\varphi$, рассматриваемые как функционалы на пространстве $C(\overline{\Gamma}_r)$ для всех r, исключая счетное множество $\Lambda_u^2 = \{r : |\nu| \times (\partial\Gamma_r) > 0\}$, при $h \to 0$ слабо сходятся к некоторой мере $\nu^{(r)} = \nu_u^{(r)}$;

д) если $r \notin \tilde{\Lambda}_u = \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ и $h \to 0$, не принимая значений, в которых $\mu_h(\overline{\Gamma}_r) \neq 0$, то для любой функции $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_r)$ существует предел

$$\lim_{h\to +0} \int_{\Gamma_r} \varphi\eta \frac{\partial u_h}{\partial r}\, dS_r \overset{\text{def}}{=} Q(\eta, r, u);$$

е) если дополнительно функция u удовлетворяет в конусе K неравенству $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$, то при любом $R > r$

$$\int_{\Gamma_{r,R}} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d|\nu| \leqslant CR^{\rho+m-2}, \quad C = C(u, r). \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим $G = K_{\lambda,R}$, $G_1^h = G + hx^0$, $G_2^h = G \cap G_1^h$, $G_3^h = G_1^h \setminus G$, $G_4^h = G \setminus \{K + hx^0\}$, $G_5^h = G \setminus \{G_2^h \cup G_4^h\}$, $\varphi_h(x) = \varphi(x + hx^0)$, $Q_h(x) = Q(x + hx^0)$. Тогда

$$\int_{K_{\lambda,R}} u_h Q\, d\omega - \int_{K_{\lambda,R}} uQ\, d\omega = \int_{G_1^h} uQ_{-h}\, d\omega - \int_G uQ\, d\omega =$$

$$= \int_{G_3^h} uQ_{-h}\, d\omega + \int_{G_2^h} u[Q_{-h} - Q]\, d\omega - \int_{G_4^h} uQ\, d\omega - \int_{G_5^h} uQ\, d\omega.$$

Функция $u(x)$ в области $K_{\lambda/2,R}$ ограничена сверху. Поэтому (см. оценки (13) и (14) леммы 4[1])

$$\int_G |u(x)|\, d\omega < \infty; \tag{20}$$

$$\int_{\Delta_{\lambda,R}^\delta} |u(x)|\, d\omega = O(\delta). \tag{21}$$

---

[1] Формально в лемме 4 предполагается, что функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$. Ясно, однако, что соответствующие оценки имеют место и тогда, когда она только ограничена сверху в областях $K_{\lambda,R}$.

Отсюда следует, что при $h \to 0$

$$\int\limits_{G_i^h} |u|\, d\omega \to 0,\ i = 3, 4, 5,$$

и, значит,

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_i^h} uQ\, d\omega = 0,\ i = 4{,}5;\ \int\limits_{G_3^h} uQ_{-h}\, d\omega \to 0.$$

Учитывая непрерывность функции Q, имеем также

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_2^h} u\, [Q_{-h} - Q]\, d\omega = 0.$$

Тем самым утверждение а) доказано.

Для доказательства утверждения б) вместо соотношений (20) и (21) воспользуемся вытекающим из оценки (15) неравенством

$$\int\limits_G \varphi\, d\mu < \infty. \tag{22}$$

Из этого неравенства, как нетрудно видеть, следует

$$\int\limits_{G \setminus \Delta_{\lambda, R}^{\delta}} d\mu = \delta^{-1} o(1).$$

Заметим далее, что $G_2^h \subset G \setminus \Delta_{\lambda, R}^{\delta[h]}$, где $\delta[h] = \inf\limits_{x \in G_2^h} \varphi(x) \geqslant \inf\limits_{x \in G} \varphi(x + hx^0) \geqslant ch,\ \epsilon > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{G_2^h} d\mu \leqslant \int\limits_{G \setminus \Delta_{\lambda, R}^{\delta[h]}} d\mu \leqslant (\delta[h])^{-1} o(1) \leqslant \frac{o(1)}{ch}. \tag{23}$$

Далее, поскольку в пункте б) предполагается, что $Q \in C^1(\overline{G})$ и $\varphi \in C^1(\overline{G})$,

$$\max_{x \in G_2^h} |\varphi_{-h} Q_{-h} - \varphi Q| = hO(1).$$

Отсюда, а также из (23) заключаем

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_2^h} [\varphi_{-h} Q_{-h} - \varphi Q]\, d\mu = 0,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{G_i^h} Q\varphi\, d\mu = 0,\ i = 3, 4, 5.$$

Теперь, чтобы получить утверждение б), достаточно заметить, что

$$\int_{K_{\lambda, R}} Q\varphi \, d\mu_h - \int_{K_{\lambda, R}} Q\varphi \, d\mu = \sum_{i=2}^{3} \int_{G_i^h} [\varphi_{-h}Q_{-h} - \varphi Q] \, d\mu -$$

$$- \sum_{i=4}^{5} \int_{G_i^h} \varphi Q \, d\mu + \int_{G_3^h} \varphi Q \, d\mu.$$

Для доказательства утверждений в) и г) рассмотрим на $\Gamma_{r, R}$ и $\overline{\Gamma_r}$ соответственно семейства мер $\{u_h \, d\sigma\}_h$ и $\{u_h \varphi \, dS_r\}_h$. Из оценок (17), (18) следует, что эти семейства ограничены по вариации при любых фиксированных r и R. Следовательно, они слабо компактны и из каждой последовательности $h_j \to 0$ можно выбрать такую подпоследовательность $h_{j'}$, что меры $\nu_{j'} = u_{h_{j'}} d\sigma$ будут при $j' \to \infty$ слабо сходиться на пространстве $C(\Gamma_{r, R})$ к некоторой мере $\nu^{(r, R)}$, а меры $\nu_{j'}^{(r)} = u_{h_{j'}} \varphi dS_r$ будут слабо сходиться на пространстве $C(\overline{\Gamma}_r)$ к мере $\nu^{(r)}$. Заметим, что для любых чисел r' и R', $0 < r' < r < R < R' < \infty$ определенная по некоторой подпоследовательности $h_{j''}$ последовательности $h_{j'}$ предельная мера $\nu^{(r', R')}$ является продолжением меры $\nu^{(r, R)}$ на $\Gamma_{r', R'}$ в следующем смысле:

$$\nu^{(r', R')}|_{\mathring{\Gamma}_{r, R}} = \nu^{(r, R)}|_{\mathring{\Gamma}_{r, R}},$$

где $\mathring{\Gamma}_{r, R} = \Gamma_{r, R} \setminus \partial\Gamma_{r, R}$. Это обстоятельство позволяет, отправляясь от последовательности $h_{j'}$ и прореживая ее на каждом шаге, определить на $\partial K \setminus \{0\}$ некоторую меру ν. Для завершения доказательства утверждений в) и г) теперь достаточно установить единственность мер ν и $\nu^{(r)}$ при r, не принадлежащих некоторому счетному множеству.

Пусть $0 < r < R$, функция $\psi \in D(\Gamma_{r, R})$, $\tilde{\psi}$ — какое-либо продолжение функции ψ в $\overline{K}$, принадлежащее классу $C^2(\overline{K})$ и такое, что $\tilde{\psi}(x) = 0$ при $x \in \overline{K} \setminus \overline{K}_{r, R}$. Обозначим через $u_h^j(x)$ построенную стандартным способом последовательность функций из $SH(\overline{K}) \cap C^\infty(\overline{K})$, монотонно убывающую на $\overline{K}$ к функции $u_h(x)$. Применим к функциям $u_h(x)$ и $\tilde{\psi}(x)\varphi(x)$ формулу Грина в области $K_{a, b}$, $a < r < R < b$, а затем, использовав лемму 1, перейдем к пределу при $j \to \infty$. Получим тогда

$$\int_{K_{a, b}} u_h \Delta(\tilde{\psi}\varphi) \, d\omega - \theta_m \int_{K_{a, b}} \tilde{\psi}\varphi \, d\mu_h = - \int_{\Gamma_{r, R}} u_h \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Из этого равенства в силу уже доказанных утверждений а) и б) и согласно определению меры ν вытекает, что $\forall\psi \in D(\Gamma_{r,R})$ существует

$$\lim_{h \to 0} \int_{\Gamma_{r, R}} u_h \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = \int_{\Gamma_{r, R}} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\nu = - \int_{K_{a, b}} u \Delta(\tilde{\psi}\varphi) \, d\omega + \theta_m \int_{K_{a, b}} \tilde{\psi}\varphi \, d\mu. \tag{24}$$

Тем самым утверждение в) доказано.

Для установления единственности меры $\nu^{(r)}$ при $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ формула Грина применяется в области $K_{a,r}$ к функциям $u_h^j(x)$ и $\tilde{\eta}(x)\varphi(x)$, где $\tilde{\eta}(x) = \eta\left(\frac{rx}{|x|}\right)\gamma(\|x\|)$, $\eta(x)$ — произвольная функция из $C^2(\overline{\Gamma}_r)$, а функция $\gamma(t) \in C^\infty(\boldsymbol{R}_+)$, $\operatorname{supp}\gamma \subset (a, 2r)$, $\gamma(r) = 0$, $\gamma'(r) = 1$. Перейдя в этой формуле к пределу по $j \to \infty$, получим равенство

$$-\int_{K_{a,r}} u_h \Delta(\tilde{\eta}\varphi)\, d\omega + \theta_m \int_{K_{a,r}} \tilde{\eta}\varphi\, d\mu_h - \\ - \int_{\Gamma_{a,r}} u_h \tilde{\eta} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \int_{\Gamma_r} u_h \eta\varphi\, dS_r. \tag{25}$$

Левая часть равенства (25) при $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$, как уже доказано, имеет предел при $h \to 0$. Значит, $\forall \eta \in C^2(\overline{\Gamma}_r)$ $\exists \lim\limits_{h\to 0} \int_{\Gamma_r} u_h \eta\varphi\, dS_r = \int_{\Gamma_r} \eta\, d\nu^{(r)}$, что завершает доказательство утверждения г).

Утверждение д) доказывается рассуждением, приведшим к формуле (25), с заменой функции $\gamma(t)$ функцией $\gamma_1(t) \in C^\infty(\boldsymbol{R}_+)$ такой, что $\operatorname{supp}\gamma_1 \subset (a, 2r)$, $\gamma_1(r) = 1$, $\gamma_1'(r) = 0$. При этом получаем, что при $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$

$$\exists \lim_{h\to 0} \int_{\Gamma_r} \eta\varphi \frac{\partial u_h}{\partial r}\, dS_r = -\int_{K_{a,r}} u\Delta(\tilde{\eta}\varphi)\, d\omega + \\ + \theta_m \int_{K_{a,r}} \tilde{\eta}\varphi\, d\mu - \int_{\Gamma_{a,r}} \tilde{\eta} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\nu. \tag{26}$$

Отметим, наконец, что соотношение (19) следует из оценки (10). Лемма доказана.

Замечание 1. Можно показать, что при $r, R \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ наименьшая гармоническая мажоранта $H^{(r,R)}$ функции u в области $K_{r,R}$ представится в виде

$$H^{(r,R)}(x) = \frac{1}{\theta_m} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\, d\nu(y) + \\ + \frac{1}{\theta_m} \int_{\overline{\Gamma}_r} g(x, y)\, d\nu^{(r)}(y) + \frac{1}{\theta_m} \int_{\overline{\Gamma}_R} g(x, y)\, d\nu^{(R)}(y),$$

где $G(x, y)$ — функция Грина области $K_{r,R}$, а $g(x, y) = \lim\limits_{y'\to y,\, y' \in \Gamma_r \cup \Gamma_R} \dfrac{\partial G(x, y')}{\partial n_{y'}} \Big/ \varphi(y')$, $x \in K_{r,R}$, $y \in \overline{\Gamma}_r \cup \overline{\Gamma}_R$.

Замечание 2. В том случае, когда какое-то подмножество F границы конуса, открытое в топологии ∂K, компактно вложено в область субгармоничности функции $u(x)$, граничная мера ν_u на F совпадает с мерой $u\,d\sigma$. Действительно, выберем для любой функции $\psi \in D(F)$ такое ее продолжение $\tilde{\psi}$ в $\overline{K}$, что $\tilde{\psi}(x) = 0$ вне достаточно малой окрестности (в R^m) Ω множества supp ψ. Тогда для функций $u^j \in SH(\Omega) \cap \cap C^\infty(\Omega)$, $u^j \searrow u$ на Ω и функции $\tilde{\psi}\varphi$ можно записать формулу Грина в области $K_{a,b}$, $\Gamma_{a,b} \supset F$. Перейдя в ней к пределу по $j \to \infty$, получим

$$\int\limits_{K_{a,b}} u\Delta(\tilde{\psi}\varphi)\, d\omega - \theta_m \int\limits_{K_{a,b}} \tilde{\psi}\varphi\, d\mu = -\int\limits_F u\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Сравнивая это равенство с соотношением (24) и учитывая единственность меры ν, приходим к искомому утверждению.

По этим же соображениям (используя соотношение (25) для функции $\eta \in D(\Gamma_r)$) предельная мера $\nu^{(r)}$ функции $u(x)$, субгармонической в K, совпадает для $r \notin \Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$ с мерой $u\varphi\, dS_r$ на множествах, компактно вложенных в Γ_r, а значит, и на всем (открытом в топологии S_r) множестве Γ_r. Более того, как следует из утверждения а) леммы 5, равенство $d\nu^{(r)} = u\varphi\, dS_r$ справедливо и на множестве Γ_r для всех $r \in (0, \infty)$, не принадлежащих некоторому множеству Λ_u^3 нулевой лебеговой меры.

В дальнейшем множество $\Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2 \cup \Lambda_u^3$ всех «исключительных» значений будем обозначать через Λ_u.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 2. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных // Ann. Polon. Math. 1981. **39**, № 2. С. 239—254. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. **108 (150)**, № 2. С. 147—167. 4. *Gruman L.* Les zéros des fonctions entiéres d'o dre fini, de croissance réguliéve dans C^n // C. r. Acad. Sci. Paris. 1976. **282**. P. 5. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 6. *Ронкин Л. И.* Функции вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН УССР. Сер. А., 1985. № 3. С. 10—13. 7. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Субгармонические функции конечного порядка в конусе // Докл. АН СССР. 1987. **297**, № 2. С. 298—302. 8. *Рашковский А. Ю.* Интегральное представление субгармонических функций конечного порядка в конусе. // Сиб. мат. журн. 1989. 30, № 3. С. 109—123. 9. *Berenstein C. A.* An estimate for the number of zeros of analytic functions in n-dimensional cones // Adv. Compl. Funct. Theory. Lect. Notes Math., 1976. N 505. P. 1—16.

Поступила в редколлегию 12.01.89

УДК 517.54+517.98

А. Я. ХЕЙФЕЦ

ОБОБЩЕННАЯ БИКАСАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ШУРА — НЕВАНЛИННЫ — ПИКА И СВЯЗАННОЕ С НЕЙ РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

Обобщенная бикасательная задача Шура — Неванлинны — Пика рассматривалась в работах [1, 2], где получено описание множества решений задачи и охарактеризована ее резольвентная матрица в случае полной неопределенности.

Рассмотрим общий случай и докажем равенство Парсеваля [3, 4] для обобщенной бикасательной задачи Шура — Неванлинны — Пика (точнее, докажем отсутствие дополнительных членов в нем).

Пусть E_1, $\tilde{E}_1$, E_2, $\tilde{E}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства; ϑ_1, ϑ_2 — голоморфные сжимающие оператор-функции в единичном круге $\boldsymbol{D}$ комплексной плоскости ($\vartheta_1: E_1 \to \tilde{E}_2$, $\vartheta_2: \tilde{E}_2 \to E_2$), являющиеся односторонне внутренними в следующем смысле: $\vartheta_1\vartheta_1^* = 1_{\tilde{E}_1}$, $\vartheta_2^*\vartheta_2 = 1_{\tilde{E}_2}$ при почти всех t, $|t| = 1$.

Обозначим через K_{ϑ_1}, K_{ϑ_2} пространства

$$K_{\vartheta_1} = H_-^2(E_1) \ominus \vartheta_1^* H_-^2(\tilde{E}_1);\ \ K_{\vartheta_2} = H_+^2(E_2) \ominus \vartheta_2 H_+^2(\tilde{E}_2),$$

где $H_\pm^2$ — стандартные пространства Харди в единичном круге $\boldsymbol{D}$ комплексной плоскости (в скобках указаны пространства коэффициентов).

Кроме того, рассмотрим пространства

$$K_1 = K_{\vartheta_1} \oplus H_+^2(E_1) = L^2(E_1) \ominus \vartheta_1^* H_-^2(\tilde{E}_1);$$

$$K_2 = H_-^2(E_2) \oplus K_{\vartheta_2} = L^2(E_2) \ominus \vartheta_2 H_+^2(\tilde{E}_2).$$

Пространство K_1 инвариантно относительно оператора умножения на независимую переменную t (так как его ортогональное дополнение в $L^2(E_1)$ инвариантно относительно умножения на $\bar{t}$), K_2 —инвариантно относительно умножения на $\bar{t}$.

Обозначим $T_1 = t\,|K_1$, $T_2^* = \bar{t}\,|K_2$.

Блочные разложения этих операторов в соответствии с ортогональными разложениями K_1 и K_2, приведенными выше, имеют вид

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{\vartheta_1} & 0 \\ U_1 & V_1 \end{bmatrix},\ T_2^* = \begin{bmatrix} V_2^* & U_2^* \\ 0 & T_{\vartheta_2}^* \end{bmatrix},$$

где

$$T_{\vartheta_1} = P_{\vartheta_1} t\,|\,K_{\vartheta_1} = P_- t\,|\,K_{\vartheta_1},\ \ U_1 = P_+ t\,|K_{\vartheta_1},\ V_1 = t\,|\,H_+^2(E_1),$$

$$T_{\vartheta_2}^* = P_{\vartheta_2}\bar{t}\,|\,K_{\vartheta_2} = P_+\bar{t}\,|\,K_{\vartheta_2},\ \ V_2^* = \bar{t}\,|\,H_-^2(E_2),\ U_2^* = P_-\bar{t}\,|\,K_{\vartheta_2}.$$

Здесь P_+, P_- — ортопроекторы на H_+^2 и H_-^2, P_ϑ — ортопроектор на K_ϑ.

Лемма 1. *Пусть* $w(\zeta)$ *голоморфная сжимающая оператор-функция в* $\boldsymbol{D}$, $w(\zeta): E_1 \to E_2$. *Положим* $W = P_{K_2} w|\,K_1$, *тогда* 1) *оператор* W — *сжатие*, 2) *блочное разложение* W *имеет треугольный вид*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix},$$

где

$$W_1 = P_- w\,|\,K_{\vartheta_1} : K_{\vartheta_1} \to H_-^2(E_2);$$

$$W_2 = P_{\vartheta_2} w\,|\,H_+^2(E_1): H_+^2(E_1) \to K_{\vartheta_2};$$

$$W_{21} = P_{\vartheta_2} w\,|\,K_{\vartheta_1} : K_{\vartheta_1} \to K_{\vartheta_2};$$

3) $WT_1 = T_2 W = P_{K_2} t w\,|\,K_1$.

Пример. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — точки единичного круга D комплексной плоскости,

$$K_{\vartheta_1} = \mathrm{Lin}\left\{\frac{P_1(\zeta_k)\, e_1}{t-\zeta_k},\ e_1 \in E_1\right\}_{k=1}^{n};$$

$$K_{\vartheta_2} = \mathrm{Lin}\left\{\frac{P_2(\zeta_k)\, e_2}{1-t\bar{\zeta}_k},\ e_2 \in E_2\right\}_{k=1}^{n},$$

где $P_1(\zeta_k)$ — ортопроекторы на некоторые подпространства в E_1, $P_2(\zeta_k)$ — в E_2. Пусть $w(\zeta)$ — голоморфная в D сжимающая оператор-функция $(E_1 \to E_2)$.

Тогда оператор W_1 определяется значениями $w(\zeta_k)P_1(\zeta_k)$, оператор W_2 — значениями $P_2(\zeta_k)\,w(\zeta_k)$ и оператор W_{21} — значениями $P_2(\zeta_k) \times \times w'(\zeta_k)\,P_1(\zeta_k)$.

Сформулируем теперь *обобщенную бикасательную задачу Шура—Неванлинны—Пика.*

Пусть W — блочно-треугольный оператор

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix}$$

из $K_1 = K_{\vartheta_1} \oplus H_+^2(E_1)$ в $K_2 = H_-^2(E_2) \oplus K_{\vartheta_1}$ такой, что $WT_1 = T_2W$. Требуется дать критерий того, что

$$W = P_{K_2} w \mid K_1$$

для некоторой сжимающей голоморфной в D оператор-функции $(E_1 \to \to E_2)$ и описать все такие функции w.

Связь этой постановки с рассмотренной в [1, 2] мы обсудим в конце работы.

Как видно из леммы 1, необходимым условием разрешимости задачи является сжимаемость оператора W. Как будет показано, это условие является и достаточным. Для описания всех решений будет использована конструкция типа абстрактной задачи интерполяции (см. [4, 5]).

Если K_{ϑ_1}, K_{ϑ_2} такие, как описано в примере, то это обычная бикасательная задача Шура — Неванлинны — Пика.

Нам понадобится следующее известное утверждение.

Утверждение 2. *Оператор*

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ W_{21} & W_2 \end{bmatrix} : K_{\vartheta_1} \oplus H_+^2(E_1) \to H_-^2(E_2) \oplus K_{\vartheta_2}$$

является сжатием тогда и только тогда, когда оператор

$$D = \left[\begin{array}{c|c} 1_{\vartheta_1} - W_1^* W_1 & W_{21}^* \\ \hline W_{21} & 1_{\vartheta_2} - W_2 W_2^* \end{array}\right],$$

действующий в пространстве $X = K_{\vartheta_1} \oplus K_{\vartheta_2}$, неотрицателен: $D \geqslant 0$.

Лемма 3. *Имеет место следующее тождество:*

$$\langle D\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & T^*_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x,\ \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & T^*_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x\rangle_X - \langle D\begin{bmatrix}T_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x,\ \begin{bmatrix}T_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x\rangle_X =$$
$$= \langle M_1x,\ M_1x\rangle_{E_1} - \langle M_2x,\ M_2x\rangle_{E_2},$$

где

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ x_1 \in K_{\vartheta_1},\ x_2 \in K_{\vartheta_2};$$
$$M_1x = tx_1|_0 + W_2^*x_2|_0 : X \to E_1;$$
$$M_2x = x_2|_0 + tW_1x_1|_0 : X \to E_2.$$

Тождество доказывается непосредственным вычислением с использованием коммутационного соотношения $WT_1 = T_2W$ (поблочно).

Это тождество позволяет связать с данными обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика *абстрактную интерполяционную задачу* (см. [3, 5]). Сформулируем ее:

голоморфную сжимающую в $\mathbf{D}$ *оператор-функцию* $w(\zeta)$: $E_1 \to E_2$ *будем называть решением абстрактной интерполяционной задачи, построенной по данным обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика, если существует линейное отображение* F *из* $X = K_{\vartheta_1} \oplus K_{\vartheta_2}$ *в модельное пространство де Бранжа — Ровняка* H^w *(определение см. в* [4]) *такое, что*

$$1.\ \|Fx\|^2_{H^w} \leqslant \langle Dx,\ x\rangle;$$

$$2.\ F\begin{bmatrix}T_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x \overset{\text{п. в.}}{=} tF\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{\vartheta_1} & 0\\ 0 & T^*_{\vartheta_2}\end{bmatrix}x - \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{E_2} & w\\ w^* & \mathbf{1}_{E_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-M_1x\\ M_2x\end{bmatrix}.$$

Отображение F называется представлением Фурье пространства X, связанным с решением w.

Вообще говоря (в других задачах), одному решению w могут соответствовать несколько представлений Фурье. Но в случае обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика это не так. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* w *— решение абстрактной задачи интерполяции, построенной по данным обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика, тогда представление Фурье* F *однозначно определяется решением абстрактной задачи интерполяции* w *и имеет вид*

$$Fx = \begin{bmatrix}\mathbf{1}_{E_2} & w\\ w^* & \mathbf{1}_{E_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-W_1x_1 + x_2\\ x_1 - W_2^*x_2\end{bmatrix},$$

где

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\ x_1 \in K_{\vartheta_1},\ x_2 \in K_{\vartheta_2},$$

W_1 и W_2 *— данные обобщенной бикасательной задачи Шура — Неванлинны — Пика.*

Доказательство: Компоненты F будем обозначать $F \equiv \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix}$.

Покажем, что $(F_- x_1)(\zeta) = x_1(\zeta) - w(\zeta)^* \cdot (W_1 x_1)(\zeta)$.

Для этого воспользуемся соотношением ($|\zeta| < 1$):

$$(F_- T_{\vartheta_1} x_1)(\zeta) = \frac{1}{\bar{\zeta}}(F_- x_1)(\zeta) - (M_1 x_1 - w(\zeta)^* \cdot M_2 x_1).$$

Откуда

$$(F_-(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1}) x_1)(\zeta) = \bar{\zeta}(M_1 x_1 - w(\zeta)^* M_2 x_1).$$

Делая подстановку $x_1 := (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1$, получаем

$$(F_- x_1)(\zeta) = \bar{\zeta}(M_1 - w(\zeta)^* M_2)(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1.$$

Поскольку

$$(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 = P_- \frac{x_1}{1 - \bar{\zeta} t} = \bar{t}\, \frac{x_1 - x_1(\zeta)}{\bar{t} - \bar{\zeta}}, \text{ то}$$

$$M_1(\bar{\zeta}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1) = t\bar{\zeta}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \big|_{t=0} = x_1(\zeta).$$

Так как $W_1 T_{\vartheta_1} = V_2 W_1$, где $V_2 = P_- t \,|\, H^2_-(E_2)$, то

$$M_2(\bar{\zeta}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1) = t\bar{\zeta} W_1 (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \big|_{t=0} =$$
$$= t\bar{\zeta}(\mathbf{1}_{H^2_-(E_2)} - \bar{\zeta} V_2)^{-1} W_1 x_1 \big|_{t=0} = (W_1 x_1)(\zeta).$$

(Последнее равенство получается так же, как и для M_1). Таким образом,

$$(F_- x_1)(\zeta) = x_1(\zeta) - w(\zeta)^* \cdot (W_1 x_1)(\zeta).$$

в. Покажем, что $F_+ x_1 \overset{\text{п. в}}{=} w x_1 - w_1 x_1$, $|t| = 1$.

Для этого воспользуемся соотношением

$$(F_+ T_{\vartheta_1} x_1)(\zeta) = \zeta(F_+ x_1)(\zeta) - (w(\zeta) M_1 - M_2) x_1.$$

Положим $x_1 := \bar{\zeta}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1$, тогда

$$\zeta\bar{\zeta}(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) - \bar{\zeta}(F_+ T_{\vartheta_1}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) =$$
$$= w(\zeta) x_1(\zeta) - (W_1 x_1)(\zeta).$$

Добавим и вычтем в левой части $(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta)$, тогда левая часть примет вид

$$(\zeta\bar{\zeta} - 1)(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) + (F_+ x_1)(\zeta).$$

Покажем, что первое слагаемое стремится к нулю при некасательном стремлении $|\zeta|$ к границе единичного круга $\boldsymbol{D}$. В самом деле,

$$\|(F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta)\|^2_{E_2} \leqslant \frac{\|F_+(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1\|^2_{H^2_+(E_2)}}{1 - |\zeta|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|F(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1\|^2_{H^w}}{1 - |\zeta|^2} \leqslant \frac{\|\sqrt{D}(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1\|^2_X}{1 - |\zeta|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|(\mathbf{1}_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1\|^2_{K_{\vartheta_1}}}{1 - |\zeta|^2}.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$(1-|\zeta|^2)^2 \| (F_+ (1_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1)(\zeta) \|^2_{E_2} \leqslant$$
$$\leqslant (1-|\zeta|^2) \| (1_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2_{K_{\vartheta_1}}.$$

Поскольку

$$(1_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 = \bar{t} \frac{x_1 - x_1(\zeta)}{\bar{t} - \bar{\zeta}},$$

$$(1-|\zeta|^2) \| (1_{\vartheta_1} - \bar{\zeta} T_{\vartheta_1})^{-1} x_1 \|^2 = \int_T \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} \| x_1 - x_1(\zeta) \|^2_{E_1} dm(t),$$

где T — единичная окружность, dm — нормированная мера Лебега на ней. Но последний интеграл, очевидно, стремится к нулю при $|\zeta| \to 1$.

Таким образом, при $|t| = 1$

$$F_+ x_1 \overset{\text{п. в}}{=} w x_1 - W_1 x_1.$$

Собирая вместе $F_+ x_1$ и $F_- x_1$, получим

$$F x_1 \overset{\text{п. в}}{=} \begin{bmatrix} 1_{E_2} & w \\ w^* & 1_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично вычисляется $F x_2$.

Теорема 5. *Множества решений обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика и построенной по ее данным абстрактной задачи интерполяции совпадают. Для любого решения w имеет место равенство Парсеваля $\langle Dx, x \rangle = \| Fx \|^2_{H^w}$.*

Доказательство: Пусть w — голоморфная в $\mathbf{D}$ сжимающая оператор-функция из E_1 в E_2, рассмотрим выражение

$$Fx = \begin{bmatrix} 1_{E_2} & w \\ w^* & 1_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 x_1 + x_2 \\ x_1 - W_2^* x_2 \end{bmatrix},$$

где $x \in K_{\vartheta_1} \oplus K_{\vartheta_2}$, W_1 и W_2 — данные обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика. Как видно из выражения для F, первая компонента F лежит в $H^2_+(E_2)$ тогда и только тогда, когда $w x_1 - W_1 x_1 \in H^2_+(E_2)$, т. е. $P_- w x_1 = W_1 x_1$. Точно так же вторая компонента $F \in H^2_-(E_1)$ тогда и только тогда, когда $w^* x_2 - W_2^* x_2 \in H^2_-(E_1)$, т. е. $P_+ w^* x_2 = W_2^* x_2$. Таким образом, F есть отображение в H^w тогда и только тогда, когда $P_- w x_1 = W_1 x_1$ и $P_+ w^* x_2 = W_2^* x_2$.

В этом случае вычислим $\| Fx \|^2_{H^w}$:

$$\langle F x_1\, F x_1 \rangle_{H^w} = \int_T \left\langle \begin{bmatrix} 1_{E_2} & w \\ w^* & 1_{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} -W_1 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \right\rangle_{E_2 \oplus E_1} dm = \langle w x_1 - W_1 x_1, -W_1 x_1 \rangle + \langle x_1 - w^* \cdot W_1 x_1, x_1 \rangle.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как

$$wx_1 - W_1x_1 \in H^2_+(E_2), \text{ а } W_1x_1 \in H^2_-(E_2).$$

Преобразуем второе слагаемое

$$\langle w^* \cdot W_1x_1, x_1\rangle = \langle W_1x_1, wx_1\rangle = \langle W_1x_1, P_-wx_1\rangle = \langle W_1x_1, W_1x_1\rangle.$$

Итак,

$$\| Fx_1 \|^2_{H^w} = \langle (\mathbf{1}_{\vartheta_1} - W_1^*W_1)\, x_1, x_1\rangle.$$

Аналогично

$$\| Fx_2 \|^2_{H^w} = \langle (\mathbf{1}_{\vartheta_2} - W_2W_2^*)\, x_2, x_2\rangle, \ \langle Fx_1, Fx_2\rangle_{H^w} = \langle \widehat{W}_{21}x_1, x_2\rangle,$$

где $\widehat{W}_{21} = P_{\vartheta_2}w \mid K_{\vartheta_1}$.

Таким образом,

$$\| Fx \|^2_{H^w} = \langle \widehat{D}x, x\rangle x,$$

где

$$\widehat{D} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{\vartheta_1} - W_1^*W_1 & \widehat{W}_{21}^* \\ \hline \widehat{W}_{21} & \mathbf{1}_{\vartheta_2} - W_2W_2^* \end{array}\right].$$

Но $\widehat{D} \leqslant D$ тогда и только тогда, когда $\widehat{W}_{21} = W_{21}$. В самом деле

$$D - \widehat{D} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & W_{21}^* - \widehat{W}_{21}^* \\ \hline W_{21} - \widehat{W}_{21} & 0 \end{array}\right] \geqslant 0$$

тогда и только тогда, когда $W_{21} = \widehat{W}_{21}$.

Кроме того, если w — решение обобщенной бикасательной задачи Шура—Неванлинны—Пика, то F обладает свойством 2 абстрактной задачи интерполяции.

Тем самым теорема доказана.

В работах [1, 2] обобщенная бикасательная задача Шура—Неванлинны—Пика рассматривалась в следующей постановке: w_0 — заданная голоморфная в $\boldsymbol{D}$ сжимающая оператор-функция из E_1 в E_2, требуется описать все функции w:

$$w - w_0 \in \vartheta_2 \cdot H^\infty(\tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2) \cdot \vartheta_1.$$

Утверждение 6. Пусть $g \in H^\infty(E_1 \to E_2)$, тогда $g = \vartheta_2 \hat{g} \vartheta_1$, где $\hat{g} \in H^\infty(\tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2)$ тогда и только тогда, когда $P_{K_2} g \mid K_1 = 0$ (определение пространств K_1 и K_2 дано в начале работы).

Доказательство. Поскольку

$$P_{K_1} = \mathbf{1}_{L^2(E_1)} - \vartheta_1^* P_- \vartheta_1, \ P_{K_2} = \mathbf{1}_{L^2(E_2)} - \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^*, \text{ то}$$

$$P_{K_2} g P_{K_1} = (\mathbf{1} - \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^*)\, g\, (\mathbf{1} - \vartheta_1^* P_- \vartheta_1) =$$
$$= g - \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^* g - g \vartheta_1^* P_- \vartheta_1 + \vartheta_2 P_+ \vartheta_2^* g \vartheta_1^* P_- \vartheta_1.$$

Это выражение мы рассматриваем как оператор, применяемый к произвольной функции из $L^2(E_1)$.

а. Пусть $g = \vartheta_2 \hat{g} \vartheta_1$, тогда

$$P_{K_2} g P_{K_1} = \vartheta_2 \hat{g} \vartheta_1 - \vartheta_2 P_+ \hat{g} \vartheta_1 - \vartheta_2 \hat{g} P_- \vartheta_1 + \vartheta_2 P_+ \hat{g} P_- \vartheta_1.$$

Группируя первые два члена и последние два, получаем

$$P_{K_2}gP_{K_1}=\vartheta_2P_-\hat{g}\vartheta_1-\vartheta_2P_-\hat{g}P_-\vartheta_1=\vartheta_2P_-\hat{g}P_+\vartheta_1=0,$$

так как $\hat{g}\in H^\infty$.

б. Пусть $P_{K_2}gP_{K_1}=0$, т. е.

$$(1-\vartheta_2P_+\vartheta_2^*)\,g\,(1-\vartheta_1^*P_-\vartheta_1)=0. \tag{1}$$

Рассмотрим (1) на векторах вида $e_1\in E_1$, тогда

$$(1-\vartheta_2P_+\vartheta_2^*)\,ge_1=0,$$

откуда следует, что $g=\vartheta_2\tilde{g}$, $\tilde{g}\in H^\infty(E_1\to\tilde{E}_2)$.

Рассмотрим оператор, сопряженный к (1) с учетом полученного свойства g:

$$(1-\vartheta_1^*P_-\vartheta_1)\,\tilde{g}^*\vartheta_2^*\,(1-\vartheta_2P_+\vartheta_2^*)=0,$$

т. е.

$$(1-\vartheta_1^*P_-\vartheta_1)\,\tilde{g}^*P_-\vartheta_2^*=0.$$

Рассмотрим этот оператор на векторах $\vartheta_2\bar{t}\tilde{e}_2$:

$$(1-\vartheta_1^*P_-\vartheta_1)\,\tilde{g}^*\bar{t}\tilde{e}_2=0,$$

или, умножая последнее равенство на t слева,

$$(1-t\vartheta_1^*P_-\vartheta_1\bar{t})\,\tilde{g}^*\tilde{e}_2=0.$$

Откуда вытекает, что $\tilde{g}^*=\vartheta_1^*\hat{g}^*$, т. е. $\tilde{g}=\hat{g}\vartheta_1$, где $\hat{g}\in H^\infty(\tilde{E}_1\to\tilde{E}_2)$. Следовательно, $g=\vartheta_2\hat{g}\vartheta_1$.

Таким образом, для того, чтобы перейти от постановки работ [1, 2] к нашей постановке, нужно положить $W=P_{K_2}w_0|K_1$. Смысл этой процедуры состоит в том, что от данной функции w_0 остаются лишь ее значения на спектре интерполяции.

Автор выражает глубокую благодарность Д. З. Арову за продолжительную беседу, которая послужила толчком для выполнения настоящей работы, а также В. Э. Кацнельсону и П. М. Юдицкому за полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Аров Д. З.* Линейные стационарные пассивные системы с потерями: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Одесса, 1983. 298 с. 2. *Аров Д.З.* γ-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции матриц-функций. Одесса, 1986. 49 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 726 УК-Д 86. 3. *Кацнельсон В. Э., Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Абстрактная интерполяционная задача и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функцион. пространствах и вопросы теории функций. 1987. С. 83—96. 4. *Хейфец А. Я.* Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем I // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1988. Вып. 49. С. 112—120. 5. *Хейфец А. Я.* Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем II // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1988. Вып. 50. С. 98—103. 6. *Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Интерполяция оператора, коммутирующего с укороченным сдвигом функциями класса И. Шура // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1983. Вып. 40. С. 129—136.

Поступила в редколлегию 05.09.88

УДК 517.946.225

Л. С. ПАНКРАТОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С «НАКОПИТЕЛЯМИ»

1. *Постановка задачи и формулировка основного результата.* Пусть Ω — произвольная ограниченная область в E_n $(n \geqslant 2)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, а $R^{(s)}$ — замкнутое сильно изрезанное множество в Ω. Будем предполагать, что $R^{(s)}$ зависит от параметра s так, что при каждом фиксированном s $R^{(s)}$ состоит из «пористых» блоков, разделенных тонкими «трещинами» (возможны соединения блоков между собой с помощью «перемычек» в трещинах, так что $R^{(s)}$ может быть и связным). При $s \to \infty$ размеры блоков и пор в них уменьшаются, а сеть трещин становится все более плотной в Ω. Рассмотрим область $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus R^{(s)}$. Учитывая структуру $R^{(s)}$, эту область можно представить в виде объединения непересекающихся областей $Q_i^{(s)}$, $i = 1 \div s$ (внутренние поры в блоках или «накопители»), $G^{(s)}$ (трещины) и связывающего их множества $W^{(s)}$ (граничные поры блоков):

$$\Omega^{(s)} = G^{(s)} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{s} Q_i^{(s)}\right) \cup W^{(s)}. \tag{1}$$

При каждом s рассмотрим в областях $\Omega^{(s)}$ вариационную задачу

$$J^{(s)}(u) = \int_{\Omega^{(s)}} F(x, u, \nabla u)\, dx \to \min, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{3}$$

Такие задачи возникают, например, в теории фильтрации. Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения $u^{(s)}$ — решений вариационной задачи (2), (3) при $s \to \infty$. Исследование аналогичных вопросов для линейных эллиптических и параболических уравнений проведено ранее [1]. В данной работе эти результаты переносятся на краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, являющихся уравнениями Эйлера функционалов типа (2). Будем предполагать, что функционал (2) удовлетворяет условиям:

I. $F(x, u, p)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на множестве $\{(x, u, p): x \in \overline{\Omega},\ u \in (-\infty, \infty),\ p \in E_n\}$ выпуклая по аргументу p функция $(p \neq q)$

$$F(x, u, p) - F(x, u, q) - F_{p_i}(x, u, q)(p_i - q_i) \geqslant 0,$$

удовлетворяющая условиям $(A_1, A_2 \geqslant 0)$:

$$|F(x, u, p) - F(x, v, q)| \leqslant A_1(1 + |u| + |v| + |p| + |q|)^{m-1}(|u - v| + |p - q|),$$

$$|F_v(x, v_1, 0) - F_v(x, v_2, 0)| \leqslant A_2(1 + |v_1| + |v_2|)^{m-2}|v_1 - v_2|.$$

II. Существует такая постоянная $A_3 \geqslant 0$, что

$$\hat{F}(x, u, p) = F(x, u, p) - F(x, u, 0) > A_3 | p |^m.$$

III. Функционал $J^{(s)}(u)$ ограничен снизу:

$$J^{(s)}(u) \geqslant \varphi\left(\| u \|^{(1)}_{m, \Omega^{(s)}}\right),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция такая, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

IV. Интегрант $F(x, u, p)$ удовлетворяет условию

$$F(x, u, 0) \geqslant g_1(x) | u |^{m_1} + g_2(x),$$

где $m_1 < m$; $g_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, 2)$ и $g_2(x) \in L_1(\Omega)$;

$$g_1(x) \in L_{m_2}(\Omega); \; m_2 = \frac{m}{m - m_1}.$$

Введем необходимые для дальнейшего определения и предположения.

Определение 1. *Пусть $\{B^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\mathbf{D}^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ — последовательности подобластей в Ω, причем $B^{(s)} \subseteq \mathbf{D}^{(s)} \subseteq \Omega$ (в частности, $\mathbf{D}^{(s)}$ может совпадать с Ω). Будем говорить, что области $B^{(s)}$ сильно связаны относительно областей $\mathbf{D}^{(s)}$, если для любой функции $v^{(s)} \in W^1_m(B^{(s)})$ существует продолжение $\tilde{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$, когда $x \in B^{(s)}$, и справедливо неравенство*

$$\| \tilde{v}^{(s)} \|^{(1)}_{m, \mathbf{D}^{(s)}} \leqslant C \| v^{(s)} \|^{(1)}_{m, B^{(s)}}$$

с постоянной C, не зависящей от s, $B^{(s)}$, $\mathbf{D}^{(s)}$.

Определение 2. *Будем называть области $B^{(s)}$ локально сильно связными в Ω, если для любых подобластей $\mathbf{D} \Subset \Omega$ и $\tilde{\mathbf{D}} \Subset \mathbf{D}$ ($\Subset$ — компактное вложение) и любой функции $v^{(s)}(x) \in W^1_m(\mathbf{D} \cap B^{(s)})$ существует функция $\tilde{v}^{(s)}(x) \in W^1_m(\mathbf{D})$ такая, что $\tilde{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$ при $x \in B^{(s)} \cap \tilde{\mathbf{D}}$ и справедливо неравенство*

$$\| \tilde{v}^{(s)} \|^{(1)}_{m, \mathbf{D}} \leqslant C \| v^{(s)} \|^{(1)}_{m, \mathbf{D} \cap B^{(s)}}$$

с постоянной C, не зависящей от s, $\mathbf{D}$, $\tilde{\mathbf{D}}$.

Пусть $K^{\alpha}_{\delta} = K(x^{\alpha}, \delta)$ — куб с центром в точке $x^{\alpha} \in \Omega$ и ребрами длиной $\delta > 0$, ориентированными по координатным осям, $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — вектор в E_n, а $t^{(s)} = \{t_1, \ldots, t_s\}$ — вектор в E_s. Рассмотрим функционалы:

$$C(x^{\alpha}, a, b, s, \delta) = \min_u \Big\{ \int_{K^{\alpha}_{\delta} \cap G^{(s)}} \hat{F}(x, a, \nabla u)\, dx + $$
$$+ \delta^{-m-\theta} \| u - (x - x^{\alpha}, b) \|^m_{m, K^{\alpha}_{\delta} \cap G^{(s)}} \Big\}; \tag{4}$$

$$\Gamma(x^{\alpha}, t_0, t^{(s)}, s, \delta) = \min_u \Big\{ \int_{K^{\alpha}_{\delta} \cap \Omega^{(s)}} [\hat{F}(x, u, \nabla u) + $$
$$+ \delta^{-m-\theta} (| u - t_0 |^m \chi^{(s)}_G + \sum_i | u - t_i |^m \chi^{(s)}_i)]\, dx \Big\}, \tag{5}$$

где $(x - x^\alpha, b)$ — скалярное произведение в E_n, $0 < \theta < 1$, $\chi_G^{(s)}$, $\chi_j^{(s)}$ — характеристические функции областей $G^{(s)}$ и $Q_j^{(s)}$ $(j = 1 \div s)$; минимум в (4) берется по множеству функций $u \in W_m^1(K_\delta^\alpha \cap G^{(s)})$, а в (5) — по множеству функций $u \in W_m^1(K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)})$; суммирование по j распространяется на накопители, компактно вложенные в K_δ^α.

Числа $C(x^\alpha, a, b, s, \delta)$ являются локальной (т. е. в кубе K_δ^α) характеристикой «проводимости» трещин $G^{(s)}$. Числа $\Gamma(x^\alpha, t_0, t^{(s)}, s, \delta)$ характеризуют степень связи между накопителями и множеством $G^{(s)}$ (т. е. «пропускную способность» границы j-го блока) и между самими накопителями.

Предположим, что компоненты области $\Omega^{(s)}$ в разложении (1) удовлетворяют условиям:

1. $Q_j^{(s)}$ сильно связны относительно шаров $D_j^{(s)}$ минимального радиуса $r_j^{(s)}$, содержащих $Q_j^{(s)}$, и при $s \to \infty$, $r_j^{(s)} \to 0$.

2. $G^{(s)}$ локально сильно связны в Ω и расстояние от множества $R^{(s)}$ до $\partial\Omega$ положительно и не стремится к нулю при $s \to \infty$. Отсюда следует, что $G^{(s)}$ сильно связны относительно Ω.

3. $\lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} W^{(s)} = 0$.

4. $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} [G^{(s)} \cap K(x, \delta)]/\delta^n = r_1(x)$, $x \in \Omega$.

5. $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{s \to \infty} \operatorname{mes} [Q^{(s)} \cap K(x, \delta)]/\delta^n = r_2(x)$, $x \in \Omega$. Здесь r_1, r_2 — непрерывные функции, причем $r_1(x) > 0$.

6. $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{C(x, a, b, s, \delta)}{\delta^n} = \lim\limits_{\delta \to \infty} \overline{\lim\limits_{s \to \infty}} \dfrac{C(x, a, b, s, \delta)}{\delta^n} = T(x, a, b)$, $x \in \Omega$.

7. Существует такая дважды непрерывно дифференцируемая по переменным x, u, V функция $c(x, u, V)$, что равномерно по $t^{(s)}$ выполняется равенство:

$$\lim_{\delta \to 0} \underline{\lim_{s \to \infty}} \frac{\Gamma(x, t_0, t^{(s)}, s, \delta)}{\sum\limits_j \operatorname{mes} Q_j^{(s)} c(x, t_0, t_j)} = \lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} \frac{\Gamma(x, t_0, t^{(s)}, s, \delta)}{\sum\limits_j \operatorname{mes} Q_j^{(s)} c(x, t_0, t_j)} = 1$$

для любой точки $x \in \Omega$, а суммирование по j распространяется на $Q_j^{(s)}$, компактно вложенные в куб $K(x, \delta)$.

Функция $c(x, u, V)$ удовлетворяет условию

$$|c_V(x, u_1, V_1) - c_V(x, u_2, V_2)| \leqslant A_4(1 + |u_1| + |V_1| + |u_2| + |V_2|)^{m-2}(|u_1 - u_2| + |V_1 - V_2|).$$

8. Функция $f(x, u, V) = F(x, V, 0) + c(x, u, V)$ такова, что $|c_{Vu}(x, u, V)| \leqslant A_5 |f_{VV}(x, u, V)|$, $f_{xV}(x, u, V)| \leqslant A_6 |f_{VV}(x, u, V)|$, $x\,|V|$, а уравнение $f_V(x, u, V) = 0$ имеет единственное решение $V = V(x, u)$, удовлетворяющее оценке

$$|V(x, u)| \leqslant A_7 + A_8 |u(x)|^{m-\gamma},$$

где A_7, $A_8 > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность* $v^{(s)}(x) \in L_m(B^{(s)})$ *сходится к функции* $v(x) \in L_m(\Omega)$ *по норме* $L_m(B^{(s)})$, *если при* $s \to \infty$ $\| v^{(s)} - v \|_{m,\, B^{(s)}} \to 0$.

Основным результатом данной работы является теорема.

Теорема. *Пусть при* $s \to \infty$ *выполняются условия 1—8, а функционал* (2) *удовлетворяет условиям* I—V, *тогда из любой последовательности* $\{u^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *решений задачи* (2), (3) *можно выделить подпоследовательность* $\{u^{(s_k)}(x),\ k=0, 1, 2, \ldots\}$, *сходящуюся по норме* $L_m(G^{(s)})$ *к функции* $u(x)$, *доставляющей минимум функционалу*

$$J(u, V) = \int_{\Omega} \{T(x, u, \nabla u) + F(x, u, 0)\, r_1(x) + $$

$$+ F(x, V, 0)\, r_2(x) + c(x, u, V)\, r_2(x)\}\, dx, \tag{6}$$

где функция $V(x, u)$ *есть решение уравнения*

$$F_V(x, V, 0) + C_V(x, u, V) = 0 \tag{7}$$

в классе функций, удовлетворяющих граничному условию

$$u|_{\partial\Omega} = \Phi(x). \tag{8}$$

II. *Вспомогательные предложения.*

Лемма 1. *Пусть при каждом* $\delta > 0$ *задан куб* K_δ^α *с центром в точке* $x^\alpha \in \Omega$, *а в нем последовательности множеств* $\{B_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *таких, что* $(K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)} \subset B_\delta^{\alpha(s)}$ *и при* $\delta \to 0$

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} B_\delta^{\alpha(s)} = o(\delta^n), \ \ \delta \to 0. \tag{9}$$

Пусть выполняются условия 2, 4, 6 *теоремы, тогда существуют последовательности множеств* $\{\hat{B}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *и функций* $\{\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$B_\delta^{\alpha(s)} \subset \hat{B}_\delta^{\alpha(s)}, \ \ \overline{\lim_{s\to\infty}} \operatorname{mes} \hat{B}_\delta^{\alpha(s)} = o(\delta^n), \ \ (\delta \to 0); \tag{10}$$

$$\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}(x) \in W_m^1(K_\delta^\alpha), \ \ \max_{x \in K_\delta^\alpha} |\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}| \leqslant C\delta; \tag{10а}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\hat{B}_\delta^{\alpha(s)}} |\nabla \hat{v}_\delta^{\alpha(s)}|^m\, dx = o(\delta^n); \tag{10б}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)}} F(x, a, \nabla \hat{v}_\delta^{\alpha(s)})\, dx \leqslant T(x, a, b)\, \delta^n + o(\delta^n). \tag{10в}$$

Лемма 2. *Пусть* t_0^α, t_1^α — *некоторые числа, тогда если выполняются условия* 3, 5, 7 *теоремы, то в любом кубе* K_δ^α *существуют последовательности множеств* $\{H_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *и функций* $\{\psi_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *такие, что* $\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}(x) \in W_m^1(K_\delta^\alpha \cap \Omega^{(s)})$, $W^{(s)} \cap K_\delta^\alpha \subset \hat{H}_\delta^{\alpha(s)}$ *и, кроме того,*

$$\tau_2^\alpha \leqslant \hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)} \leqslant \tau_1^\alpha, \ \ \text{где} \ \ \tau_2^\alpha = \min\{t_0^\alpha, t_1^\alpha\}, \ \ \tau_1^\alpha = \max\{t_0^\alpha, t_1^\alpha\},$$

$$\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}(x) = t_0^\alpha, \ \ \text{при} \ \ x \in [(G^{(s)} \cap K_\delta^\alpha) \cup (Q^{(s)} \cap (K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha))] \setminus \hat{H}_\delta^{\alpha(s)},$$

$$\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}(x) = t_1^\alpha, \ \ \text{при} \ \ x \in (\tilde{Q}^{(s)} \cap K_{\delta'}^\alpha) \setminus \hat{H}_\delta^{\alpha(s)}, \ \ \tilde{Q}^{(s)} = \bigcup_i Q_i^{(s)},$$

где $\delta' = \delta - 2\rho$, *а суммирование по* j *распространяется на* $Q_j^{(s)}$, *компактно вложенные в* $K_{\delta'}^{\alpha}$ *и при* $\delta \to 0$ *и* $\rho = o(\delta)$ *справедливы оценки:*

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \operatorname{mes}\{\hat{H}_{\delta}^{\alpha(s)}\} = O\left(\delta^{n+\frac{\theta}{m+1}}\right); \tag{11}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_{\delta}^{\alpha}\setminus K_{\delta'}^{\alpha})\cap\Omega^{(s)}} |\nabla\hat{\psi}_{\delta}^{\alpha(s)}|^m\,dx = o(\delta^n); \tag{11а}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_{\delta}^{\alpha}\setminus K_{\delta'}^{\alpha})\cap\Omega^{(s)}} |\hat{\psi}_{\delta}^{\alpha(s)} - t_0^{\alpha}|^m\,dx = o\left(\delta^{n+m+\frac{\theta}{2}}\right); \tag{11б}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{K_{\delta}\cap\Omega^{(s)}} \hat{F}(x, \hat{\psi}_{\delta}^{\alpha(s)}, \nabla\hat{\psi}_{\delta}^{\alpha(s)})\,dx \leqslant C(x^{\alpha}, t_0^{\alpha}, t_1^{\alpha})\,r_2(x^{\alpha}) + o(\delta^n). \tag{11в}$$

Доказательство лемм 1, 2 аналогично доказательству соответствующих лемм из [2].

Лемма 3. *Пусть в области* Ω *задана функция* $v(x) \in C^1(\Omega)$, *а в областях* $\Omega^{(s)}$ — *функции* $v^{(s)}(x) \in W_m^1(\Omega^{(s)})$ *такие, что*

$$\| v^{(s)}(x) \|_{m,\,\Omega^{(s)}}^{(1)} \leqslant C, \tag{12}$$

где постоянная C *не зависит от* s, *а при* $s \to \infty$ *последовательность* $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ *сходится к* $v(x)$ *по норме* $L_m(G^{(s)})$. *Тогда, если выполняются условия 1—3, 5, 7 теоремы, существуют последовательности* $\{\hat{v}^{(s)}(x) \in W_m^1(\Omega)\}_{s=1}^{\infty}$ *функций и открытых множеств* $\{\hat{B}^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ *таких, что* $W^{(s)} \subset \hat{B}^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$, $\hat{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$ *при* $x \in G^{(s)} \setminus \hat{B}^{(s)}$ *и при* $s \to \infty$

1) $\operatorname{mes} \hat{B}^{(s)} \to 0$;

2) $\| \hat{v}^{(s)} \|_{m,\,\hat{B}^{(s)}}^{(1)} \to 0$;

3) $$\int\limits_{Q^{(s)}\cup\hat{B}^{(s)}} \hat{F}(x, v^{(s)}, \nabla v^{(s)})\,dx \geqslant \sum_{j=1}^{s} c(x_j, v(x_j), M_j(v^{(s)}))\operatorname{mes} Q_j^{(s)} + o(1),$$

где $x_j \in Q_j^{(s)}$ — *среднее значение функции* $v^{(s)}$ *в области* $Q_j^{(s)}$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 леммы 3 доказываются аналогично соответствующим утверждениям леммы 5 из [2]. Покажем, что выполняется утверждение 3.

Пусть пространство E_n разбито на непересекающиеся во внутренних точках кубы K_{δ}^{α} с центрами в точках x^{α} и ребрами длины $\delta > 0$. Рассмотрим множество

$$\hat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta) = \{x \in K_{\delta}^{\alpha} \cap \Omega^{(s)} : |v^{(s)} - v(x^{\alpha})| > \bar{\varepsilon}\}, \tag{13}$$

где $\bar{\varepsilon}$ — некоторое малое положительное число. Пользуясь определением (13), можно показать, что $\hat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta) \subset (Q^{(s)} \cup \hat{B}^{(s)}) \cap K_\delta^\alpha$. Рассмотрим функцию

$$\hat{v}_\delta^{(s)} = \begin{cases} v(x^\alpha), & x \in (G^{(s)} \setminus \hat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta)) \cap K_\delta^\alpha; \\ v^{(s)} \pm \bar{\varepsilon}, & x \in \hat{B}(\bar{\varepsilon}, s, \delta). \end{cases} \tag{14}$$

Пользуясь (13), (14) и записывая в каждом кубе K_δ^α оценку снизу для интеграла от $\hat{F}(x, v^{(s)}, \nabla v^{(s)})$ по множеству $(\hat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}) \cap K_\delta^\alpha$ в силу определения функционала (5) $L_m(G^{(s)})$-сходимости последовательности $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^\infty$ к $v(x)$ и неравенства Пуанкаре в пределе при $\delta \to 0$ и $\bar{\varepsilon} \to 0$, получим требуемое утверждение 3.

Лемма доказана.

III. *Доказательство теоремы*. Из [3] следует, что при выполнении условий теоремы при каждом s существует, по крайней мере, одна функция $u^{(s)}$, доставляющая минимум функционалу (2). Из условия III теоремы получим

$$\| u^{(s)} \|_{m, \Omega^{(s)}}^{(1)} \leqslant C, \tag{15}$$

где постоянная C не зависит от s. Обозначим через $W_\Phi(\Omega^{(s)})$ (соответственно $W_\Phi(\Omega)$) класс функций из $W_m^1(\Omega^{(s)})$ (соответственно $W_m^1(\Omega)$), равных $\Phi(x)$ на $\partial\Omega$. Учитывая, что области $G^{(s)}$ сильно связны относительно Ω и $\partial\Omega \subset \partial G^{(s)}$, заключаем, что существуют функции $\tilde{u}^{(s)}(x) \in \in W_\Phi(\Omega)$, равные $u^{(s)}(x)$ на $G^{(s)}$ и удовлетворяющие неравенству:

$$\| \tilde{u}^{(s)} \|_{m, \Omega}^{(1)} \leqslant C_1, \tag{16}$$

где постоянная C_1 не зависит от s. В силу (16) можно выделить последовательность $\{\tilde{u}^{(s_k)}\}_{k=1}^\infty$, сходящуюся слабо в $W_m^1(\Omega)$ и сильно в $L_m(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in W_\Phi(\Omega)$. Покажем, что $u(x) \in W_\Phi(\Omega)$ является решением задачи (6) — (8). Пусть $w(x)$, $v(x)$ — произвольные, непрерывно дифференцируемые в Ω функции, причем $w(x) \in W_\Phi(\Omega)$. Покроем область Ω кубами $K_\delta^\alpha = K(x^\alpha, \delta)$ с ребрами длины $\delta > 0$ и центрами x^α, находящимися в узлах пространственной кубической решетки периода $\delta - \rho$. По этому покрытию построим разбиение единицы $\{\varphi_\alpha(x)\}_{s=1}^\infty$, т. е. набор дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций таких, что $0 \leqslant \varphi_\alpha \leqslant 1$; $\varphi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_\delta^\alpha$; $\varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in K_\delta^\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\alpha^\beta$; $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in \Omega$; $|\nabla\varphi_\alpha| < < C_3\rho^{-1}$. Пусть $\{\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ и $\{\hat{H}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ — функции и множества, определенные в лемме 2, $\{\hat{v}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ и $\{\hat{B}_\delta^{\alpha(s)}\}_{s=1}^\infty$ — функции и множества, определенные в лемме 1 для

$$B_\delta^{\alpha(s)} = [\bigcup_\beta{}' (\hat{H}_\delta^{\beta(s)} \cap K_\delta^\alpha)] \cup [\bigcup_\beta{}'' (\hat{H}_{10}^{\beta(s)} \cap K_\delta^\alpha)] \cup$$
$$\cup [(K_\delta^\alpha \setminus K_{\delta'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}],$$

где $\bigcup_\beta{}'$, $\bigcup_\beta{}''$ отвечают разбиению кубов на те, в которых выполняется неравенство $|w(x) - v(x)| > \varepsilon$ для всех точек куба, и все остальные, причем для последних множество $\widehat{H}_{10}^{\alpha(s)}$ строится вместе с функцией $\widehat{\psi}_{10}^{\alpha(s)}$ для значений $t_0^\alpha = 1$, $t_1^\alpha = 0$. Ясно, что $\operatorname{mes} B_\delta^{\alpha(s)} = o(\delta^n)$. Пользуясь указанным разбиением, определяем функцию

$$w^{(s)}(x) = \sum_\alpha{}' \left\{ [w(x) + \hat{v}_\delta^{\alpha(s)} - (x - x^\alpha, b^\alpha)] \frac{\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)} - t_1^\alpha}{t_0^\alpha - t_1^\alpha} + \right.$$

$$\left. + v(x^\alpha) \frac{\hat{\psi}_\delta^{\alpha(s)} - t_0^\alpha}{t_1^\alpha - t_0^\alpha} \right\} \varphi_\alpha(x) + \sum_\alpha{}'' \{ [w(x) + \hat{v}_\delta^{\alpha(s)} -$$

$$- (x - x^\alpha, b^\alpha)] \hat{\psi}_{10}^{\alpha(s)} + v(x^\alpha)(1 - \hat{\psi}_{10}^{\alpha(s)}) \} \varphi_\alpha(x), \tag{17}$$

где $t_0^\alpha = w(x^\alpha)$, $t_1^\alpha = v(x^\alpha)$, $b^\alpha = \nabla w(x^\alpha)$. Поскольку функция указанного вида принадлежит классу $W_\Phi(\Omega^{(s)})$, имеем

$$J^{(s)}(u^{(s)}) \leqslant J^{(s)}(w^{(s)}). \tag{18}$$

Представляя функционал в правой части (18) в виде суммы интегралов по кубам со стороной $\delta' = \delta - 2\rho$ и всевозможными пересечениями кубов K_δ^α и K_δ^β, оцениваем указанный функционал так, как это сделано в работе [2].

Выбирая $\rho = \rho(\delta)$ в виде

$$\rho = \max \{ \delta^{1 + \frac{\theta}{2m}}, \ \delta^{\frac{1}{n+m+1}} \Delta_\delta^{\frac{1}{n+m+1}} \}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_\delta = \int\limits_{\widehat{B}_\delta^{\alpha(s)}} | \hat{v}_\delta^{\alpha(s)} - (x - x^\alpha, b^\alpha)|^m dx,$$

приходим к оценке

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} J^{(s)}(u^{(s)}) \leqslant J(w, v), \tag{20}$$

где $J(w, v)$ определяется равенством (6).

Это неравенство получено в предположении $w(x) \in C^1(\Omega) \cap W_\Phi(\Omega)$, $v(x) \in C^1(\Omega)$, а так как $C^1(\Omega)$ и $C^1(\Omega) \cap W_\Phi(\Omega)$ плотны соответственно в $W_m^1(\Omega)$ и $W_\Phi(\Omega)$, с помощью теоремы вложения легко заключить, что оно верно для любых функций $w(x) \in W_\Phi(\Omega)$ и $v(x) \in W_m^1(\Omega)$.

Покажем теперь, что если $u(x) \in W_\Phi(\Omega)$ является пределом по норме $L_m(G^{(s)})$ решений $u^{(s)}$ задачи (2), (3) (по некоторой последовательности $s = s_k \to \infty$), а $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f_v(x, u, v) = 0, \tag{21}$$

то справедливо и обратное неравенство:

$$\underline{\lim}_{s = s_k \to \infty} J^{(s)}(u^{(s)}) \geqslant J(u, v). \tag{22}$$

Аппроксимируем $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой функцией $u_\varepsilon(x)$ такой, что
$$\| u_\varepsilon - u \|^{(1)}_{m, \Omega} \leqslant \varepsilon \ (\varepsilon > 0). \tag{23}$$
Ясно, что функции $u^{(s)}_\varepsilon(x) = u^{(s)}(x) + u_\varepsilon(x) - u(x)$ при $s = s_k \to \infty$ сходятся в $L_m(G^{(s)})$ к u_ε и удовлетворяют неравенствам
$$\| u^{(s)}_\varepsilon - u^{(s)} \|^{(1)}_{m, \Omega^{(s)}} \leqslant \varepsilon, \ \| u^{(s)}_\varepsilon \|^{(1)}_{m, \Omega^{(s)}} < C_4, \tag{24}$$
где постоянная C_4 в силу соответствующих оценок для $u^{(s)}(x)$ не зависит от s, ε.

Воспользуемся леммой 3 применительно к функциям $u^{(s)}_\varepsilon(x)$ ($s = s_k$) и $u_\varepsilon(x)$. Так как множества $G^{(s)}$ сильно связны относительно Ω, согласно этой лемме существуют множества $\widehat{B}^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$ и функции $\widehat{u}^{(s)}_\varepsilon(x) \in W^1_m(\Omega)$ ($s = s_k$) такие, что $W^{(s)} \subset \widehat{B}^{(s)}$, $\widehat{u}^{(s)}_\varepsilon = u^{(s)}_\varepsilon$ при $x \in \Omega^{(s)} \setminus \widehat{B}^{(s)}$, при $s = s_k \to \infty$ $u^{(s)}_\varepsilon(x)$ сходится к $u_\varepsilon(x)$ в $L_m(\Omega)$ и
$$\operatorname{mes} \widehat{B}^{(s)} \to 0, \ \| \widehat{u}^{(s)}_\varepsilon \|^{(1)}_{m, \widehat{B}^{(s)}} \to 0. \tag{25}$$
В силу свойств функционала и (24) можно показать, что вместо (22) для завершения доказательства теоремы достаточно обосновать неравенство ($s = s_k$)
$$\varliminf_{s \to \infty} J^{(s)}(u^{(s)}_\varepsilon) \geqslant J(u_\varepsilon, v_\varepsilon), \tag{26}$$
где функция $v_\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению
$$f_{v_\varepsilon}(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0. \tag{27}$$
Для обоснования (26), (27) разобьем функционал $J^{(s)}(u^{(s)}_\varepsilon)$ на два интеграла по множествам $\Omega^{(s)} \setminus (\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)})$ и $\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}$. Тогда, пользуясь методом, предложенным в [2], получаем ($s = s_k$):
$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{s \to \infty} \int\limits_{\Omega^{(s)} \setminus (\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)})} F(x, u^{(s)}_\varepsilon, \nabla u^{(s)}_\varepsilon)\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \{ T(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) + F(x, u_\varepsilon, 0)\, r_1(x) \}\, dx. \tag{28}$$
Рассмотрим интеграл по множеству $\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}$. Пользуясь условием IV и леммой 5, можно показать, что
$$\int\limits_{\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}} F(x, u^{(s)}_\varepsilon, \nabla u^{(s)}_\varepsilon)\, dx \geqslant \sum_{j=1}^{s} f(x_j, u_\varepsilon(x_j), \tag{29}$$
$$M_j(u^{(s)}_\varepsilon)) \operatorname{mes} Q^{(s)}_j + o(1) \ \text{при} \ s \to \infty,$$
где $M_j(u^{(s)}_\varepsilon)$ — среднее значение функции $u^{(s)}_\varepsilon$ по множеству $Q^{(s)}_j$. Ясно, что последнее неравенство только усилится, если в нем $M_j(u^{(s)}_\varepsilon)$ за-

менить числами λ_j^ε, являющимися точками минимума функций $f(x_j, u_\varepsilon(x_j), \lambda)$ и, значит, удовлетворяющими уравнениям $f_\lambda(x_j, u_\varepsilon(x_j), \lambda) = 0$. Положим $\lambda_j^\varepsilon = v_\varepsilon(x_j)$, где функция v_ε — решение уравнения $f_{v_\varepsilon}(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon) = 0$. В силу условия 8 теоремы это уравнение имеет единственное решение $v_\varepsilon(x)$, причем, учитывая ограниченность нормы u_ε в $W_m^1(\Omega)$ с постоянной, не зависящей от ε, и оценок для $f(x, u, \lambda)$, можно показать, что $\| v_\varepsilon(x) \|_{m,\Omega}^{(1)} < C_5$, где C_5 не зависит от ε. Пользуясь условием 5 из (29), получаем

$$\lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{s=s_k\to\infty} \int\limits_{\widehat{B}^{(s)} \cup Q^{(s)}} F(x, u_\varepsilon^{(s)}, \nabla u_\varepsilon^{(s)})\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon)\, r_2(x)\, dx. \tag{30}$$

Из (28), (30) следует требуемое неравенство (26). Учитывая, что при $\varepsilon \to 0$ $u_\varepsilon(x)$ сходится к $u(x)$ в пространстве $W_m^1(\Omega)$ в силу свойств 1 функционала (2) и условия 8, можно показать, что $v_\varepsilon(x)$ сходится в $L_m(\Omega)$ к функции $V(x)$, удовлетворяющей уравнению:

$$c_V(x, u, V) + F_V(x, V, 0) = 0. \tag{31}$$

Таким образом, согласно (20), (22) для любых $w(x) \in W_\Phi(\Omega)$ и $v(x) \in \in W_m^1(\Omega)$ выполняется неравенство $J(u, V) \leqslant J(w, v)$, где $u(x)$ — предел в смысле $L_m(G^{(s)})$ решений $u^{(s)}$ задачи (2), (3) по подпоследовательности $s = s_k \to \infty$, а $V(x)$ определяется уравнением (31). Таким образом, пара функций $\{u(x), V(x)\}$ минимизирует функционал (6), и, значит, $u(x)$ является решением вариационной задачи (6) — (8).

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Хруслов Е. Я.* Усредненная модель нестационарной диффузии в трещиновато-пористых средах. Х., 1988. 34 с. (Препринт / АН УССР. ФТИНТ) 2. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях. Х., 1988. 25 с. (Препринт / АН УССР. ФТИНТ). 3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973. 576 с.

Поступила в редколлегию **10.02.89**

УДК 517.535.4

А. М. РУССАКОВСКИЙ

НУЛИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В различных задачах комплексного анализа часто приходится иметь дело с целыми функциями, обладающими тем свойством, что

$$M_f(h) = \sup\{|f(z)| : |\operatorname{Im} z| \leqslant h\} < \infty, \ \forall h.$$

Таковы, например, целые характеристические функции вероятностных распределений, целые функции, представимые рядами Дирихле с мнимыми показателями и т. д. Полное описание нулевых множеств таких функций было дано И. П. Камыниным и И. В. Островским [1].

В данной работе рассматриваются классы целых функций, ограниченных в каждой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$, определяемые оценками на рост $M_f(h)$ при $h \to \infty$. Наиболее часто в качестве шкалы роста у нас будут фигурировать функции вида $\exp(\exp(\sigma h^\rho))$, где $\rho \geqslant 1$, $\sigma \geqslant 0$, хотя (см. теоремы 2, 3) все результаты можно получить и для более общих шкал роста, введенных М. Н. Шереметой [2]. Как видно, речь идет о целых функциях, имеющих бесконечный порядок в обычной шкале.

При рассмотрении таких классов целых функций естественно возникает задача описания нулевых множеств (дивизоров) функций того или иного класса. Цель настоящей работы — получение таких описаний (теоремы 2—5) в терминах считающей функции числа нулей по прямоугольникам $\{|x-\xi| \leqslant r,\ |y| \leqslant h\}$, $\xi \in \boldsymbol{R}$.

Подобные результаты, например, в случае конечного порядка и кругового исчерпания плоскости хорошо известны. Они содержатся в классических теоремах Бореля, Адамара и Линделефа (см., например, [3]) и опираются на аппарат канонических произведений.

В настоящей работе построение целой функции с заданными нулями проводится другим способом, использующим оценки Хермандера [4] решения $\bar{\partial}$-проблемы. Соответствующее утверждение (теорема 1) представляет, на наш взгляд, и самостоятельный интерес. Метод доказательства, характерный скорее для теории функций многих комплексных переменных, сводится к решению «второй проблемы Кузена с оценками». Таким образом, он вряд ли может считаться новым; с другой стороны, насколько известно, ранее он в таком виде не применялся. Автор должен с благодарностью отметить, что идею применения подобного метода ему сообщил Л. И. Ронкин.

Упоминаемая теорема 1 близка по форме к одному результату А. Скода [5], полученному в многомерном случае. А. Скода строит целую функцию с заданными нулями, в оценку которой входит субгармоническая мажоранта числа нулей в некоторой окрестности отрезка, соединяющего начало координат с точкой, в которой производится оценка. Хотя ни теорема 1 не следует из теоремы А. Скода, ни наоборот, при доказательстве теорем 2 и 3 можно было бы вместо теоремы 1 использовать результат А. Скода. В доказательстве теорем 4 и 5 этого сделать нельзя.

Введем следующие обозначения. Пусть D — дивизор в $\boldsymbol{C}$, т. е. $D = \{a_k;\ q_k\}$, где $a_k \in \boldsymbol{C}$, $q_k \in \boldsymbol{N}$ и пусть $|D| = \bigcup\limits_k a_k$, $n_D(K) = \sum\limits_{a_k \in K} q_k$, $n_D(x;\ r,\ h) = n_D(\Pi(x;\ r,\ h))$, где $x \in \boldsymbol{R}$, а $\Pi(\xi;\ r,\ h) = \{|x-\xi| \leqslant r,\ |y| \leqslant h\}$.

Пусть, далее, $\omega(z)$ — субгармоническая функция в $\boldsymbol{C}$, а $\omega^{[r]}(z) = \sup\{\omega(\zeta) : |z-\zeta| \leqslant r\}$.

Теорема 1. *Пусть D — дивизор в $\boldsymbol{C}$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall y \in \boldsymbol{R}$:*

$$\ln n_D(x;\ 1,\ |y|) \leqslant \omega(x+iy). \tag{1}$$

Тогда существует такая целая функция $f(z)$ *с* $D_f = D$, *что*

$$\ln \ln^+ |f(z)| \leqslant C + 2\ln(1 + |z|^2) + \omega^{[1]}(z). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть z_j — узлы квадратной решетки со стороной $\frac{1}{32}$. Обозначим через D_j открытый квадрат с центром z_j и стороной $\frac{1}{16}$, D_j' — то же со стороной $\frac{1}{4}$, D_j'' — то же со стороной $\frac{3}{8}$.

Квадраты D_j образуют открытое покрытие C со свойствами

$$1)\ D_j \cap D_i \neq \varnothing \Rightarrow D_i \subset\subset D_j',\ D_i' \subset\subset D_j'';$$

$$2)\ D_j \cap D_i \neq \varnothing \Rightarrow D_j' \cup D_i' \subset\subset D_j'' \cap D_i'';\ D_i \cup D_j \subset\subset D_i' \cap D_j'.$$

Положим $P_j(z) = \prod\limits_{a_k \in \overline{D}_j'} (z - a_k)^{q_k}$ (если в D_j' нет точек a_k, положим $P_j(z) = 1$).

Функцию $f(z)$ будем строить в виде $f(z) = P_j(z)\exp(-g_j(z))$ на D_j. Функции $g_j(z)$, аналитические в D_j, нужно выбрать так, чтобы обеспечить «склейку» на пересечениях D_j и наличие необходимых оценок.

Пусть $D_j \cap D_i \neq \varnothing$. Определим на $D_j \cap D_i$ функции $P_{ji}(z) = P_i(z)(P_j(z))^{-1}$, $Q_{ji}(z) = \prod\limits_{a_k \in \overline{D}_j' \setminus \overline{D}_j'} (z - a_k)^{q_k}$.

Тогда на $D_j \cap D_i$ имеем $P_{ji} = Q_{ji} \cdot Q_{ij}^{-1}$, $P_{ji} = P_{ij}^{-1}$.

Очевидно, функции P_{ji}, P_{ij}, Q_{ji}, Q_{ij} голоморфны и не обращаются в нуль в $D_j' \cap D_i'$. Положим

$$g_{ji}(z) = \ln |P_{ji}(z)| + i\Big(\sum_{a_k \in \overline{D}_j' \setminus \overline{D}_i'} q_k \arg(z - a_k) - \\ - \sum_{a_k \in \overline{D}_j' \setminus \overline{D}_j'} q_k \arg(z - a_k)\Big).$$

Все аргументы $z - a_k$ выберем так, чтобы они были непрерывны в $D_j' \cap D_i'$ и принадлежали $(-2\pi, 2\pi]$.

Так как $P_{ji} = \exp g_{ji}$ на $D_j' \cap D_i'$, функции g_{ji} аналитичны в $D_j' \cap D_i'$. Очевидно, $g_{ji} = -g_{ij}$. Кроме того, на $D_i \cap D_j \cap D_k \neq \varnothing$ имеем

$$g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = 2\pi i N_{ijk},$$

где $N_{ijk} \in \mathbf{Z}$.

Поскольку $(\overline{D}_j' \setminus \overline{D}_i') \cup (\overline{D}_i' \setminus \overline{D}_k') \cup (\overline{D}_k' \setminus \overline{D}_j') = (\overline{D}_i' \setminus \overline{D}_j') \cup (\overline{D}_k' \setminus \overline{D}_i') \cup (\overline{D}_j' \setminus \overline{D}_k')$, в выражении $g_{ij} + g_{jk} + g_{ki}$ каждое слагаемое $iq_m \arg(z - a_m)$ фигурирует дважды с противоположными знаками. Разность аргументов $z - a_m$ может оказаться равной либо нулю, либо $\pm 2\pi$. Поэтому очевидно,

$$|N_{ijk}| \leqslant n_D(\overline{D}_j'' \cap \overline{D}_i'' \cap \overline{D}_k'').$$

Рассмотрим N_{ijk} как коцепь на покрытии D_j. Легко видеть, что $N_{ijk}-N_{jkl}+N_{kli}-N_{lij}=0$, т. е. это коцикл. Поскольку $H^2(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Z})=0$, найдется такая коцепь $\{M_{\alpha\beta}\}$ с целочисленными элементами, что

$$M_{ij}+M_{jk}+M_{ki}=N_{ijk}.$$

Ниже мы покажем, что возможен такой выбор коцепи $\{M_{\alpha\beta}\}$, что

$$|M_{ij}| \leqslant Cn_D(\Pi_{ij}), \tag{3}$$

где $\Pi_{ij}=\Pi_i \cap \Pi_j$, а $\Pi_l=\Pi\left(\operatorname{Re} z_l;\ \frac{1}{2},\ |\operatorname{Im} z_l|+\frac{1}{2}\right)$.

Продолжим доказательство, считая коцепь $\{M_{\alpha\beta}\}$ выбранной так, что (3) имеет место.

Положим $\tilde{g}_{ji}=g_{ji}-2\pi i M_{ji}$. Теперь имеем $\tilde{g}_{ij}+\tilde{g}_{jk}+\tilde{g}_{ki}=0$ на $D_j \cap D_i \cap D_k \neq \varnothing$, и на $D_j' \cap D_i'$ справедлива оценка

$$|\tilde{g}_{ji}| \leqslant |\ln|P_{ji}|| + \tilde{C}n_D(\Pi_{ij}). \tag{4}$$

Оценим $|P_{ji}|$ на $D_j \cap D_i$. Для этого заметим, что при $z \in D_j \cup D_i$, $a_k \in (\overline{D}_j' \setminus \overline{D}_i') \cup (\overline{D}_i' \setminus \overline{D}_j')$ справедливы оценки

$$\frac{1}{32} \leqslant |z-a_k| \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{16} < 1,$$

так что

$$32^{-n_D(\overline{D}_j')} \leqslant \frac{\left(\frac{1}{32}\right)^{n_D(\overline{D}_j')}}{1} \leqslant |P_{ji}| \leqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{32}\right)^{n_D(\overline{D}_i')}} \leqslant 32^{n_D(\overline{D}_i')}.$$

Таким образом, поскольку $\overline{D}_j' \cup \overline{D}_i' \subset \overline{D}_j'' \cap \overline{D}_i'' \subset \Pi_{ij}$,

$$|\ln|P_{ji}|| \leqslant \ln 32 \cdot n_D(\overline{D}_j'' \cap \overline{D}_i'') \leqslant \ln 32 \cdot n_D(\Pi_{ij}),$$

и, значит, в силу (1) и (4)

$$\begin{gathered} |\tilde{g}_{ji}(z)| \leqslant \tilde{\tilde{C}}n_D(\Pi_{ij}) \leqslant \tilde{\tilde{C}}n_D\left(\operatorname{Re} z;\ \frac{9}{16},\right. \\ \left.|\operatorname{Im} z|+\frac{9}{16}\right) \leqslant \tilde{\tilde{C}}\exp\left(\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)\right),\ z \in D_j \cup D_i. \end{gathered} \tag{5}$$

Теперь наша задача представить $\tilde{g}_{ji}$ на $D_j \cap D_i$ в виде $\tilde{g}_{ji}=g_j-g_i$, где $g_l \in A(D_l)$ и удовлетворяет некоторым оценкам. Для этого построим разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{D_j\}$. Пусть $\chi_v \in C_0^\infty(\boldsymbol{C})$,

$$\sum \chi_v = 1,\ \operatorname{supp}\chi_v \subset D_v,\ \chi_v(z)=\chi_\mu(z+z_\mu-z_v)$$

и каждая точка содержится в носителях не более, чем L функций χ_v.

Положим $h_j = \sum \chi_\nu \tilde{g}_{\nu j}$. Тогда $h_j - h_k = \sum \chi_\nu \tilde{g}_{jk} = \tilde{g}_{jk}$ на $D_j \cap D_k$. Поэтому $\bar{\partial} h_j = \bar{\partial} h_k$ на $D_j \cap D_k$, и равенствами $\alpha = \bar{\partial} h_j$ на D_j корректно определена в $\boldsymbol{C}$ (0, 1)-форма α. Кроме того, при $z \in D_j$ имеем

$$|\alpha(z)| = |\bar{\partial} h_j| = |\sum \partial\chi_\nu \tilde{g}_{\nu j}| \leqslant$$

$$\leqslant CL \max_{D_\nu \cap D_j \neq \varnothing} |\tilde{g}_{\nu j}| \leqslant C' \exp\left(\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)\right).$$

Тогда, очевидно, $\int\limits_{\boldsymbol{C}} |\alpha|^2 e^{-2\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^2} < \infty.$

По теореме Хермандера [4, теорема 4.4.2] у уравнения $\bar{\partial}\beta = \alpha$ существует такое решение β, что

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}} |\beta|^2 e^{-2\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^4} < \infty.$$

Положим теперь $g_j = h_j - \beta$. Тогда $g_j - g_l = g_{jl}$, $g^j \in A(D_j)$ и

$$\int\limits_{D_j} |g_j|^2 e^{-2\omega^{\left[\frac{5}{8}\right]}(z)} \frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^4} < \infty. \tag{6}$$

Пусть Ω_j — квадрат с центром z_j и стороной $\frac{1}{24}$. Тогда при $z \in \Omega_j$ из интегральной оценки (6) стандартным способом [4] получается оценка

$$|g_j(z)| \leqslant C(1+|z|^2)^2 \exp \omega^{[1]}(z)). \tag{7}$$

Отметим, что Ω_j также образуют покрытие $\boldsymbol{C}$. Определим целую функцию $f(z)$ равенствами $f(z) = P_j(z)\exp(-g_j(z))$ на Ω_j. Это определение корректно, так как $\Omega_j \cap \Omega_i \subset D_j \cap D_i$, и при $z \in \Omega_j \cap \Omega_i$ мы имеем

$$P_j e^{-g_j} = \frac{P_j}{P_i} e^{g_i - g_j} P_i e^{-g_i} = P_{ji} e^{-g_{ji}} P_i e^{-g_i} = P_i e^{-g_i}.$$

Далее, при $z \in \Omega_j$, очевидно, $|f(z)| = |P_j(z)| \exp(-\operatorname{Re} g_j(z))$. Поскольку $|P_j(z)| \leqslant 1$, $|\operatorname{Re} g_j(z)| \leqslant |g_j(z)|$, из (7) непосредственно следует требуемая оценка (2).

Для завершения доказательства остается показать, что возможен выбор коцепи $\{M_{\alpha\beta}\}$, удовлетворяющей (3).

Для нахождения этой коцепи необходимо решить бесконечную систему линейных уравнений. С каждым множеством $D_{ijkl} = D_i \cap \cap D_j \cap D_k \cap D_l$ естественно связать часть этой системы:

$$M_{ij} + M_{jk} + M_{ki} = N_{ijk};$$
$$M_{jk} + M_{kl} + M_{lj} = N_{jkl};$$
$$M_{kl} + M_{li} + M_{ik} = N_{kli};$$
$$M_{li} + M_{ij} + M_{jl} = N_{lij}.$$

Поскольку $\{N_{\alpha\beta\gamma}\}$ — коцикл, любое из этих уравнений является следствием трех других. Остается 3 уравнения с 6 неизвестными. Таким образом, имеются 3 свободных параметра.

Заметим, что D_{ijkl} — это квадрат исходной решетки со стороной $\frac{1}{32}$ с вершинами в точках z_i, z_j, z_k и z_l.

Решения систем уравнений, отвечающих двум смежным квадратам решетки с общими вершинами z_α и z_β, назовем согласованными, если $M^{(1)}_{\alpha\beta} = M^{(2)}_{\alpha\beta}$.

Для получения искомой коцепи достаточно построить решения систем уравнений, отвечающих квадратам решетки, которые согласованы для любой пары смежных квадратов.

Наши решения имеют следующий вид. Положим

$$M_{ij} = M_{kl} = 0,\ M_{ik} = C,\ M_{jk} = N_{ijk} + C,$$
$$M_{jl} = N_{ijk} + C - N_{jkl},\ M_{li} = N_{kli} - C, \tag{8}$$

где $C = C(i, j, k, l)$ — параметр, определяемый с помощью индуктивного процесса, который будет далее описан.

Условимся, что, если квадрат D_{ijkl} лежит в верхней полуплоскости, $z_j = z_i + \frac{i}{32}$, $z_k = z_i + \frac{1}{32}$, $z_l = z_i + \frac{1}{32} + \frac{i}{32}$, а если в нижней, то $z_j = z_i - \frac{i}{32}$, $z_k = z_i + \frac{1}{32}$, $z_l = z_i + \frac{1}{32} - \frac{i}{32}$. Таким образом, если $\operatorname{Im} z_i \neq 0$, то квадрат D_{ijkl} однозначно определяется точкой z_i и, значит, $C(i, j, k, l) = C(z_i)$.

Потребовав, чтобы решения, отвечающие квадратам, имеющим общую пару вершин на вещественной оси, были согласованы, мы и при $\operatorname{Im} z_i = 0$ будем иметь $C(i, j, k, l) = C(z_i)$.

Далее, при выбранном нами способе индексации из того, что $M_{ij} = M_{kl} = 0$, следует согласованность решений, отвечающих любой паре квадратов, смежных по горизонтали.

Таким образом, при выборе $C(z_i)$ достаточно обеспечить согласованность решений, отвечающих квадратам, смежным по вертикали.

База индукции. Если $\operatorname{Im} z_i = 0$, положим $C(z_i) = 0$.

n-й шаг индукции. Пусть уже определены $C(z_m)$ для z_m с $|\operatorname{Im} z_m| \leqslant (n-1)\cdot\frac{1}{32}$ и пусть $|\operatorname{Im} z_i| = \frac{n-1}{32}$. Рассмотрим систему уравнений, отвечающих квадрату D_{ijkl}, и, подставляя в (8) параметр $C = C(z_i)$, определим величины $M_{\alpha\beta}$, после чего положим $C(z_j) = M_{jl}$.

Согласованность очевидна. Коцепь построена. Проведем оценки.

Из (8) следует, что

$$\forall \alpha, \beta \in \{i, j, k, l\} : |M_{\alpha\beta}| \leqslant |C(z_i)| + $$
$$+ 2\max\{|N_{ijk}|, |N_{jkl}|, |N_{kli}|, |N_{lij}|\} \leqslant$$
$$\leqslant |C(z_i)| + 2n_D(\bar{D}''_i \cup \bar{D}''_j \cup \bar{D}''_k \cup \bar{D}''_l)$$

и, в частности,

$$|C(z_j)| \leqslant |C(z_i)| + 2n_D(\bar{D}''_i \cup \bar{D}''_j \cup \bar{D}''_k \cup \bar{D}''_l).$$

Таким образом, на каждом шаге индукции к оценке прибавляется $2n_D(\overline{D}''_{i'} \cup \overline{D}''_{j'} \cup \overline{D}''_{k'} \cup \overline{D}''_{l'})$ для соответствующих i', j', k', l'. Поскольку $\overline{D}''_m$ образуют конечнократное покрытие, очевидно, $|M_{jk}|$ оценивается сверху через константу, умноженную на число точек D, попавших в множество $\left\{|x - \operatorname{Re} z_j| \leqslant \frac{1}{2},\ |y| \leqslant |\operatorname{Im} z_j| + \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{|x - \operatorname{Re} z_k| \leqslant \frac{1}{2},\ |y| \leqslant |\operatorname{Im} z_k| + \frac{1}{2}\right\}$, что и доказывает (3).

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что в каждом квадрате Ω_j с центром на вещественной оси можно указать такую точку $x_j \in \boldsymbol{R}$, в которой построенная функция $f(z)$ допускает некоторую оценку снизу.

Действительно, согласно теореме Картана [3, теорема 10], вне системы кружков с общей суммой радиусов $\frac{1}{50}$ многочлен $P_j(z)$ по модулю больше величины $(100e)^{-n_D(\overline{D}'_j)}$. Поскольку отрезок $\Omega_j \cap \boldsymbol{R}$ имеет длину $\frac{1}{24}$, он содержит некоторую точку x_j, не покрываемую упомянутой системой кружков, и ввиду (7) мы имеем

$$\ln|f(x_j)| = \ln|P_j(x_j)| - \operatorname{Re} g_j(x_j) \geqslant$$
$$\geqslant -\ln 100e \cdot n_D(\overline{D}'_j) - |g_j(x_j)| \geqslant -C_1 e^{\omega^{[1]}(x_j)} -$$
$$- C_2(1 + x_j^2)^2 e^{\omega^{[1]}(x_j)} \geqslant -C'(1 + x_j^2)^2 e^{\omega^{[1]}(x_j)}.$$

Перейдем к приложениям теоремы 1 в задачах описания дивизоров целых функций определенных классов. Учет числа нулей именно по прямоугольникам $\Pi(x; r, h)$ является естественным для функций, ограниченных в любой полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$:

$$M_f(h) = \sup\{|f(z)| : |\operatorname{Im} z| \leqslant h\} < \infty,\ \forall h.$$

Классы функций, которые будут рассматриваться, задаются оценками скорости роста $M_f(h)$ при $h \to \infty$.

Вначале приведем ряд необходимых оценок общего характера.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция, ограниченная в каждой полосе $|\operatorname{Im} z| < h$.* Тогда $\forall \xi \in \boldsymbol{R}$, $\forall r,\ h > 0$

$$n_{D_f}(\xi;\ r,\ h) \leqslant \frac{2}{\ln\frac{3}{2}} \cdot \frac{\theta}{\theta - 1} \cdot e^{\frac{\pi r}{2\theta h}} \cdot (\ln M_f(\theta h) - \ln|f(\xi)|),\ \forall \theta > 1.$$

Доказательство. Предположим, что $f(\xi) \neq 0$, иначе неравенство тривиально. Рассмотрим представление Грина функции $\ln|f(z)|$ в полосе $|\operatorname{Im} z| < \theta h$.

Функция Грина $G(z, \xi)$ для этой полосы имеет вид

$$G(z,\ \xi) = \ln\left|\operatorname{cth}\frac{\pi(z - \xi)}{4\theta h}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\cos\frac{\pi y}{2\theta h}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x - \xi)}{2\theta h} - \cos\frac{\pi y}{2\theta h}}\right),$$

Соответственно

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x \pm i\theta h,\ \xi) = \frac{\pi}{2\theta h}\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-\xi)}{2\theta h}},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по внутренней нормали.

Имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{|y_k|<\theta h\\ x_k+iy_k\in|D_f|}} q_k \ln\left(1+\frac{2\cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x_k-\xi)}{2\theta h}-\cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\theta h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(x+i\theta h)\,f(x-i\theta h)|\,dx}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-\xi)}{2\theta h}}-\ln|f(\xi)|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\theta h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-\xi)}{2\theta h}}=1,$$

правая часть не превосходит $\ln M_f(h)-\ln|f(\xi)|$. Каждое слагаемое в левой части при $x_k+iy_k\in\Pi(\xi;\,r,\,h)$ оценивается снизу следующим образом:

$$\ln\left(1+\frac{2\cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x_k-\xi)}{2\theta h}-\cos\dfrac{\pi y_k}{2\theta h}}\right)\geqslant\ln\left(1+\frac{2\cos\dfrac{\pi}{2\theta}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r}{2\theta h}}\right).$$

Воспользуемся далее неравенством

$$\ln(1+x)\geqslant\begin{cases}\dfrac{3}{4}x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2};\\ \ln\dfrac{3}{2}, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

откуда при $0\leqslant x\leqslant 2$ вытекает неравенство $\ln(1+x)\geqslant\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\cdot x$.

Учитывая, что $\cos\dfrac{\pi}{2\theta}\geqslant\dfrac{\theta-1}{\theta}$, имеем

$$\ln\left(1+\frac{2\cos\dfrac{\pi}{2\theta}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r}{2\theta h}}\right)\geqslant\ln\frac{3}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2\theta}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi r}{2\theta h}}\geqslant\ln\frac{3}{2}\cdot\frac{\theta-1}{\theta}\cdot e^{-\frac{\pi r}{2\theta h}},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть функция $\varphi\in C\,[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)\nearrow\infty$ при $t\to\infty$, а $h(t)$ — решение уравнения

$$2h\cdot\varphi(h)=\pi t,\ t\geqslant 0. \tag{9}$$

Очевидно, $h(t)\nearrow\infty$, $t^{-1}h(t)\searrow 0$, $t^{-1}\varphi(h(t))\searrow 0$.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству*

$$\ln \ln^+ M_f(h) \leqslant \varphi(h), \ \forall h \geqslant 0, \ f(0) = 1. \qquad (10)$$

Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}, \ \forall r, \ h > 0$:

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + 2\varphi(2h(|x|)). \qquad (11)$$

Доказательство. Заметим, что $n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant n_{D_f}(0,\ |x| + r,\ h)$, и воспользуемся леммой 1. Имеем

$$n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C \frac{\theta}{\theta - 1} e^{\frac{\pi(|x|+r)}{2\theta h}} \ln M_f(\theta h).$$

Используя условие (10), получаем

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + \frac{\pi}{2\theta h} r + \frac{\pi |x|}{2h} + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1), \ \forall \theta \in (1,\ 2].$$

Пусть $h \geqslant h(|x|)$. Тогда

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + \frac{\pi |x|}{2h(|x|)} + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1) = C + \frac{\pi r}{2\theta h} + \varphi(h(|x|)) + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1).$$

Если же $h \leqslant h(|x|)$, то

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant \ln n_{D_f}(x;\ r,\ h(|x|)) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + \frac{\pi |x|}{2h(|x|)} + \varphi(\theta h(|x|)) - \ln(\theta - 1) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + 2\varphi(\theta h(|x|)) - \ln(\theta - 1).$$

Из приведенных неравенств вытекает, что $\forall r,\ h > 0$:

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + \frac{\pi r}{2\theta h} + 2\varphi(2h(|x|)) + \varphi(\theta h) - \ln(\theta - 1).$$

Полагая $\theta = 1 + \frac{1}{h}$, приходим к (11). Лемма доказана.

Пусть $\psi \geqslant 0$ — функция на $[0,\ \infty]$.

Лемма 3. *Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет* (10) *и пусть*

$$\exists b > 0 : \forall x \in \boldsymbol{R}\ \exists \xi = \xi(x) \in \boldsymbol{R},\ |x - \xi| \leqslant b : \ln |f(\xi)| \geqslant -e^{\psi(|\xi|)}.$$

Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}, \ \forall r, \ h > 0$:

$$\ln n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + \psi^{[b]}(|x|).$$

Доказательство. Ввиду того, что $n_{D_f}(x;\ r,\ h) \leqslant n_{D_f}(\xi(x);\ r + b,\ h)$, утверждение леммы следует из леммы 1.

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

Лемма А ([1, лемма 3]). *Пусть $\theta(r)$, $\theta(0) = 0$ — непрерывная возрастающая функция на* $[0,\ \infty]$ *такая, что* $\theta(r) \nearrow \infty$, $r^{-1}\Theta(r) \to$

$\to 0$ $(r \to \infty)$. *Существует целая функция* $g(z)$, *обладающая свойством* $\forall h > 0$ *в полосе* $|\operatorname{Im} z| < h$ *при достаточно больших* $|z|$ *имеем*

$$\operatorname{Re}\, g(r) \geqslant \exp(\theta(|z|)). \tag{12}$$

Нам потребуется некоторая дополнительная информация, которую можно извлечь из доказательства леммы в [1], а именно: неравенство (12) выполняется, как только

$$4(\theta(2e|z|) + 1)h|z|^{-1} \leqslant \frac{\pi}{3}. \tag{13}$$

Кроме того, нам нужны оценки сверху $|g(z)|$. Эта функция имеет вид

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ez}{r(k)}\right)^{2k+2},$$

где $r(\theta)$ — функция, обратная к $\theta(r)$. Очевидно, $r(\theta) \nearrow \infty$, $\theta^{-1} r(\theta) \to \infty$. Предположим дополнительно, что

$$\left[\frac{d \ln \theta(r)}{d \ln r}\right]^{-1} = \frac{\theta \cdot r'(\theta)}{r(\theta)} < K. \tag{14}$$

Пусть $m = [\theta(2e|z|)]$. Тогда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{e|z|}{r(k)}\right)^{2k+2} < 1.$$

Имеем

$$\max_{|z|<r} |g(z)| \leqslant 1 + m \cdot \max_{1<k<m} \left(\frac{er}{r(k)}\right)^{2k+2}.$$

Выражение $\left(\frac{er}{r(k)}\right)^{2k+2}$ достигает максимума при таком значении $k = k_0$ что $\ln \frac{er}{r(k_0)} = \frac{(k_0+1)\, r'(k_0)}{r(k_0)}$. Отсюда и из (14) следует, что $0 \leqslant \leqslant \ln \frac{er}{r(k_0)} \leqslant 2K$, или $\theta\left(\frac{er}{\exp(2K)}\right) \leqslant k_0 \leqslant \theta(er)$.

Имеем

$$\left(\frac{er}{r(k)}\right)^{2k+2} \leqslant \left(\frac{er}{r(k_0)}\right)^{2k_0+2} \leqslant (e^{2K})^{2\theta(er)+2}$$

и

$$\max_{|z|<r} |g(z)| \leqslant 1 + e^{\ln \theta(2er) + 4K\theta(er) + 4K} \leqslant Ce^{\ln \theta(2er) + 4K\theta(er)}. \tag{15}$$

В нашем случае в качестве $\Theta(r)$ будет фигурировать функция вида $\theta(r) = B\varphi(h, (r))$. Из соотношения (9) следует, что $t^{-1}\varphi(h(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, так что функция $\varphi(h(r))$ удовлетворяет условию леммы. Будем предполагать, что $\varphi \in C^1([0, \infty))$. Покажем, что условие (14) для этой функции эквивалентно условию

$$\varphi(t) \leqslant ct\varphi'(t),\ t \geqslant 0. \tag{16}$$

Действительно, в силу (9) имеем $\ln h(t) + \ln\varphi(h(t)) = \ln\frac{\pi}{2} + \ln t$. Дифференцируя по переменной $\ln t$, получаем

$$1 = \frac{\frac{dh(t)}{d\ln t}}{h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t} = \frac{\varphi'(h(t))\frac{dh(t)}{d\ln t}}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t} =$$

$$= \frac{\frac{d\varphi(h(t))}{d\ln t}}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t} = \frac{\frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t}\cdot\varphi(h(t))}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + \frac{d\ln\varphi(h(t))}{d\ln t},$$

откуда

$$\frac{\partial\ln\varphi(h(t))}{\partial\ln t} = \frac{1}{\frac{\varphi(h(t))}{\varphi'(h(t))\cdot h(t)} + 1}.$$

Выражение в правой части отграничено от нуля тогда и только тогда, когда $\varphi(h(t)) \leqslant ch(t)\varphi'(h(t))$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть $B \geqslant 1$, а функция φ удовлетворяет* (16). *Существует такая целая функция $g(z)$, что*

$$|g(z)| \leqslant C\exp(B'\varphi(h(|z|)))$$

и $\exists h_0 > 0$: $\forall h > h_0$ при $z \in \{\zeta: |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant h,\ h(|\zeta|) \geqslant 48eBh\}$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} g(z) \geqslant \exp(B\varphi(h(|z|)))$.

Доказательство. Вначале заметим, что, как следует из (9),

$$\forall c \geqslant 1: \varphi(h(ct)) = \frac{\pi ct}{2h(ct)} \leqslant c\frac{\pi t}{2h(t)} = c\varphi(h(t)).$$

Из (15) с учетом (16) и этого замечания имеем

$$|g(z)| \leqslant Ce^{\ln(B\varphi(h(2e|z|)))+K'\varphi(h(e|z|))} \leqslant C'e^{\ln\varphi(h(|z|))+K''\varphi(h(|z|))} \leqslant C''e^{B'\varphi(h(|z|))}.$$

Согласно отмеченному выше, оценка снизу имеет место, если вы полняется соотношение (13).

Пусть число $h_0 > 0$ таково, что $\varphi(t) \geqslant 1$ при $t \geqslant h_0$. Пусть, далее, $h > h_0$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$ и $h(|z|) \geqslant 48eBh$. Тогда $\varphi(h(2e|z|)) \geqslant \varphi(h(|z|)) \geqslant \geqslant \varphi(48eBh) \geqslant \varphi(h) \geqslant 1$ и $4(B\varphi(h(2e|z|)) + 1)\cdot h|z|^{-1} \leqslant$
$\leqslant \frac{8B\varphi(h(2e|z|))}{|z|}h \leqslant \frac{16eB\varphi(h(|z|))}{|z|}\cdot\frac{h(|z|)}{48eB} = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, т. е. (13) выполнено.

Лемма доказана.

Обозначим через P_1 множество таких функций $\varphi \in C^2([0, \infty))$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow \infty$, $\varphi''(t) \geqslant 0$. Через P_2 обозначим множество таких функций $\varphi \in C^2([0, \infty))$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow \infty$, φ удовлетворяет (16) и $\frac{\partial}{\partial t}t\frac{\partial}{\partial t}\varphi(h(t)) \geqslant 0$.

Ламма 5. *Пусть функции $\varphi_1 \in P_1$, $\varphi_2 \in P_2$, $\varphi_3 \in P_2$ таковы, что $\varphi_1 \geqslant \varphi_3 \geqslant \varphi_2$, и пусть h_i — решение уравнения* (9) *с $\varphi = \varphi_i$. Пусть, далее, D — дивизор в $\boldsymbol{C}$, причем $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall r,\ h > 0$:*

$$\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi_1(h) + A\varphi_2(h_2(|x|)),$$

где $A > 0$.

Тогда существует такая целая функция $F(z)$, *что* $D_F = D$ и $\exists B_1, B_2, N > 0$:

$$\ln \ln^+ M_F(h) \leqslant C' + \varphi_1(h+1) + B_1\psi(Nh) + B_2\varphi_3(Nh),$$

где $\psi(t) = \varphi_2(h_2(h_3^{-1}(\varphi_3^{-1}(\varphi_1(t)))))$, *а* f^{-1} *обозначает функцию, обратную к* f.

Доказательство. Положим $\omega(z) = C + 1 + \varphi_1(|\operatorname{Im} z|) + A\varphi_2(h_2(|z|))$. Так как $\varphi_1''(t) \geqslant 0$ и $\frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(h_2(t)) \geqslant 0$, функция $\omega(z)$ субгармонична. Применим теорему 1. Согласно этой теореме существует такая целая функция $f(z)$ с $D_f = D$, что

$$\ln \ln^+ |f(z)| \leqslant \tilde{C} + \omega^{[1]}(z) + 2\ln(1 + |z|^2) \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{\tilde{C}} + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + A\varphi_2(h_2(|z| + 1)) + 2\ln(1 + |z|^2).$$

Далее, из условия (16) следует, что

$$\ln \frac{\varphi_2(h_2(x))}{\varphi_2(h_2(1))} = \int_1^x \frac{\partial \ln \varphi_2(h_2(t))}{\partial \ln t} d\ln t \geqslant \frac{1}{1+c} \ln x, \ x > 1,$$

откуда $\varphi_2(h_2(x)) \geqslant ax^{\frac{1}{1+c}}$.

Поэтому при достаточно больших x справедливо неравенство $\varphi_2(h_2(x)) \geqslant 2\ln(1 + x^2)$, так что

$$\ln\ln^+|f(z)| \leqslant \tilde{\tilde{C}} + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + A\varphi_2(h_2(2|z|)) + 2\ln(1 + |z|^2) \leqslant$$
$$\leqslant C' + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + (1 + 2A)\varphi_2(h_2(|z|)) =$$
$$= C' + \varphi_1(|\operatorname{Im} z| + 1) + B_1\varphi_2(h_2(|z|)). \tag{17}$$

Пусть $g(z)$ — функция, существование которой утверждается в лемме 3 с $B = (1 + B_1)$, $\varphi = \varphi_3$. Положим $F(z) = f(z)e^{-e^{C'} \cdot g(z)}$ и покажем, что это искомая функция.

Пусть $h > \max(h_0, 1)$, а $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$. Тогда при $h_3(|z|) \geqslant 48eBh$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} g(z) \geqslant \exp(B\varphi_3(h_3(|z|))).$$

Заметим, что, поскольку $\varphi_3 \leqslant \varphi_1$,

$$h_3(t) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(h_3(t))) \geqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_3(h_3(t))). \tag{18}$$

Кроме того,

$$\varphi_2(h_2(t)) \leqslant \varphi_3(h_3(t)) \tag{19}$$

так как $\varphi_2 \leqslant \varphi_3$, $h_2 \geqslant h_3$, а в силу (9)

$$\varphi_2(h_2(t)) = \frac{\pi t}{2h_2(t)} \leqslant \frac{\pi t}{2h_3(t)} = \varphi_3(h_3(t)).$$

1. Пусть сначала $48eBh \leqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_3(h_3(|z|)))$. Тогда в силу (18) выполняется неравенство $\operatorname{Re} g(^{z)} \geqslant \exp(B\varphi_3(h_3(|z|)))$. Учитывая (17) и (19), имеем

$$\ln|F(z)| = \ln|f(z)| - e^{C'}\operatorname{Re} g(z) \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(|z|))} -$$
$$- e^{C'(1+B_1)\varphi_3(h_3(|z|))} \leqslant e^{C'+B_1\varphi_2(h_2(|z|))}\left(e^{\varphi_1(h+1)} - e^{\varphi_3(h_3(|z|))}\right) \leqslant$$
$$\leqslant e^{C'+B_1\varphi_2(h_2(|z|))}\left(e^{\varphi_1(48eBh)} - e^{\varphi_3(h_3(|z|))}\right) \leqslant 0.$$

2. Пусть теперь $h_3(|z|) \geqslant 48eBh \geqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_3(h_3(|z|)))$. Поскольку тогда $\operatorname{Re} g(z) \geqslant 0$,

$$\ln|F(z)| \leqslant \ln|f(z)| \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(|z|))} \leqslant$$
$$\leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(h_3^{-1}(h_3(|z|))))} \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(h_3^{-1}(\varphi_3^{-1}(\varphi_1(48eBh)))))} \leqslant$$
$$\leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\psi(Nh)}.$$

3. Наконец, если $h_3(|z|) < 48eBh$, то

$$\ln|F(z)| \leqslant \ln|f(z)| + e^{C'}|g(z)| \leqslant e^{C'+\varphi_1(h+1)+B_1\varphi_2(h_2(|z|))} +$$
$$+ Ce^{C'+B'\varphi_3(h_3(|z|))} \leqslant (C+1)e^{C'+\varphi_1(h+1)+(B_1+B')\varphi_3(h_3(|z|))} \leqslant$$
$$\leqslant e^{C''+\varphi_1(h+1)+(B_1+B')\varphi_3(48eBh)} \leqslant e^{C''+\varphi_1(h+1)+B_2\varphi_3(Nh)}.$$

Из приведенных оценок следует утверждение леммы.

Лемма 6. $P_1 \subset P_2$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in P_1$. Поскольку $\varphi''(t) \geqslant 0$, $\varphi(t) = \int\limits_0^t \varphi'(x)\,dx \leqslant t\varphi'(t)$, т. е. выполняется (16). Остается проверить что из $\varphi''(t) \geqslant 0$ следует $\frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(h(t)) \geqslant 0$.

По определению $h(t)\varphi(h(t)) = \frac{\pi}{2}t$. Дважды дифференцируя это равенство по t, получаем

$$h''(t)\varphi(h(t)) + 2h'^2(t)\varphi'(h(t)) + h(t)h''(t)\varphi'(h(t)) +$$
$$+ h(t)h'^2(t)\varphi'(h(t)) = 0,$$

откуда

$$h''(t) = -\frac{h'^2(t)[h(t)\varphi''(h(t)) + 2\varphi'(h(t))]}{\varphi(h(t)) + h(t)\varphi'(h(t))}.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(h(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(th'(t)\varphi'(h(t))) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}(h(t)\varphi(h(t))h'(t)\varphi'(h(t))) = \frac{2}{\pi}(h'^2\varphi\varphi' + hh'^2\varphi'^2 +$$
$$+ hh''\varphi\varphi' + hh'^2\varphi\varphi'') = \frac{2}{\pi}(\varphi + h\varphi')^{-1}[h'^2\varphi^2\varphi' + hh'^2\varphi\varphi'^2 + hh'^2\varphi\varphi'_2 +$$
$$+ h^2h'^2\varphi'^3 - h^2h'^2\varphi\varphi'\varphi'' - 2hh'^2\varphi\varphi'^2 + hh'^2\varphi^2\varphi'' + h^2h'^2\varphi\varphi'\varphi''] =$$
$$= \frac{2}{\pi}(\varphi + h\varphi')^{-1} \cdot h'^2(\varphi^2\varphi' + h^2\varphi'^3 + h\varphi^2\varphi'') \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Следуя М. Н. Шеремете, обозначим через L^0 множество таких функций $\beta(x)$ на $[0, \infty)$, что $\beta(x) \nearrow \infty$ при $x \to \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (\beta(x))^{-1} \times \beta(x(1+\gamma(x))) = 1$ для всякой функции $\gamma(x)$ такой, что $\gamma(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Через Λ обозначим множество медленно растущих функций. Это те функции из L^0, для которых $\lim\limits_{x\to\infty} (\beta(x))^{-1}\beta(cx) = 1$, $\forall c \in (0, \infty)$. Наконец, через L обозначим множество таких функций из L^0, что

$$\lim_{x\to\infty} (\beta(x))^{-1}\beta(cx) < \infty, \ \forall c \in (0, \infty).$$

Введем теперь классы целых функций, с которыми мы будем работать.

Пусть $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in L^0$. Через $[\rho, \infty]_{\alpha,\beta}$ обозначим класс целых функций, ограниченных в каждой горизонтальной полосе, и таких, что

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\alpha(\ln\ln^+ M_f(h))}{\beta(\ln h)} = \rho.$$

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \to\in L$. Через $[\rho, \infty)_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим класс целых функций, ограниченных в любой горизонтальной полосе, и таких, что

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\alpha(\ln\ln^+ M_f(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} < \infty.$$

Следующие теоремы дают описание дивизоров функций введенных классов.

Теорема 2. *Пусть функции $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in L^0$ и число $\rho > 0$ таковы, что $\forall \varepsilon(t) \to \rho$, $\exists \rho(t) \to \rho$: $\rho(t) \geqslant \varepsilon(t)$, а функция $\varphi(t) = \alpha^{-1}(\rho(t)\beta(\ln t))$ принадлежит $C^2([0, \infty))$ и $\varphi''(t) \geqslant 0$.*

Для того чтобы дивизор D был дивизором некоторой функции из класса $[\rho, \infty]_{\alpha,\beta}$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists \varepsilon(t) \to \rho : \forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall r$, $h > 0$:

$$\ln n_D(x; r, h) \leqslant C + r + \alpha^{-1}(\varepsilon(h)\beta(\nu|\ln h)) + \alpha^{-1}(\varepsilon(h(|x|))\beta(\ln h(|x|))).$$

Теорема 3. *Пусть функции $\alpha \in L$, $\beta \in L$, $\gamma \in L$ и число $\rho > 0$ таковы, что $\forall C > 0$ функция $\varphi(t) = \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(t)))$ принадлежит $C^2([0, \infty))$ и $\varphi''(t) \geqslant 0$.*

Для того чтобы дивизор D был дивизором некоторой функции из класса $[\rho, \infty)_{\alpha,\beta,\gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists C > 0$:

$$\ln n_D(x; r, h) \leqslant C + r + \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(h))) + \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(h(|x|)))).$$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $f \in [\rho, \infty)_{\alpha,\beta}$. Тогда найдется такая функция $\varepsilon(t) \to \rho$, что

$$\ln\ln^+ M_f(h) \leqslant \alpha^{-1}(\varepsilon(h)\beta(\ln h)) = \varphi(h).$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\ln n_{D_f}(x; r, h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + 2\varphi(2h(|x|)).$$

Достаточно проверить, что

$$\text{а) } \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(h+1)+\ln^+ h)}{\beta(\ln h)} \leqslant \rho; \quad \text{б) } \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|))}{\beta(\ln h(|x|))} \leqslant \rho.$$

Имеем

$$\text{а) } \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(h+1)+\ln^+ h)}{\beta(\ln h)} - \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(h+1)(1+o(1))}{\alpha(\varphi(h+1))} \times$$

$$\times \frac{\alpha(\varphi(h+1))}{\beta(\ln h)} = \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(h+1))}{\beta(\ln h)} = \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\varepsilon(h+1)\beta(\ln(h+1))}{\beta(\ln h)} =$$

$$= \rho \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\beta(\ln h(1+o(1)))}{\beta(\ln h)} = \rho;$$

$$\text{б) } \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\ln h(|x|))} = \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|)))}{\alpha(\varphi(2h(|x|)))} \times$$

$$\times \frac{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\ln h(|x|))} = \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\ln h(|x|))} =$$

$$= \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\varepsilon(2h(|x|))\beta(\ln 2h(|x|))}{\beta(\ln h(|x|))} = \rho \times$$

$$\times \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{\beta(\ln h(|x|)(1+o(1)))}{\beta(\ln h(|x|))} = \rho.$$

2. Пусть теперь D — такой дивизор, что

$$\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \alpha^{-1}(\varepsilon(h)\beta(\ln h)) +$$
$$+ \alpha^{-1}(\varepsilon(h(|x|))\beta(\ln h(|x|))).$$

Согласно условию $\exists \rho(t) \to \rho$: $\rho(t) \geqslant \varepsilon(t)$ и функция $\varphi(t) = \alpha^{-1}(\rho(t)\beta(\ln t))$ обладает неотрицательной второй производной. Применим лемму 5 с $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$. Это возможно ввиду леммы 6. По лемме 5 существует такая целая функция $F(z)$ с $D_F = D$, что

$$\ln\ln^+ M_F(h) \leqslant C + C\varphi(Nh).$$

Имеем

$$\varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(C\varphi(Nh))}{\beta(\ln h)} = \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(C\varphi(Nh))}{\alpha(\varphi(Nh))} \frac{\alpha(\varphi(Nh))}{\beta(\ln h)} =$$

$$= \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(Nh))}{\beta(\ln h)} = \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\rho(Nh)\beta(\ln Nh)}{\beta(\ln h)} = \rho \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\beta(\ln h(1+o(1)))}{\beta(\ln h)} = \rho.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть функция $f \in [\rho,\ \infty]_{\alpha,\beta,\gamma}$. Тогда найдется такая постоянная C, что $\ln\ln^+ M_f(h) \leqslant \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^\rho(h))) = \varphi(h)$. Применяя лемму 2, получаем $\ln n_{D_f}(x; r, h) \leqslant C + r + \varphi(h+1) + \ln^+ h + 2\varphi(2h(|x|))$. Имеем

$$\text{а) } \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\alpha(\varphi(h+1)+\ln^+ h)}{\beta(\gamma^\rho(h))} = \varlimsup_{h\to\infty} \frac{C\beta(\gamma^\rho(h+1))}{\beta(\gamma^\rho(h))} \leqslant$$

$$\leqslant C \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\beta(\gamma^\rho(2h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} \leqslant C \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\beta(C'\gamma^\rho(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} \leqslant C'' \varlimsup_{h\to\infty} \frac{\beta(h^\rho(h))}{\beta(\gamma^\rho(h))} < \infty;$$

$$б)\ \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ \frac{\alpha(2\varphi(2h(|x|)))}{\beta(h^{\rho}(h(|x|)))} \leqslant C_1 \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ \frac{\alpha(\varphi(2h(|x|)))}{\beta(\gamma^{\rho}(h(|x|)))} =$$

$$= CC_1 \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ \frac{\beta(\gamma^{\rho}(2h(|x|)))}{\beta(\gamma^{\rho}(h(|x|)))} \leqslant CC_1 \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\ \frac{\beta(C'\gamma^{\rho}(h(|x|)))}{\beta(\gamma^{\rho}(h(|x|)))} < \infty.$$

2. Пусть D — такой дивизор, что $\ln n_D(x;\ r,\ h) \leqslant C + r + \varphi(h) + \varphi(h(|x|))$, где $\varphi(t) = \alpha^{-1}(C\beta(\gamma^{\rho}(t)))$.

Ввиду условия теоремы применима лемма 5 с $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$. Согласно этой лемме существует такая целая функция $F(z)$ с $D_F = D$, что $\ln\ln^+ M_F(h) \leqslant \hat{C} + \hat{C}\varphi(Nh)$. Имеем

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\alpha(\hat{C}\varphi(Nh))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))} \leqslant \hat{C}_1 \overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\alpha(\varphi(Nh))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))} =$$

$$= \hat{C}_1 \overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{C\beta(\gamma^{\rho}(Nh))}{\beta(h^{\rho}(h))} \leqslant \hat{C}_1 C \overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\beta(\hat{N}\gamma^{\rho}(h))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))} < \infty.$$

Теорема доказана.

Примеры 1. Приведем примеры наборов α, β, ρ, для которых выполнены условия теоремы 2:

$$\alpha = \ln t,\ \beta = t,\ \rho > 1;$$
$$\alpha = \ln\ln t,\ \beta = t,\ \rho > 0;$$
$$\alpha = \ln_j(t),\ \beta = \ln_{j-1} t,\ \rho > 1$$

($\ln_j$ — j-я итерация логарифма), $j \geqslant 2$;

$$\alpha = \ln_j t,\ \beta = \ln_i(t),\ \rho > 0 \text{ при } j - i \geqslant 2.$$

2. Примеры наборов α, β, γ, ρ, для которых выполнены условия теоремы 3:

$$\alpha = t,\ \beta = t,\ \gamma = t,\ \rho \geqslant 1;$$
$$\alpha = \ln t,\ \beta = t,\ \gamma = t,\ \rho > 0.$$

Рассмотрим новые классы функций. Пусть $\alpha \in L$, $\beta \in L^0$, $\gamma \in L^0$. Через $[\rho,\ \sigma]_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим класс целых функций, ограниченных в каждой полосе, и таких, что

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\alpha(\ln\ln^+ M_F(h))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))} \leqslant \sigma.$$

Через $[\rho,\ \sigma)_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим подкласс в $[\rho,\ \sigma]_{\alpha,\beta,\gamma}$, состоящий из функций, для которых

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\alpha(\ln\ln^+ M_F(h))}{\beta(\gamma^{\rho}(h))} < \sigma.$$

Ниже, чтобы избежать большого числа технических условий, мы ограничимся случаем $\alpha = t$, $\beta = t$, $\gamma = t$. Таким образом, $[\rho,\ \sigma]_{t,t,t}$ ($[\rho,\ \sigma)_{t,t,t}$) — это класс целых функций, для которых

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\ln\ln^+ M_F(h)}{h^{\rho}} \leqslant \sigma\ (<\sigma).$$

Через $[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$ ($[\rho,\ \sigma)^*_{t,t,t}$) обозначим подкласс в $[\rho,\ \sigma]_{t,t,t}$ ($[\rho,\ \sigma)_{t,t,t}$), состоящий из функций, удовлетворяющих условию $\exists\varepsilon\in(0,\ \rho)$, $\exists b_1,\ b_2>0:\forall x\in\boldsymbol{R},\ \forall\xi=\xi(x)\in\boldsymbol{R},\ |x-\xi|\leqslant b_1$:

$$\ln|F(\xi)|\geqslant-\exp\left(b_2|\xi|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}\right).$$

Следующие теоремы дают описание дивизоров функций классов $[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$ и $[\rho,\ \sigma)^*_{t,t,t}$.

Теорема 4. *Пусть числа* ρ и σ *таковы, что* $\exists\varepsilon(t)\to\sigma$, $\exists\sigma(t)\to\to\sigma$, $\sigma(t)\geqslant\varepsilon(t)$: *функция* $\varphi(t)=\sigma(t)t^\rho$ *принадлежит* $C^2([0,\ \infty))$ *и* $\varphi''(t)\geqslant0$.

Для того чтобы дивизор D был дивизором некоторой функции из класса $[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exists\varepsilon\in(0,\ \rho)$, $\exists\varepsilon(t)\to\sigma$, $\exists C>0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\varepsilon(h)h^\rho+C|x|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}.$$

Отметим, что условию теоремы удовлетворяют пары $(\rho,\ \sigma)$, если $\rho>1$, $\sigma\geqslant0$.

Теорема 5. *Пусть* $\rho\geqslant1$, $\sigma>0$. *Для того чтобы дивизор D был дивизором некоторой функции класса* $[\rho,\ \sigma)^*_{t,t,t}$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists\varepsilon_1\in(0,\ \rho)$, $\exists\varepsilon_2\in(0,\ \sigma)$, $\exists C>0$:

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+(\sigma-\varepsilon_2)h^\rho+C|x|^{\frac{\rho-\varepsilon_1}{1+\rho-\varepsilon_1}}.$$

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $f(z)\in[\rho,\ \sigma]^*_{t,t,t}$. Тогда $\exists\varepsilon(t)\to\sigma:\ln\ln^+M_f(h)\leqslant\varepsilon(h)\cdot h^\rho=\varphi_1(h)$ и, кроме того, $\exists\varepsilon\in(0,\ \rho)$, $\exists b_1$, $b_2>0$: $\forall x\in\boldsymbol{R}$, $\exists\xi=\xi(x)\in\boldsymbol{R}$, $|x-\xi|\leqslant b_1$: $\ln|f(\xi)|\geqslant-\exp\left(b_2|\xi|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}\right)$.

Применим лемму 3. Согласно этой лемме

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\varphi_1(h+1)+\ln^+h+b_2(|x|+b_1)^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}\leqslant$$
$$\leqslant C'+r+\varphi_1(h+1)+\ln^+h+C'|x|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}.$$

Остается проверить, что $\overline{\lim\limits_{h\to\infty}}\dfrac{\varphi_1(h+1)+\ln^+h}{h^\rho}\leqslant\sigma$. Действительно, $\overline{\lim\limits_{h\to\infty}}\dfrac{\varphi_1(h+1)+\ln^+h}{h^\rho}=\overline{\lim\limits_{h\to\infty}}\dfrac{\varepsilon(h+1)(h+1)^\rho}{h^\rho}=\sigma$.

2. Пусть теперь D — такой дивизор, что

$$\ln n_D(x;\ r,\ h)\leqslant C+r+\varepsilon(h)\cdot h^\rho+C|x|^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}.$$

Положим $\varphi_1(x)=\sigma(t)\cdot t^\rho$, где $\sigma(t)\searrow\sigma$, $\sigma(t)\geqslant\varepsilon(t)$ и $(\sigma(t)t^\rho)''\geqslant0$; $\varphi_2(t)=\sigma t^{\rho-\varepsilon}$, $\varphi_3(t)=\sigma t^{\rho-\varepsilon/2}$. Тогда $\varphi_1(t)\geqslant\varphi_3(t)\geqslant\varphi_2(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ удовлетворяют (16). Далее, если $\varphi(t)=ct^\alpha$, $\alpha>0$, то из (9) следует, что $h(t)=\left(\frac{\pi t}{2c}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$, $\varphi(h(t))=c\left(\frac{\pi t}{2c}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$. Поэтому φ_2, φ_3 принадлежат P_2 и применима лемма 5. Согласно этой лемме существует такая целая функция $F(z)$ с $D_F=D$, что

$$\ln\ln^+ M_F(h)\leqslant C+\varphi_1(h+1)+B_2\varphi_3(Nh)+B_1\psi(Nh)=$$

$$=C+\sigma(h+1)\cdot(h+1)^\rho+B_1'h^{\rho\frac{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}{\rho-\varepsilon}}+B_2'h^{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Имеем

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\frac{\sigma(h+1)(h+1)^\rho+B_1'\cdot h^{\rho\left(1-\frac{\varepsilon}{2(\rho-\varepsilon)}\right)}+B_2'h^{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}}{h^\rho}=$$

$$=\overline{\lim_{h\to\infty}}\ \frac{\sigma(h+1)(h+1)^\rho}{h^\rho}=\sigma.$$

Остается показать, что $F(z)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соответствующие оценки снизу. Для этого заметим, что $F(z)=f(z)e^{-e^{C'}g(z)}$, где $f(z)$ — функция, существование которой утверждается в теореме 1, а $g(z)$ — функция из леммы 4, построенная по функции $\varphi_3(h_3(t))=\hat{C}t^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}$. Для $g(z)$ справедлива оценка $|g(z)|\leqslant C\exp\left(\hat{B}|z|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}\right)$. Согласно замечанию 1 функция $f(z)$ в некоторой точке x_j каждого квадрата Ω_j с центром на вещественной оси допускает оценку снизу $\ln|f(x_j)|\geqslant-\tilde{C}(1+x_j^2)^2e^{\omega^{[1]}(x_j)}$.

Субгармоническая функция $\omega(z)$ в нашем случае имеет вид $\omega(z)=$ $=\tilde{\tilde{C}}+\varphi_1(|\operatorname{Im}z|)+A\varphi_2(h_2(|z|))$, так что

$$(1+x_j^2)^2e^{\omega^{[1]}(x_j)}\leqslant C_1(1+x_j^2)e^{\hat{A}(|x_j|+1)^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\rho-\varepsilon}}}\leqslant C_2e^{A'|x_j|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}}.$$

Имеем

$$\ln|F(x_j)|=\ln|f(x_j)|-e^{C'}\operatorname{Re}g(x_j)\geqslant\ln|f(x_j)|-e^{C'}|g(x_j)|\geqslant$$

$$\geqslant-Ce^{(A'+\hat{B})|x_j|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}}\geqslant-e^{B'|x_j|^{\frac{\rho-\varepsilon/2}{1+\rho-\varepsilon/2}}}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5 отличается от доказательства предыдущей теоремы только выбором функции $\varphi_1(t)$, которая в этом случае имеет вид $(\sigma-\varepsilon)t^\rho$ для некоторого $\varepsilon\in(0,\sigma)$.

Список литературы: 1. *Камынин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах эрмитово-положительных функций // Сиб. мат. журн. 1982. **23**, № 3. С. 66—82. 2. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Сер. Математика. 1967. **57**, № 2. С. 100—108. 3. *Левич Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. С. 245. 4. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., 1968. С. 235. 5. *Skoda H.* Solution a croissance du second probl. de Cousin dans C^n // Ann. Inst. Fourier. 1971. **21**. P. 11—23.

Поступила в редколлегию 08.02.89

УДК 517.958

И. Д. ЧУЕШОВ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В АЭРОУПРУГОСТИ

1. Нелинейные колебания упругой пологой оболочки, защемленной по контуру, могут быть описаны (см., например, [1, 2]) с помощью следующих уравнений:

$$(1-\alpha\Delta)\ddot{u}+(\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)\dot{u}+\Delta^2 u-[u+f,\ v+\theta]=p(x,\ t); \quad (1)$$

$$\Delta^2 v+[u+2f,\ u]=0,\ x=(x_1,\ x_2)\in\Omega,\ t>0; \quad (2)$$

$$u\,|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\ v\,|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0. \quad (3)$$

Здесь Ω — ограниченная область в R^2 с кусочно-гладкой границей, $\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}$, параметры $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ — неотрицательны, $\alpha>0$,

$$[u,\ v]=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2},$$

функции $f(x)$, $\theta(x)$, $p(x,\ t)$ предполагаются известными. Отметим, что в (1)—(3) $u(x,\ t)$ — величина поперечного прогиба оболочки, а $v(x,\ t)$ — функция напряжений. Случай $\alpha,\ \varepsilon_2>0$ отвечает учету инерции вращения элементов оболочки [1].

Если оболочка находится в сверхзвуковом потенциальном потоке газа, движущегося в направлении оси x_1, то аэродинамическая нагрузка потока может быть учтена [3] с помощью равенства $p(x,\ t)= p_0(x)+p_1(u;\ x,\ t)$, где

$$p_1(u;\ x,\ t)=-\frac{\gamma}{2\pi k}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\int\limits_{-\infty}^{x_1}d\xi\int\limits_0^{2\pi}d\theta w^*\Big(\xi,\ x_2-$$
$$-\frac{x_1-\xi}{k}\cos\theta,\ t-\frac{x_1-\xi}{k^2}(U-\sin\theta)\Big).$$

Здесь $w^*(x,\ t)$ — продолжение нулем функции $w(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x_1}$ с области Ω на R^2, параметр $U>1$ имеет смысл скорости набегающего потока, $k=\sqrt{U^2-1}$, $\gamma>0$. Отметим, что при таком выборе аэродинамической нагрузки мы пренебрегаем влиянием концевых кромок и вихревой пелены на характер колебаний оболочки. Во многих случаях это вполне оправдано [3].

Используя очевидное равенство

$$\frac{\partial w}{\partial t}\Big(\xi,\ x_2-\frac{x_1-\xi}{k}\cos\theta,\ t-\frac{x_1-\xi}{k^2}(U-\sin\theta)\Big)=$$
$$=\frac{k^2}{U-\sin\theta}\left[\frac{d}{d\xi}w-\frac{\partial w}{\partial\xi}-\frac{\cos\theta}{k}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]$$

и граничные условия для функции $u(x, t)$, нетрудно величину $p(x, t)$ преобразовать к виду

$$p(x, t) = p_0(x) - \gamma\left[\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x_1} + q(u;\ x,\ t)\right], \tag{4}$$

где

$$q(u;\ x,\ t) = \frac{1}{2\pi k}\int\limits_{-\infty}^{x_1} d\xi \int\limits_{0}^{2\pi} d\theta \left[\left(a_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + b_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u\right]^* \times$$

$$\times\left(\xi,\ x_2 - \frac{x_1 - \xi}{k}\cos\theta,\ t - \varkappa_\theta(x_1 - \xi)\right),$$

$$a_\theta = (U\sin\theta - 1)(U - \sin\theta)^{-1},\ b_\theta = k\cos\theta(U - \sin\theta)^{-1},$$

$$\varkappa_\theta(\xi) = \frac{\xi}{k^2}(U - \sin\theta),$$

$\psi^*(x)$ — продолжение функции $\psi(x)$ нулем с Ω на R^2.

Таким образом, возникает квазилинейная система уравнений в частных производных с запаздыванием на время $t_* = l(U - 1)^{-1}$, где l — размер области Ω в направлении оси x_1. Поэтому начальные условия следует задавать в виде (ср. [4]):

$$u|_{t\in(-t_*,\,0)} = \varphi(x,\ t),\ u|_{t=0} = u_0(x),\ \dot u|_{t=0} = u_1(x). \tag{5}$$

В данной работе доказана теорема существования и единственности слабых решений задачи (1)—(5) и изучается асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решений этой системы. Существенную роль при этом играет схема, использованная в работе [2], которая посвящена исследованию асимптотического поведения решений задачи (1)—(5) в рамках «поршневой» теории ($q(u;\ x,\ t) \equiv 0$).

2. Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

$$f(x) \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),\ \theta(x) \in H^4(\Omega),\ p_0(x) \in L^2(\Omega);$$

$$u_0(x) \in H_0^2(\Omega),\ u_1(x) \in H_0^1(\Omega),\ \varphi(x,\ t) \in L^2(-t_*,\ 0;\ H_0^2(\Omega)), \tag{6}$$

где $H^s(\Omega)$ — соболевское пространство порядка s, $L^2(a,\ b;\ H)$ — пространство квадратично интегрируемых на $[a,\ b]$ вектор-функций со значениями в H. Аналогичный смысл имеет используемое ниже обозначение $L^\infty(a,\ b;\ H)$. Кроме того, норму в пространстве $H_0^1(\Omega)$ определим равенством $\|\cdot\|_1^2 = ((1 - \alpha\Delta)\cdot,\ \cdot)$, а в пространстве $H_0^2(\Omega)$ соотношением $\|\cdot\|_2 = \|\Delta\cdot\|$, где $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Пусть также

$$\mathscr{L}_T = \{u(t) \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^2(\Omega))/\dot u(t) \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^1(\Omega))\},$$

где производная $\dot u(t)$ понимается в смысле обобщенных функций.

Слабым решением задачи (1)—(5) на интервале $[0, T]$ будем называть вектор-функцию $u(t)$, лежащую в пространстве $L^2(-t_*, T; H_0^2(\Omega))$ и такую, что а) $u(t) \in \mathscr{L}_T$; б) в смысле обобщенных функций выполнено (1), (4) с учетом зависимости функции v от u согласно (2); в) вектор-функции $u(t)$ и $\dot{u}(t)$ слабо непрерывны в $H_0^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно, $t \in [0; T]$; г) справедливы начальные условия (5).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (6) и $\alpha > 0$, ε_1, $\varepsilon_2 \geqslant 0$ Тогда на любом интервале $[0, T]$ слабое решение задачи (1)—(5) существует и единственно. При этом вектор-функция $y(t) = (u(t)\cdot \dot{u}(t))$ сильно непрерывна в пространстве $F = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ при $t \in [0, T]$ и имеет место энергетическое соотношение*

$$E(y(t)) = E(y_0) + \int_0^t (-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta)\dot{u}(\tau) + p_0 + p_1(u;\tau),\ \dot{u}(\tau))\,d\tau, \quad (7)$$

где

$$y_0 = (u_0;\ u_1),\ y(t) = (u(t);\ \dot{u}(t));$$

$$E(y(t)) = E_0(y(t)) - \frac{1}{2}([u(t) + 2f,\ u(t)],\ \theta);$$

$$E_0(y(t)) = \frac{1}{2}\left(\|\dot{u}(t)\|_1^2 + \|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta v(u(t))\|^2\right),$$

причем $v = v(u(t)) \in H_0^2$ определяется по $u(t)$ согласно (2).

Доказательство теоремы проводится стандартным методом (при $f = \theta = 0$, $p_1(u; t) = 0$ см. [1, 5]), опирающимся на принцип компактности. Приближенные решения ищутся в виде

$$u_m(t) = \textstyle\sum_{k=1}^m g_k(t)\, e_k(x),$$

где $\{e_k\}$ — ортонормированный в $H_0^1(\Omega)$ базис собственных функций спектральной краевой задачи

$$\Delta^2 v = \mu(1 - \alpha\Delta)v,\ v|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

(предполагается, что последовательность $\{\mu_k\}$ соответствующих собственных чисел является неубывающей). Локальная теорема существования приближенных решений при этом получается, если соответствующую систему с запаздыванием для $g_k(t)$ записать в интегральной форме и воспользоваться методом последовательных приближений [4]. Возможность продолжения этих решений на любой интервал $[0, T]$ вытекает из теоремы 2.3.2 [4] и приведенной ниже априорной оценки, доказательство которой опирается на следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $u(t) \in L^2(-t_*, T; H_0^2(\Omega))$, $t_* = l(U-1)^{-1}$. Тогда*

$$\|q(u;\ t)\|^2 \leqslant ct_* \int_{t-t_*}^t \|\Delta u(\tau)\|^2\,d\tau,\ t \in [0,\ T]; \quad (8)$$

$$\| q(u;\ t)\|_{-1}^2 \leqslant ct_* \int\limits_{t-t_*}^{t} \| u(\tau)\|_1^2\, d\tau,\ t \in [0,\ T]; \tag{9}$$

$$\int\limits_0^t \| q(u;\ \tau)\|^2\, d\tau \leqslant ct_*^2 \int\limits_{-t_*}^{t} \| \Delta u(\tau)\|^2\, d\tau,\ t \in [0,\ T]. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $u(x,\ t)$ — непрерывная по t функция со значениями $C_0^\infty(\Omega)$. При этом очевидно, что

$$\int\limits_\Omega | q(u;\ x,\ t)|^2\, dx \leqslant \frac{c}{k^2} \sum_{|\beta|=2} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_a^b d\xi \int\limits_\xi^b dx_1 \int\limits_c^d dx_2 | \psi_\beta(\xi,\ \theta,\ t)|^2,$$

где

$$\psi_\beta(\xi,\ \theta,\ x,\ t) = [D^\beta u]^* \left(\xi,\ x_2 - \frac{x_1-\xi}{k}\cos\theta,\ t - \frac{x_1-\xi}{k^2}(U - \sin\theta)\right),$$

$[a,\ b] \times [c,\ d]$ — минимальный прямоугольник, содержащий область Ω; $\beta = (\beta_1,\ \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$. Делая сначала замену $x_2 \to x_2 - k^{-1}(x_1 - \xi)\cos\theta$, а затем $x_1 \to t - k^{-2}(x_1 - \xi)(U - \sin\theta)$, нетрудно получить оценку (8). Для доказательства (9) следует рассмотреть величину $S_\Omega q(u;\ x,\ t)\varphi(x)\, dx$, где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, выполнить подходящие замены переменных и воспользоваться формулой интегрирования по частям. Оценка (10) получается интегрированием неравенства (8).

Так же, как и в [1, 5], благодаря свойству симметрии, скобки $[u,\ v]$ можно установить равенство (7) для $y(t) = y_m(t) = (u_m(t);\ \dot u_m(t))$. Из этого равенства с помощью леммы 1 и оценки

$$c_1 E_0(y) - c_2 \leqslant E(y) \leqslant c_3(1 + E_0(y)), \tag{11}$$

вытекающей из леммы 3.2 [2], получаем, что

$$E_0(y_m(t)) \leqslant c_1 \left(1 + E_0(y_m(0)) + \int\limits_{-t_*}^{0} \| u_m(\tau)\|_2^2\, d\tau\right) + $$
$$+ c_2 \int\limits_0^t E_0(y_m(\tau))\, d\tau.$$

Лемма Гронуолла позволяет отсюда извлечь априорную оценку вида

$$E_0(y_m(t)) \leqslant c_1 \left(1 + E_0(y_m(0)) + \int\limits_{-t_*}^{0} \| u_m(\tau)\|^2\, d\tau\right) e^{c_2 t} \leqslant C_T,\ t \in [0,\ T],$$

из которой вытекает $*$ — слабая компактность семейства $\{y_m(t)\}$ в пространстве $L^\infty(0,\ T;\ \mathscr{F})$, $\mathscr{F} = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Это обстоятельство так же, как и в [1,5], дает возможность доказать существование слабого решения задачи (1)—(5). Рассматривая теперь $u(t)$ как слабое решение линейной задачи вида

$$(1-\alpha\Delta)\ddot{u}+\Delta^2 u=f(t),\ u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,$$

можно показать, что вектор-функция $y(t)=(u(t);\ \dot{u}(t))$ сильно непрерывна в $\mathscr{F}=H_0^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, и установить энергетическое соотношение (7). Утверждение о единственности решений доказывается без особого труда и опирается на лемму Гронуолла (ср. [5]).

Отметим, что из (7) и (11) легко извлечь

$$E_0(y(t))\leqslant c\left(1+E_0(y_0)+\int\limits_{-t_*}^{0}\|\varphi(\tau)\|_2^2\,d\tau\right)e^{at}, \tag{12}$$

где $y(t)=(u(t);\ \dot{u}(t))$, $y_0=(u_0;\ u_1)$, $u(t)$ — слабое решение задачи (1)—(5).

3. Пусть S_t — сильно непрерывная полугруппа, действующая в пространстве $\boldsymbol{H}=F\times L^2(-t_*,\ 0;\ H_0^2(\Omega))$ по формуле

$$S_t(u_0;\ u_1;\ \varphi(s))=(u(t);\ \dot{u}(t);\ u(t+s)),\ s\in(-t_*,\ 0),\ t>0,$$

где $u(t)$ — слабое решение задачи (1)—(5).

Теорема 2. *Если $\varepsilon_2>0$, то полугруппа S_t обладает компактным максимальным аттрактором $\boldsymbol{M}$, т. е. существует компактное множество $\boldsymbol{M}$ в пространстве $\boldsymbol{H}$ такое, что $S_t\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}$ и*

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\{\operatorname{dist}_{\boldsymbol{H}}(S_t y,\ \boldsymbol{M})\mid y\in\boldsymbol{B}\}=0$$

для любого ограниченного в $\boldsymbol{H}$ множества $\boldsymbol{B}$.

Отметим, что максимальный (глобальный) аттрактор играет важную роль при исследовании предельного поведения бесконечномерных динамических систем (см., например, [6, 7] и приведенные там ссылки).

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, широко использовавшейся ранее (см. [2, 6, 7] и др.), и опирается на приведенные ниже леммы.

Лемма 2. *Полугруппа S_t является диссипативной в $\boldsymbol{H}$, т. е. существует $R>0$ такое, что $\|S_t h\|_{\boldsymbol{H}}\leqslant R$ для всех $h\in\boldsymbol{B}$, $t\geqslant t_0(\boldsymbol{B})$, где $\boldsymbol{B}$ — произвольное, ограниченное в $\boldsymbol{H}$ множество.*

Доказательство. Как и в [2], на пространстве F рассмотрим функционал $V(y)=E(y)+\nu\Phi(y)$, где $\nu>0$,

$$\Phi(y)=((1-\alpha\Delta)u_0,\ u_1)+\frac{1}{2}((\varepsilon_1+\gamma-\varepsilon_2\Delta)u_0,\ u_0),\ y=(u_0;\ u_1).$$

При этом из леммы 3.2 [2] вытекает, что для достаточно малых $\nu>0$ и некоторого $d>0$ справедлива оценка

$$c_1(1+E_0(y))\leqslant V_d(y)\leqslant c_2(1+E_0(y)), \tag{13}$$

где $V_d(y)=V(y)+d$. А повторение рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 3.1 [2], и использование оценки (9) позволяют подобрать $\nu > 0$ так, чтобы

$$\frac{d}{dt} V_d(y(t)) + \nu V_d(y(t)) \leqslant C_1 + C_2 \int\limits_{t-t_*}^{t} \| u(\tau) \|_1^2 \, d\tau, \tag{14}$$

где $y(t) = (u(t);\ \dot{u}(t))$, $u(t)$ — решение задачи (1)—(5). Однако из леммы 3.2 [2] вытекает, что $\| u \|_1^2 \leqslant C_\delta + \delta \cdot E_0(y)$, где $\delta > 0$ может быть взято сколь угодно малым. Поэтому из (13), (14) имеем, что

$$\frac{d}{dt} V_d(y(t)) + \nu V_d(y(t)) \leqslant C_\delta + \delta \int\limits_{t-t_*}^{t} V_d(y(\tau)) \, d\tau, \ t \geqslant t_*.$$

Следовательно, для $\Psi(t) = V_d(y(t)) \exp(\nu t)$ получаем, что

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) \leqslant C_\delta e^{\nu t} + \delta e^{\nu t_*} \int\limits_{t-t_*}^{t} \Psi(\tau) \, d\tau, \ t \geqslant t_*.$$

Интегрируя это неравенство от t_* до t, можно доказать, что

$$\Psi(t) \leqslant \Psi(t_*) + C_\delta \nu^{-1} e^{\nu t} + \delta t_* e^{\nu t_*} \int\limits_{0}^{t} \Psi(\tau) \, d\tau, \ t \geqslant t_*.$$

Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$, лемма Гронуолла приводит к оценке

$$E_0(y(t)) \leqslant C_1 + C_2 (1 + E_0(y(t_*)) + \int\limits_{0}^{t_*} E_0(y(\tau)) \, d\tau) e^{-\nu \frac{t}{2}}, \ t \geqslant t_*,$$

из которой с помощью (12) извлекается утверждение леммы.

Пусть K_A^σ — множество элементов $(v_0;\ v_1;\ \psi(s))$ из H, для которых справедлива оценка

$$\| v_0 \|_{2+\sigma}^2 + \| v_1 \|_{1+\sigma}^2 + \operatorname*{ess\,sup}_{s \in (-t_*,\, 0)} (\| \psi(s) \|_{2+\sigma}^2 + \| \dot{\psi}(s) \|_{1+\sigma}^2) \leqslant A,$$

где $0 < \sigma \leqslant 1/2$, $A > 0$, $\| \cdot \|_\sigma$ — норма в пространстве $H^\sigma(\Omega)$.

Лемма 3. *Найдется $A > 0$ такое, что для любого ограниченного в H множества B*

$$\limsup_{t \to \infty} \{ \mathrm{dist}_H (S_t h,\ K_A^\sigma) \mid h \in B \} = 0, \ 0 < \sigma \leqslant 1/2.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2 = \alpha\varepsilon$, $\varepsilon_1 + \gamma = \varepsilon + \beta$, $\beta = \varepsilon_1 + \gamma - \varepsilon_2 \alpha^{-1}$,

$$B(y(t)) = [u(t) + f,\ v(t) + \theta] + p_0 - \gamma \left[U \frac{\partial u}{\partial x_1} + q(u;\ x,\ t) \right] - \beta \dot{u}(t),$$

где $y(t) = (u(t);\ \dot{u}(t))$, $u(t)$ — решение задачи (1)—(5), $v(t) \in H_0^2(\Omega)$ определяется по $u(t)$ согласно (2). Очевидно, что

$$y(t) = T_t y_0 + \int_0^t T_{t-\tau}(0;\ (1-\alpha\Delta_D)^{-1} B(y(\tau))\, d\tau, \tag{15}$$

где T_t — сильно непрерывная группа оператора в $\mathscr{F}$, отвечающая задаче

$$(1-\alpha\Delta)\ddot{u} + \varepsilon(1-\alpha\Delta)\dot{u} + \Delta^2 u = 0;$$
$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \dot{u}|_{t=0} = u_1.$$

Если $u(t)$ решение задачи (1)—(5) такое, что $\| y(t) \|_{\mathscr{F}} \leqslant R$, то с помощью (8) легко проверить, что $\| B(y(\tau)) \|_{-1+\sigma} \leqslant C_R$, $0 < \sigma \leqslant 1/2$ (при $q \equiv 0$ соответствующее рассуждение см. в [2]). Поэтому, как и в [2], из (15) можно извлечь утверждение леммы.

В виду компактности множества K_A^σ в пространстве H из лемм 2 и 3 вытекает, что полугруппа S_t обладает максимальным аттрактором в H.

Конечномерность аттрактора полугруппы S_t автору доказать не удалось. Дело в том, что по сравнению со случаем, разобранным в [2], наличие запаздывания в системе (1)- (5) приводит к значительному расширению фазового пространства. Поэтому техника, развитая в [2], оказывается недостаточной для того, чтобы свести ситуацию к теореме О. А. Ладыженской. Справедливо, однако, следующее утверждение о конечности числа существенных мод системы (1)—(5).

Теорема 3. *При $\varepsilon_2 > 0$ найдется $N_0 > 0$ такое, что для любой пары решений $u_1(t)$, $u_2(t)$ задачи* (1)—(5) *из условия*

$$\lim_{t\to\infty} \{| (\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), e_k)_1 | + | (u_1(t) - u_2(t), e_k)_1 |\} = 0, k = 1, 2, \ldots, N_0,$$

вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} (\| u_1(t) - u_2(t) \|_2 + \| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_1) = 0.$$

Доказательство. Пусть $y_i(t) = (u_i(t);\ \dot{u}_i(t))$, а P_N — ортопроектор в $\mathscr{F}$ на $\mathrm{Lin}\{(e_k;\ 0),\ (0;\ e_k),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$. Тогда в силу (15), как и в [2], имеем, что

$$\| (1-P_N)(y_1(t) - y_2(t)) \|_{\mathscr{F}} \leqslant Me^{-\omega t} \{\| y_1(0) - y_2(0) \|_{\mathscr{F}} +$$
$$+ \frac{c}{(\mu_{N+1})} \sigma/2 \cdot \int_0^t e^{\omega\tau} \| B(y_1(\tau)) - B(y_2(\tau)) \|_{-1+\sigma} d\tau\}, \quad 0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}.$$

Но в силу леммы 1 и рассуждений, приведенных в [2], получаем, что

$$\| B(y_1(\tau)) - B(y_2(\tau)) \|_{-1+\sigma} \leqslant c_R \| y_1(\tau) - y_2(\tau) \|_{\mathscr{F}} +$$
$$+ c \Big[\int_{\tau - t_*}^{\tau} \| u_1(s) - u_2(s) \|_2^2\, ds \Big]^{1/2}.$$

Поэтому легко проверить, что

$$\|(1-P_N)(y_1(t)-y_2(t))\|_{\mathscr{F}} \leqslant Me^{-\frac{\omega}{2}t}\Big\{\|y_1(0)-y_2(0)\|_{\mathscr{F}}+$$
$$+\|u_1-u_2\|_{L^2(-t_*,0;\,H_0^2)}+c\mu_{N+1}^{-\frac{\sigma}{2}}\Big[\int_0^t e^{\omega\tau}\|y_1(\tau)-y_2(\tau)\|^2_{\mathscr{F}}\,d\tau\Big]^{1/2}\Big\}.$$

Рассуждая так же, как и в [2], из этой оценки можно извлечь утверждение теоремы.

В заключение отметим, что при $\alpha=\varepsilon_2=0$, следуя схеме, описанной в [8], и используя представленную выше технику, можно доказать глобальную теорему существования сильных решений (их определение при $q\equiv 0$ см. в [8]) системы (1)—(5) при условии, что $u_0(x)\in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, $u_1(x)\in H_0^2(\Omega)$, а функция $\varphi(t)\in L^2(-t_*,\ 0;\ H_0^2(\Omega))$ такова, что $\dot\varphi(t)\in L^2(-t_*,\ 0;\ H_0^2(\Omega))$. Такие решения определяются однозначно. Поэтому в подходящем функциональном пространстве может быть построена соответствующая эволюционная полугруппа S_t. Если параметры $\varepsilon_1>0$ и $U>1$ достаточно велики, то для полугруппы S_t имеет место аналог теоремы 2.

Список литературы: 1. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978. 184 с. 2. *Чуешов И. Д.* Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Мат. сб. 1987. 133, № 4. С. 419—428. 3. *Красильщикова Е. А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М., 1978. 224 с. 4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 422 с. 5. *Лиочс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 588 с. 6. *Бабин А. В.*, *Вишик М. И.* Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения // Успехи мат. наук. 1986. **41**, вып. 4. С. 3—34. 7. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1987. **42**, вып. 6. С. 25—60. 8. *Чуешов И. Д.* Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана/ Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 5. С. 22—25.

Поступила в редколлегию 10.02.89

СОДЕРЖАНИЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 54

Редактор *О. И. Григорьян*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. Н. Быкова*

ИБ № 13197

Сдано в набор 04.11.89. Подписано в печать 19.03.90. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,25, Усл. кр.-отт. 8.5. Уч.-изд. л. 10. Тираж 600 экз. Изд. № 1898. Зак. 9-449. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной ф-ки им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16. Зак. 627.