Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

магістра
на тему: "*Метод рухомого репера Картана у геометрії підмноговидів*"

Виконала:
студентка групи М-162
2 курс магістратури
спеціальність 111 Математика освітньо-професійна Математика
Антоненко Тетяна Олександрівна

Керівник:
к.ф. - м.н., доцент
Петров Євген В'ячеславович

Рецензент:
д. ф. - м. н., професор
Ямпольський Олександр Леонідович

Харків - 2025

Зміст

Вступ

Для обчислення геометричних характеристик поверхонь у рімановых многовидах використовують форми зв'язності та кривини. Це один із способів знаходження цих характеристик в диференціальній геометрії, зокрема в рімановій геометрії. Ця техніка належить французькому математику Елі Жозефу Картану, і вона займає проміжне положення між розрахунками в локальних координатах і означеннями, що застосовують векторні поля. У даній роботі ми детально розглядаємо ці методи, обчислюючи геометричні характеристики деяких класичних тривимірних геометрій за їхньою допомогою. Після цього ми переходимо до їх застосування у геометрії підмноговидів. Зауважимо, що детального викладення техніки форм саме для дослідження підмноговидів бракує у літературі. Ми самостійно виводимо з рівнянь Картана розкладення Гаусса і Вейнгартена, рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі, описуємо за їхньою допомогою кілька цікавих класів мінімальних поверхонь у геометрії Sol та отримуємо нові доведення теорем про неіснування та існування занурень тривимірних терстонівських геометрій Nil, Sol та $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ у чотиривимірні простори постійної кривини, що належать Л. Масальцеву.

1 Форми зв'язності та кривини

1.1 Форми афінної зв'язності та кривини

Нехай $\mathcal{M}$ - нескінченно гладкий многовид. Тоді *афінною зв'язністю* на $\mathcal{M}$ називається відображення ∇: $\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \longmapsto \mathcal{X}(\mathcal{M})$: $X, Y \longmapsto \nabla_X Y$, де виконуються умови:

1) $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$;
2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3) $\nabla_X fZ = X(f)Z + f\nabla_X Z$

Для будь-яких $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), f, h \in C^\infty$. Тоді $\nabla_X Y$ зветься *коваріантною похідною* Y за X.

В кожній точці $p \in \mathcal{M}$ існує $\mathcal{U} \ni p$ і поля $\{E_1, ..., E_n\} \subset \mathcal{X}(\mathcal{U})$, (де $n = \dim \mathcal{M}$) такі, що для будь-якої точки $q \in \mathcal{U}$ $\{(E_1)_q, ..., (E_n)_q\}$-базис дотичного поля $T_q\mathcal{M}$. Такий набір $\{E_i\}_{i=1}^n$ часто називають локальним базисом (репером) векторних полів на $\mathcal{U}$ і , звичайно, це не базис нескінченно вимірного векторного простору $\mathcal{X}(\mathcal{U})$, але для будь-якого гладкого поля $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$, розкладаючи для будь-якої точки $q \in \mathcal{U}$ $X_q = X^i(q)(E_i)_q$, отримуємо функції $\{X^i : q \longmapsto X^i(q)\}_{i=1}^n$ на $\mathcal{U}$. Вони гладкі: $X^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ для будь-яких i. Дійсно, для будь-якої точки $q \in \mathcal{U}$ нехай $(x_1, ..., x_n)$- локальні координати на околі $V \ni q$. Тоді на цьому околі розкласти поле $X = \widehat{x}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ і $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$ тоді і тільки, коли для будь-який i $\widehat{X}^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$. На $\mathcal{U} \cap V$ нехай $E_i = E_i^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}, i = \overline{1,n}$: тоді для i, j $E_i^j \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U} \cap V)$

$$\widehat{X}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = X = X^i E_i = X^i E_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Тоді маємо, що для будь-яких $j = \overline{1,n}$ $\widehat{X^j} = E^j X^i$. Звідси отримаємо $\begin{pmatrix} x^i \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{x}^i \\ \vdots \\ \widehat{x}^n \end{pmatrix}$, де матриця $E = (E_j^i)_{i,j=1}^n$, а отже і E^{-1} складається з функцій, які належать $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U} \cap V)$. Отже, для довільної точки $q \in \mathcal{U}$ і будь-якої i X^i гладка на околі $(\mathcal{U} \cap V)$ точки q. Тоді це означає, що $X^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ для довільних i.

Означення 1.1. *Нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ – локальний репер на $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Дуальним до нього локальним базисом (репером) форм зветься $\{\omega^i\}_{i=1}^n \subset \Omega^1(\mathcal{U})$:*

$$\omega^i(E_j) = \delta_j^i \tag{2}$$

для довільних $i, j = \overline{1, n}$.

Наслідок 1.1. *Для будь-якого репера* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *існує дуальний базис* $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ *і він єдиний.*

Означення 1.2. *Нехай* ∇ *– афінна зв'язність на* $\mathcal{M}$, $\{E_i\}_{i=1}^n$ *– локальний репер на* $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. *Формами зв'язності* ∇ *відносно* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *називають такі* $\{\omega_j^i \in \Omega^1(\mathcal{U})\}_{i,j=1}^n$, *що для довільного* $X \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$

$$\omega_j^i(X) = \omega^i(\nabla_X E_j), \tag{3}$$

де $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ *– дуальний до* $\{E_i\}_{i=1}^n$.

Наслідок 1.2. *Для будь-яких* i, j

$$\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i \omega^k, \tag{4}$$

де Γ_{kj}^i *– це узагальнені символи Кристофеля з* $\nabla_{E_k} E_j =: \Gamma_{kj}^i E_i$.

Тензором (оператором) кривини афінної зв'язності ∇ на $\mathcal{M}$ зветься відображення R: $\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \longmapsto \mathcal{X}(\mathcal{M})$:

$$X, Y, Z \longmapsto R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{5}$$

Крім того, він кососиметричний: $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ для довільних $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Формами кривини афінної зв'язності ∇ на $\mathcal{M}$ відносно локального репера $\{E_i\}_{i=1}^n$ на $\mathcal{U} \subset M$ називається $\{\Omega_j^i \in \Omega^2(\mathcal{U})\}_{i,j=1}^n$:

$$\Omega_j^i(X,Y) := \frac{1}{2}\omega^i(R(X,Y)E_j) \tag{6}$$

для будь-яких $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$.

Розкладемо $R(E_k, E_l)E_j =: R_{jkl}^i E_i$ і отримаємо $\{R_{jkl}^i = \omega^i(R(E_k, E_l)E_j \in C^\infty(\mathcal{U})\}_{i,j,k,l=1}^n$. З урахуванням кососиметричності, тобто $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$, отримаємо наступну формулу:

$$\Omega_j^i = \sum_{k<l} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l \tag{7}$$

для довільних i та j, де в якості базису використовуємо $\omega^k \wedge \omega^l$, а коефіцієнти - це коефіцієнти тензора кривини.

Теорема 1.1. *(Структурні рівняння Картана) (Див. [2])*

Для того, щоб обчислити форму зв'язності, використовують перше рівняння Картана, який має такий вигляд:

$$d\omega^i = -\omega^i_j \wedge \omega^j + T^i, \tag{8}$$

для будь-яких $i = \overline{1,n}$*;*

щоб з форми зв'язності обчислити форму кривини, використовують друге рівняння Картана, що має вигляд:

$$d\omega^i_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j, \tag{9}$$

для будь-яких $i, j = \overline{1,n}$.

1.2 Рімановий випадок

На відміну від афінного випадку в рімановому випадку використовується ортонормований репер іріманова зв'язність (Леві-Чівіта). Тобто нехай тепер $(\mathcal{M}, g)$ – гладкий рімановий многовид, тоді ріманова зв'язність метрики g однозначно визначається наступними умовами:

$-T = 0$ (відсутність скруту);

$-\nabla g = 0$ (узгодженість з метрикою)

що означає

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{10}$$

для кожних $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Нехай $\{\omega^i_j\}^n_{i,j=1}$ – форми зв'язності для афінної зв'язності ∇ на рімановому $(\mathcal{M}, g)$ відносно ортонормованого репера на $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.Тоді ∇ узгоджена з g на $\mathcal{U}$ тоді і тільки тоді, коли матриця форм зв'язності стає кососиметричною, тобто $\omega^i_j = -\omega^j_i$ для будь-яких $i, j = \overline{1,n}$.

Для зв'язності, узгодженої з метрикою, матриця форм кривини відносно ортонормованого репера на $\mathcal{U}$ теж кососиметрична, тобто $\Omega^i_j = -\Omega^j_i$ для довільних $i, j = \overline{1,n}$.

1.3 Обчислення форм зв'язності та кривини деяких тривимірних ріманових многовидів

Приклад 1.1. *Задамо ріманову метрику на* $\mathbb{R}^3$ *для геометрії Nil (Див. [6]), що визначена ортонормованим базисом векторних полів:* $E_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, E_2 = \dfrac{\partial}{\partial y} + x\dfrac{\partial}{\partial z}, E_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$*. Обчислимо ріманову зв'язність та кривини за допомогою рівнянь Картана.*

Перейдемо до дуального базису форм, яка є функцією вигляду $\omega^i = f^i_j dx^j$, тобто

$$\omega^1 = f^1_1 dx + f^1_2 dy + f^1_3 dz,$$
$$\omega^2 = f^2_1 dx + f^2_2 dy + f^2_3 dz,$$
$$\omega^3 = f^3_1 dx + f^3_2 dy + f^3_3 dz.$$

Запишемо відповідні рівняння:

$$\omega^1(E_1) = 1, \omega^1(E_2) = 0, \omega^1(E_3) = 0$$

$$\omega^2(E_1) = 0, \omega^2(E_2) = 1, \omega^2(E_3) = 0$$
$$\omega^3(E_1) = 0, \omega^3(E_2) = 0, \omega^3(E_3) = 1$$

Тоді для ω^1 отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} 1 = \omega^1(E_1) = f^1_1 \\ 0 = \omega^1(E_2) = f^1_2 + x f^1_3 \\ 0 = f^1_3 \end{cases}$$

Таким чином матимемо $f^1_1 = 1, f^1_2 = 0, f^1_3 = 0$. Підставляючи у функцію, отримаємо наступний вираз для ω^1: $\omega^1 = dx$. Аналогічно, $\omega^2 = dy$ і $\omega^3 = dz - xdy$.

Тоді ріманову метрику можна знайти так: $g = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = dx^2 + dy^2 + (dx - xdy)^2$
$= dx^2 + (1 + x^2)dy^2 - 2xdydz + dz^2$. Порахуємо форму об'єму:

$$dV = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = dx \wedge dy \wedge (dz - xdy) = dx \wedge dy \wedge dz$$

- збігається з евклідовою формою об'єму.

Обчислимо форму зв'язності. Її матриця матиме вигляд при $n = 3$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб знайти цю матрицю, використаємо перше рівняння Картана: $\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$. В нашому випадку отримаємо

$$d\omega^1 = d(dx) = 0, d\omega^2 = d(dy) = 0, d\omega^3 = d(dz - xdy) = -dx \wedge dy = -\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Знайдемо матрицю ω з рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega^1 \wedge \omega 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_2^1 \wedge \omega^2 + \omega_3^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega_2^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^3 \\ -\omega_3^1 \wedge \omega^1 - \omega_3^2 \wedge \omega^2 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо елементи матриці $\omega_2^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ за формулою (4), враховуючи кососиметричність і розкладаючи кожну форму за базисом, отримаємо:

$\omega_2^1 = \Gamma_{12}^1 \omega^1 + = \Gamma_{22}^1 \omega^2 + \Gamma_{32}^1 \omega^3$
$\omega_3^1 = \Gamma_{13}^1 \omega^1 + = \Gamma_{23}^1 \omega^2 + \Gamma_{33}^1 \omega^3$
$\omega_3^2 = \Gamma_{13}^2 \omega^1 + = \Gamma_{23}^2 \omega^2 + \Gamma_{33}^2 \omega^3.$

Тоді маємо наступну систему:

$$\begin{cases} 0 = \Gamma_{12}^1 \omega^1 \wedge \omega^2 + \Gamma_{32}^1 \omega^3 \wedge \omega^2 + \Gamma_{13}^1 \omega^1 \wedge \omega^3 + \Gamma_{23}^1 \omega^2 \wedge \omega^3 \\ 0 = -\Gamma_{22}^1 \omega^2 \wedge \omega^1 - \Gamma_{32}^1 \omega^3 \wedge \omega^1 + \Gamma_{13}^2 \omega^1 \wedge \omega^3 + \Gamma_{23}^2 \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^1 \wedge \omega^2 = -\Gamma_{23}^1 \omega^2 \wedge \omega^1 - \Gamma_{33}^1 \omega^3 \wedge \omega^1 - \Gamma_{13}^2 \omega^1 \wedge \omega^2 - \Gamma_{33}^2 \omega^3 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

Із системи отримаємо символи Кристофеля: $\Gamma_{23}^1 = \dfrac{1}{2}, \Gamma_{32}^1 = \dfrac{1}{2}, \Gamma_{13}^2 = \dfrac{1}{2}$. Також в силу кососиметричності $\Gamma_{21}^3 = -\Gamma_{23}^1 = -\dfrac{1}{2}, \Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{32}^1 = -\dfrac{1}{2}, \Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{13}^2 = \dfrac{1}{2}$. Підставимо ці символи в матрицю і отримаємо результат:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\omega^3 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ -\frac{1}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{1}{2}\omega^1 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & \frac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Інші символи Кристофеля дорівнюють 0. Це означає, що $\nabla_{E_2} E_3 = \nabla_{E_3} E_2 = \frac{1}{2} E_1, \nabla_{E_1} E_3 = \nabla_{E_3} E_1 = -\frac{1}{2} E_2, \nabla_{E_1} E_2 = -\nabla_{E_2} E_1 = \frac{1}{2} E_3, \nabla_{E_1} E_1 = \nabla_{E_2} E_2 = \nabla_{E_3} E_3 = 0$.

Тепер знайдемо форми кривини за формулою (7), яка є кососиметричною: $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$, зокрема $\Omega_i^i = 0$. Тобто $R_{jkl}^i = R_{ikl}^j$, крім того $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$. Тоді матриця форми кривини має кососиметричні елементи. І друге рівняння Картана застосуємо в такому вигляді: $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. В нашому випадку

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^1 & \Omega_3^1 \\ -\Omega_2^1 & 0 & \Omega_3^2 \\ -\Omega_3^1 & -\Omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} d\omega^3 & \frac{1}{2} d\omega^2 \\ -\frac{1}{2} d\omega^3 & 0 & -\frac{1}{2} d\omega^1 \\ -\frac{1}{2} d\omega^2 & \frac{1}{2} d\omega^1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\omega^3 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ -\frac{1}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{1}{2}\omega^1 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & \frac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\omega^3 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ -\frac{1}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{1}{2}\omega^1 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & \frac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega^3 \wedge \omega 2 & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\omega^2 \wedge \omega^1 & -\frac{1}{4}\omega^3 \wedge \omega^1 \\ \frac{1}{4}\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -\frac{1}{4}\omega^3 \wedge \omega^2 \\ -\frac{1}{4}\omega^1 \wedge \omega^3 & -\frac{1}{4}\omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}\omega^1 \wedge \omega^2 & \frac{1}{4}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ \frac{3}{4}\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & \frac{1}{4}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ -\frac{1}{4}\omega^1 \wedge \omega^3 & -\frac{1}{4}\omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix}.
$$

З цієї матриці виписуємо коефіцієнти:

$\Omega^1_2 = -\frac{3}{4}\omega^1 \wedge \omega^2$, тому $R^1_{121} = -R^1_{221} = -R^2_{112} = R^2_{121} = -\frac{3}{4}$;

$\Omega^1_3 = \frac{1}{4}\omega^1 \wedge \omega^3$, тому $R^1_{313} = -R^1_{331} = -R^3_{113} = R^3_{131} = \frac{1}{4}$;

$\Omega^2_3 = \frac{1}{4}\omega^2 \wedge \omega^3$, тому $R^2_{323} = -R^2_{332} = -R^3_{223} = R^3_{232} = \frac{1}{4}$,

а решта $R^i_{jkl} = 0$.

Ще обчислимо тензор Річчі – це симетрична форма $Ric = Ric_{ij}\omega^i\omega^j$, де $Ric_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{ikj}$, і коефіцієнти кососиметричні для довільних i, j $Ric_{ij} = Ric_{ji}$. В нашому випадку:

$Ric_{11} = R^k_{1k1} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} = -\frac{1}{2}$,

$Ric_{12} = R^k_{1k2} = R^1_{112} + R^2_{122} + R^3_{132} = 0$,

$Ric_{22} = R^k_{2k2} = R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} = -\frac{1}{2}$,

$Ric_{13} = R^k_{1k3} = R^1_{113} + R^2_{123} + R^3_{133} = 0$,

$Ric_{23} = R^k_{2k3} = R^1_{213} + R^2_{223} + R^3_{233} = 0$,

$Ric_{33} = R^k_{3k3} = R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} = \frac{1}{2}$.

Отже, $Ric = -\frac{1}{2}(\omega^1)^2 - \frac{1}{2}(\omega^2)^2 + \frac{1}{2}(\omega^3)^2$.

Приклад 1.2. *Задамо ріманову метрику на $\mathbb{R}^3$ для геометрії Sol (Див. [6]), що визначена ортонормованим базисом векторних полів:*

$E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial x} + e^{z}\dfrac{\partial}{\partial y}\right), E_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial x} - e^{z}\dfrac{\partial}{\partial y}\right), E_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$. *За допомогою рівнянь Картана знайдемо ріманову зв'язність та кривини.*

Будемо шукати дуальний базис форм для ω^1 за формулою $\omega^i = f^i_j dx^j$. Тоді, підставляючи коефіцієнти, отримаємо наступну:

$$\begin{cases} 1 = \omega^1(E_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f^1_1 e^{-z} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} f^1_2 e^{z} \\ 0 = \omega^1(E_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f^1_1 e^{-z} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} f^1_2 e^{z} \\ 0 = \omega^1(E_3) = f^1_3 \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи будуть $f^1_1 = \dfrac{e^z}{\sqrt{2}}, f^1_2 = \dfrac{e^{-z}}{\sqrt{2}}, f^1_3 = 0$. Тоді отримає вираз $\omega^1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx + e^{-z} dy)$.Аналогічно, $\omega^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx - e^{-z} dy), \omega^3 = dz$.

Порахуємо ріманову метрику та форму об'єму відповідно:

$g = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx + e^{-z} dy))^2 + (\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx - e^{-z} dy))^2 + dz^2 = e^z dx^2 + e^{-z} dy^2 + dz^2$;

$dV = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx + e^{-z} dy)) \wedge (\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx - e^{-z} dy)) \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$.

Використаємо перше рівняння Картана, що визначається за формулою $\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$:

$d\omega^1 = d(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx + e^{-z} dy)) = \omega^3 \wedge \omega^2, d\omega^2 = d(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^z dx - e^{-z} dy)) = \omega^3 \wedge \omega^1, d\omega^3 = d(dz) = 0$.

Знайдемо форму зв'язності. Для цього запишемо матрицю ω з рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \omega^3 \wedge \omega^2 \\ \omega^3 \wedge \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega^1_2 \wedge \omega^2 + \omega^1_3 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1_2 \wedge \omega^1 + \omega^2_3 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1_3 \wedge \omega^1 - \omega^2_3 \wedge \omega^2 \end{pmatrix}$$

Використаємо формулу (4), щоб знайти елементи матриці $\omega^1_2, \omega^1_3, \omega^2_3$, та врахуємо кососиметричність і розкладемо кожну форму за базисом і отримаємо:

$\omega^1_2 = \Gamma^1_{12}\omega^1 + \Gamma^1_{22}\omega^2 + \Gamma^1_{32}\omega^3$
$\omega^1_3 = \Gamma^1_{13}\omega^1 + \Gamma^1_{23}\omega^2 + \Gamma^1_{33}\omega^3$

$\omega_3^2 = \Gamma_{13}^2\omega^1 + \Gamma_{23}^2\omega^2 + \Gamma_{33}^2\omega^3.$

Тоді отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} \omega^3 \wedge \omega^2 = -\Gamma_{12}^1\omega^1 \wedge \omega^2 - \Gamma_{32}^1\omega^3 \wedge \omega^2 - \Gamma_{13}^1\omega^1 \wedge \omega^3 - \Gamma_{23}^1\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^3 \wedge \omega^1 = \Gamma_{22}^1\omega^2 \wedge \omega^1 + \Gamma_{32}^1\omega^3 \wedge \omega^1 - \Gamma_{13}^2\omega^1 \wedge \omega^3 - \Gamma_{23}^2\omega^2 \wedge \omega^3 \\ 0 = \Gamma_{23}^1\omega^2 \wedge \omega^1 + \Gamma_{33}^1\omega^3 \wedge \omega^1 + \Gamma_{13}^2\omega^1 \wedge \omega^2 + \Gamma_{33}^2\omega^3 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

Матимемо із системи такі символи Кристофеля: $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0, \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{13}^2 = 1$. В силу кососиметричності $\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{12}^3 = -1$. Інші символи дорівнюють 0. Це означає, що $\nabla_{E_2}E_3 = E_1, \nabla_{E_3}E_2 = 0, \nabla_{E_1}E_2 = \nabla_{E_2}E_1 = -E_3, \nabla_{E_1}E_3 = E_2, \nabla_{E_3}E_1 = 0, \nabla_{E_1}E_1 = \nabla_{E_2}E_2 = \nabla_{E_3}E_3 = 0$. Підставимо знайдені символи Кристофеля в матрицю і отримаємо результат:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega^1 \\ -\omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо форми кривини, враховуючи, що за формулою (7) вони кососиметричні, тобто $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$, зокрема $\Omega_i^i = 0$, і $R_{jkl}^i = R_{ikl}^j$, $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$. Отже, маючи кососиметричні елементи матриці форми кривини, друге рівняння Картана записується в такому вигляді: $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. В нашому прикладі:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^1 & \Omega_3^1 \\ -\Omega_2^1 & 0 & \Omega_3^2 \\ -\Omega_3^1 & -\Omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d\omega^2 \\ 0 & 0 & d\omega^1 \\ -d\omega^2 & -d\omega^1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega^1 \\ -\omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega^1 \\ -\omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^3 \wedge \omega^1 \\ 0 & 0 & \omega^3 \wedge \omega^2 \\ -\omega^3 \wedge \omega^1 & -\omega^3 \wedge \omega^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \wedge \omega^1 & 0 \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 \wedge \omega^2 & -\omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^1 \wedge \omega^3 & \omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

З отриманої матриці виділяємо коефіцієнти:

$\Omega_2^1 = \omega^1 \wedge \omega^2$, тому $R_{121}^1 = -R_{221}^1 = -R_{112}^2 = R_{121}^2 = 1$;

$\Omega_3^1 = -\omega^1 \wedge \omega^3$, тому $R_{313}^1 = -R_{331}^1 = -R_{113}^3 = R_{131}^3 = -1$;

$\Omega_3^2 = -\omega^2 \wedge \omega^3$, тому $R^2_{323} = -R^2_{332} = -R^3_{223} = R^3_{232} = -1$,

а решта $R^i_{jkl} = 0$.

Розглянемо обчислення тензора Річчі, який є симетричною формою $Ric = Ric_{ij}\omega^i\omega^j$, де $Ric_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{ikj}$. Коефіцієнти цього тензора симетричні для будь-яких i, j, тобто $Ric_{ij} = Ric_{ji}$. У нашому випадку:

$Ric_{11} = R^k_{1k1} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} = 0,$

$Ric_{12} = R^k_{1k2} = R^1_{112} + R^2_{122} + R^3_{132} = 0,$

$Ric_{22} = R^k_{2k2} = R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} = 0,$

$Ric_{13} = R^k_{1k3} = R^1_{113} + R^2_{123} + R^3_{133} = 0,$

$Ric_{23} = R^k_{2k3} = R^1_{213} + R^2_{223} + R^3_{233} = 0,$

$Ric_{33} = R^k_{3k3} = R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} = -2.$

Отже, $Ric = -2(\omega^3)^2$.

Приклад 1.3. *Задамо ріманову метрику* $\mathbb{R}^3$ *для геометрії* Sol *(Див. [6]), що визначена іншим ортонормованим базисом векторних полів:* $E_1 = e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial x}, E_2 = e^{z}\dfrac{\partial}{\partial y}, E_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$. *За допомогою рівнянь Картана знайдемо ріманову зв'язність та кривини, переконаємось, що вони ж такі самі, як в попередньому прикладі.*

Дуальний базис форм має вигляд: $\overline{\omega^1} = e^z dx, \overline{\omega^2} = e^{-z}dy, \overline{\omega^3} = dz$. Зокрема, матимемо ту ж саму метрику, що в прикладі 2.2, тобто: $g = (\overline{\omega^1})^2 + (\overline{\omega^2})^2 + (\overline{\omega^3})^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$.

Розглянемо перше рівняння Картана, яке описується наступною формулою: $\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$:

$d\omega^1 = d(e^z dx) = e^z dz \wedge dx, d\omega^2 = d(e^{-z}dx) = -e^{-z}dz \wedge dy, d\omega^3 = d(dz) = 0$.

Знайдемо форму зв'язності. Для цього запишемо матрицю ω з рівнянь:

$$\begin{pmatrix} e^z dz \wedge dx \\ -e^{-z}dz \wedge dy \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_2^1 \wedge \omega^2 + \omega_3^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega_2^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^3 \\ -\omega_3^1 \wedge \omega^1 - \omega_3^2 \wedge \omega^2 \end{pmatrix}$$

Скористаємося формулою (4) для обчислення елементів матриці $\omega_2^1, \omega_3^1, \omega_3^2$. При цьому врахуємо кососиметричність, розкладемо кожну форму за базисом та отримаємо:

$\omega_2^1 = \Gamma^1_{12}\omega^1 + \Gamma^1_{22}\omega^2 + \Gamma^1_{32}\omega^3$

$\omega_3^1 = \Gamma^1_{13}\omega^1 + \Gamma^1_{23}\omega^2 + \Gamma^1_{33}\omega^3$

$\omega_3^2 = \Gamma_{13}^2\omega^1 + \Gamma_{23}^2\omega^2 + \Gamma_{33}^2\omega^3.$

Тоді одержимо таку систему:

$$\begin{cases} e^z dz \wedge dx = -\Gamma_{12}^1 e^z dx \wedge e^{-z}dy - \Gamma_{32}^1 dz \wedge e^{-z}dy - \Gamma_{13}^1 e^z dx \wedge dz- \\ -\Gamma_{23}^1 e^{-z}dy \wedge dz \\ -e^{-z}dz \wedge dy = \Gamma_{22}^1 e^{-z}dy \wedge e^z dx + \Gamma_{32}^1 dz \wedge e^z dx - \Gamma_{13}^2 e^z dx \wedge dz- \\ -\Gamma_{23}^2 e^{-z}dy \wedge dz \\ 0 = \Gamma_{23}^1 e^{-z}dy \wedge e^z dx + \Gamma_{33}^1 dz \wedge e^z dx + \Gamma_{13}^2 e^z dx \wedge e^{-z}dy + \Gamma_{33}^2 dz \wedge e^{-z}dy \end{cases}$$

З системи отримаємо такі символи Кристофеля, враховуючи кососиметричність: $-\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{11}^3 = -1, \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{23}^3 = 1$. Всі інші символи будуть нульові. Введемо в матрицю отримані символи Кристофеля, що дозволить нам отримати результат:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \\ -\omega^1 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^z dx \\ 0 & 0 & -e^{-z}dy \\ -e^z dx & e^{-z}dy & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо форми кривини, враховуючи, що згідно з формулою (7) вони є кососиметричними, тобто $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$, зокрема $\Omega_i^i = 0$, а також виконуються співвідношення $R_{jkl}^i = R_{ikl}^j$ і $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$. Таким чином, з огляду на кососиметричність елементів матриці форми кривини, друге рівняння Картана набуває вигляду: $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$. У нашому випадку:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^1 & \Omega_3^1 \\ -\Omega_2^1 & 0 & \Omega_3^2 \\ -\Omega_3^1 & -\Omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} = \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d\omega^1 \\ 0 & 0 & -d\omega^2 \\ d\omega^1 & d\omega^2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \\ -\omega^1 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \\ -\omega^1 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^z dz \wedge dx \\ 0 & 0 & e^{-z}dz \wedge dy \\ -e^z dz \wedge dx & -e^{-z}dz \wedge dy & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & dx \wedge dy & 0 \\ dy \wedge dx2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & dx \wedge dy & e^z dz \wedge dx \\ dy \wedge dy & 0 & e^{-z}dz \wedge dy \\ -e^z dz \wedge dx & -e^{-z}dz \wedge dy & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 \wedge \omega^2 & -\omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^1 \wedge \omega^3 & \omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Відповідно, матричні елементи форми кривини визначаються наступним чином:

$\Omega^1_2 = \omega^1 \wedge \omega^2$, тоді $R^1_{212} = -R^1_{221} = -R^2_{112} = R^2_{121} = 1$;
$\Omega^1_3 = -\omega^1 \wedge \omega^3$, тоді $R^1_{313} = -R^1_{331} = -R^3_{113} = R^3_{131} = -1$;
$\Omega^2_3 = -\omega^2 \wedge \omega^3$, тоді $R^2_{323} = -R^2_{332} = -R^3_{223} = R^3_{232} = -1$,
інші $R^i_{jkl} = 0$.

Перейдемо до обчислення тензора Річчі, який має вигляд симетричної форми $Ric = Ric_{ij}, \omega^i \omega^j$, де елементи визначаються формулою $Ric_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R^k_{ikj}$. Ці коефіцієнти симетричні: $Ric_{ij} = Ric_{ji}$. У нашій ситуації це означає:

$Ric_{11} = R^k_{1k1} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} = 0,$
$Ric_{12} = R^k_{1k2} = R^1_{112} + R^2_{122} + R^3_{132} = 0,$
$Ric_{22} = R^k_{2k2} = R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} = 0,$
$Ric_{13} = R^k_{1k3} = R^1_{113} + R^2_{123} + R^3_{133} = 0,$
$Ric_{23} = R^k_{2k3} = R^1_{213} + R^2_{223} + R^3_{233} = 0,$
$Ric_{33} = R^k_{3k3} = R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} = -2.$
Тоді, $Ric = -2(\omega^3)^2$.

Отже, дійсно бачимо, що метрика з векторними $E_1 = e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial x}, E_2 = e^{z}\dfrac{\partial}{\partial y}, E_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$ має таку ж самуріманову зв'зність та кривину, що і метрика з векторними полями $E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial x} + e^{z}\dfrac{\partial}{\partial y}\right), E_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial x} - e^{z}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $E_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$.

Приклад 1.4. *На* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$ *задамо ріманову метрику геометрії* $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ *(Див. [6]), що визначена ортонормованим базисом векторних полів:* $E_1 = y\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial z}, E_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}, E_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$. *Використовуючи рівняння Картана, знайдемо ріманову зв'язність і тензор кривини.*

Шукатимемо дуальний базис форм для ω^1 за формулою $\omega^i = f^i_j dx^j$. Підставивши відповідні коефіцієнти, отримаємо такий вираз:

$$\begin{cases} 1 = \omega^1(E_1) = f^1_1 y - f^1_3 \\ 0 = \omega^1(E_2) = f^1_2 y \\ 0 = \omega^1(E_3) = f^1_3 \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи мають вигляд: $f^1_1 = \dfrac{1}{y}, f^1_2 = 0, f^1_3 = 0$. Звідси випливає вираз: $\omega^1 = \dfrac{1}{y}dx$. Аналогічно, отримуємо: $\omega^2 = \dfrac{1}{y}dy, \omega^3 = \dfrac{1}{y}dx + dz$.

Ріманову метрику можна визначити наступним чином:

$g = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = \dfrac{1}{y^2}dx^2 + \dfrac{1}{y^2}dy^2 + \left(\dfrac{1}{y}dx + dz\right)^2 = \dfrac{2}{y^2}dx^2 + \dfrac{1}{y^2}dy^2 + dz^2 + \dfrac{2}{y}dxdy.$

Обчислимо форму об'єму:

$dV = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \dfrac{1}{y}dx \wedge \dfrac{1}{y}dy \wedge \dfrac{1}{y}dx + dz = \dfrac{1}{y}dx \wedge \dfrac{1}{y}dy \wedge dz.$

Розглянемо форму зв'язності, матриця якої для $n = 3$ має вигляд:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Щоб визначити цю матрицю, скористаємося першим рівнянням Картана: $\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$. Для нашого прикладу отримаємо наступний результат: $d\omega^1 = d\left(\dfrac{1}{y}dx\right) = -\dfrac{1}{y^2}dy \wedge dx = -\omega^2 \wedge \omega^1, d\omega^2 = d\left(\dfrac{1}{y}dy\right) = 0, d\omega^3 = d\left(\dfrac{1}{y}dx + dz\right) = -\dfrac{1}{y^2}dy \wedge dx = -\omega^2 \wedge \omega^1.$

Для цього представимо матрицю ω, використовуючи рівняння:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \wedge \omega^1 \\ 0 \\ -\omega^2 \wedge \omega^1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & 0 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_2^1 \wedge \omega^2 + \omega_3^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega_2^1 \wedge \omega^1 + \omega_3^2 \wedge \omega^3 \\ -\omega_3^1 \wedge \omega^1 - \omega_3^2 \wedge \omega^2 \end{pmatrix}$$

Скористаємося формулою (4) для обчислення елементів матриці $\omega_2^1, \omega_3^1, \omega_3^2$. Враховуючи кососиметричність, розкладемо кожну з форм за базисом і отримаємо:

$\omega_2^1 = \Gamma_{12}^1\omega^1 + = \Gamma_{22}^1\omega^2 + \Gamma_{32}^1\omega^3$
$\omega_3^1 = \Gamma_{13}^1\omega^1 + = \Gamma_{23}^1\omega^2 + \Gamma_{33}^1\omega^3$
$\omega_3^2 = \Gamma_{13}^2\omega^1 + = \Gamma_{23}^2\omega^2 + \Gamma_{33}^2\omega^3.$

Тоді отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} \omega^2 \wedge \omega^1 = \Gamma_{12}^1\omega^1 \wedge \omega^2 + \Gamma_{32}^1\omega^3 \wedge \omega^2 + \Gamma_{13}^1\omega^1 \wedge \omega^3 + \Gamma_{23}^1\omega^2 \wedge \omega^3 \\ 0 = -\Gamma_{22}^1\omega^2 \wedge \omega^1 - \Gamma_{32}^1\omega^3 \wedge \omega^1 + \Gamma_{13}^2\omega^1 \wedge \omega^3 + \Gamma_{23}^2\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^2 \wedge \omega^1 = -\Gamma_{23}^1\omega^2 \wedge \omega^1 - \Gamma_{33}^1\omega^3 \wedge \omega^1 - \Gamma_{13}^2\omega^1 \wedge \omega^2 - \Gamma_{33}^2\omega^3 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

Отримуємо з системи такі значення символів Кристофеля: $\Gamma_{12}^1 = -1, \Gamma_{23}^1 = -\dfrac{1}{2}, \Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{32}^1 = \dfrac{1}{2}$. Через кососиметричність маємо $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = 1, \Gamma_{21}^3 =$

$-\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}, \Gamma^3_{12} = -\Gamma^2_{13} = \Gamma^1_{32} = -\Gamma^2_{31} = -\dfrac{1}{2}$. Усі інші символи дорівнюють нулю.

Це означає $\nabla_{E_1}E_1 = E_2$, $\nabla_{E_1}E_2 = -E_1 - \dfrac{1}{2}E_3$, $\nabla_{E_1}E_3 = \dfrac{1}{2}E_2$, $\nabla_{E_2}E_1 = \dfrac{1}{2}E_3$, $\nabla_{E_2}E_3 = -\dfrac{1}{2}E_1$, $\nabla_{E_2}E_2 = \nabla_{E_3}E_3 = 0$.

Підставляючи знайдені символи Кристофеля у матрицю, отримуємо результат:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 - \dfrac{1}{2}\omega^3 & -\dfrac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^1 + \dfrac{1}{2}\omega^3 & 0 & \dfrac{1}{2}\omega^1 \\ \dfrac{1}{2}\omega^2 & -\dfrac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо форму кривини з урахуванням кососиметричності за формулою (7), тобто $\Omega^i_j = -\Omega^j_i$, зокрема $\Omega^i_i = 0$, і $R^i_{jkl} = R^j_{ikl}$, $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$. Тому друге рівняння Картана, що включає кососиметричні елементи матриці кривини, записується у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega^1_2 & \Omega^1_3 \\ -\Omega^1_2 & 0 & \Omega^2_3 \\ -\Omega^1_3 & -\Omega^2_3 & 0 \end{pmatrix} = \Omega = d\omega + \omega\wedge\omega = \begin{pmatrix} 0 & -d\omega^1 - \dfrac{1}{2}d\omega^3 & -\dfrac{1}{2}d\omega^2 \\ d\omega^1 + \dfrac{1}{2}d\omega^3 & 0 & \dfrac{1}{2}d\omega^1 \\ d\dfrac{1}{2}\omega^2 & -\dfrac{1}{2}d\omega^1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 - \dfrac{1}{2}\omega^3 & -\dfrac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^1 + \dfrac{1}{2}\omega^3 & 0 & \dfrac{1}{2}\omega^1 \\ \dfrac{1}{2}\omega^2 & -\dfrac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 - \dfrac{1}{2}\omega^3 & -\dfrac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^1 + \dfrac{1}{2}\omega^3 & 0 & \dfrac{1}{2}\omega^1 \\ \dfrac{1}{2}\omega^2 & -\dfrac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{2}\omega^2\wedge\omega^1 & 0 \\ -\dfrac{3}{2}\omega^2\wedge\omega^1 & 0 & -\dfrac{1}{2}\omega^2\wedge\omega^1 \\ 0 & \dfrac{1}{2}\omega^2\wedge\omega^1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^1 & -\dfrac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^1 \\ \dfrac{1}{4}\omega^1\wedge\omega^2 & 0 & -\dfrac{1}{2}\omega^1\wedge\omega^2 - \dfrac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^2 \\ -\dfrac{1}{4}\omega^1\wedge\omega^3 & -\dfrac{1}{2}\omega^2\wedge\omega^1 - \dfrac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{4}\omega^2 \wedge \omega^1 & -\frac{1}{4}\omega^3 \wedge \omega^1 \\ -\frac{7}{4}\omega^2 \wedge \omega^1 & 0 & -\frac{1}{4}\omega^3 \wedge \omega^2 \\ -\frac{1}{4}\omega^1 \wedge \omega^3 & -\frac{1}{4}\omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнти матриці форми кривини виглядають наступним чином: $\Omega^1_2 = \omega^1 \wedge \omega^2$, тому $R^1_{221} = -R^1_{212} = -R^2_{121} = R^2_{112} = \frac{7}{4}$;

$\Omega^1_3 = -\frac{1}{4}\omega^3 \wedge \omega^1$, тому $R^1_{331} = -R^1_{313} = -R^3_{131} = R^3_{113} = -\frac{1}{4}$;

$\Omega^2_3 = -\frac{1}{4}\omega^3 \wedge \omega^2$, тому $R^2_{332} = -R^2_{323} = -R^3_{232} = R^3_{223} = -\frac{1}{4}$,

а решта $R^i_{jkl} = 0$.

Розглянемо обчислення тензора Річчі, який є симетричною формою, визначеною як $Ric = Ric_{ij}\omega^i\omega^j$, де компоненти обчислюються за формулою $Ric_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{ikj}$. При цьому сам тензор симетричний, тобто $Ric_{ij} = Ric_{ji}$ для довільних i та j. В нашому прикладі:

$Ric_{11} = R^k_{1k1} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} = -\frac{3}{2}$,

$Ric_{12} = R^k_{1k2} = R^1_{112} + R^2_{122} + R^3_{132} = 0$,

$Ric_{22} = R^k_{2k2} = R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} = -\frac{3}{2}$,

$Ric_{13} = R^k_{1k3} = R^1_{113} + R^2_{123} + R^3_{133} = 0$,

$Ric_{23} = R^k_{2k3} = R^1_{213} + R^2_{223} + R^3_{233} = 0$,

$Ric_{33} = R^k_{3k3} = R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} = \frac{1}{2}$.

Отже, $Ric = -\frac{3}{2}(\omega^1)^2 - \frac{3}{2}(\omega^2)^2 + \frac{1}{2}(\omega^3)^2$.

2 Форми зв'язності та друга фундаментальна форма підмноговида у рімановому многовиді

2.1 Розкладення Гаусса і Вейнгартена у термінах форм зв'язності

Нехай $(\mathcal{M}, r)$ – n -вимірний підмноговид у $(n+q)$ –вимірному рімановому многовиді $\overline{\mathcal{M}}$. Оберемо, принаймні локально в околі якоїсь точки $r(\mathcal{M})$, базис полів $\{e_1 ... e_{n+q}\}$ на $\overline{\mathcal{M}}$ так, що він ортонормований і для будь-якої точки $p \in \mathcal{M}$ (або з якогось околу в $\mathcal{M}$) $\{(e_1)_{r(p)}, ..., (e_n)_{r(p)}\}$ - базис дотичного простору $d_p r(T_p\mathcal{M})$, $\{(e_{n+1})_{r(p)}, ..., (e_{n+q})_{r(p)}\}$ – базис нормального простору $N_p\mathcal{M}$. Нехай $\{\omega^1, ..., \omega^{n+q}\}$ – відповідний базис форм такий, що $\omega(e_b) = \delta^a_b$ для будь-яких $a, b = \overline{1, n+q}$. Якщо ототожнити дотичні простори $T_p\mathcal{M}$ з їхніми образами під дією диференціала $d_p r(T_p\mathcal{M})$ для будь-якої точки p, то ω^a ототожняться з $r^*\omega^a$ – формами на $\mathcal{M}$. Тоді $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ – базис форм на M, дуальний до базису $\{e_1...e_n\}$, зокрема індукована метрика має вигляд $\sum_{i=1}^n (\omega^i)^2$, а форми, що відповідають нормальним полям, дорівнюють 0: $\omega^\alpha = 0$ на $\mathcal{M}$ для $\alpha = \overline{n+1, n+q}$. Згадаємо, що таке форма кривини: *форми кривини* – об'єкт, що визначають коваріантне диференціювання, тобто якщо $\overline{\nabla}$ це коваріантне диференціювання на $\overline{\mathcal{M}}$, тоді $\overline{\nabla}_{e_c} e_b = \omega_b^a(e_c)e_a$ для будь-якого C, тобто

$$\overline{\nabla} e_b = \omega_b^a e_a, \tag{11}$$

для будь-якого $b = \overline{1, n+q}$.

Далі будемо позначати $a, b, c, ... = \overline{1, n+q}, i, j, k, ... = \overline{1, n}, \alpha, \beta, \gamma, ... = \overline{n+1, n+q}$. Розпишемо вираз (11) у точках підмноговида, тоді таким чином отримаємо з означення наступні розкладення, що в геометрії підмноговидів називаються:

$\overline{\nabla} e_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha$ для будь-яких $i = \overline{1, n}$ - *розкладення Гаусса*;

$\overline{\nabla} e_\alpha = \omega_j^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta$ для будь-яких $\alpha = \overline{n+1, n+q}$ - *розкладення Вейнгартена.*

Оскільки все маємо в ортонормованому базисі, то матриця форм кривини кососиметрична, тобто $\omega_\alpha^i = -\omega_i^\alpha$ для будь-яких i, α.

Перевіримо, що елементи розкладень відповідають фундаментальним об'єктам геометрії підмноговидів, таким як компоненти зв'язності та форми кривини:

– Розкладемо $\omega_i^\alpha = -b_{ij}^\alpha \omega^j$ для будь-яких i, α. Тоді $(\overline{\nabla}_{e_j} e_i)^\perp = \omega_i^\alpha(e_j)e_\alpha = b_{ij}^\alpha e_\alpha$ для будь-яких i, j, тобто b_{ij}^α - коефіцієнт другої фундаментальної форми підмноговида.

– Поля ω_α^i "відповідають"за оператор Вейнгартена, тобто для будь-яких i, α $(\overline{\nabla}_{e_j} e_\alpha)^\intercal = \omega_\alpha^i(e_j)e_i = -\sum \omega_i^\alpha(e_j)e_i = -\sum b_{ij}^\alpha e_i$.

– Розкладемо для будь-яких α, β форму за базисом ω^i, тобто $\omega_\alpha^\beta = \mu_{\alpha\beta|i}\omega^i$. Тоді так само як і для другої фундаментальної форми для будь-яких i, α $(\overline{\nabla}_{e_i} e_\alpha)^\perp = \omega_\alpha^\beta(e_i)e_\beta = \sum_{\beta=n+1}^{n+q} \mu_{\alpha\beta|i} e_\beta$, тобто $\mu_{\alpha\beta|i}$ – коефіцієнт скруту підмноговида.

– Індукована зв'язність ∇ для будь-яких i, k це $\nabla_{e_k} e_i = (\overline{\nabla}_{e_k} e_i)^\intercal = \omega_i^j(e_k)e_j$, тобто ω_i^j – форми зв'язності ∇.

Запишемо структурні рівняння Картана для підмноговидів. Оскільки перше рівняння Картана для многовидів має вигляд

$$d\omega^a + \omega_\beta^a \wedge \omega^b = 0 \tag{12}$$

для будь-яких $a = \overline{1, n+q}$, то якщо його розписати в точках M для $a = i = \overline{1, n}$, то отримаємо перше рівняння Картана для підмноговида

$$d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j + \omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha = 0 \tag{13}$$

Але в точках підмноговида $\omega^\alpha = 0$, тому $d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j = 0$, це також перше рівняння Картана, але для метрики підмноговида. Це демонструє, що ω^i_j – це форми індукованої зв'язності ∇.

Для $a = \alpha = \overline{n+1, n+q}$ маємо $d\omega^\alpha = \omega^\alpha_j \wedge \omega^i + \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta = (b^\alpha_{ij}\omega^j) \wedge \omega^i$. На підмноговиді $\omega^\alpha = 0$ і $\omega^\beta = 0$, тоді $(\sum_{i,j=1}^n) b^\alpha_{ij}\omega^j \wedge \omega^i = 0$ і отримаємо

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} (b^\alpha_{ij} - b^\alpha_{ji})\omega^j \wedge \omega^i \tag{14}$$

Таким чином, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$ для будь-яких $i.j.\alpha$ дає умову симетричності для другої фундаментальної форми.

2.2 Формула обчислення другої фундаментальної форми

Позначимо в $\mathbb{R}^3$ базис $\{r_*e_1, r_*e_2, N\}$ через $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тоді можемо в точках поверхні перейти від стандартного глобального базису $\{E_1, E_2, E_3\}$ до базису $\{r_*e_1, r_*e_2, N\}$. Для цього запишемо матрицю переходу:

$(e_1, e_2, e_3) = (E_1, E_2, E_3)A$, де

$$A = \begin{pmatrix} (r_*e_1)_{E_1} & (r_*e_2)_{E_1} & N_{E_1} \\ (r_*e_1)_{E_2} & (r_*e_2)_{E_2} & N_{E_2} \\ (r_*e_1)_{E_3} & (r_*e_2)_{E_3} & N_{E_3} \end{pmatrix} \tag{15}$$

.

Оскільки це матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису тієї ж орієнтації, то вона є ортогональною, зокрема, $A^{-1} = A^T$.

Далі потрібно від стандартної пари з базису простору (E_1, E_2, E_3) і форм зв'язності $\overline{\omega}$ перейти до нової пари (e_1, e_2, e_3), тобто для дуального базису форм $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ маємо:

$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} (e_1, e_2, e_3) = I = \begin{pmatrix} \overline{\omega^1} \\ \overline{\omega^2} \\ \overline{\omega^3} \end{pmatrix} (E_1, E_2, E_3)$, де I одинична матриця. Отже, отримаємо

$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\omega^1} \\ \overline{\omega^2} \\ \overline{\omega^3} \end{pmatrix}.$

Нехай $\overline{\omega} = (\overline{\omega}^a_b)^3_{a,b=1}$ і $\omega = (\omega^a_b)^3_{a,b=1}$ – відповідні матриці зв'язності. Тоді знайдемо $\omega = (\omega^a_b)^3_{a,b=1}$ за допомогою першого рівняння Картана, яке записується наступним чином: $d\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}$. Зробимо заміну: $d(A^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix}) = -\omega \wedge A^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix}$. Обчислимо диференціал: $dA^{-1} \wedge A^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix} + A^{-1}d\begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix} = \omega \wedge A^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix}$. Тоді для рівняння Картана маємо: $A^{-1}dAA^{-1} \wedge \begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix} - A^{-1}\overline{\omega} \wedge \begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix} = -\omega \wedge A^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\omega^1}\\ \overline{\omega^2}\\ \overline{\omega^3}\end{pmatrix}$ Але $AA^{-1} = I$ і їх диференціал $dAA^{-1} + AdA^{-1} = 0$, то матриця зв'язності однозначно визначена своїм добутком, тобто $A^{-1}dAA^{-1} + A^{-1}\overline{\omega} = \omega A^{-1}$ і тоді $\omega = A^{-1}dA + A^{-1}\overline{\omega}A$. Це формула заміни матриці зв'язності при заміні базису. Таким чином довели теорему:

Теорема 2.1. *В точках поверхні матриця ω має вигляд*

$$\omega = A^{-1}dA + A^{-1}r^*\overline{\omega}A. \tag{16}$$

2.3 Обчислення других фундаментальних форм поверхонь і знаходження мінімальних поверхонь у тривимірних рімановых многовидах

Приклад 2.1. *Розглянемо гіперболічний гелікоїд - поверхню $\mathcal{M}$ у Sol (Див. [5]) з параметризацією $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Sol : (s,t) \longmapsto (x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}s, y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}s, t)$. Знайдемо коефіцієнти другої фундаментальної форми.*

Індуковану метрику, тобто першу фундаментальну форму, можна знайти як $\sum_{a=1}^3 (r^*\overline{\omega}^a)^2$. Спочатку знайдемо окремо кожен доданок:

$$r^*\overline{\omega}^1 = e^t d(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}s) = e^t(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}sdt + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}sdt) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sdt);$$

$$r^*\overline{\omega}^2 = e^t d(y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}s) = e^t(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}sdt + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}sdt) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sdt);$$

$$r^*\overline{\omega}^3 = dt.$$

Тоді $\sum_{a=1}^3 (r^*\overline{\omega}^a)^2 = (r^*\overline{\omega}^1)^2 + (r^*\overline{\omega}^2)^2 + (r^*\overline{\omega}^3)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sdt))^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sdt))^2 + dt^2 = ds^2 + dt^2(1 + s^2)$.

Представимо першу фундаментальну форму $\mathcal{M}$ у вигляді $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ для якихось форм ω^1 і ω^2 на $\mathcal{M}$, тобто:

$\sum_{a=1}^3 (r^*\overline{\omega}^a)^2 = ds^2 + dt^2(1+s^2) = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, де $\omega^1 = ds, \omega^2 = \sqrt{1+s^2}dt$.

Тоді знайдемо дуальний базис полів у вигляді $f\dfrac{\partial}{\partial s} + g\dfrac{\partial}{\partial t}$:

$e_1 = \dfrac{\partial}{\partial s}, e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}\dfrac{\partial}{\partial t}.$

Ці поля розглянемо у просторі $\mathbb{R}$. Подіємо на них диференціалом r:

$$r_*e_1 = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}\frac{\partial}{\partial y} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_2);$$

$$r_*e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}s\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}s\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\left(-\frac{s}{\sqrt{2}}E_1 + \frac{s}{\sqrt{2}}E_2 + E_3\right);$$

Зокрема, ця система ортонормована, тобто $< r_*e_i, r_*e_j >= \delta_{ij}$. Доповнимо r_*e_1, r_*e_2 до базиса дотичних площин $\overline{\mathcal{M}}$ у точках $\mathcal{M}$ одиничним нормальним полем N

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \end{vmatrix} = E_1\frac{1}{\sqrt{2+2s^2}} - E_2\frac{1}{\sqrt{2+2s^2}} + E_3\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Зробимо перевірку, що доповнення до базису є одиничним нормальним полем:

$$||r_*e_1 \times r_*e_2|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2(1+s^2)}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2(1+s^2)}}\right)^2 + \left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)^2} = 1.$$

Маючи базис $\{\omega^1, \omega^2\}$, можемо знайти форми зв'язності. Спочатку розглянемо перше рівняння Картана з формулою:

$$\begin{pmatrix}\omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n\end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix}\omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n\end{pmatrix}:$$

$$d\omega^1 = d(ds) = 0; d\omega^2 = d(\sqrt{1+s^2}dt) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}ds \wedge dt.$$

З рівнянь обчислимо матрицю ω:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds \wedge dt \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ -\omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ -\omega_2^1 \wedge \omega^1 \end{pmatrix}$$

Щоб визначити елементи матриці $\omega_2^1, \omega_3^1, \omega_3^2$, скористаємося формулою (4), врахуємо кососиметричність та подамо кожну форму в базисному розкладі. Тоді отримаємо

$\omega_2^1 = \Gamma_{12}^1 \omega^1 + \Gamma_{22}^1 \omega^2 + \Gamma_{32}^1 \omega^3.$

Маємо: $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds \wedge dt = \omega_2^1 \wedge \omega^1$, $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds \wedge dt = \omega_2^1 \wedge ds, \omega_2^1 = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt.$

В результаті матриця форми зв'язності має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt \\ \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі знайдемо форми кривини, скориставшись формулою (7), яка визначає кососиметричну структуру: $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$, зокрема $\Omega_i^i = 0$. Таким чином, матриця форм кривини є кососиметричною. Друге рівняння Картана в цьому випадку набуває вигляду: $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$;

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^1 \\ -\Omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d(-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt) \\ d(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt) & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt \\ \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt \\ \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} dt & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ds \wedge dt}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{ds \wedge dt}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{(1+s^2)^2} \\ \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{(1+s^2)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від глобального базису $\{E_1, E_2, E_3\}$ до локального $\{r_* e_1, r_* e_2, r_* e_3\}$ за формулою (15) буде виглядати так:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \frac{1}{\sqrt{2+2s^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2+2s^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} & \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця форм зв'язності має вигляд $\overline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{\omega^1} \\ 0 & 0 & -\overline{\omega^2} \\ -\overline{\omega^1} & \overline{\omega^2} & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^t dt \wedge ds \\ 0 & 0 & -e^{-t} dt \wedge ds \\ -e^t dt \wedge ds & e^{-t} dt \wedge ds & 0 \end{pmatrix}.$

то тоді запишемо заміну матриці зв'язності при заміні базису в точках поверхні:

$$r^*\overline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^*\overline{\omega}^1 \\ 0 & 0 & -r^*\overline{\omega}^2 \\ -r^*\overline{\omega}^1 & r^*\overline{\omega}^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ds - sdt) \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(ds + sdt) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(ds - sdt) & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ds + sdt) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1 + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1 - \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1 + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді знайдемо ω за формулою (16), де

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2+2s^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}, \text{ отримаємо:}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2+2s^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2+2s^2}} & \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) & d(-\dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}}) & d(\dfrac{1}{\sqrt{2+2s^2}}) \\ d(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) & d(\dfrac{s}{\sqrt{2+2s^2}}) & d(-\dfrac{1}{\sqrt{2+2s^2}}) \\ d0 & d(\dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}) & d(\dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}) \end{pmatrix} +$$

$$
+\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\
-\frac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \frac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\\
\frac{1}{\sqrt{2+2s^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2+2s^2}} & \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2)\\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1+\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2)\\
-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^1+\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\omega^2) & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & \frac{1}{\sqrt{2+2s^2}}\\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{s}{\sqrt{2+2s^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2+2s^2}}\\
0 & \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} & \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}
\end{pmatrix} =
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}dt & -\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}dt\\
\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}dt & 0 & -\frac{s^2}{1+s^2}ds\\
\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}dt & \frac{s^2}{1+s^2}ds & 0
\end{pmatrix}
$$

Отже, з цієї матриці випливає, що маємо два члени матриці $\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}dt$ і $\frac{s^2}{1+s^2}ds$, які відповідають за другу квадратичну форму, причому $b_{11}\omega^1 + b_{22}\omega^2$ це $\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}dt$, а $b_{12}\omega^1+b_{22}\omega^2$ це $\frac{s^2}{1+s^2}ds$. Тоді, з цих виразів отримаємо коефіцієнти такі, що $b_{21} = b_{12} = \frac{s^2}{1+s^2}ds$, а $b_{11} = b_{22} = 0$, і це означає, що поверхня мінімальна, бо середня кривина $H = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) = 0$.

Зовнішня (гаусова) кривина поверхні визначається за формулою: $K_{ext} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{s^4}{(1+s^2)^2}$. Тоді з форми кривини поверхні внутрішня кривина це $K_{int} = -\frac{1}{(1+s^2)^2}$. Зовнішня кривина і внутрішня кривина пов'язані рівнянням Гаусса, різниця $K_{int} - K_{ext} = -\frac{-1+s^4}{(1+s^2)^2} = \frac{s^2-1}{(1+s^2)}$ - це секційна кривина Sol у напрямку дотичної площини до поверхні. І дійсно, ця площина натягнута на ортонормований базис $r_*e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_2) = e_1^i E_i$ і $r_*e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(-\frac{s}{\sqrt{2}}E_1 + \frac{s}{\sqrt{2}}E_2 + E_3) = e_2^j E_j$, тому секційна кривина $K = \overline{R}_{ijkl}e_1^i e_2^j e_1^k e_2^l$, де $\overline{R}_{ijkl}$ - коефіцієнти матриці кривини Sol, а

$$\overline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} & -\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^3} \\ -\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} & 0 & -\overline{\omega^2} \wedge \overline{\omega^3} \\ \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^3} & \overline{\omega^2} \wedge \overline{\omega^3} & 0 \end{pmatrix} \text{ і}$$

$\overline{R}_{1212} = -\overline{R}_{1221} = -\overline{R}_{2112} = \overline{R}_{2121} = 1;$
$\overline{R}_{1212} = -\overline{R}_{1221} = -\overline{R}_{2112} = \overline{R}_{2121} = 1;$
$\overline{R}_{1313} = -\overline{R}_{1331} = -\overline{R}_{3113} = \overline{R}_{3131} = -1;$
$\overline{R}_{2323} = -\overline{R}_{2332} = -\overline{R}_{3223} = \overline{R}_{3232} = -1.$

Отже, обчислимо секційну кривину K:

$= 1(e_1^1e_2^2e_1^1e_2^2 - e_1^1e_2^2e_1^2e_2^1 - e_1^2e_2^1e_1^1e_2^2 + e_1^2e_2^1e_1^2e_2^1) + (-1)(e_1^1e_2^3e_1^1e_2^3 - e_1^1e_2^3e_1^3e_2^1 - e_1^3e_2^1e_1^1e_2^3 + e_1^3e_2^1e_1^3e_2^1) + (-1)(e_1^2e_2^3e_1^2e_2^3 - e_1^2e_2^3e_1^3e_2^2 - e_1^3e_2^2e_1^2e_2^3 + e_1^3e_2^2e_1^3e_2^2) = (\frac{s^2}{4(1+s^2)} - (-\frac{s^2}{4(1+s^2)}) - (-\frac{s^2}{4(1+s^2)}) + \frac{s^2}{4(1+s^2)}) - (\frac{1}{2(1+s^2)} - 0 - 0 + 0) - (\frac{1}{2(1+s^2)} - 0 - 0 + 0) = \frac{s^2 - 1}{(1+s^2)}.$

Приклад 2.2. *Розглянемо у геометрії Sol експоненційний циліндр з параметризацією* $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Sol : (s,t) \longmapsto (t, y_0 + \lambda e^s, s)$ *(Див. [1]). Знайдемо коефіцієнти другої фундаментальної форми і переконаємось, що він мінімальний.*

Індукована метрика, або перша фундаментальна форма, виражається як сума квадратів форм $r^*\overline{\omega}^a$: $\sum_{a=1}^3 (r^*\overline{\omega}^a)^2$. Далі обчислимо кожен з доданків окремо:

$r^*\overline{\omega}^1 = e^s dt;\ r^*\overline{\omega}^2 = e^{-s}d(y_0 + \lambda e^s) = \lambda ds;\ r^*\overline{\omega}^3 = ds.$

Тобто $\sum_{a=1}^3 (r^*\overline{\omega}^a)^2 = (r^*\overline{\omega}^1)^2 + (r^*\overline{\omega}^2)^2 + (r^*\overline{\omega}^3)^2 = (e^s dt)^2 + (\lambda ds)^2 + ds^2 = e^{2s}dt^2 + \lambda^2 ds^2 + ds^2$, де $\omega^1 = \sqrt{\lambda^2+1}ds, \omega^2 = e^s dt$.

Визначимо дуальний базис полів у формі $f\frac{\partial}{\partial s} + g\frac{\partial}{\partial t}$:

$e_1 = \frac{\partial}{\partial s},\ e_2 = \frac{1}{e^s}\frac{\partial}{\partial t}.$

Розмістимо ці поля в $\mathbb{R}$ та діятимемо на них диференціалом r:

$r_*e_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\left(0 + \lambda e^2\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) =$

$\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}(\lambda E_2 + E_3);$

$r_* e_2 = \dfrac{1}{e^s}\left(\dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = \dfrac{1}{e^s}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + 0 + 0\right) = E_1.$

Зазначимо, що ця система є ортонормованою, тобто виконується рівність $< r_* e_i, r_* e_j >= \delta_{ij}$. Доповнимо вектори $r_* e_1$ та $r_* e_2$ до базиса дотичної площини $\overline{M}$ у точках поверхні M одиничним нормальним полем N:

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + E_2\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} - E_3\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}.$$

Переконаймось, що вектор, яким ми доповнили базис, є нормальним полем одиничної довжини:

$$||r_* e_1 \times r_* e_2|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2} = 1.$$

Маючи базис ω^1, ω^2, можемо перейти до знаходження форм зв'язності, спираючись на перше рівняння Картана, що записується у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = -\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}:$$

$d\omega^1 = d(\sqrt{1+\lambda^2}) = 0; d\omega^2 = d(e^s dt) = e^s ds \wedge dt.$

Тепер, виходячи з отриманих рівнянь, обчислимо відповідну матрицю ω:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^s ds \wedge dt \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ -\omega_2^1 & 0) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ -\omega_2^1 \wedge \omega^1 \end{pmatrix}$$

Для обчислення елементів $\omega_2^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ скористаємося формулою (4). Враховуючи кососиметричність зв'язності та базисний розклад форм, одержимо:

$\omega_2^1 = \Gamma_{12}^1 \omega^1 + \Gamma_{22}^1 \omega^2 + \Gamma_{32}^1 \omega^3.$

Отримали: $e^s ds \wedge dt = \omega_2^1 \wedge \omega^1, e^s ds \wedge dt = \omega_2^1 \wedge \sqrt{\lambda^2+1} ds, \omega_2^1 = \dfrac{e^s}{\sqrt{\lambda^2+1}} dt = -\omega_2^1.$

Узагальнюючи, маємо наступну матрицю форм зв'язності:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} dt \\ \dfrac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} dt & 0 \end{pmatrix}.$$

Наступним кроком є визначення форм кривини згідно з формулою (7), яка задає кососиметричну структуру: $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$, зокрема $\Omega_i^i = 0$. Це означає, що матриця Ω є кососиметричною. Тоді друге рівняння Картана матиме наступний вид: $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$;

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_2^1 \\ -\Omega_2^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d(\frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}) \\ d(\frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}) & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ -\frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ -\frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e^s ds \wedge dt}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{e^s ds \wedge dt}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

Відповідно до отриманої форми кривини, гаусова кривина поверхні задається виразом: $K = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

Матриця переходу від глобального базису $\{E_1, E_2, E_3\}$ до локального $\{r_* e_1, r_* e_2, r_* e_3\}$ згідно з формулою 15 має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} & 0 & -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо перетворення матриці зв'язності, що виникає при заміні базису в точках поверхні:

$$r^* \overline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^s dt \\ 0 & 0 & -\lambda ds \\ -e^s dt & \lambda ds & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda \omega^1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ -\omega^2 & \frac{\lambda \omega^1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо ω за формулою (16), використовуючи обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \end{pmatrix}, \text{ отримуємо:}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d(1) & 0 \\ d(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}) & 0 & d(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}) \\ d(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}) & 0 & d(-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda\omega^1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ -\omega^2 & \frac{\lambda\omega^1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} & 0 & -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\omega^1\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\omega^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 & -\frac{\omega^2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ -\frac{\omega^1\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\omega^2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, з отриманої матриці випливає наявність двох елементів: $-\frac{\omega^1\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ і $\frac{\omega^2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, які відповідають компонентам другої фундаментальної форми. Зокрема, вираз $b_{11}\omega^1 + b_{22}\omega^2 = \frac{\omega^1\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, а $b_{12}\omega^1 + b_{22}\omega^2 = \frac{\omega^2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. Порівнюючи ці рівності, приходимо до висновку, що $b_{12} = 0$, а $b_{11} = -b_{22} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, і це вказує на мінімальність поверхні, бо $H = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) = 0$.

Приклад 2.3. *Знайдемо другу фундаментальну форму, умову мінімальності загальної циліндричної поверхні з параметризацією $u(s,t) = (x(t), y(t), s)$ у Sol, розв'язати її, знайшовши усі мінімальні циліндри.*

Першу фундаментальну форму (індуковану метрику) поверхні можна обчислити як суму квадратів форм за формулою $\sum_{a=1}^{3}(u^*\overline{\omega}^a)^2$. Розглянемо кожну форму:

$u^*\overline{\omega}^1 = e^s d(x(t)) = e^s x'(t)dt$;

$u^*\overline{\omega}^2 = e^{-s} d(y(t)) = e^{-s} y'(t)dt$;

$u^*\overline{\omega}^3 = ds$.

Тоді $\sum_{a=1}^{3}(u^*\overline{\omega}^a)^2 = (u^*\overline{\omega}^1)^2 + (u^*\overline{\omega}^2)^2 + (u^*\overline{\omega}^3)^2 = (e^s x'(t)dt)^2 + (e^{-s}y'(t)dt)^2 + ds^2 = (e^{2s}x'^2(t) + e^{-2s}y'(t))dt^2 + ds^2$.

Подамо першу фундаментальну форму поверхні $\mathcal{M}$ у вигляді суми квадратів ω^1 і ω^2, визначених на $\mathcal{M}$, тобто:

$\sum_{a=1}^{3}(u^*\overline{\omega}^a)^2 = (e^{2s}x'^2(t) + e^{-2s}y'(t))dt^2 + ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, де $\omega^1 = ds$, $\omega^2 = \sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}dt$.

Розглянемо дуальний базис полів у формі $f\dfrac{\partial}{\partial s} + g\dfrac{\partial}{\partial t}$:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Нехай ці поля задані у просторі $\mathbb{R}$; подіємо на них диференціалом функції r:

$$u_* e_1 = \frac{\partial}{\partial z} = E_3;$$

$$u_* e_2 = \frac{1}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}}\left(x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}}(x'(t)e^s E_1 + y'(t)e^{-s}E_2).$$

Зауважимо, що дана система є ортонормованою, тобто виконується тотожність $< r_* e_i, r_* e_j >= \delta_{ij}$. Доповнимо вектори $r_* e_1$ і $r_* e_2$ до базису дотичної площини $\overline{M}$ у точках поверхні M, ввівши одиничне нормальне поле N:

$$\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{x'(t)e^s}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}} & \dfrac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}}E_1 + \frac{x'(t)e^s}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}}E_2 + 0.$$

Відповідно до формули 15, матриця переходу від глобального базису E_1, E_2, E_3 до локального базису $r_* e_1, r_* e_2, r_* e_3$ має наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{x'(t)e^s}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}} & -\dfrac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}} \\ 0 & \dfrac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}} & \dfrac{x'(t)e^s}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2 + e^{-2s}(y'(t))^2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проаналізуємо перетворення матриці зв'язності, яке відбувається при зміні базису на поверхні:

$$r^*\overline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^s x'(t)dt \\ 0 & 0 & -e^{-s}y'(t)dt \\ -e^s x'(t)dt & e^{-s}y'(t)dt & 0 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою (16) та оберненою матрицею, щоб обчислити

ω:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0\\ -\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

отримуємо:

$$\omega=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0\\ -\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & d(\frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}}) & d(-\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}})\\ 0 & d(\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}}) & d(\frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}})\\ d(1) & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0\\ -\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{s}x'(t)dt\\ 0 & 0 & -e^{-s}y'(t)dt\\ -e^{s}x'(t)dt & e^{-s}y'(t)dt & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & -\frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}}\\ 0 & \frac{y'(t)e^{-s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}} & \frac{x'(t)e^{s}}{\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}}\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зробимо заміну $\Delta=\sqrt{e^{2s}(x'(t))^2+e^{-2s}(y'(t))^2}$:

$$\omega=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ \frac{x'(t)e^{s}}{\Delta} & \frac{y'(t)e^{-s}}{\Delta} & 0\\ -\frac{y'(t)e^{-s}}{\Delta} & \frac{x'(t)e^{s}}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2x'e^{-s}y'^2ds+e^{-s}y'(x''y'-x'y'')dt}{\Delta^3} & \frac{2y'e^sx'^2ds-e^sx'(x'y''-x''y')dt}{\Delta^3} \\ 0 & -\frac{2y'e^sx'^2ds+e^sx'(x'y''-x''y')dt}{\Delta^3} & \frac{2x'e^{-s}y'^2ds+e^{-s}y'(x''y'-x'y'')dt}{\Delta^3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x'y'ds}{\Delta} + \frac{-e^{-2s}(x'y''-x''y')(x'^2e^{4s}+y')dt}{\Delta^2} \\ 0 & -\frac{2x'y'ds}{\Delta} + \frac{-e^{-2s}(x'y''-x''y')(x'^2e^{4s}+y')dt}{\Delta^2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-e^{2s}x'^2+e^{-2s}y'^2)dt}{\Delta} & \frac{2x'y'dt}{\Delta} \\ \frac{(e^{2s}x'^2-e^{-2s}y'^2)dt}{\Delta} & 0 & \frac{2x'y'ds}{\Delta^2} - \frac{(x'y''-x''y')dt}{\Delta^2} \\ -\frac{2x'y'dt}{\Delta} & -\frac{2x'y'ds}{\Delta^2} + \frac{(x'y''-x''y')dt}{\Delta^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, з отриманої матриці видно, що в ній присутні два елементи: $-\dfrac{2x'y'dt}{\Delta}$ та $-\dfrac{2x'y'ds}{\Delta^2}+\dfrac{(x'y''-x''y')dt}{\Delta^2}$, які відповідають компонентам другої фундаментальної форми. Зокрема, маємо: $b_{11}\omega^1 + b_{21}\omega^2 = -\frac{2x'y'dt}{\Delta}$ та $b_{12}\omega^1 + b_{22}\omega^2 = -\frac{2x'y'ds}{\Delta^2} + \frac{(x'y''-x''y')dt}{\Delta^2}$. Порівнюючи ці співвідношення, отримуємо: $b_{12} = -\dfrac{2x'y'}{\Delta^2}$, а також $b_{22} = -\dfrac{2x'y'ds}{\Delta^2} + \dfrac{(x'y''-x''y')dt}{\Delta^2}, b_{11} = 0$. Це свідчить про те, що $H = \dfrac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) = 0$. Умова мінімальності $H = \dfrac{1}{2}(0 - \dfrac{x'y''-x''y'}{\Delta^2}) = 0$ зводиться до $b_{22} = 0$, тому розв'яжемо рівняння $x'y''-x''y'$:

$x'y''-x''y' = 0 \Rightarrow \dfrac{y''}{x'} = \dfrac{x''}{x'}\dfrac{y'}{x'} \Rightarrow u = \dfrac{y'}{x'} \Rightarrow u' = \dfrac{y''x'-y'x''}{x'^2} = 0 \Rightarrow u' = 0 \Rightarrow u = k$

$\dfrac{y'}{x'} = k \Rightarrow \int y'ds = \int kx'dt \Rightarrow y = kx + C$ і $x' = 0$, де $C \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.2. *Повні мінімальні циліндри у Sol є вертикальними площинами.*

Зауважимо, що коефіцієнти другої форми $b_{12} = -\dfrac{2x'y'}{\Delta^2}$ і $b_{22} = -\dfrac{2x'y'ds}{\Delta^2} + \dfrac{(x'y''-x''y')dt}{\Delta^2}$ усі дорівнюють 0, тобто поверхня є цілком геодезичною тоді і тільки тоді, коли $x' = 0$ і $x = C$ або $y' = 0$ і $y = C$ (Див. [5]).

3 Форми кривини та основні рівняння геометрії підмноговидів

3.1 Рівняння Гаусса у термінах форм кривини та зв'язності

Нехай $\{\overline{\Omega}_b^a\}_{a,b=1}^{n+q}$ - форми кривини многовиду $\overline{\mathcal{M}}$, де $\overline{R}(e_c, e_d)e_b = \overline{\Omega}_b^a(e_c, e_d)e_a$ або як раніше згадували, що для будь-яких a, b, c форми кривини розкладається за базисом ω_c і ω_d $\overline{\Omega}_b^a = \sum_{c<d} \overline{R}_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d$. Розглянемо друге рівняння Картана для $\overline{\mathcal{M}}$, яке має вигляд для будь-яких a, b:

$$\overline{\Omega}_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c \tag{17}$$

.

Розглянемо його окремі випадки. Якщо $a = i, b = j = \overline{1, n}$, тоді маємо наступне: $\overline{\Omega}_j^i = d\omega_c^i + \omega_c^a \wedge \omega_j^c$. Тоді за сумою від $k = 1$ до n і за сумою від $\alpha = n + 1$ до $n + q$ розкладемо $\omega_c^a \wedge \omega_j^c$ на дві внутрішні суми і отримаємо: $\overline{\Omega}_j^i = d\omega_c^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_\alpha^i \wedge \omega_j^\alpha$. Можемо побачити, що деякі доданки $d\omega_c^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ - це інше рівняння Картана, але для підмноговиду $\overline{\mathcal{M}}$. Оскільки має $\omega_\alpha^i \wedge \omega_j^\alpha$, то користуючись кососиметричністю $\omega_\alpha^i = -\omega_i^\alpha$, цей вираз розкладається за базисом $(-b_{ik}^\alpha \omega^k) \wedge (b_{jl}^\alpha \omega^l)$. Винесемо $-b_{ik}^\alpha \omega^k$ і $b_{il}^\alpha \omega^l$ через те, що $\sum_{\alpha=n+1}^{n+q}(-b_{ik}^\alpha \omega^k) \wedge (b_{jl}^\alpha \omega^l)$ йде за $k, l = \overline{1, n}$ незалежно одне від одного. Тоді запишемо за парами $k < l$: $\overline{\Omega}_j^i = \Omega_j^i + \sum_\alpha \sum_{k<l}(-b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l - b_{il}^\alpha b_{ik}^\alpha \omega^l \wedge \omega^k)$. В силу кососиметричності форм зв'язності одержуємо $\overline{\Omega}_j^i = \Omega_j^i - \sum_\alpha \sum_{k<l}(b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha - b_{il}^\alpha b_{jk}^\alpha)\omega^l \wedge \omega^k$, де $\Omega_j^i = \sum_{k<l} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$ - форма кривини $\mathcal{M}$ або що те ж саме це від e_k і e_l - коефіцієнти розкладення $R(e_k, e_l)e_j = \Omega_j^i(e_k, e_l)e_i$ для всіх j, k, l. Можемо побачити, що $\overline{\Omega}_j^i = \sum_{c<d} \overline{R}_{jcd}^i \omega^c \wedge \omega^d$. Але на многовиді $\omega^\alpha = 0$ для $\alpha = n + 1$. Тому $\overline{\Omega}_j^i = \sum_{k,l} = \overline{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$. Прирівнявши коефіцієнти для будь-яких $i, j, k.l = \overline{1, n}$, одержимо

$$\overline{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i - \sum_\alpha (b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha - b_{il}^\alpha b_{jk}^\alpha). \tag{18}$$

Ця рівність називається рівняння Гаусса.

3.2 Рівняння Кодацці у термінах форм кривини та зв'язності

Розглянемо другий випадок для $a = \alpha = \overline{n + 1, n + q}$ і $b = i = \overline{1, n}$. Маємо $\Omega_i^\alpha = d\omega_i^\alpha + \omega_c^\alpha \wedge \omega_i^c$. Також зробимо розкладення $\omega_c^\alpha \wedge \omega_i^c$ на дві внутрішні суми і матимемо $\Omega_i^\alpha = d\omega_i^\alpha + \omega_j^\alpha \wedge \omega_i^j + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega_i^\beta$. Розпишемо кожнен коефіцієнт цього виразу, взявши їхній вигляд за розкладенням форм зв'язності та кривини:

$dw_i^\alpha = d(b_{il}^\alpha \omega^l) = db_{il}^\alpha \wedge \omega^l + db_{ij}^\alpha d\omega^j =$[Використаємо перше рівняння Картана для підмноговида $\mathcal{M}$]$= e_k(b_{il}^\alpha)\omega^k \wedge \omega^l + b_{ij}^\alpha(-\omega_l^j \wedge \omega^l) = e_k(b_{il}^\alpha)\omega^k \wedge \omega^l - b_{ij}^\alpha \Gamma_{kl}^j \omega^k \wedge \omega^l = (e_k(b_{il}^\alpha) + b_{ij}^\alpha \Gamma_{lk}^j)\omega^k \wedge \omega^l$;

$\omega_j^\alpha \wedge \omega_i^j = b_{jl}^\alpha \omega^l \wedge \Gamma_{ki}^j \omega^k = b_{jk}^\alpha \Gamma_{li}^j (\omega^k \wedge \omega^l)$;

$\omega_\beta^\alpha \wedge \omega_i^\beta = -\mu_{\alpha\beta|k}\omega^k \wedge b_{il}^\beta \omega^l$.

Тепер підставляємо у рівність, а після перезапишемо це як суму k і l, що впорядковані зростанням $k < l$:

$\overline{\Omega}_i^\alpha = (e_k(b_{il}^\alpha) - b_{ij}^\alpha \Gamma_{kl}^j + b_{jk}^\alpha \Gamma_{li}^j - \mu_{\alpha\beta|k})\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{1 \le k < l \le n}(e_k(b_{il}^\alpha) + b_{ij}^\alpha \Gamma_{lk}^j + b_{jk}^\alpha \Gamma_{li}^j - \mu_{\alpha\beta|k})\omega^k \wedge \omega^l - (e_l(b_{ik}^\alpha) - b_{ij}^\beta \Gamma_{lk}^j + b_{jl}^\alpha \Gamma_{ki}^j - \mu_{\alpha\beta|l})\omega^l \wedge \omega^k = \sum_{k<l}(e_k(b_{il}^\alpha + b_{ij}^\alpha(\Gamma_{lk}^j - \Gamma_{kl}^j) + b_{jk}^\alpha \Gamma_{li}^j - \mu_{\alpha\beta|k} - e_l(b_{ik}^\alpha) - b_{jl}^\alpha \Gamma_{ki}^j + \mu_{\alpha\beta|l} b_{ik}^\beta)\omega^k \wedge \omega^l$.

Ці рівності звуться *рівняннями Кодацці.* Позначимо $b_{ik,l}^\alpha := e_l(b_{ik}^\alpha) - b_{jk}^\alpha \Gamma_{li}^j - b_{ij}^\alpha \Gamma_{lk}^j$. Згадаємо означення про коваріантне диференціювання другої фундаментальної форми:

$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) := \nabla_X^\perp(B(Y,Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$.

Тоді для будь-яких i, k, l маємо:

$(\nabla_{e_l}^\perp B)(e_i, e_k) = \nabla_{e_l}^\perp(B(e_i, e_k)) - B(\nabla_{e_l} e_i, e_k) - B(e_i, \nabla_{e_l} e_k) = \nabla_{e_l}^\perp(b_{ik}^\alpha e_\alpha) - B(\Gamma_{li}^j e_j, e_k) - B(e_i, \Gamma_{lk}^j e_j) = e_l(b_{ik}^\alpha) + b_{ik}^\alpha \nabla_{e_l}^\perp e_\alpha - \Gamma_{li}^j b_{jk}^\alpha e_\alpha - \Gamma_{lk}^j b_{ij}^\alpha e_\alpha = b_{ik,l}^\alpha e_\alpha + b_{ik}^\beta \sum_\alpha \mu_\beta \alpha | l e_\alpha^l - \mu_{\alpha\beta|l}$.

Продовжимо далі рівність:

$\overline{\Omega}_i^\alpha = \sum_{k,l}(b_{il,k}^\alpha - b_{il}^\beta \mu_{\alpha\beta|k} - b_{ik,l}^\alpha + b_{ik}^\beta \mu_{\alpha\beta|l})\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{k<l}\omega^\alpha((\nabla_{e_k}^\perp B)(e_i, e_l) - (\nabla_{e_l}^\perp B)(e_i, e_k)\omega^k \wedge \omega^l$.

Розпишемо ліву частину цієї рівності: $\overline{\Omega}_i^\alpha = \sum_{k<l} R_{ikl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l$

В результаті цього для всіх α, i, k, l отримаємо в коефіцієнтах наступне: $\overline{R}_{ikl}^\alpha = b_{il,k}^\alpha - b_{ik,l}^\alpha - (b_{il}^\beta \mu_{\alpha\beta|k} - b_{ik}^\beta \mu_{\alpha\beta|l})$ або за рівністю виразів ω^α

$$\omega^\alpha(\overline{R}(e_k, e_l)e_i) = b_{il,k}^\alpha - b_{ik,l}^\alpha - (b_{il}^\beta \mu_{\alpha\beta|k} - b_{ik}^\beta \mu_{\alpha\beta|l}), \tag{19}$$

що є "векторним"рівнянням Кодацці.

Перепишемо це рівняння у вигляді $0 = (\overline{\Omega}_i^1)_{i=1}^3 = d(\omega_i^1) + \omega_i^1 \wedge \omega$, де ω - матриця зв'язності. В ω_i^1 i змінюється від 1 до 3. Представимо цей вектор-рядок як добуток матриці-рядка з базисних форм ω^1, ω^2, ω^3 на транспоновану матрицю другої форми, тобто

$$\left(b_{1k}\omega^k, b_{2k}\omega^k, b_{3k}\omega^k\right) = \left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right) B^{\mathrm{T}},$$

де $B = B^{\mathrm{T}}$ - симетрична матриця другої форми. Транспонуємо: $\left(-\omega_1^i\right) = B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$. Тоді рівняння Кодацці перетвориться на $d\left(\omega_1^i\right) - \omega^{\mathrm{T}} \wedge \left(\omega_1^i\right) = 0$.

Оскільки матриця зв'зності ω кососиметрична, то $d\left(\omega_1^i\right) + \omega^{\mathrm{T}} \wedge \left(\omega_1^i\right) = 0$.

Зробимо підстановку замість ω_1^i: $d\left(B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}\right) + \omega^{\mathrm{T}} \wedge B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = 0$.

Якщо B складається з констант, то в такому разі $d\left(B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}\right) = Bd \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$[За першим рівнянням Картана]$= -B\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$.

Тоді отримаємо нове рівняння Кодацці в матричному вигляді для постійних коефіцієнтів, яке будемо використовувати для всіх геометрій Nil, Sol, $SL(2, \mathbb{R})$:

$$B\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \omega \wedge B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \omega B \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

.

В загальному випадку, тобто для непостійних коефіцієнтів рівняння Кодацці $d\left(B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}\right) + \omega \wedge B \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = 0$ набуватиме нового вигляду $dB \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} - B\omega \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} + \omega B \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = 0$. Матриця dB складатиметься з диференціалів b_{ij}, тобто $dB = (db_{ij}) = (e_k(b_{ij}\omega^k)$. А якщо її помножити на $\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$, то отримаємо

$$dB\wedge\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(-e_2(b_{11})+e_1(b_{12}))\omega^1\wedge\omega^2+(-e_3(b_{11})+e_1(b_{13}))\omega^1\wedge\omega^3+\\ (-e_2(b_{12})+e_1(b_{22}))\omega^1\wedge\omega^2+(-e_3(b_{12})+e_1(b_{23}))\omega^1\wedge\omega^3+\\ (-e_2(b_{13})+e_1(b_{23}))\omega^1\wedge\omega^2+(-e_3(b_{13})+e_1(b_{33}))\omega^1\wedge\omega^3+\end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{matrix}+(-e_3(b_{12})+e_2(b_{13}))\omega^2\wedge\omega^3\\ +(-e_3(b_{22})+e_2(b_{23}))\omega^2\wedge\omega^3\\ +(-e_3(b_{32})+e_2(b_{33}))\omega^2\wedge\omega^3\end{matrix}\Bigg)$$

3.3 Рівняння Річчі у термінах форм кривини та зв'язності

Розглянемо третій випадок для $a=\alpha$, $b=\beta=\overline{n+1,n+q}$. Підставимо ці індекси у формулу (17): $\overline{\Omega}^\alpha_\beta=d\omega^\alpha_\beta+\omega^\alpha_c\wedge^c_\beta$. Після розкладення добутку $\omega^\alpha_c\wedge\omega^c_\beta$ на дві внутрішні суми ми отримаємо $\overline{\Omega}^\alpha_\beta=d\omega^\alpha_\beta+\omega^\alpha_i\wedge\omega^c_\beta+\omega^\alpha_\gamma\wedge\omega^\gamma_\beta$. Розпишемо кожен доданок аналогічно до попередніх двох випадків для форми зв'язності, форм, що відповідають за другу фундаментальну форму, форм нормальної зв'язності відповідно і матимемо:

$\overline{\Omega}^\alpha_\beta=d(-\mu_{\alpha\beta|i}\omega^i)+\sum_i(b^\alpha_{ik}\omega^k)\wedge(-b^\beta_{il}\omega^l)+\sum_\gamma(-\mu_{\alpha\gamma|k}\omega^k)\wedge(-\mu_{\gamma\beta|l}\omega^l)=$[За першим рівнянням Картана]$=-d\mu_{\alpha\beta|l}\omega^l+\mu_{\alpha\beta|i}\omega^i_l\wedge\omega^l+(-\sum_{i=1}^n b^\alpha_{ik}b^\beta_{il}+\sum_{\gamma=n+1}^{n+q}\mu_{\alpha\gamma|k}\mu_{\alpha\beta|l})\omega^k\wedge\omega^l=(-e_k(\mu_{\alpha\beta|l})+\mu_{\alpha\beta|i}\Gamma^i_{kl}-\sum_i b^\alpha_{ik}b^\beta_{il}+\sum_\gamma\mu_{\alpha\gamma|k}\mu_{\alpha\beta|l})\omega^k\wedge\omega^l=\sum_{k<l}(-e_k(\mu_{\alpha\beta|l})+e_l(\mu_{\alpha\beta|k})+\mu_{\alpha\beta|i}(\Gamma^i_{kl}-\Gamma^i_{lk})+\sum_\gamma(\mu_{\alpha\gamma|k}\mu_{\alpha\beta|l}-\mu_{\alpha\gamma|l}\mu_{\alpha\beta|k})-\sum_i(b^\alpha_{ik}b^\beta_{il})\omega^k\wedge\omega^l$.

Також представимо ліву частину цієї рівності в розгорнутому вигляді: $\overline{\Omega}^\alpha_\beta=\sum_{k<l}\overline{R}^\alpha_{\beta kl}\omega^k\wedge\omega^l$.

Позначимо вигляд оператора кривини нормальної зв'язності:

$R^\perp(X,Y)\xi=\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi-\nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi-\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$, де X,Y - дотичні поля, ξ - нормальне поле, $\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$ - диференціювання в напрямку дужки Лі.

Якщо підставити замість дотичних полів базисні e_k і e_l в якості нормального базисного e_α і записати за попереднім означенням про вигляд оператора кривини, то спочатку розписуємо нормальні зв'язності через коефіцієнти скруту, e_k та e_l розписується як різниця двох коваріантних похідних, тобто для всіх α,k,l одержимо:

$R^\perp(e_k,e_l)e_\alpha=\nabla^\perp_{e_k}(\nabla^\perp_{e_k}e_\alpha)-\nabla^\perp_{e_l}(\nabla^\perp_{e_k}e_\alpha)-\nabla^\perp_{[e_k,e_l]}e_\alpha=\nabla^\perp_{e_k}(\sum_\beta\mu_{\alpha\beta|l}e_\beta)-\nabla^\perp_{e_l}(\sum_\beta\mu_{\alpha\beta|k}e_\beta)-\nabla^\perp_{\nabla_{e_k}e_l-\nabla_{e_l}e_k}e_\alpha=\sum_\beta(e_k(\mu_{\alpha\beta|l})e_\beta+\mu_{\alpha\beta|l}\nabla^\perp_{e_k}e_\beta-e_l(\mu_{\alpha\beta|k})-\mu_{\alpha\beta|k}\nabla^\perp_{e_l}e_\beta)-\nabla^\perp_{(\Gamma^i_{kl}-\Gamma^i_{lk}e_i}e_\alpha$.

Далі розпишемо коваріантні похідні через коефіцієнти скруту і замінимо індекс β на γ, виносимо коефіцієнти і розписуємо як коваріантні дифернціювання в нормальній зв'язності:

$R^{\perp}(e_k, e_l)e_\alpha = \sum_\beta(e_k(\mu_{\alpha\beta|l} - e_l(\mu_{\alpha\beta|k}) + \sum_\gamma(\mu_{\alpha j|l}\mu_{\alpha\beta|k} - \mu_{\alpha j|k}\mu_{\alpha\beta|l}) - (\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk})\mu_{\alpha\beta|i}e_\beta$.

Коефіцієнти при e_β - це коефіцієнти цього оператора кривини, тоді $R^{\perp}(e_k, e_l)e_\alpha = (R^{\perp})^\beta_{\alpha kl}e_\beta$, де R ортогональна.

В силу кососиметричності операторів $\mu_{\alpha\beta|k}$ і $\mu_{\alpha\beta|l}$ в правій частині рівності стоїть ортогональна $(R^{\perp})^\alpha_{\beta kl}$ і далі маємо для будь-яких α, β, k, l результат

$$\overline{R}^\alpha_{\beta kl} = (R\perp)^\alpha_{\beta kl} - \sum_i (b^\alpha_{ik}b^\beta_{il} - b^\alpha_{il}b^\beta_{ik}), \tag{22}$$

що є рівнянням Річчі.

3.4 Теореми про неіснування занурень тривимірних ріманових многовидів у простори постійної кривини

Доведемо методами форм Картана теореми з роботи [4].

Теорема 3.1. *Не існує занурення тривимірного многовида Nil у чотиривимірний простір постійної секційної кривини.*

Оскільки ковимірність в цьому випадку рівна 1, то нетривіального рівняння Річчі немає. Оскільки всюди $\alpha = 1$, то далі буде b_{ij}. Тоді в рівняння Гаусса за формулою (18) в лівій частині буде матриця кривини простору постійної кривини в ортонормованому базисі з константою, а справа складатиметься з матриці кривини Nil і внутрішнього добутку певних частин матриці зв'язності, що визначаються другою формою:

$$\begin{pmatrix} 0 & c\omega^1\wedge\omega^2 & c\omega^1\wedge\omega^3 \\ -c\omega^1\wedge\omega^2 & 0 & c\omega^2\wedge\omega^3 \\ -c\omega^1\wedge\omega^3 & -c\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} = (\overline{\Omega}^i_j)^3_{i,j=1} = \Omega + (\omega^i_1)\wedge(\omega^1_j) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}\omega^1\wedge\omega^2 & \frac{1}{4}\omega^1\wedge\omega^3 \\ \frac{3}{4}\omega^1\wedge\omega^2 & 0 & \frac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 \\ -\frac{1}{4}\omega^1\wedge\omega^3 & -\frac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{1k}\omega^k \\ -b_{2k}\omega^k \\ -b_{3k}\omega^k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{1l}\omega^l & b_{2l}\omega^l & b_{3l}\omega^l \end{pmatrix}.$$

Виконаємо обчислення внутрішнього добутка, де дістанемо кососиметричну матрицю:

$$(\overline{\Omega}^i_j)^3_{i,j=1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}\omega^1\wedge\omega^2 & \frac{1}{4}\omega^1\wedge\omega^3 \\ \frac{3}{4}\omega^1\wedge\omega^2 & 0 & \frac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 \\ -\frac{1}{4}\omega^1\wedge\omega^3 & -\frac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & b_{1k}b_{2l}\omega^k\wedge\omega^l & b_{1k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l \\ -b_{1k}b_{2l}\omega^k\wedge\omega^l & 0 & b_{2k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l \\ -b_{1k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l & -b_{2k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l & 0 \end{pmatrix}.$$

При $i = 1$, $j = 2$; $i = 1$, $j = 3$; $i = 2$, $j = 3$ розпишемо $b_{1k}b_{2l}\omega^k \wedge \omega^l$, $b_{1k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l$, $b_{2k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l$ відповідно за парами k і l, де $k < l$, тобто

$b_{1k}b_{2l}\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{1\le k<l\le 3}(b_{1k}b_{2l} - b_{1l}b_{2k})\omega^k \wedge \omega^l = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\omega^1 \wedge \omega^2 + (b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21})\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})\omega^2 \wedge \omega^3$;

$b_{1k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{1\le k<l\le 3}(b_{1k}b_{3l} - b_{1l}b_{3k})\omega^k \wedge \omega^l = (b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^2 + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32})\omega^2 \wedge \omega^3$;

$b_{2k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l = \sum_{1\le k<l\le 3}(b_{2k}b_{3l} - b_{2l}b_{3k})\omega^k \wedge \omega^l = (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^2 + (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)\omega^2 \wedge \omega^3$.

Порівнюючи елементи в кожній сумі першого рядка і другого стобчика матриць $i = 1$, $j = 2$, першого рядка і третього стобчика матриць $i = 1$, $j = 3$, другого рядка і третього стобчика матриць $i = 2$, $j = 3$ відповідно, то матимемо наступні 6 різних рівнянь:

$c = -\frac{3}{4} - (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)$;
$c = \frac{1}{4} - (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)$;
$c = \frac{1}{4} - (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)$;
$0 = 0 - (b_{11}b_{23} - b_{13}b_{12})$;
$0 = 0 - (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32})$;
$0 = 0 - (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})$.

Розглянемо випадок, коли $c \neq \frac{1}{4}$. Якщо п'яте рівняння помножити на b_{33} і відняти шосте рівняння, що помножене на b_{23}, то матимемо $b_{13}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) = 0$ і звідси $b_{13} = 0$, бо з першого рівняння $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = \frac{1}{4} - c$. І навпаки, якщо виконати віднімання між п'ятим рівнянням, що помножене на b_{23}, і шостим, помножене на b_{22},то отримаємо $b_{12} = 0$ з $b_{12}(b_{33}b_{22} - b_{23}^2) = 0$. Далі із першого, другого та четвертого рівняння виразимо $b_{22},\ b_{33},\ b_{23}$ через b_{11}:

$b_{22} = \dfrac{-\frac{3}{4} - c}{b_{11}};\ b_{33} = \dfrac{\frac{1}{4} - c}{b_{11}};\ b_{23} = 0.$

Підставивши їх в $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = \dfrac{1}{4} - c$, то в результаті отримаємо, що

$$b_{11} = \sqrt{-\frac{3}{4} - c};\ b_{22} = \sqrt{-\frac{3}{4} - c} \text{ і } b_{33} = \frac{\frac{1}{4} - c}{\sqrt{-\frac{3}{4} - c}}.$$

Якщо $c = \dfrac{1}{4}$, тоді підставивши в попередні перші три рівняння $-1 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$, $b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = 0$, $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0$, одержимо, що $b_{13} = b_{23} = b_{33} = 0$ і $b_{12}^2 - b_{11}^2 b_{22} = 1$.

Далі використовуємо рівняння Кодацці за формулою (20). В нашому випадку буде виглядати так, якщо підставимо конкретну матрицю зв'язності ω для Nil:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\omega^3 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ -\frac{1}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{1}{2}\omega^1 \\ -d\frac{1}{2}\omega^2 & \frac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\omega^3 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ -\frac{1}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{1}{2}\omega^1 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & \frac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Випишемо розв'язок у загальному вигляді b_{ij} і помітимо, що $(B\omega)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\omega^{\mathrm{T}} = -\omega B$:

$$\begin{pmatrix} -b_{12}\omega^3 - b_{13}\omega^2 & b_{11}\omega^3 + b_{13}\omega^1 & b_{11}\omega^2 - b_{12}\omega^1 \\ -b_{22}\omega^3 - b_{23}\omega^2 & b_{12}\omega^3 + b_{23}\omega^1 & b_{12}\omega^2 - b_{22}\omega^1 \\ -b_{23}\omega^3 - b_{33}\omega^2 & b_{13}\omega^3 + b_{33}\omega^1 & b_{13}\omega^2 - b_{23}\omega^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b_{12}\omega^3 - b_{13}\omega^2 & -b_{22}\omega^3 - b_{23}\omega^2 & -b_{23}\omega^3 - b_{33}\omega^2 \\ b_{11}\omega^3 + b_{13}\omega^1 & b_{12}\omega^3 + b_{23}\omega^1 & b_{13}\omega^3 + b_{33}\omega^1 \\ b_{11}\omega^2 - b_{12}\omega^1 & b_{12}\omega^2 - b_{22}\omega^1 & b_{13}\omega^2 - b_{23}\omega^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Перемножимо ліву і праву частини і приведемо подібні:

$$\begin{pmatrix} 2b_{13}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ 2b_{23}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ 2b_{33}\omega_1 \wedge \omega_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{13}\omega^1 \wedge \omega^2 + b_{12}\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{22} - b_{33})\omega^2 \wedge \omega^3 \\ b_{23}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-b_{11} + b_{33})\omega^1 \wedge \omega^3 - b_{12}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ (-b_{11} - b_{22})\omega^1 \wedge \omega^2 - b_{23}\omega^1 \wedge \omega^3 + b_{13}\omega^2 \wedge \omega^3 \end{pmatrix}.$$

В результаті отримаємо умову, що $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$ і $b_{11} = b_{22} = b_{33}$. Утвориться протиріччя, бо якщо прирівняти b_{22} і b_{33}, тобто $\sqrt{-\dfrac{3}{4} - c} =$

$$\frac{\frac{1}{4}-c}{\sqrt{-\frac{3}{4}-c}}$$, то отримаємо, що $c=-\frac{3}{4}$.

У випадку $c=\frac{1}{4}$ $b_{11},\ b_{22},\ b_{12}$ з $b_{12}^2-b_{11}b_{22}=1$ не обов'язково постійні. Тоді підставимо $b_{13}=b_{23}=b_{33}=0$ у матрицю диференціалів (21) і раніше отримані частини рівняння Кодацці:

$$\begin{pmatrix}(-e_2(b_{11})+e_1(b_{12}))\omega^1\wedge\omega^2-e_3(b_{11})\omega^1\wedge\omega^3-e_3(b_{12})\omega^2\wedge\omega^3\\(-e_2(b_{12})+e_1(b_{22}))\omega^1\wedge\omega^2-e_3(b_{12})\omega^1\wedge\omega^3-e_3(b_{22})\omega^2\wedge\omega^3\\0\end{pmatrix}-0-$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}b_{12}\omega^1\wedge\omega^3+b_{22}\omega^2\wedge\omega^3\\-b_{11}\omega^1\wedge\omega^3-b_{12}\omega^2\wedge\omega^3\\-(b_{11}+b_{22}\omega^1\wedge\omega^2\end{pmatrix}=0.$$

Підставимо раніше знайдені b_{ij}, прирівняємо матриці і подібні елементи, то матимемо таку систему рівнянь вже з узгодженими елементами :

$$\begin{cases}b_{12}^2+b_{11}^2=1;\\e_2(b_{11})=e_1(b_{12});\\e_2(b_{12})=-e_1(b_{11});\\e_3(b_{11})=-\frac{1}{2}b_{12};\\e_3(b_{12})=\frac{1}{2}b_{11}\end{cases}.$$

Якщо продиференціюємо $b_{12}^2+b_{11}^2=1$ за e_1, то вийде $2b_{11}e_1(b_{11})+2b_{12}e_1(b_{12})=0$ і за e_2 матимемо $2b_{11}e_2(b_{11})+2b_{12}e_2(b_{12})=0$. Підставимо в рівняння Кодацці за e_2 замість $e_2(b_{12})$ підставимо із системи $-e_1(b_{11})$ і замість $e_2(b_{11})$ буде $e_1(b_{12})$. Отже, матимемо

$$\begin{cases}b_{11}e_1(b_{11})+b_{12}e_1(b_{12})=0;\\-b_{12}e_1(b_{11})+b_{11}e_1(b_{12})=0\end{cases}.$$

Це можна записати в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\-b_{12}&b_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1(b_{11})\\e_1(b_{12}\end{pmatrix}=0.$$

Оскільки матриця b_{ij} з ненульовим визначником, тоді $e_1(b_{11})=e_1(b_{12})=0$ і як наслідок матимемо, що $e_2(b_{11})=e_2(b_{12})=0$. З $e_2(b_{11})$ саме b_{11} має задовільняти рівнянню $\frac{\partial b_{11}}{\partial y}+x\frac{\partial b_{11}}{\partial z}=0$ з вигляду базисного поля E_2 для всіх x. При цьому $e_1(b_{11})=\frac{\partial b_{11}}{\partial x}=0$. Це означає, що $\frac{\partial b_{11}}{\partial y}$ і $\frac{\partial b_{11}}{\partial z}$ не залежать від

x, тобто $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial y} = \dfrac{\partial b_{11}}{\partial z} = 0$, в тому числі $b_{11} = const$. Аналогічно отримаємо, що $b_{12} = const$. Тоді $e_3(b_{11}) = e_3(b_{12}) = 0$ і в підсумку $b_{12} = b_{11} = 0$, що суперечить $b_{12}^2 + b_{11}^2 = 1$. І це означає, що занурення тривимірного многовида Nil у чотиривимірний простір постійної секційної кривини не існує.

Теорема 3.2. *Не існує занурення тривимірного многовиду Sol у чотиривимірний простір з постійною секційною кривиною при $c \neq -1$, але існує при $c = -1$.*

Так як $\alpha = 1$, то зліва у рівнянні Гаусса за формулою (18) — кривина простору сталої кривини, справа — кривина Sol та добутки елементів зв'язності, які задаються другою формою і при множенні дадуть кососиметричну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & c\omega^1 \wedge \omega^2 & c\omega^1 \wedge \omega^3 \\ -c\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & c\omega^2 \wedge \omega^3 \\ -c\omega^1 \wedge \omega^3 & -c\omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix} = (\overline{\Omega}_j^i)_{i,j=1}^3 = \Omega + (\omega_1^i) \wedge (\omega_j^1) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^1 \wedge \omega^2 & -\omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^1 \wedge \omega^3 & \omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{1k}\omega^k \\ -b_{2k}\omega^k \\ -b_{3k}\omega^k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{1l}\omega^l & b_{2l}\omega^l & b_{3l}\omega^l \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 \wedge \omega^2 & -\omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 & 0 & -\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^1 \wedge \omega^3 & \omega^2 \wedge \omega^3 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & b_{1k}b_{2l}\omega^k \wedge \omega^l & b_{1k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l \\ -b_{1k}b_{2l}\omega^k \wedge \omega^l & 0 & b_{2k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l \\ -b_{1k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l & -b_{2k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $i = 1$, $j = 2$; $i = 1$, $j = 3$; $i = 2$, $j = 3$, розглянемо вирази $b_{1k}b_{2l}\omega^k \wedge \omega^l$, $b_{1k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l$ і $b_{2k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l$ окремо за парами k і l, де $k < l$. Отже:

Для $b_{1k}b_{2l}\omega^k \wedge \omega^l$: $\sum_{1 \le k < l \le 3}(b_{1k}b_{2l} - b_{1l}b_{2k})\omega^k \wedge \omega^l = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\omega^1 \wedge \omega^2 + (b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21})\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})\omega^2 \wedge \omega^3$.

Для $b_{1k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l$: $\sum_{1 \le k < l \le 3}(b_{1k}b_{3l} - b_{1l}b_{3k})\omega^k \wedge \omega^l = (b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^2 + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32})\omega^2 \wedge \omega^3$.

Для $b_{2k}b_{3l}\omega^k \wedge \omega^l$: $\sum_{1 \le k < l \le 3}(b_{2k}b_{3l} - b_{2l}b_{3k})\omega^k \wedge \omega^l = (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^2 + (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)\omega^2 \wedge \omega^3$.

Порівнюючи відповідні елементи першого рядка з другим стовпцем ($i = 1, j = 2$), першого рядка з третім стовпцем ($i = 1, j = 3$), другого рядка з третім стовпцем ($i = 2, j = 3$), то отримуємо шість різних рівнянь:

$c = 1 - (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)$;

$c - 1 - (b_{11}b_{33} - b_{13}^2);$
$c = -1 - (b_{22}b_{33} - b_{23}^2);$
$0 = 0 - (b_{11}b_{23} - b_{13}b_{12});$
$0 = 0 - (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32});$
$0 = 0 - (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}).$

Розглянемо випадок при $c \neq -1$. Помноживши п'яте рівняння на b_{33} і віднявши від нього шосте, помножене на b_{23}, отримуємо $b_{13}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) = 0$ і як наслідок $b_{13} = 0$, бо $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = -1 - c$. Аналогічна операція дає $b_{12}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) = 0$ і звідси $b_{12} = 0$. Потім з першого, другого і четвертого рівнянь виражаємо $b_{22},\ b_{33},\ b_{23}$ через b_{11}:

$$b_{22} = \frac{1-c}{b_{11}};\ b_{33} = \frac{-1-c}{b_{11}};\ b_{23} = 0.$$

Після підстановки у рівність $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = -1 - c$ отримуємо

$$b_{11} = \sqrt{1-c};\ b_{22} = \sqrt{1-c};\ b_{33} = \frac{-1-c}{\sqrt{1+c}}.$$

Якщо $c = -1$,то маємо $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 2$ і $b_{13} = b_{23} = b_{33} = 0$.

Переходимо до застосування рівняння Кодацці за формулою (20) для випадку сталих коефіцієнтів. У нашому випадку воно набуває наступного вигляду при конкретній матриці зв'язності ω для Sol:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega^1 \\ -\omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega^1 \\ -\omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

У загальному вигляді виписуємо b_{ij} враховуємо, що $(B\omega)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\omega^{\mathrm{T}} = -\omega B$:

$$\begin{pmatrix} -b_{13}\omega^2 & -b_{13}\omega^1 & b_{11}\omega^2 + b_{12}\omega^1 \\ -b_{23}\omega^2 & -b_{23}\omega^1 & b_{21}\omega^2 + b_{22}\omega^1 \\ -b_{33}\omega^2 & -b_{33}\omega^1 & b_{31}\omega^2 + b_{32}\omega^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} b_{31}\omega^2 & b_{32}\omega^2 & b_{33}\omega^2 \\ b_{31}\omega^1 & b_{32}\omega^1 & b_{33}\omega^1 \\ -b_{11}\omega^2 - b_{21}\omega^1 & -b_{12}\omega^2 - b_{22}\omega^1 & -b_{13}\omega^2 - b_{23}\omega^1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Перемножимо обидві частини та зведемо подібні члени:

$$\begin{pmatrix} b_{11}\omega^2 \wedge \omega^3 + b_{12}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ b_{21}\omega^2 \wedge \omega^3 + b_{22}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ b_{31}\omega^2 \wedge \omega^3 + b_{32}\omega^1 \wedge \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{31}\omega^1 \wedge \omega^2 + b_{33}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ b_{32}\omega^1 \wedge \omega^2 + b_{33}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ (b_{11} - b_{22})\omega^1 \wedge \omega^2 - b_{13}\omega^2 \wedge \omega^3 - b_{23}\omega^1 \wedge \omega^3 \end{pmatrix}$$

У підсумку дістанемо умову, що $b_{11} = b_{22} = b_{33}$ і $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$. Але матимемо протиріччя, бо $b_{22} \neq b_{33}$, тобто $\sqrt{1-c} \neq \dfrac{-1-c}{\sqrt{1+c}}$.

Коли $c = -1$, то $b_{11},\ b_{12}.\ b_{22}$ не завжди постійні. Тож при $b_{13} = b_{23} = b_{33} = 0$ і $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 2$ підставимо у матрицю (21):

$$\begin{pmatrix} (-e_2(b_{11}) + e_1(b_{12}))\omega^1 \wedge \omega^2 - e_3(b_{11})\omega^1 \wedge \omega^3 - e_3(b_{12})\omega^2 \wedge \omega^3 \\ (-e_2(b_{12}) + e_1(b_{22}))\omega^1 \wedge \omega^2 - e_3(b_{12})\omega^1 \wedge \omega^3 - e_3(b_{22})\omega^2 \wedge \omega^3 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} b_{11}\omega^2 \wedge \omega^3 + b_{12}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ b_{12}\omega^2 \wedge \omega^3 + b_{22}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (b_{11} - b_{22})\omega^1 \wedge \omega^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Шляхом підстановки знайдених компонент b_{ij} та прирівнювання подібних членів матричного рівняння, приходимо до наступної системи:

$$\begin{cases} b_{11}^2 - b_{12}^2 = 2; \\ e_2(b_{11}) = e_1(b_{12}); \\ e_2(b_{12}) = e_1(b_{11}); \\ e_3(b_{11}) = b_{12}; \\ e_3(b_{12}) = -b_{12} \end{cases}.$$

При диференціюванні $b_{11}^2 - b_{12}^2 = 2$ за e_1 отримаємо $2b_{11}e_1(b_{11}) - 2b_{12}e_1(b_{12}) = 0$ за e_1, а за e_2 $2b_{11}e_2(b_{11}) - 2b_{12}e_2(b_{12}) = 0$. Виконаємо заміну похідних за напрямком e_2. А саме, використавши співвідношення із системи, замінимо $e_2(b_{11})$ на $e_1(b_{12})$ та $e_2(b_{12})$ на $e_1(b_{11})$. Це приводить до такої системи:

$$\begin{cases} b_{11}e_1(b_{11}) - b_{12}e_1(b_{12}) = 0; \\ -b_{12}e_1(b_{11}) + b_{11}e_1(b_{12}) = 0 \end{cases}.$$

Подамо отриманий результат у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ -b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(b_{11}) \\ e_1(b_{12}) \end{pmatrix} = 0.$$

Через те, що визначник матриці не дорівнює 0, а $b_{11}^2 - b_{12}^2 = 2$, тому $e_1(b_{11}) = e_1(b_{12}) = 0$ і в наслідок їх підстановки в систему, то отримаємо з базисних полів E_1 і E_2, що $e_2(b_{11}) = e_2(b_{12}) = 0$ і $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial x} = \dfrac{\partial b_{11}}{\partial y} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial y} = 0$. З поля E_3 матимемо $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial z} = e_3(b_{11}) = -b_{12}$ і $\dfrac{\partial b_{13}}{\partial z} = e_3(b_{12}) = -b_{11}$. Тоді можемо взяти $b_{11} = \sqrt{2}\cosh z$ та $b_{12} = -\sqrt{2}\sinh z$, що задовільняє усім рівнянням, тому в даному випадку система сумісна і занурення тривимірного многовида Sol у чотиривимірний простір постійної секційної кривини існує за основною теоремою підмноговидів (тоерема Боне). Її параметризація наведена у статті [4].

Теорема 3.3. *Для многовида* $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ *не існує ізометричне занурення в чотиривимірний простір із сталою секційною кривиною.*

Оскільки $\alpha = 1$, то у рівнянні Гаусса за формулою (18) ліва частина відповідає кривині простору зі сталою кривиною, а права містить кривину $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ та добутки елементів зв'язності, що визначаються другою формою і при перемноженні утворюють кососиметричну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & c\omega^1\wedge\omega^2 & c\omega^1\wedge\omega^3 \\ -c\omega^1\wedge\omega^2 & 0 & c\omega^2\wedge\omega^3 \\ -c\omega^1\wedge\omega^3 & -c\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} = (\overline{\Omega}^i_j)^3_{i,j=1} = \Omega + (\omega^i_1)\wedge(\omega^1_j) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{4}\omega^2\wedge\omega^1 & -\frac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^1 \\ -\frac{7}{4}\omega^2\wedge\omega^1 & 0 & -\frac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^2 \\ -\frac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^1 & -\frac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{1k}\omega^k \\ -b_{2k}\omega^k \\ -b_{3k}\omega^k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{1l}\omega^l & b_{2l}\omega^l & b_{3l}\omega^l \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{4}\omega^2\wedge\omega^1 & -\frac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^1 \\ -\frac{7}{4}\omega^2\wedge\omega^1 & 0 & -\frac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^2 \\ -\frac{1}{4}\omega^3\wedge\omega^1 & -\frac{1}{4}\omega^2\wedge\omega^3 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & b_{1k}b_{2l}\omega^k\wedge\omega^l & b_{1k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l \\ -b_{1k}b_{2l}\omega^k\wedge\omega^l & 0 & b_{2k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l \\ -b_{1k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l & -b_{2k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо взяти пари індексів $i = 1,\ j = 2;\ i = 1,\ j = 3;\ i = 2,\ j = 3$, то потрібно окремо проаналізувати члени вигляду $b_{1k}b_{2l}\omega^k\wedge\omega^l$, $b_{1k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l$ і $b_{2k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l$ розбиваючи їх за парами $k < l$. У результаті маємо:

Для $b_{1k}b_{2l}\omega^k\wedge\omega^l$: $\sum_{1\le k<l\le 3}(b_{1k}b_{2l} - b_{1l}b_{2k})\omega^k\wedge\omega^l = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\omega^1\wedge\omega^2 + (b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21})\omega^1\wedge\omega^3 + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})\omega^2\wedge\omega^3$.

Для $b_{1k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l$: $\sum_{1\le k<l\le 3}(b_{1k}b_{3l} - b_{1l}b_{3k})\omega^k\wedge\omega^l = (b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31})\omega^1\wedge\omega^2 + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)\omega^1\wedge\omega^3 + (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32})\omega^2\wedge\omega^3$.

Для $b_{2k}b_{3l}\omega^k\wedge\omega^l$: $\sum_{1\le k<l\le 3}(b_{2k}b_{3l} - b_{2l}b_{3k})\omega^k\wedge\omega^l = (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})\omega^1\wedge\omega^2 + (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})\omega^1\wedge\omega^3 + (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)\omega^2\wedge\omega^3$.

Співставляючи елементи матриці b_{ij} при $i = 1, j = 2$, $i = 1, j = 3$, $i = 2, j = 3$, отримуємо шість окремих рівнянь:

$c = -\frac{7}{4} - (b_{11}b_{22} - b_{12}^2);$

$c = \frac{1}{4} - (b_{11}b_{33} - b_{13}^2);$

$c = \frac{1}{4} - (b_{22}b_{33} - b_{23}^2);$

$0 = 0 - (b_{11}b_{23} - b_{13}b_{12});$
$0 = 0 - (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32});$
$0 = 0 - (b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}).$

Розглянемо випадок $c \neq \dfrac{1}{4}$. Шляхом множення на коефіцієнт b_{23} та віднімання п'ятого та шостого рівнянь системи, приходимо до співвідношень $b_{13}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) = 0$ і $b_{12}(b_{22}b_{33} - b_{23}^2) = 0$. Враховуючи перше рівняння, де $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \dfrac{7}{4}$, робимо висновок, що $b_{13} = 0$ та $b_{12} = 0$. Тепер виразимо компоненти $b_{22},\ b_{33},\ b_{23}$ через b_{11}:

$$b_{22} = \frac{-\frac{7}{4} - c}{b_{11}};\ b_{33} = \frac{\frac{1}{4} - c}{b_{11}};\ b_{23} = 0.$$

Якщо замінити їх в першому рівнянні, то матимемо $b_{11} = \sqrt{-\dfrac{7}{4} - c}$; $b_{22} = \sqrt{-\dfrac{7}{4} - c}$ і $b_{33} = \dfrac{\frac{1}{4} - c}{\sqrt{-\frac{7}{4} - c}}$.

Випадок, коли $c = \dfrac{1}{4}$, приводить до заміни перших трьох рівнянь. Як наслідок, отримуємо $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -2,\ b_{13} = b_{23} = b_{33}$.

Застосуємо тепер рівняння Кодацці згідно з формулою (20) при сталих коефіцієнтах. Враховуючи конкретний вигляд матриці зв'язності ω для простору $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, це рівняння запишеться так:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 - \dfrac{1}{2}\omega^3 & -\dfrac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^1 + \dfrac{1}{2}\omega^3 & 0 & \dfrac{1}{2}\omega^1 \\ \dfrac{1}{2}\omega^2 & -\dfrac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 - \dfrac{1}{2}\omega^3 & -\dfrac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^1 + \dfrac{1}{2}\omega^3 & 0 & \dfrac{1}{2}\omega^1 \\ \dfrac{1}{2}\omega^2 & -\dfrac{1}{2}\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо вираз для компонент b_{ij} у загальному вигляді, спираючись на тотожність $(B\omega)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\omega^{\mathrm{T}} = -\omega B$:

$$\begin{pmatrix} b_{12}\omega^1 + \frac{1}{2}b_{13}\omega^2 + \frac{1}{2}b_{12}\omega^3 & -b_{11}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{13}\omega^1 - \frac{1}{1}b_{12}\omega^3 & \frac{1}{2}b_{12}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{11}\omega^2 \\ b_{22}\omega^1 + \frac{1}{2}b_{23}\omega^2 + \frac{1}{2}b_{22}\omega^3 & -b_{21}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{23}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{21}\omega^3 & \frac{1}{2}b_{22}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{21}\omega^2 \\ b_{32}\omega^1 + \frac{1}{2}b_{33}\omega^2 + \frac{1}{2}b_{32}\omega^3 & -b_{31}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{33}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{31}\omega^3 & \frac{1}{2}b_{32}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{31}\omega^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{21}\omega^1 + \frac{1}{2}b_{31}\omega^2 + \frac{1}{2}b_{21}\omega^3 & b_{22}\omega^1 + \frac{1}{2}b_{32}\omega^2 + \frac{1}{2}b_{22}\omega^3 \\ -b_{11}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{31}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{11}\omega^3 & -b_{12}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{32}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{12}\omega^3 \\ \frac{1}{2}b_{21}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{11}\omega^2 & \frac{1}{2}b_{22}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{12}\omega^2 \end{pmatrix.$$

$$\left. \begin{matrix} b_{23}\omega^1 + \frac{1}{2}b_{33}\omega^2 + \frac{1}{2}b_{23}\omega^3 \\ -b_{13}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{33}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{13}\omega^3 \\ \frac{1}{2}b_{23}\omega^1 - \frac{1}{2}b_{13}\omega^2 \end{matrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Після перемноження обох частин і зведення подібних членів маємо наступний вираз:

$$\begin{pmatrix} (-b_{13} - b_{11})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ (-b_{23} - b_{21})\omega_1 \wedge \omega_2 \\ (-b_{33} - b_{31})\omega_1 \wedge \omega_2 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} (b_{23} - \frac{1}{2}b_{21})\omega^1 \wedge \omega^3 + (b_{22} - \frac{1}{2}b_{31})\omega^1 \wedge \omega^2 + (\frac{1}{2}b_{33} - \frac{1}{2}b_{22})\omega^2 \wedge \omega^3 \\ (\frac{1}{2}b_{11} - b_{13} - \frac{1}{2}b_{33}\omega^1 \wedge \omega^3 + (-b_{12} - \frac{1}{2}b_{32})\omega^1 \wedge \omega^2 + \frac{1}{2}b_{12}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \frac{1}{2}b_{32}\omega^1 \wedge^3 + (\frac{1}{2}b_{22} + \frac{1}{2}b_{11})\omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}b_{13}\omega^2 \wedge \omega^3 \end{pmatrix}.$$

Отже, в результаті маємо, що $b_{12} = b_{32} = b_{13} = 0$ і $b_{11} = b_{22} = b_{33}$. Але це є протиріччя тим b_{22} і b_{33}, тому що $\sqrt{-\frac{7}{4} - c} \neq \dfrac{\frac{1}{4} - c}{\sqrt{-\frac{7}{4} - c}}$.

При $c = \frac{1}{4}$ $b_{11},\ b_{22},\ b_{12}$ не завжди є сталими. Тоді якщо $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 2$ і $b_{11} = b_{22} = b_{33}$, то при підстановці у матрицю (21) прийдемо до наступного:

$$\begin{pmatrix} (-e_2(b_{11}) + e_1(b_{12}))\omega^1 \wedge \omega^2 - e_3(b_{11})\omega^1 \wedge \omega^3 - e_3(b_{12})\omega^2 \wedge \omega^3 \\ (-e_2(b_{12}) + e_1(b_{22}))\omega^1 \wedge \omega^2 - e_3(b_{12})\omega^1 \wedge \omega^3 - e_3(b_{22})\omega^2 \wedge \omega^3 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} -b_{11}\omega^1 \wedge \omega^2 \\ -b_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{22}\omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}b_{21}\omega^1 \wedge \omega^3 - \frac{1}{2}b_{22}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ -b_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \frac{1}{2}b_{11}\omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{1}{2}b_{12}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ (\frac{1}{2}b_{22} + \frac{1}{2}b_{11})\omega^1 \wedge \omega^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Виконавши підстановку значень bij і порівнявши відповідні члени матричної рівності, приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} -b_{11}^2 - b_{12}^2 = -2; \\ -e_2(b_{11}) + e_1(b_{12}) + 2b_{11} = 0; \\ e_3(b_{11}) = \frac{1}{2}b_{21}; \\ e_3(b_{12}) = -\frac{1}{2}b_{11}; \\ -e_2(b_{12}) - e_1(b_{11}) + 2b_{12} = 0; \end{cases} .$$

Коли продиферндіюемо $-b_{11}^2 - b_{12}^2 = -2$, то за e_1 маємо $2b_{11}e_1(b_{11}) + 2b_{12}e_1(b_{12}) = 0$ і за e_2 $2b_{11}e_2(b_{11}) + 2b_{12}e_2(b_{12}) = 0$. Підставимо нові змінні замість $e_1(b_{11})$ і $e_1(b_{12})$, виразивши їх з п'ятого та другого рівняння відповідно:

$$\begin{cases} b_{12}e_2(b_{11}) - b_{11}e_2(b_{12}) = 0; \\ b_{11}e_2(b_{11}) + b_{12}e_2(b_{12}) = 0 \end{cases}.$$

Запишемо це у вигляді матриці: $\begin{pmatrix} b_{12} & -b_{11} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2(b_{11}) \\ e_2(b_{12}) \end{pmatrix} = 0.$

Оскільки визначник першого матричного множника має дорівнювати 2, тоді в результаті цього $e_2(b_{11}) = e_2(b_{12}) = 0$. Зокремо, те, що e_2 від базисних полів дорівнює 0, то це означає, що вони не залежать від y. Як наслідок, отримаємо, що $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial x} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x} = 0$, за полем E_2 при $e_1(b_{11}) = 2b_{12}$ під час підстановки в $y\dfrac{\partial b_{11}}{\partial x} - \dfrac{\partial b_{11}}{\partial z} = 2b_{12}$ одержимо $b_{12} = 0$. Аналогічно з $e_1(b_{12}) = -2b_{11}$, замінивши в базисному полі на $y\dfrac{\partial b_{12}}{\partial x} - \dfrac{\partial b_{12}}{\partial z} = -2b_{11}$, отримаємо $b_{11} = 0$. А це суперечить умові $-b_{11}^2 - b_{12}^2 = -2$. Отже, доведено неможливість занурення тривимірного многовида $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ у чотиривимірний простір, що характеризується сталою секційною кривиною.

Висновок

У цій роботі було розглянуто метод форм Картана як ефективний інструмент дослідження геометричних властивостей тривимірних ріманових многовидів. Було здійснено огляд основних понять, таких як форми зв'язності та кривини, і детально опрацьовано структурні рівняння Картана для обчислення цих форм.

На основі викладених теоретичних положень виконано аналіз конкретних прикладів, де обчислено ріманову метрику, форми зв'язності, форми кривини та тензор Річчі. Отримані результати підтвердили, що використання методу форм Картана забезпечує компактний і систематичний підхід до дослідження локальних властивостей ріманових просторів.

Далі було розглянуто геометрію ріманового підмноговида за допомогою форм зв'язності та кривини, що дозволяє зручно описувати внутрішню і зовнішню геометрію поверхні. Використання структурних рівнянь Картана дозволило визначити індуковану зв'язність, другу фундаментальну форму, а також тензор кривини в термінах локального ортонормованого базису. На прикладах було показано, як ці об'єкти узгоджуються між собою та визначають кривинні властивості підмноговида. Таким чином, метод форм Картана забезпечує ефективний інструмент для дослідження ріманових структур у підмноговидах.

Наступним кроком було виведено фундаментальні рівняння Гаусса, Кодацці та Річчі методом форм Картана. Виявилось, що рівняння Гаусса встановлює зв'язок між внутрішньою кривиною підмноговида, кривиною охоплюючого простору та другою фундаментальною формою, рівняння Кодацці описує диференціальні властивості коефіцієнтів другої фундаментальної форми, а рівняння Річчі характеризує кривину нормальної зв'язності. Ці теоретичні умови використано для перевірки можливості вкладення тривимірних многовидів Nil, Sol та $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ у чотиривимірний простір сталої кривини. Аналіз показав, що для просторів Nil та $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ таке занурення неможливе через несумісність отриманих систем рівнянь, тоді як для геометрії Sol воно існує, що доведено знаходженням конкретних коефіцієнтів другої фундаментальної форми.

Література

[1] I. Havrylenko, E. Petrov, Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. Proceedings of the International Geometry Center, Vol 18(2025), No. 2, p. 159-182.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. Vol. 1. Wiley, 1996.

[3] M. Kokubu. On Minimal Surfaces in the Real Special Linear Group SL(2,R). Tokyo J. Math., Vol. 20 (1997), No. 2, p. 287-297.

[4] L. Masaltsev. On Isometric Immersion of Three-Dimensional Geometries $\widetilde{SL_2}$, Nil, and Sol into a Four-Dimensional Space of Constant Curvature. Ukr. Math. J., Vol. 57 (2005), p. 509–516.

[5] L. Masaltsev. Minimal surfaces in standard three-dimensional geometry Sol^3 . J. Math. Phys., Anal., Geom., Vol. 2(2006), No. 1, p. 104–110

[6] W.P. Thurston. Three-dimensional Geometry and Topology. Volume 1. Edited by S. Levy. Princeton University Press, 1997.