ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 93

МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК 38

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 93

МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК 38

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1973

Из (6) и (7) вытекает $\varphi^{\beta}_{\alpha}\varphi^{\gamma}_{\beta}=\varphi^{\gamma}_{\alpha}$.

19. *Доказательство* теоремы п. 16.

Частичная упорядоченность, введенная в п. 17, такова, что для каждой пары индексов (α, β) точной нижней гранью будет $\gamma=(\alpha\beta^{n-1})$. Для пар (i, j) таких, что $i<j$, в п. 17 определены отображения φ^{j}_{i}; $F_j \to F_i$, удовлетворяющие, в силу леммы п. 18 условиям, накладываемым на систему Φ обратного спектра. Остается показать, что операцию в S можно определить формулой (4). Пусть $(F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \dots F_{\alpha_n}) \subseteq F_{\beta}$; $x_i \in F_{\alpha i}$, $c_{\beta} \in F_{\beta}$. Тогда произведения $x_{\beta}=(x_1 x_2 \dots x_n)$ и $y_{\beta}=(c^{n-1}_{\beta}\ x_{\beta})$ принадлежит F_{β}. Как показано в пп. 17, 18, $\beta<\alpha_i$ и существуют гомоморфизмы $\varphi^{\alpha_i}_{\beta}: F_{\alpha_i} \to F_{\beta}$. Используя метод, примененный в доказательстве леммы п. 18, получаем $y=(c^{n-1}_{\beta}(\varphi^{\alpha_1}_{\beta}\, x_1 \cdot \varphi^{\alpha_2}_{\beta} x_2 \cdot \dots \cdot \varphi^{\alpha_n}_{\beta} x_n)$. Отсюда вытекает требуемый результат $(x_1 x_2 \dots x_n)=(\varphi^{\alpha_1}_{\beta}\, x_1 \cdot \varphi^{\alpha_2}_{\beta}\, x_2 \cdot \dots \cdot \varphi^{\alpha_n}_{\beta} x_n)$.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору Л. М. Глускину за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Глускин. Позиционные оперативы. «Матем. сб.», 1965, 68, 110, 3, 444—472.
2. Л. М. Глускин. Минимальные идеалы оператива. «Матем. записки», Свердловск, 1970, т. VII, тетрадь 3, 56—60.
3. Е. С. Ляпин. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.
4. А. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. М., Физматгиз, 1958.
5. Э. Спеньер. Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971.
6. A. H. Clifford. Semi — groups admitting relative inverses. Ann. Math, (2), 42, 1941, 1037—1049.
7. A. H. Clifford and G. B. Preston. The algebraic theory of semigroups., v. I, Providence., 1961.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОЧНОЙ ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППАХ

В. Н. Калюжный

Метрика ρ на группе G называется левоинвариантной, если все левые сдвиги группы G являются изометриями, т. е. группа изометрий $I(\rho)$ содержит группу левых сдвигов L_G. Левоинвариантную метрику назовем точной, если $I(\rho)=L_G$. Прежде, чем сформулировать основной результат, введем один класс групп.

Группу G назовем группой кватернионного типа, если она содержит абелеву подгруппу A индекса 2 и показателя *, отлич-

* Показателем группы G называется такое наименьшее натуральное m, что $g^m=e$ для всех $g \in G$.

ного от 2, содержащую такой элемент d второго порядка, что для любых $b \overline{\in} A$ и $a \in A$ выполняются равенства: $b^2 = d$, $b^{-1}ab = a^{-1}$.

Примером группы кватернионного типа может служить группа обобщенных кватернионов. Группа кватернионного типа, как легко убедиться, не может быть абелевой.

Теорема 1. Если мощность группы G не выше континуума, то для существования на ней точной левоинвариантной метрики необходимо и достаточно, чтобы в абелевом случае она имела показатель 2, а в неабелевом случае не являлась группой кватернионного типа.

Пусть S — группа подстановок множества M, т. е. произвольная группа взаимно однозначных отображений множества M на себя. При каких условиях существует такая метрика ρ на M что S является группой изометрий, т. е. $I(\rho) = S$? Этот вопрос тесно связан с предыдущим, так как для существования на группе G точной левоинвариантной метрики, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы группа L_G была группой изометрий на множестве G.

Обозначим через $M^{(2)}$ множество неупорядоченных пар $\{x, y\} \subset M$, таких, что $x \neq y$. Произвольное подмножество $\Gamma \subset M^{(2)}$ определяет на множестве M граф, ребрами которого служат пары множества Γ. Введем в рассмотрение группу $\operatorname{Aut} \Gamma$ автоморфизмов графа Γ. Группой автоморфизмов пустого графа считаем группу всех подстановок множества M.

Теорема 2. Для того чтобы группа подстановок S множества M была группой изометрий, необходимо и достаточно, чтобы множество $M^{(2)}$ допускало разбиение $\Omega = \{\Gamma_\lambda\}$ не более, чем на континуум классов Γ_λ, такое, что

$$S = \bigcap_\lambda \operatorname{Aut} \Gamma_\lambda \tag{1}$$

Доказательство. Для любого числа λ определим граф Γ_λ, полагая $\{x, y\} \in \Gamma_\lambda$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, y) = \lambda$ (для некоторых λ граф Γ_λ может быть пустым). Семейство $\Omega = \{\Gamma_\lambda\}$, очевидно, является разбиением множества $M^{(2)}$ не более чем на континуум классов, и, как легко установить,

$$I(\rho) = \bigcap_\lambda \operatorname{Aut} \Gamma_\lambda. \tag{2}$$

Таким образом, условие необходимо.

Обратно, пусть условие выполнено. Можно считать, что классы семейства Ω занумерованы числами из отрезка $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Положим $\rho(x, y) = \lambda$ тогда и только тогда, когда

$\{x, y\} \in \Gamma_\lambda$; $\rho(x, x)=0$. Легко видеть, что ρ — метрика. Определяемое ею разбиение совпадает с Ω. Но тогда из (1) и (2) видно, что $S=I(\rho)$. Теорема 2 доказана.

Группа подстановок S действует на множестве $M^{(2)}$ естественным образом. Обозначим через Ω_S разбиение множества $M^{(2)}$ на орбиты $\Gamma\{x, y\}$ под действием группы S. Положим

$$\hat{S} = \bigcap \operatorname{Aut} \Gamma\{x, y\}, \tag{3}$$

где пересечение взято по всем орбитам. Ясно, что $S \subset \hat{S}$. Очевидно, $\varphi \in \hat{S}$ тогда и только тогда, когда для всех $\{x, y\} \in M^2$ справедливо равенство $\varphi\ (\Gamma\{x, y\}) = \Gamma\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

Следствие. Группа подстановок S множества M, мощность которого не выше континуума, является группой изометрий тогда и только тогда, когда $S=\hat{S}$.

Доказательство. Если S есть группа изометрий, то справедливо равенство (1). Поскольку разбиение Ω_S мельче, чем Ω, то $\hat{S} \subset S$, и, следовательно, $\hat{S}=S$. Обратно, если $\hat{S}=S$, то равенство (3) превращается в (1). Разбиение Ω_S состоит не более, чем из континуума классов. Следовательно, S — группа изометрий.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Лемма 1. Группа L_G не является группой изометрий тогда и только тогда, когда существует подмножество $T \subset G$, обладающее следующими свойствами: 1) $T \neq G$; 2) если $g, h \bar{\in} T$, то $g^2=h^2$ или $gh=hg$; 3) множество C элементов x, таких что $x^2=e$, содержится в множестве T; 4) если $t \in T$, то $t^{-1} \in T$; 5) если $t \in T$, $g \bar{\in} T$, то $tgt=g$.

Доказательство. В силу следствия, утверждение леммы эквивалентно тому, что $\hat{L}_G \neq L_G$. Если группа подстановок $\hat{L}_G$ регулярна на G (т. е. неединичные подстановки действуют без неподвижных точек), то, как легко убедиться, $\hat{L}_G = L_G$. Значит, существует такая подстановка $\varphi \in \hat{L}_G \setminus L_G$, что $\varphi(x)=x$ для некоторого $x \in G$. Можно считать, что $x=e$. Легко видеть, что для орбит группы L_G равенство $\Gamma\{a, b\} = \Gamma\{x, y\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^{-1}b=x^{-1}y$ или $a^{-1}b=y^{-1}x$. Отсюда следует, что для любого $g \in G$ выполняется $\varphi(g)=g$ или $\varphi(g)=g^{-1}$. Пусть T — множество неподвижных элементов подстановки φ. Нетрудно проверить, что T обладает нужными свойствами. Обратно, любое такое подмножество T определяет подстановку $\varphi \in \bar{L}_G \setminus L_G$ по правилу: $\varphi(x)=x$, если $x \in T$, $\varphi(x)=x^{-1}$, если $x \bar{\in} T$.

Выясним строение групп, подчиняющихся требованиям леммы 1.

Пусть группа G абелева. Очевидно, $C \neq G$, т. е. G не является группой показателя 2. Обратно, если показатель группы G не равен 2, то условию леммы 1 можно удовлетворить, положим $T=C$.

Пусть группа G неабелева.

Группа кватернионного типа удовлетворяет условию леммы 1 при $T=A$. Обратно, пусть группа G удовлетворяет условию леммы 1. Покажем, что G — группа кватернионного типа.

Лемма 2. Если $t \in T$, $g \bar{\in} T$, то $tg \bar{\in} T$.

Доказательство. Если $tg \in T$, то по свойству 5) $tg \cdot g \cdot tg = g$. Отсюда $g^2 = t^{-2}$. Значит, существует такой элемент $c \in G$, что для всех $x \in G$ выполняется $x^2 = c$. Очевидно, что $c = e$. Следовательно, группа G абелева — противоречие.

Покажем, что подмножество T является подгруппой. Пусть $t \in T$, $g \bar{\in} T$. С помощью леммы 2 легко убедиться, что для любого натурального n выполняется $t^n g \in G \diagdown T$. По свойству 4), $t^{-1} \in T$, и аналогично $t^{-n} g \in G \diagdown T$. Значит, $\langle t \rangle g \subset G \diagdown T$, где $\langle t \rangle$ — подгруппа, порожденная элементом t. Таким образом,

$$G \diagdown T = \bigcup_g \langle t \rangle g,$$

где элемент g пробегает множество $G \diagdown T$. Отсюда следует, что и T есть объединение классов смежности по подгруппе $\langle t \rangle$. Итак, для любого $t \in T$ справедливо равенство:

$$T = \bigcup_x \langle t \rangle x,$$

откуда видно, что если $t \in T$, то $tT = T$. Отсюда и из свойств 4) следует, что T — подгруппа.

Покажем, что подгруппа T абелева. Свойство 5) элементов t, s, $ts \in T$, $g \bar{\in} T$ дает: $tgt = g$, $sgs = g$, $ts \cdot g \cdot ts = g$. Отсюда $st = ts$.

Покажем, что если $T = C$, то группа G гамильтонова, т. е. содержит только инвариантные подгруппы. Пусть H — произвольная подгруппа группы G. Элемент $h \in H$ будем сопрягать элементом $g \in G$. Ограничимся рассмотрением случая, когда g, $h \bar{\in} T$. По свойству 2) имеем две возможности: $gh = hg$ и $g^2 = h^2$. Если $gh = hg$, то $g^{-1}hg = h \in H$. Пусть $g^2 = h^2$, причем $gh = T$. Так как $T = C$, то $(gh)^2 = e$, откуда $g^{-1}hg = g^{-2}h^{-1}$. Следовательно, $g^{-1}hg = h^{-3} \in H$. Пусть теперь $gh \bar{\in} T$. По свойству 2) элементов g, $hg \bar{\in} T$, имеем $g \cdot hg = hg \cdot g$, откуда $gh = hg$, или $g^2 = (hg)^2$, откуда $g^{-1}hg = h^{-1} \in H$. Итак, подгруппа H инвариантна, стало быть группа G гамильтонова.

Любая гамильтонова группа K имеет вид $K = Q \times V \times W$, где $Q = [\pm e, \pm i, \pm j, \pm k]$ — группа кватернионов, V — абелева группа показателя 2, W — абелева группа, каждый элемент которой конечного нечетного порядка [см. 1, 213].

Покажем, что у группы G сомножитель W отсутствует. Пусть u, $w \in W$. Пользуясь свойством 2) элементов iu, jw, не принадлежащих множеству $T=C$, легко получить, что $u^2=w^2$. Отсюда ясно, что $W=(e)$.

Итак, $G=Q\times V$. Группа G является группой кватернионного типа, так как можно, например, положить

$$A=\{\pm e, \ \pm i\}\times V, \ d=-e.$$

Рассмотрим альтернативу: 1) существуют такие элементы $g, h\bar{\in} T$, что $g^2\neq h^2$; 2). для любого $g\bar{\in} T$ выполняется $g^2=d$ при некотором $d\in G$.

1. На основании свойства 2) $gh=hg$. Пусть $t\in T$. По лемме 2 $tg\bar{\in} T$. Согласно свойству 2) элементов h, tg выполняется $h^2=(tg)^2$ или $h\cdot tg=tg\cdot h$. Из условия 5) вытекает, что $g^2=(tg)^2$, так что в первом случае имели бы $g^2=h^2$ — противоречие. Во втором случае: $ht=th$, что вместе со свойством 5) элемента h дает $t^2=e$. Значит, в этом случае $T=C$.

2. Предположим $d=e$, тогда $G\setminus T\subset C\subset T$, откуда $G=T$, что противоречит свойству 1). Значит, $d\neq e$, откуда легко следует, что $d\in T$. Покажем, что $d^2=e$. Пусть $g\bar{\in} T$. По лемме 2, $dg\bar{\in} T$, следовательно, $(dg)^2=d$. Отсюда $d=(g^2)^{-1}=d^{-1}$.

Легко видеть, что подгруппа T инвариантна. Рассмотрим факторгруппу G/T. Она является группой показателя 2. Предположим, что порядок группы G/T не равен 2. Возьмем два различных нееденичных элемента второго порядка $\bar{g}, \bar{h}\in G/T$. Легко видеть, что $gh\bar{\in} T$. Свойство 5), примененное к элементам g, h, $gh\bar{\in} T$, $t\in T$ дает $tgt=g$, $tht=h$, $tght=gh$. Отсюда $t^2=e$. Значит, и в этом случае $T=C$.

Итак, можно считать, что порядок группы G/T равен 2, и, следовательно, группа G является группой кватернионного типа при $T=A$.

В заключение отметим, что наши методы позволяют доказать следующее утверждение: для любой группы G существует множество M и такая метрика ρ на M, что группа изометрий $I(\rho)$ изоморфна G.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Холл. Теория групп. Изд-во иностр. лит-ры. М., 1962.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ ВЕЙЛЕВСКОГО СЕМЕЙСТВА УЗЛОВ

В. К. Дубовой

В работах [1, 2] изучаются мультипликативные представления х. о.-ф. различных классов операторов. Настоящая статья посвящена описанию мультипликативного представления х. о.-ф. вейлевского семейства узлов.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

Об одном классе конечных групп. Жмудь Э. М. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 3—11.

В статье изучаются конечные группы, система неприводимых комплексных представлений которых совпадает с базисом по пересечению решетки нормальных делителей. Основной результат статьи дает теоретико-групповую характеристику групп, обладающих указанным свойством. Устанавливается также ряд структурных свойств таких групп. Строится серия разрешимых, но не ниотпотентных групп рассматриваемого класса.

Библиографических ссылок — 5.

УДК 519.123.

Новое доказательство теоремы Дилуорса. Куринной Г. Ч., «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 11—15.

В статье дается новое доказательство теоремы Дилуорса о том, что в конечной модулярной решетке количество элементов, покрываемых ровно m элементами, равно количеству ее элементов, покрывающих ровно m элементов.

Библиографических ссылок — 1.

УДК 519.45 519.48

Коммутативные связки. Шварц В. Я. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 16—22.

Построена теория коммутативных связок для позиционных оперативов. Доказан аналог теоремы Клиффорда о строении инверсных вполне регулярных полугрупп.

Библиографических ссылок — 7.

УДК 519.44

О существовании точной левоинвариантной метрики на группах. Калюжный В. Н. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 22—26.

В статье описываются группы, на которых существует левоинвариантная метрика, группа изометрий которой совпадает с группой левых сдвигов. Для формулировки результата вводится класс групп, являющийся обобщением группы кватернионов.

Библиографических ссылок — 1.