

ПОЛУГРУППЫ МАТРИЦ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Л. М. Глушкин

Х а р ь к о в

Пусть F — произвольное расположенное поле, P — множество всех неотрицательных элементов из F . Через G_{nrs} ($s \leq r \leq n$) обозначим множество всех матриц порядка n ранга $\leq r$, у которых все миноры порядка $\leq s$ содержатся в P . Множество G_{nrs} замкнуто относительно умножения матриц ([1], гл. II, § 2) и, следовательно, является полугруппой. G_{nn1} — полугруппа всех неотрицательных матриц, G_{nnn} — полугруппа всех вполне неотрицательных матриц [1].

В настоящей статье методами, близкими к [2], [3], рассмотрены автоморфизмы полугрупп G_{nrs} .

Пусть C — матрица с элементами из P ; в каждой строке и в каждом столбце которой точно один элемент отличен от нуля; ψ — автоморфизм поля F , сохраняющий в нем упорядоченность (и, следовательно, отображающий множество P на себя), $X = (x_{ik})$ — любая матрица из G_{nrs} . Очевидно, что каждое из отображений полугруппы G_{nrs} .

$$\begin{aligned}\varphi_c X &= C^{-1}XC, \\ \varphi_\psi(x_{ik}) &= (\psi x_{ik})\end{aligned}$$

является ее автоморфизмом, если при $s \geq 2$ C — диагональная матрица или матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ \lambda_n & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Целью настоящей статьи является доказательство следующих теорем:

Теорема 1. Всякий автоморфизм полугруппы G_{nrs} имеет вид¹ $\varphi = \varphi_c \varphi_\psi$.

Теорема 2. Если F — архимедовски расположенное поле, то всякий автоморфизм полугруппы G_{nrs} имеет вид φ_c .

¹ $\varphi_1 \varphi_2 X = \varphi_1(\varphi_2 X)$.

Сравнив эти теоремы с результатами статей [2], [3], получим:

Всякий автоморфизм полугруппы G_{nrs} можно однозначно продолжить до автоморфизма полугруппы всех матриц порядка n с элементами из поля F .

(Доказательства теорем 1 и 2 см. в пунктах 9 и 10).

2. Элемент O полугруппы S называется ее нулем, если $Ox = xO = O$ для любого элемента $x \in S$. Идемпотент i полугруппы S называется примитивным, если в S не существует отличного от нуля и i идемпотента e такого, что $ei = ie = e$.

Лемма. Пусть A — ненулевой идемпотент полугруппы G_{nrs} . В G_{nrs} существует такая идемпотентная матрица B ранга 1, что $AB = BA = B$.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ik})$. Вследствие $A^2 = A$ имеем:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} = a_{ik}. \quad (1)$$

По условию, $A \neq 0$, следовательно, существует элемент $a_{pq} = a \neq 0$. Введем обозначения

$$b_{ik} = \frac{1}{a} a_{iq} a_{pk} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad B = (b_{ik}). \quad (2)$$

Из $A \in G_{nrs}$ следует, что $a_{ik} \geq 0$ при $i, k = 1, 2, \dots, n$, а значит и $b_{ik} \geq 0$ при $i, k = 1, 2, 3, \dots, n$. По построению (2) матрицы B , $\text{rang } B = 1$ все ее миноры порядка ≥ 2 равны нулю; таким образом, $B \in G_{nrs}$ при любых r, s . Вследствие (1),

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a} a_{iq} a_{pj} \cdot \frac{1}{a} a_{iq} a_{pk} = \frac{1}{a} a_{jq} a_{pk} = b_{ik},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{1}{a} a_{jq} a_{pk} = \frac{1}{a} a_{iq} a_{pk} = b_{ik},$$

то есть $B^2 = AB = B$. Аналогично покажем, что $BA = B$. Остается лишь заметить что $B \neq 0$, так как $b_{pq} = a_{pq} \neq 0$.

4. **Лемма.** Примитивными идемпотентами полугруппы G_{nrs} являются идемпотентные матрицы ранга 1 и только они.

Доказательство. Из леммы п. 3 следует, что матрица ранга ≥ 2 не может быть примитивным идемпотентом полугруппы G_{nrs} .

Пусть теперь I — идемпотентная матрица ранга 1 из полугруппы G_{nrs} . В § 2 статьи [2] доказано существование такой неособенной матрицы C с элементами из поля F , что $C^{-1}IC = E_{11}$ ¹). Пусть $H \in G_{nrs}$, $H^2 = H$, $IH = HI = I$, $C^{-1}HC = A$. Тогда $E_{11}A = AE_{11} = A$; это возможно лишь при $A = aE_{11}$. Из $H^2 = H$ следует $A^2 = A$, то есть $a^2 = a$, $a = 1$ или $a = 0$, $A = E_{11}$ или $A = 0$, $H = I$ или $H = 0$. Таким образом, I — примитивный идемпотент.

¹ Через E_{ik} будем обозначать матрицу, у которой элемент, стоящий на пересечении i -й строки и k -го столбца, равен 1, а остальные элементы равны 0.

5. Каждой постановке Q множества индексов k ($k=1, 2, \dots, n$)

$$\overline{Q} = (Q_k^k)$$

соответствует матрица $Q = (q_{ik}) : q_i, Q_i = 1, q_{ik} = 0$ при $k \neq Q_i$. Эта матрица, как известно, содержится в регулярном представлении S_n симметрической группы n -й степени $\overline{S}_n$. В каждой ее строке и в каждом ее столбце точно один элемент отличен от нуля.

Лемма. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n \in G_{nrs}$ — идемпотентные матрицы ранга 1, причем $A_i A_k = 0$ при $i \neq k$. Существует такая матрица $C \in S_n$, что $A_j = C^{-1} E_{jj} C$ при $j=1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Как показано в статье [2] (лемма 2.3), существует такая неособенная матрица C с элементами из поля F , что

$$\text{Пусть} \quad A_j = C^{-1} E_{jj} C \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

$$\text{Тогда} \quad C = (c_{ik}), \quad C^{-1} = (d_{ik}), \quad A_j = (a_{ik}^{(j)}).$$

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} c_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} c_{ji} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Из $A_j \in G_{nrs}$ следует, что при $i, j, k=1, 2, \dots, n$,

$$a_{ik}^{(j)} = d_{ij} c_{jk} \geq 0. \quad (6)$$

Если $k \neq i$, $d_{ir} \neq 0$, то вследствие (4) и (6) имеем

$$d_{ir} c_{rk} = 0,$$

то есть $c_{rk} = 0$ при $k \neq i$. Так как матрица C^{-1} — неособенная и в каждом ее r -м столбце найдется элемент $d_{ir} \neq 0$, то ни в одной r -й строке матрицы не найдется двух отличных от нуля элементов. Но C — также неособенная матрица, поэтому в каждой ее строке точно один элемент отличен от нуля. Таким образом, точно n элементов матрицы C отличны от нуля. Отсюда следует, что и в каждом столбце матрицы C точно 1 элемент отличен от нуля — ведь C — неособенная матрица. Точно так же и в каждом ряду матрицы C^{-1} точно один элемент отличен от нуля.

Пусть i — любой из индексов $1, 2, \dots, n$. Обозначим тот индекс k , для которого $c_{ik} \neq 0$, через Q_i . Тогда

$$c_i, Q_i = c_i \neq 0, \quad c_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq Q_i, \quad (7)$$

а вследствие (5) и только что сделанного замечания о структуре матрицы C^{-1} имеем:

$$d_{Q_i, i} = c_i^{-1}, \quad d_{ki} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq Q_i. \quad (8)$$

Из (6), (7), (8) следует, что $a_{Qj, Qj}^{(j)} = 1, a_{ik}^{(j)} = 0$ при $i \neq Qj$ или $k \neq Qj$, то есть $A_j = E_{Qj, Qj}$. Этот результат не зависит от величины c_i в (7)–(8). Полагая в (7) $c_i = 1$ при $i=1, 2, \dots, n$ получим, что $C \in G_n$.

6. Пусть D — любая неособенная диагональная матрица с элементами из P . Отображение

$$\varphi_D X = D^{-1} X D \quad (X \in G_{nrs})$$

полугруппы G_{nrs} на себя является при любых r, s автоморфизмом полугруппы G_{nrs} .

Лемма. Пусть φ — любой автоморфизм полугруппы G_{nrs} . Существуют неособенная диагональная матрица D с элементами из P и подстановка $\bar{Q} \in S_n$ такие, что при произвольных $i, k = 1, 2, \dots, n$.

$$\varphi_D^{-1} \varphi E_{ik} = E_{Q_i, Q_k}.$$

Доказательство. Все матрицы φE_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) являются примитивными идемпотентами полугруппы G_{nrs} при любом ее автоморфизме и, следовательно, φE_{ii} являются идемпотентными матрицами ранга 1 (п. 4). Кроме того, $\varphi E_{ii} \varphi E_{kk} = 0$ при $i \neq k$. Из леммы п. 5 следует существование такой матрицы $Q \in S_n$, что $\varphi E_{ii} = Q^{-1} E_{ii} Q$, то есть

$$\varphi E_{ii} = E_{Q_i, Q_i} \quad (9)$$

при $i = 1, 2, \dots, n$, где $\bar{Q}$ — подстановка этих индексов. Тогда

$$\varphi E_{ik} = \varphi (E_{ii} E_{ik} E_{kk}) = \varphi E_{ii} \varphi E_{ik} \varphi E_{kk} = E_{Q_i, Q_i} \varphi E_{ik} E_{Q_k, Q_k},$$

а отсюда вытекает

$$\varphi E_{ik} = \alpha_{ik} E_{Q_i, Q_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

где $\alpha_{ik} \geq 0$. При этом для $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\alpha_{ij} \alpha_{ik} E_{Q_i, Q_k} = \alpha_{ij} E_{Q_i, Q_j} \alpha_{jk} E_{Q_j, Q_k} = \varphi E_{ij} \varphi E_{jk} = \varphi E_{ik} = \alpha_{ik} E_{Q_i, Q_k},$$

откуда следует

$$\alpha_{ij} \alpha_{ik} = \alpha_{ik}. \quad (11)$$

Кроме того, при $i = 1, 2, \dots, n$ должно быть вследствие (9)

$$\alpha_{ii} = 1. \quad (12)$$

Положив $d_{Qk} = \alpha_{1k}$, получим из (11), (12) $\alpha_{k1} \alpha_{1k} = 1$, $\alpha_{1k} = d_{Qk}^{-1}$, и

$$\alpha_{ik} = \alpha_{i1} \alpha_{1k} = d_{Q_i}^{-1} d_{Qk}. \quad (13)$$

Обозначим через D матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Из (13) следует

$$\alpha_{ik} E_{Q_i, Q_k} = D^{-1} E_{Q_i, Q_k} D = \varphi_D E_{Q_i, Q_k}.$$

Вместе с (10) это дает

$$\varphi_D^{-1} \varphi E_{ik} = E_{Q_i, Q_k}.$$

7. Пусть ψ — автоморфизм поля F , сохраняющий упорядоченность и, следовательно, отображающий множество P на себя. Преобразование

$$\varphi_\psi(x_{ik}) = (\psi x_{ik})$$

полугруппы G_{nrs} является, очевидно, ее автоморфизмом.

Лемма. Пусть $\bar{Q}$ — подстановка индексов $1, 2, \dots, n$; φ — такой автоморфизм полугруппы G_{nrs} , что при любых $i, k = 1, 2, \dots, n$

$$\varphi E_{ik} = E_{Q_i, Q_k}.$$

Существует такой автоморфизм ψ поля F , сохраняющий упорядоченность в F , что для любой матрицы $X = (x_{ik}) \in G_{nrs}$

$$\varphi_\psi^{-1} \varphi(x_{ik}) = (x_{Q_i, Q_k}).$$

Доказательство. Пусть x — любой элемент из P . По условию.

$$\varphi(xE_{11}) = \varphi(E_{11}xE_{11}E_{11}) = \varphi E_{11} \varphi(xE_{11}) \varphi E_{11} = E_{Q_1, Q_1} \varphi(xE_{11}) E_{Q_1, Q_1} = (\psi x) E_{Q_1, Q_1},$$

где ψ — некоторое взаимно однозначное отображение множества P на себя, и

$$\varphi(xE_{ik}) = \varphi(E_{i1}xE_{11}E_{1k}) = E_{Q_i, Q_1}(\psi x) E_{Q_1, Q_1} E_{Q_1, Q_k} = (\psi x) E_{Q_i, Q_k}.$$

Если $X = (x_{ik})$ — любая матрица из G_{nrs} и $\varphi X = X' = (x'_{Q_i, Q_k})$, то

$$x'_{Q_i, Q_k} = \psi x_{ik}. \quad (14)$$

В самом деле,

$$x'_{Q_i, Q_k} E_{Q_i, Q_k} = E_{Q_i, Q_i} x' E_{Q_k, Q_k} = \varphi(E_{ii} X E_{kk}) = \varphi(x_{ik} E_{ik}) = (\psi x_{ik}) E_{Q_i, Q_k}.$$

Далее, для любых $x, y \in P$ имеем:

$$\begin{aligned} (\psi x \psi y) E_{Q_1, Q_1} &= \psi x E_{Q_1, Q_1} \psi y E_{Q_1, Q_1} = \varphi(xE_{11}) \varphi(yE_{11}) = \\ &= \varphi(xyE_{11}) = \psi(xy) E_{Q_1, Q_1}, \end{aligned}$$

то есть $\psi x \psi y = \psi(xy)$ для любых $x, y \in P$. В частности $\psi 1 = 1$, и из (14) теперь получим

$$\begin{aligned} (\psi x + \psi y) E_{Q_1, Q_1} &= (\psi x E_{Q_1, Q_1} + \psi y E_{Q_1, Q_1}) (E_{Q_1, Q_1} + E_{Q_2, Q_1}) = \\ &= \varphi(xE_{11} + yE_{12}) \varphi(E_{11} + E_{21}) = \varphi[(xE_{11} + yE_{12})(E_{11} + E_{21})] = \\ &= \varphi[(x+y)E_{11}] = \psi(x+y) E_{Q_1, Q_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\psi x + \psi y = \psi(x+y)$ для любых $x, y \in P$, и ψ — автоморфизм множества P относительно сложения и умножения в F . Положив $\psi(-1) = -1$, получим, как это легко проверить, продолжение этого автоморфизма на все поле F . Из (14) имеем для любой матрицы $X = (x_{ik}) \in G_{nrs}$

$$\varphi_\psi^{-1} \varphi(x_{ik}) = (x_{Q_i, Q_k}).$$

Лемма доказана.

8. Пусть $\bar{Q}$ — любая подстановка индексов $1, 2, \dots, n$. Отображение

$$\varphi(x_{ik}) = (x_{Q_i, Q_k}) \quad (15)$$

является автоморфизмом полугруппы G_{nrs} .

¹ Множество G_{nrs} мы рассматриваем только как мультипликативную полугруппу, и знак $+$ между матрицами здесь следует считать лишь некоторым упрощением записи.

Лемма. Отображение (15) тогда и только тогда является автоморфизмом полугруппы G_{nrs} при $s \geq 2$, когда Q — тождественная подстановка или

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть G_{nrs} — полугруппа рассматриваемого нами типа при $s \geq 2$. Если $n = 2$, то $\bar{S}_n$ не содержит никаких других подстановок, кроме указанных в условии леммы. Допустим теперь, что $n > 2$ и $\bar{Q}$ — такая подстановка, что для некоторых индексов i, j, k, l имеет место $i < j, k < l, Qi < Qj, Qk > Ql$. Полугруппа G_{nrs} содержит, в частности, матрицу X , у которой

$$M = M \begin{pmatrix} i, j \\ k, l \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{ik} & x_{il} \\ x_{jk} & x_{jl} \end{vmatrix} \neq 0,$$

и, следовательно, $M > 0$. В то же время для минора $M \begin{pmatrix} Qi, Qj \\ Ql, Qk \end{pmatrix}$ матрицы φX мы имели бы

$$M \begin{pmatrix} Qi, Qj \\ Ql, Qk \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{il} & x_{ik} \\ x_{jl} & x_{jk} \end{vmatrix} = -M < 0,$$

что противоречило бы условию $\varphi X \in G_{nrs}$. Таким образом, если $\bar{Q}$ — не-тождественная подстановка, то из предположения $i < j, k < l, Qk > Ql > Qi$ должно следовать $Qi > Qj$. $\bar{Q}$ имеет вид, указанный в условии леммы.

9. Перейдем теперь к непосредственному доказательству основной теоремы 1. Пусть φ — любой автоморфизм полугруппы G_{nrs} . Из леммы п. 6 следует существование такой неособенной диагональной матрицы с элементами из P и подстановки $\bar{Q} \in \bar{S}_n$, что $\varphi_D^{-1} \varphi E_{ik} = E_{Qi, Qk}$ при любых $i, k = 1, 2, \dots, n$. В силу леммы п. 7 существует такой автоморфизм ψ поля F , сохраняющий в нем упорядоченность, что $\varphi_D^{-1} \varphi(x_{ik}) = \varphi_\psi(x_{Qi, Qk})$. В п. 8 показано, что при $s \geq 2$ $\bar{Q}$ может быть либо тождественной подстановкой, либо подстановкой (16). Подстановке $\bar{Q}$ соответствует, как и в п. 5, матрица $Q = (q_{ik})$: $q_i, q_i = 1, q_{ik} = 0$ при $k \neq Qi$. Тогда

$$\varphi_D^{-1} \varphi(x_{ik}) = \varphi_\psi(x_{Qi, Qk}) = \varphi_\psi \varphi_Q(x_{ik}) = \varphi_Q \varphi_\psi(x_{ik}),$$

$$\varphi_D^{-1} \varphi = \varphi_Q \varphi_\psi, \quad \varphi = \varphi_D \varphi_Q \varphi_\psi = \varphi_{(DQ)} \varphi_\psi,$$

что и требовалось доказать.

10. Пусть F — архимедовски расположенное поле, P — множество неотрицательных элементов из F . P не обладает нетождественными автоморфизмами.

Настоящее предложение, доказательство которого приведено, в статье [4], доказывает полностью теорему 2.

Сопоставляя теоремы 1 и 2 с результатами статьи [4], получим:

Всякий автоморфизм полугруппы всех неособенных матриц порядка n с элементами из P можно однозначно продолжить до автоморфизма полугруппы G_{hnn} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М. — Л., ГИТТЛ, 1950.
2. Л. М. Глускин. Автоморфизмы мультипликативных полугрупп матричных алгебр. Успехи математических наук, 1956, 11, вып. 1 (67), 199—206.
3. Е. А. Халезов. Автоморфизмы матричных полугрупп. ДАН, 96, 2, 245 — 248 (1954).
4. Л. М. Глускин. Полугруппы не особенных матриц с неотрицательными элементами, Уч. записки Харьковского пединст., 1957, 21, 81—98.