ISSN 0453–8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського університету

№ 444

Серія

«Математика,
прикладна математика
і механіка»

Харків
1999

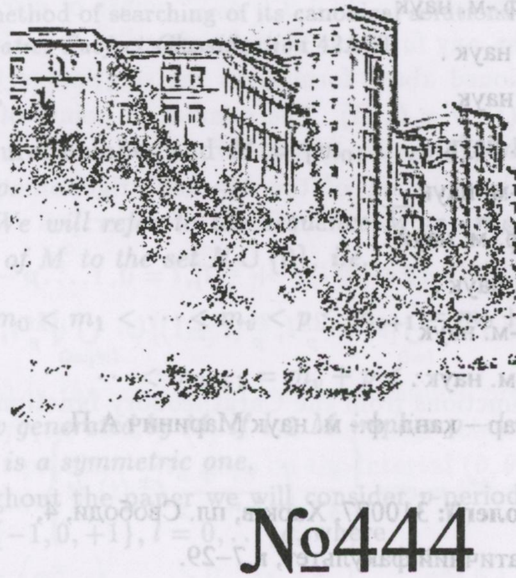
5-50

Міністерство освіти України

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського університету



№444

Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Харків 1999

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 310077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХДУ, механіко–математичний факультет, к.7–29.
Тел. 45–75–18.

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського державного університету (протокол № 5 від 28 травня 1999 р.)

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 444 , 1999, c.3-9

A Method of Solution of the Trigonometric Min-Moment Problem with Periodic Gaps

G.M. Sklyar, I.L. Velkovsky

Kharkov State University
Szczecin University, Poland

The Markov trigonometric moment problem on a minimal possible interval (min-moment problem) is considered in the case when the moment sequence has periodically repeating gaps. The complete analytical description of the solvability set of the Markov trigonometric min-moment problem with gaps as well as a method of searching of its canonical solutions are given.

1991 Mathematics Subject Classification 42A70.

Let p be a natural number and $M = \{m_0, \ldots, m_v\}$, where $0 \le m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_v < p$.

Definition. *We will refer to the sequence* $\overline{M} = \{m_k\}_{k=0}^{\infty}$, *which is the p-periodic extention of M to the set $N \cup \{0\}$, i.e.*

$$0 \le m_0 < m_1 < \cdots < m_v < p \le m_{v+1} = m_0 + p < \cdots$$

$$\cdots < m_{2v+1} = m_v + p < \cdots,$$

as a p-periodic law generated by M. If $l \in M$ implies $p - l \in M$, we will say that the p-periodic law is a symmetric one.

Further throughout the paper we will consider p-periodic laws satisfying the assumption: $r_l \in \{-1, 0, +1\}$, $l = 0, \ldots, q$, where

$$r^M(z) = \sum_{l=0}^{p-1} r_l z^l = \prod_{k=1}^{q} (1 - e_p^{\gamma_k} z), \quad \Gamma = \{\gamma_1, \ldots \gamma_q\} = \{0, 1, \ldots p-1\} \backslash M,$$

$q := p - v - 1$, e_p is a primitive root of unity of order p. The class of such laws we denote by M_p.

Let a p-periodic symmetric law $\overline{M}$ belong to the class M_p. Consider the following problem [1]:

For a vector $s = (s_{m_0}, \ldots, s_{m_n})$ to find the smallest possible interval $(0, \theta_s)$ such that for $\theta = \theta_s$ the following representation holds for a certain $f(t) = f_s(t)$,

$$\int_0^\theta e^{im_k t} f(t)\, dt = s_{m_k}, \; |f(t)| \le 1, \; t \in (0, \theta), \; k = 0, 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

where $s \in R \times C^n$ *or* C^{n+1} *depending on whether or not* $0 \in M$. This problem is called the Markov trigonometric min-moment problem with periodic gaps. Let us assume that $a > 0$ is such a number that the functions $\{e^{im_k t}\}_{k=0}^{n}$ form a Tchebycheff system (T-system) on the interval $(0, a)$, i.e.

– if $m_0 \neq 0$ then any non-trivial polynomial $\sum\limits_{k=0}^{n}(\alpha_k \sin m_k t + \beta_k \cos m_k t)$ has no more than $2n+1$ roots on $(0, a)$;

– if $m_0 = 0$ then any non-trivial polynomial $\alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k \sin m_k t + \beta_k \cos m_k t)$ has no more than $2n$ roots on $(0, a)$.

Existence of such an interval $(0, a)$ for our system (as a system of linearly independent analytic functions) is guaranteed by Theorem 1.1 [2,p.794]. Let us assume further throughout the paper that $0 < a < \frac{2\pi}{p}$ and $s \in S[0, a]$, i.e. there exists at least one function $f(t)$, $t \in [0, a]$, satisfying moment equalities (1) for $\theta = a$. Under these assumptions the solution $(\theta_s, f_s(t))$ of the min-moment problem exists and is unique, besides, the function $f_s(t)$ is piecewise constant, $|f_s(t)| = 1$, and has no more than $2n + 1 - \delta_{0m_0}$ points of discontinuity on the interval $(0, \theta_s)$. Moreover, any function $f(t)$, satisfying the equalities (1) for some θ and having the mentioned above form gives the solution of the min-moment problem, i.e. $f(t) = f_s(t)$, $\theta = \theta_s$ [1]. The number of points of discontinuity of the function $f_s(t)$ is called *the index of solution.*

Let $(\theta^*, f^*(t))$ be the solution of the Markov trigonometric min-moment problem (1) and let $f^*(t)$ be of index N. Denote further:

$$f^{\pm}(t) = \begin{cases} r_l f^*(t - \frac{2\pi}{p}l), & t \in [\frac{2\pi}{p}l, \theta^* + \frac{2\pi}{p}l], l = 0, 1, \dots p-1,\ r_l \neq 0, \\ \pm 1, & t \in T = \bigcup\limits_{l=0}^{q}[\theta^* + \frac{2\pi}{p}l, \frac{2\pi}{p}(l+1)] \cup \bigcup\limits_{l: r_l = 0}[\frac{2\pi}{p}l, \frac{2\pi}{p}(l+1)]. \end{cases}$$

Next consider two functions from the Caratheodory function class [3]

$$F^{\pm}(z, \theta^*) = \exp\left\{\frac{i}{4}\int\limits_{[0,2\pi]} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f^{\pm}(t)\, dt\right\} \tag{2}$$

Let

$$F^{\pm}(z, \theta^*) = \alpha^{\pm} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^{\pm} z^j, \quad |z| < 1. \tag{3}$$

Express now the coefficients of the expansion via elements of the infinite moment sequence

$$s_{m_k} = \int_0^{\theta^*} e^{im_k t} f^*(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

We have from (2),

$$\ln F^{\pm}(z, \theta^*) = \frac{i}{4}\left(\int\limits_{[0,2\pi]\setminus T} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f^{\pm}(t)\, dt \pm \int\limits_{T} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt\right) =$$

$$= \frac{i}{4}\int\limits_{0}^{\theta^*}\sum_{l=0}^{p-1} r_l \frac{e^{i\left(t+\frac{2\pi l}{p}\right)}+z}{e^{i\left(t+\frac{2\pi l}{p}\right)}-z} f^*(t)\,dt \pm \frac{i}{4}\sum_{j=0}^{\infty} z^j(2-\delta_{0j})\int\limits_T e^{-ijt}dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{m_k}\frac{i}{4}(2-\delta_{0m_k})r^M\overline{(e_p^{-m_k})s_{m_k}} \pm \frac{i}{4}\sum_{j=0}^{\infty} z^j(2-\delta_{0j})\int\limits_T e^{-ijt}dt,$$

where 'overline' denotes the complex conjugation. Let us denote

$$n_j = \frac{i}{4}(2-\delta_{0j})\int\limits_T e^{-ijt}dt. \tag{4}$$

Therefore,

$$\ln F^{\pm}(z,\theta^*) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j^{\pm} z^j, \tag{5}$$

where

$$s_j^{\pm} = \begin{cases} \frac{i}{4}(2-\delta_{0j})r^M\overline{(e_p^{-j})s_j} \pm n_j, & j \in \overline{M}, \\ \pm n_j, & j \notin \overline{M}. \end{cases} \tag{6}$$

One can see from (3), (5) that

$$\alpha^{\pm} = \exp s_0^{\pm},$$

$$A_j^{\pm} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\pm} & 2\alpha_2^{\pm} & \cdots & j\alpha_j^{\pm} \\ \alpha^{\pm} & \alpha_1^{\pm} & \cdots & \alpha_{j-1}^{\pm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_1^{\pm} \end{vmatrix} = j(-1)^{j-1}(\alpha^{\pm})^j s_j^{\pm}, \quad j = 1,2,\ldots. \tag{7}$$

As far as $(\theta^*, f^*(t))$ is the solution of the min-moment problem with gaps and N is the index of $f^*(t)$, then $f^*(t)$ is the canonical solution [4] of index N of the infinite moment problem with gaps on the interval $(0,\theta^*)$. Therefore, due to Theorem 4 [4], we have

$$\begin{aligned} A_l^{\pm} &= \left(\alpha_{k-j}^{\pm}\right)_{k,j=0}^{l} > 0 \quad \text{as} \quad l = 1,\ldots,v^{\pm}(N)-1, \\ A_l^{\pm} &= \left(\alpha_{k-j}^{\pm}\right)_{k,j=0}^{l} \geq 0, \quad \det A_l^{\pm} = 0 \quad \text{as} \quad l \geq v^{\pm}(N). \end{aligned} \tag{8}$$

Here $\alpha_{-j}^{\pm} = \overline{\alpha_j^{\pm}}$, $\alpha_0^{\pm} = \alpha^{\pm} + \overline{\alpha^{\pm}}$, and $v^{\pm} = v^{\pm}(N)$ is defined by

$$\begin{aligned} &v^+ = wd + d_1, \quad v^- = wd + d_2 \qquad \text{if } N = 2w,\ f^*(0) = -1, \\ &v^+ = wd + d_2, \quad v^- = wd + d_1 \qquad \text{if } N = 2w,\ f^*(0) = 1, \\ &v^{\pm} = wd \qquad \text{if } N = 2w-1, \end{aligned} \tag{9}$$

where $d_1(d_2)$ denote the number of positive (negative) coefficients of the polynomial $r^M(z)$, $d = d_1 + d_2$. For the sake of convenience we will sometimes omit the sign + or − meaning in that case both of them.

Our next goal is to express all coefficients $\alpha_k, k=0,1,2,\ldots$, via the known moments $s_{m_k}, k=0,\ldots,n$, and θ^*. Note that the coefficients $\alpha_k, k=0,\ldots,m_n$, depend only on θ^* and the known moment sequence $s=\{s_{m_k}\}_{k=0}^n$. As it is shown in [4],

$$\det\left(\alpha_{k-j+l}\right)_{k,j=0}^{v}=0, \quad l=1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$\det\left(\alpha_{k-j+l}\right)_{k,j=0}^{v-1}\neq 0, \quad l=0,1,2,\ldots \tag{11}$$

Equalities (10) with regard to (11) allow to express successively all coefficients α_k, $k=v+1,v+2,\ldots$, as functions of indeterminate parameters $\alpha_k, k=m_n+1,\ldots,v$, and θ^*. Taking that into account, we can consider the equalities

$$A_k^{\pm}=k(-1)^{k-1}\left(\alpha^{\pm}\right)^k s_k^{\pm}, \qquad k\notin\overline{M} \tag{12}$$

as an infinite system with respect to finite number of variables $\alpha_k, k=m_n+1,\ldots,v$, which permit to express them via moments $\{s_{m_k}\}_{k=0}^n$ and θ^*, i.e. $\alpha=\alpha(\theta^*,s)$, $\alpha_k=\alpha_k(\theta^*,s)$, $k=1,2,\ldots$.

Let $0<t_1<t_2<\ldots<t_v<2\pi$ be the points of discontinuity of the function $f^{\pm}(t)$. Then

$$F^{\pm}(z,\theta^*)=\exp\left(\frac{i}{4}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}f^{\pm}(t)dt\right)=$$

$$=-if^{\pm}(2\pi-0)e^{-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{v}(-1)^{k+1}t_kf^*(0)}\prod_{k=1}^{v}\left(e^{it_k}-z\right)^{f^*(0)(-1)^{k+1}}(1-z)^{\frac{f^{\pm}(2\pi-0)-f^*(0)}{2}} \tag{13}$$

Notice that $f^{\pm}(2\pi-0)=\pm1$. Let us remark that the point $z=1$ is the root (the pole) of the function $F^+(z,\theta)$ $(F^-(z,\theta))$ iff $f^*(0)=-1$ $(f^*(0)=+1)$.

As it is shown in [4] the function $F(z,\theta^*)=\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_kz^k$ is a rational one and can be found in the following way

$$F(z,\theta)=\frac{a_0+a_1z+\ldots+a_vz^v}{b_0+b_1z+\ldots+b_vz^v}\equiv\frac{a(z)}{b(z)}, \tag{14}$$

where

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & \cdots & \alpha_{-v}\\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \cdots & \alpha_{-v+1}\\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{-v+2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_v & \alpha_{v-1} & \alpha_{v-2} & \cdots & \alpha_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_v\end{pmatrix}=0 \tag{15}$$

(note that $\operatorname{rank}\left(\alpha_{k-j}\right)_{k,j=0}^{v}=v$),

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_1 & \alpha & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ \alpha_v & \alpha_{v-1} & \alpha_{v-2} & \cdots & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_v\end{pmatrix} \tag{16}$$

Let us summarize our arguments as the following

Statement 1. *Let $(\theta^*, f^*(t))$ be the solution of the min-moment problem (1) and let $f^*(t)$ have N points of discontinuity. Then:*

i) θ^* is a root of the equation

$$det A^+_{v(N)}(\theta, s) \cdot det A^-_{v(N)}(\theta, s) = 0 \qquad (17_N)$$

where $v(N) = \min(v^+, v^-)$ is defined by (9), $\alpha^\pm, \alpha^\pm_j$, $j = 1, \ldots, m_n$, are defined from (4), (6), (7), $\alpha^\pm_j = \alpha^\pm_j(\theta, s)$, $j = m_n + 1, \ldots, v(N)$, are defined from (10), (12).

ii) Function $F(z, \theta^*)$ obtaining from (14), (15), (16) (we mean $F = F^+$, $v(N) = v^+$ if $\det A^+_{v(N)}(\theta^*, s) = 0$ and $F = F^-$, $v(N) = v^-$ if $\det A^-_{v(N)}(\theta^*, s) = 0$) is of the form (13).

Definition. *We will refer to a root θ^* of the equation (17_N) as the proper root if it satisfies the condition ii) of Statement 1.*

Explain now an approach to finding $\theta = \theta^*$. Consider the case $m_0 = 0$ (the case $m_0 \neq 0$ can be described in the similar way). We know that the index of solution N is no more than $2n + 1 - \delta_{0m_0} = 2n$. Suppose that $N = 2n$. Then $v(N) = \min(v^+, v^-) = nd + \min(d_1, d_2)$. Let

$$T^0 = \{\theta : \theta \in (0, a) \text{ and } \det A^+_{v(N)}(\theta, s) \cdot \det A^-_{v(N)}(\theta, s) = 0\},$$

$$K^0 = \{\theta \in T^0 : \operatorname{rank} A^+_{v(N)}(\theta, s) = v(N) \text{ or } \operatorname{rank} A^-_{v(N)}(\theta, s) = v(N)\}.$$

Now, for any $\theta \in K^0$ we must find the corresponding function $F^+(z, \theta)$ (if $\det A^+_{v(N)}(\theta, s) = 0$) or $F^-(z, \theta)$ (if $\det A^-_{v(N)}(\theta, s) = 0$) from (14), (15), (16). If this function is of the form (13) then θ is the proper root and $\theta = \theta^*$. In the case if there are no proper roots in K^0 we state that $N < 2n$. Next we suppose that $N = 2n - 1$ and construct the corresponding sets T^1 and K^1 ets. Further we will prove that any proper root of equation (17_N) defines the solution of the min-moment problem. From the uniqueness of the solution of the min-moment problem it follows that there exists the only j such that $\theta = \theta^* \in K^j$ is the proper root of the corresponding equation (17_N), $N = 2n - j$.

Thus we have the following main result.

Theorem 1. (On the solution of the min-moment problem) *For every $s \in S[0, a]$ there exists the only pair θ^* and N^* such that θ^* is a proper root of the equation (17_{N^*}). For this pair*

i) $\theta^* = \theta_s$,

ii) N^* is the index of $f_s(t)$, $t \in (0, \theta_s)$.

iii) The function $f_s(t)$ is of the form $f_s(t) = (-1)^j f_0$, $t \in [t_j, t_j+1]$, $j = 0, \ldots, N^*$, where $t_0 = 0$, $t_{N^*+1} = \theta^*$, and e^{it_j}, $j = 1, \ldots, N^*$, are all the roots and poles on $(0, \theta^*)$ of the function $F(z, \theta^*)$ obtaining from (14), (15), (16) for $v = v(N^*)$ defined by (9).

If $F = F^+$ then

$f_0 = -1$ *if the point z=1 is a root of* $F^+(z,\theta^*)$,
$f_0 = 1$ *if the point z=1 is not a root of* $F^+(z,\theta^*)$.
If $F = F^-$ *then*
$f_0 = 1$ *if the point z=1 is a pole of* $F^-(z,\theta^*)$,
$f_0 = -1$ *if the point z=1 is not a pole of* $F^-(z,\theta^*)$.

Proof. Let $s \in S[0,a]$. From Statement 1 it follows that if $(\theta_s, f_s(t))$ is the solution of index N of the min-moment problem (1) then θ_s is a proper root of the equation (17_N) and the function $f_s(t)$ satisfies the condition iii). Let us prove the uniqueness of a pair θ^* and $N^* \in \{0,1,\dots,2n+1-\delta_{0m_0}\}$ such that θ^* is a proper root of the equation (17_{N^*}).

Let θ^* be a proper root of the equation (17_{N^*}). Notice that the function $F(z,\theta^*)$ defined by (14), (15), (16) satisfies the relation

$$F(z,\theta^*) = \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j z^j,$$

where α, α_j, $j \geq 1$, are defined by (4), (6), (7). Introduce

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\mu_1) \cup \bigcup\limits_{j=1}^{v-1} (\nu_j, \mu_{j+1}) \cup (\nu_v, 2\pi], \\ -1, & t \in \bigcup\limits_{j=1}^{v} (\mu_j, \nu_j), \end{cases}$$

where $\{\mu_j,\nu_j\}_{j=1,\dots,v} = \{t \in (0,2\pi)$: e^{it} is a root or a pole of the function $F(z,\theta^*)\}$.

Then $F(z,\theta^*) = \exp\left\{ \frac{i}{4} \int\limits_{[0,2\pi]} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)\,dt \right\}$. Denote further

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in T = \bigcup\limits_{l=0}^{q} [\theta^* + \frac{2\pi}{p} l, \frac{2\pi}{p}(l+1),] \cup \bigcup\limits_{l: r_l = 0} [\frac{2\pi}{p} l, \frac{2\pi}{p}(l+1), \\ f(t), & t \in [0,2\pi] \backslash T. \end{cases}$$

Let us consider now the function $F_0(z) = \exp\left\{ \frac{i}{4} \int\limits_{[0,2\pi]} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f_0(t)\,dt \right\}$. We have $F_0(z) = F(z,\theta^*)\exp(-N(z))$, where $N(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} n_j z^j$, and the coefficients n_j are defined by (4). Due to Theorem 1 [4] we can remark that

i) $F_0(z)$ belongs to the Caratheodory function class, $F_0(z) \in \mathcal{C}$;
ii) $F_0(z)$ is holomorphic and real for $z = e^{it}, t \in T$;
iii) $\ln F_0(z) = \ln F(z,\theta^*) - N(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{m_k} \cdot \frac{i}{2}(2 - \delta_{0m_0}) r^M (e_p^{-m_k}) s_{m_k}$. (18)

That means that $F_0(z)$ belongs to the class $\mathcal{C}(\overline{M})$ corresponding to the periodic law $\overline{M}$ [4], and due to Theorem 2 in [4] we obtain

$$F_0(z) = \exp\left\{ \frac{i}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} \sum_{l=0}^{q} r_l \frac{e^{i\left(t+\frac{2\pi}{p}l\right)} + z}{e^{i\left(t+\frac{2\pi}{p}l\right)} - z} f_0(t)\, dt \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{i}{4} \int_0^{\theta^*} \sum_{l=0}^{q} r_l \frac{e^{i\left(t+\frac{2\pi}{p}l\right)} + z}{e^{i\left(t+\frac{2\pi}{p}l\right)} - z} f_0(t)\, dt \right\}.$$

Taking the logarithm and expanding into the power series, we have

$$\ln F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{m_k} \cdot \frac{i}{2}(2 - \delta_{0m_0}) r^M (e_p^{-m_k}) \int_0^{\theta^*} e^{-im_k t} f_0(t) dt.$$

Comparing with (18) we obtain $\int_0^{\theta^*} e^{im_k t} f_0(t) dt = s_{m_k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. As far as θ^* is a proper root of (17_{N^*}) we can see that $f_0(t)$ is piecewise constant and has $N^* \leq 2n + 1 - \delta_{0m_0}$ points of discontinuity on $(0, \theta^*)$. Then $(\theta^*, f_0(t))$ is the solution of index N^* of the min-moment problem (1). The theorem is proved.

Acknowledgement. Authors thank Dr. S. Yu. Ignatovich whose critical revision of the paper allows to improve it essentially.

REFERENCES

1. Korobov V.I., Sklyar G.M. The Markov moment problem on the smallest possible interval // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1989.– V.308. – P.525-528; English translation: Soviet Math. Dokl.– 1990. – V.40.– P.334-337.

2. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. A classification of Linear Time-Optimal Control Problem in a Neighborhood of the Origin // J.of Math.Anal. and Appl.– 1996. – V.203.– P.791-811.

3. Krein M.G., Nudel'man A.A. The Markov Moment Problem and Extremal Problems.– Moscow:Nauka, 1973; English translation: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

4. Sklyar G.M., Velkovsky I. The Markov trigonometric moment problem with periodic gaps.– TU Darmstadt, FB Mathematik. – Preprint N. 1956. – TU Darmstadt, FB Mathematik, 1997.– P.1-44.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.5 № 444 , 1999, с.10-14

Управляемость треугольных систем с равномерно ограниченными возмущениями.

В.И.Коробов, С.С.Павличков

Харьковский государственный университет
Szczecin University, Poland

С помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке доказана полная управляемость треугольной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с равномерно ограниченными возмущениями в классе непрерывных управлений. При этом предполагается, что возмущающие члены удовлетворяют локальному условию Липшица по x и u а главная (треугольная) часть — глобальному условию Липшица. Рассмотрен один пример.

1. Введение и формулировка основного результата.

Треугольные системы, управляемость и устойчивость которых была впервые исследована в работе В.И.Коробова [1], изучались с различных точек зрения. Случай нестационарных треугольных систем исследовался А.М.Ковалевым (см. [2]), а их разностные аналоги были рассмотрены В.М.Кунцевич и М.М.Лычак в [3]. Теорема о локальной стабилизации каскадов систем была доказана M.Vidyasagar-ом в работе [4], а глобальный вариант этого результата был получен E.D.Sontag-ом в [5]. Детальный обзор работ, посвященных стабилизации каскадов систем, можно найти в [6] и в [7]. Цель данной работы — доказать теорему о полной управляемости треугольной нестационарной системы с равномерно ограниченным возмущением.

Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), ..., x_{i+1}(t)) + g_i(t, x_1(t), ..., x_n(t), u(t)), & \\ i = 1, \ldots, n-1; & t \in [t_0, T]. \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t), u(t)) + g_n(t, x_1(t), ..., x_n(t), u(t)); & \end{array}\right. \tag{1}$$

с фазовым вектором $(x_1, ..., x_n)^* \in \mathbf{R}^n$ и с управлением $u \in \mathbf{R}^1$. Мы предполагаем, что выполнены следующие условия на функции f_i :

(i) При каждом $i = 1, \ldots, n$, функция $f_i(t, x_1, ..., x_{i+1})$ принадлежит классу $C^{n-i+1}([t_0, T] \times \mathbf{R}^{i+1};\ \mathbf{R}^1)$;

(ii) Существует константа $L > 0$ такая, что при всех $(x^1, u^1) = (x_1^1, \ldots, x_n^1, u^1) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$и всех $(x^2, u^2) = (x_1^2, \ldots, x_n^2, u^2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$ и при всех $t \in [t_0, T]$

(iii) Существует константа $a>0$ такая, что при всех $(t,x,u)=(t,x_1,...,x_n,u)\in[t_0,T]\times\mathbf{R}^{n+1}$ имеем

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(t,x_1,\ldots,x_{i+1})\right|\geq a>0,\ i=1,\ldots,n-1;\ \left|\frac{\partial f_n}{\partial u}(t,x,u)\right|\geq a>0.$$

Предположим также, что функции $g_i(t,x_1,\ldots,x_n,u)$ непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограниченны во всем слое $[t_0,T]\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$ и удовлетворяют локальному условию Липшица по x и u, то есть для любого компакта $K\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$ существует функция $l_K(\cdot)\in L_1([t_0,T];\mathbf{R}^1)$ ($l_K(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$) такая,что при всех $(x^1,u^1)=(x_1^1,...,x_n^1,u^1)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$, $(x^2,u^2)=(x_1^2,...,x_n^2,u^2)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$ и при почти всех $t\in[t_0,T]$ имеем $|g_i(t,x^1,u^1)-g_i(t,x^2,u^2)|\leq l_K(t)(|x^1-x^2|+|u^1-u^2|)$, $i=1,\ldots,n$.

Теорема 1. *При сделанных предположениях система (1) полностью управляема на отрезке $[t_0,T]$, то есть для любых $x^0\in\mathbf{R}^n$, $x^T\in\mathbf{R}^n$ найдется управление $u(\cdot)\in C([t_0,T];\mathbf{R}^1)$ переводящее x^0 в x^T за время $[t_0,T]$ в силу системы (1).*

2. Доказательство теоремы 1.

Предварительно рассмотрим невозмущенную треугольную систему

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=f_i(t,x_1(t),...,x_{i+1}(t)),\\ \qquad i=1,\ldots,n-1; \qquad\qquad t\in[t_0,T],\\ \dot{x}_n(t)=f_n(t,x_1(t),...,x_n(t),u(t)),\end{cases}\tag{2}$$

и сделаем замену координат и управления следующим образом:

$$\begin{cases}z_1 \;=\; F_1(t,x_1):=x_1; \qquad z_2=F_2(t,x_1,x_2):=f_1(t,x_1,x_2);\\ z_i \;=\; F_i(t,x_1,\ldots,x_i):=\dfrac{\partial F_{i-1}}{\partial t}(t,x_1,\ldots,x_{i-1})+\\ \qquad +\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_j}(t,x_1,\ldots,x_{i-1})f_j(t,x_1,\ldots,x_{j+1}), \quad i=1,\ldots,n;\\ v \;=\; F_{n+1}(t,x_1,\ldots,x_n,u):=\dfrac{\partial F_n}{\partial t}(t,x_1,\ldots,x_n)+ \qquad\qquad t\in[t_0,T]\\ \qquad +\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial F_n}{\partial x_j}(t,x_1,\ldots,x_n)f_j(t,x_1,\ldots,x_{j+1})+\\ \qquad +\dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(t,x_1,\ldots,x_n)f_n(t,x_1,\ldots,x_n,u),\end{cases}\tag{3}$$

Из (i) и (iii) следует, что при каждом фиксированном $t\in[t_0,T]$ отображение $(x,u)\longmapsto(F(t,x),F_{n+1}(t,x,u)):=((F_1(t,x_1),\ldots,F_n(t,x_1,\ldots,x_n))^*,F_{n+1}(t,x_1,\ldots,x_n,u))$ есть диффеоморфизм $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$ на $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$. Легко видеть, что этот диффеоморфизм отображает траектории системы (2) на траектории канонической системы

$$\dot{z}_i(t)=z_{i+1}(t),\ i=1,\ldots,n-1;\quad \dot{z}_n(t)=v(t);\quad t\in[t_0,T]\tag{4}$$

$((z_1, ..., z_n)^* \in \mathbf{R}^n$ - фазовый вектор, $v \in \mathbf{R}^1$ - управление) в том смысле,что если $x(\cdot)$ - траектория системы (2), отвечающая управлению $u(\cdot) \in C([t_0,T];\ \mathbf{R}^1)$, то $z(\cdot) := F(\cdot, x(\cdot))$ - траектория системы (4), отвечающая управлению $v(\cdot) := F_{n+1}(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ и, обратно, если $z(\cdot)$ - траектория системы (4), отвечающая управлению $v(\cdot) \in C([t_0,T];\mathbf{R}^1)$, то обратная к (3) замена координат и управления дает соответствующий процесс для системы (2). Выберем любую точку $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^* \in \mathbf{R}^n$ и положим $z^0 := F(t_0, x^0)$. Выберем какое-нибудь семейство управлений $\{v_{z^T}(\cdot) \in C([t_0,T];\mathbf{R}^1)\}_{z^T \in \mathbf{R}^n}$ такое, что, во-первых, при каждом $z^T \in \mathbf{R}^n$ управление $v_{z^T}(\cdot)$ переводит z^0 в z^T за время $[t_0, T]$ в силу (4) и, во-вторых, отображение $z^T \longmapsto v_{z^T}(\cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^n; C([t_0,T];\mathbf{R}^1))$. (Для этого достаточно, например положить $v_{z^T}(t) := b^* e^{-A^* t} N^{-1}(t_0,T)(e^{-AT} z^T - e^{-At_0} z^0)$, где $b = (0, \ldots, 0, 1)^* \in \mathbf{R}^n$, A — матрица системы (4), $N(t_0,T) = \int_{t_0}^T e^{-At} bb^* e^{-A^* t} dt$). При каждом $z^T \in \mathbf{R}^n$, пусть $z(z^T, \cdot) = (z_1(z^T, \cdot), \ldots, z_1(z^T, \cdot))^*$ — траектория системы (4), выходящая из точки z^0 и отвечающая управлению $v_{z^T}(\cdot)$, и пусть $x(z^T, \cdot) = (x_1(z^T, \cdot), \ldots, x_1(z^T, \cdot))^*$ и $u(z^T, \cdot)$ — соответствующие траектория и управление системы (2), так что $z(z^T, t) = F(t, x(z^T, t))$, $v_{z^T}(t) = F_{n+1}(t, x(z^T, t), u(z^T, t))$ при всех $t \in [t_0, T]$. Для любой точки $x^T \in \mathbf{R}^n$ через $u_{x^T}(\cdot)$, по определению, обозначим управление вида $u_{x^T}(t) := u(F(T, x^T), t)$, $t \in [t_0, T]$. Тогда, по построению, при каждом $x^T \in \mathbf{R}^n$, управление $u_{x^T}(\cdot)$ принадлежит классу $C([t_0,T];\mathbf{R}^1)$ и переводит точку x^0 в точку x^T за время $[t_0, T]$ в силу системы (2). При каждом $x^T \in \mathbf{R}^n$ через $y(x^T, \cdot)$ обозначим траекторию системы (1), отвечающую управлению $u_{x^T}(\cdot)$ и выходящую из точки x^0. Так как функции $g_i(t, x, u), i = 1, \ldots, n$, непрерывны, локально липшицевы по x и u и равномерно ограничены в $[t_0, T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$, то, учитывая условия (i) и (ii), и то, что соответствующая траектория $x(F(T, x^T), \cdot)$ системы (2) глобально определена на всем $[t_0, T]$, получаем (например, с помощью леммы Гронуолла-Беллмана), что траектория $y(x^T, \cdot)$ определена на всем отрезке $[t_0, T]$ и существует константа $D > 0$ такая, что

$$\| y(x^T, \cdot) - x(F(T, x^T), \cdot)\|_{C([t_0,T];\mathbf{R}^n)} \leq D \tag{5}$$

Так как отображение $z^T \longmapsto v_{z^T}(\cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^n; C([t_0,T];\mathbf{R}^1))$, то $z^T \longmapsto u(z^T, \cdot)$, а значит и $x^T \longmapsto u_{x^T}(\cdot)$ принадлежат этому классу. Следовательно отображение $x^T \longmapsto y(x^T, \cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^n; C([t_0,T]; \mathbf{R}^n))$. (Это также легко получить с помощью леммы Гронуолла-Беллмана).

Зададим отображение $\Psi(\cdot)$ из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ следующим образом: $\Psi(x^T) := y(x^T, T)$ при всех $x^T \in \mathbf{R}^n$. Докажем, что $\Psi(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$, тогда, по построению, это будет означать, что множество достижимости системы (1) из точки x^0 равно $\mathbf{R}^n$, и, в силу произвольности выбора точки x^0, что система (1) полностью управляема. Действительно, выберем любое $y^T \in \mathbf{R}^n$. Введем отображение $\Phi(\cdot)$, действующее из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ по правилу $\Phi(x^T) := -\Psi(x^T) + x^T + y^T$. Так как, по построению, $x(F(T, x^T), T) = x^T$ при всех $x^T \in \mathbf{R}^n$, то из (5) следует, что $|\Psi(x^T) - x^T| \leq D$, то есть $|\Phi(x^T) - y^T| \leq D$ при всех $x^T \in \mathbf{R}^n$. А поскольку отображение $x^T \longmapsto y(x^T, \cdot)$ принадлежит классу $C(\mathbf{R}^n; C([t_0, T]; \mathbf{R}^n))$, то $\Psi(\cdot)$, а значит и $\Phi(\cdot)$, принадлежат классу $C(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$. Итак, $\Phi(\cdot)$ непрерывно отображает замкнутый выпуклый компакт $\{x \in \mathbf{R}^n | \ |x - y^T| \le D\}$ в себя, следовательно, по теореме Брауэра существует $x^* \in \{x \in \mathbf{R}^n | \ |x - y^T| \le D\}$, такое что $\Phi(x^*) = x^*$, то есть $\Psi(x^*) = y^T$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть требуется перевести точку $(0,0)^* \in \mathbf{R}^2$ в точку $(y_1, y_2)^* \in \mathbf{R}^2$ за время $[0, T] = [0, 1]$ в силу системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \cos u(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + \sin u(t), \end{array} \right. \quad t \in [0, 1]. \tag{6}$$

Легко устанавливаем, что при любом $(z_1, z_2)^* \in \mathbf{R}^2$ управление $v_{(z_1,z_2)}(t) := (-2z_2 + 6z_1) + (6z_2 - 12z_1)t$ переводит $(0,0)^* \in \mathbf{R}^2$ в $(z_1, z_2)^* \in \mathbf{R}^2$ за время $[0, 1]$ в силу системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = v(t), \end{array} \right. \quad t \in [0, 1].$$

Тогда условие попадания из точки $(0,0)$ в точку (y_1, y_2) в силу системы (6) с управлением $u(z_1, z_2, \cdot) := v_{(z_1,z_2)}(\cdot)$ примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \quad z_1 + \dfrac{\sin(4z_2 - 6z_1) - \sin(6z_1 - 2z_2) + \cos(-2z_2 + 6z_1)}{6z_2 - 12z_1} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\sin(4z_2 - 6z_1) - \sin(6z_1 - 2z_2)}{(6z_2 - 12z_1)^2} \\ y_2 = \quad z_2 - \dfrac{\cos(4z_2 - 6z_1) - \cos(6z_1 - 2z_2)}{6z_2 - 12z_1} \end{array} \right.$$

то есть задача управляемости сводится к нахождению параметров (z_1, z_2), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{array}{l} z_1 = \Phi_1(z_1, z_2) \\ z_2 = \Phi_2(z_1, z_2), \end{array} \tag{7}$$

где по определению

$$\Phi_1(z_1, z_2) := \quad y_1 - \frac{\sin(4z_2 - 6z_1) - \sin(6z_1 - 2z_2) + \cos(-2z_2 + 6z_1)}{6z_2 - 12z_1} + \frac{\sin(4z_2 - 6z_1) - \sin(6z_1 - 2z_2)}{(6z_2 - 12z_1)^2},$$

$$\Phi_2(z_1, z_2) := \quad y_2 + \frac{\cos(4z_2 - 6z_1) - \cos(6z_1 - 2z_2)}{6z_2 - 12z_1}$$

(отметим, что особенности в точках (z_1, z_2) вида $z_2 = 2z_1$ устранимы, так что функции Φ_i определены корректно во всем $\mathbf{R}^2$). Из доказательства теоремы 1 сразу следует существование z_1, z_2, удовлетворяющих системе (7), однако, поскольку при этом используется теорема Брауэра, числа z_1 и z_2 находятся, вообще говоря, неконструктивно. Тем не менее, легко убедиться, что для точек $(y_1, y_2)^* \in \mathbf{R}^2$, удовлетворяющих условию $|6y_2 - 12y_1| > A$, где $A > 0$ - достаточно большое (например, можно положить A:=48), отображение $(z_1, z_2)^* \longmapsto (\Phi_1(z_1, z_2), \Phi_2(z_1, z_2))^*$ является сжимающим отображением прямоугольника $\{(z_1, z_2)^* \in \mathbf{R}^2 | \ |z_1 - y_1| \le 2, |z_2 - y_2| \le 1\}$ в себя и, следовательно, для такой точки параметры z_1, z_2 могут быть найдены численно с помощью метода сжимающих отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И. Управляемость устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. – Т.9. – 1973.– С. 614-619.

2. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем.– Киев: Наукова думка, 1980.

3. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова.– М: Наука, 1977.

4. Vidyasagar M. Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions: stability and stabilizability// IEEE Trans. Autom. Ctr. – 1980. – V.25.–P.773-779.

5. Sontag E. D. Further facts about input to state stabilization IEEE Trans. Autom. Contr. – 1990. – V.35.– P. 473-476.

6. Sontag E. D. Feedback stabilization of nonlinear systems// in Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control (M. A. Kaashhoek, J. H. van Schuppen, and A. C. M. Ran, eds.)– Birkhauser: Cambridge, MA, 1990.– P. 61-81.

7. Krener A. J. Feedback linearization // in Mathematical Control Theory.– Springer: New York, 1999.– P. 66-98.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977+512.64.643.8 № 444 , 1999, с.15-23

Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости

В.А. Скорик

Харьковский государственный университет

В методе функции управляемости построение этой функции и синтезирующего управления для линейных систем тесно связано с некоторыми матрицами произвольного порядка, для получения которых необходимо обращать определенное семейство специальных матриц. Это семейство является семейством плохо обусловленных матриц. В связи с этим в работе предложено аналитическое представление обратных к ним матриц.

Одним из важных элементов метода функции управляемости [1, 2] является построение этой функции, а также синтезирующего управления для линейных систем. В свою очередь, это построение тесно связано с обращением некоторых специальных матриц произвольного порядка. Так, в работе [1] важную роль играет матрица $F_\alpha(\Theta)$, для получения которой необходимо обращать матрицы $F_\alpha^{-1}(\Theta)$, приведенные ниже в (1), (2) (индекс α подчеркивает зависимость матриц от параметра α). В работах [3], [4] используется матрица $N_f(\Theta)$, имеющая вид $N_f(\Theta)=\int\limits_0^\infty f\left(\frac{t}{\Theta}\right)e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$, где $f(s)$ — произвольная невозрастающая неотрицательная на полуоси $[0,+\infty)$ функция, имеющая, по крайней мере, m точек убывания (среди которых хотя бы одна отлична от нуля) и такая, что при $0<\Theta\leq\bar{\Theta}_f$ будет $\int\limits_0^\infty s^{2m+1}e^{-2\lambda_0 s\Theta}f(s)ds<\infty$ (m — степень минимального полинома матрицы A, $\lambda_0=\min\{\lambda_0,0\}$, λ_0 — минимальная вещественная часть собственных значений матрицы A). В случае, когда

$$f(s)=f_0(s)=\begin{cases}(1-s) & \text{при}\quad 0\leq s\leq 1,\\ 0 & \text{при}\quad s\geq 1,\end{cases}$$

функция управляемости $\Theta(x_0)$ играет роль времени движения из начальной точки x_0 из некоторой окрестности начала координат в точку $x_T=0$, т.е. $T(x_0)=\Theta(x_0)$. В этом случае матрица $N_{f_0}(\Theta)$ для канонической системы совпадает с матрицей $F_\alpha^{-1}(\Theta)$ при $\alpha=1$ $(\beta=1)$.

В данной работе рассматривается вопрос обращения семейства матриц, обозначенных $F_\alpha^{-1}(\Theta)$ и имеющих при $\alpha \geq 1$ вид:

$$F_\alpha^{-1}(\Theta) = \left(\frac{(-1)^{2n-i-j}(2n-i-j)!\,\alpha^{2n-i-j+1}\,\Theta^{\frac{2n-i-j+1}{\alpha}}}{(n-i)!(n-j)!\,\beta^{2n-i-j+1} \prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1} (\alpha+k)} \right)_{i,j=1}^{n}, \tag{1}$$

$$F_\infty^{-1} = \left(\frac{(-1)^{2n-i-j}(2n-i-j)!}{(n-i)!(n-j)!\,\beta^{2n-i-j+1}} \right)_{i,j=1}^{n}, \tag{2}$$

где $\beta > 0$ — некоторая константа. Это семейство является семейством плохо обусловленных матриц. Найдено аналитическое представление обратных к ним матриц. В доказательстве этого представления используется аппарат теории теплицевых и ганкелевых матриц [5], [6].

Обозначим через $D(\Theta)$ и D_1 диагональные матрицы вида

$$D(\Theta) = diag \left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2\alpha}} \right)_{i=1}^{n}, \quad D_1 = diag \left(\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!\,\beta^{n-i+\frac{1}{2}}} \right)_{i=1}^{n}, \tag{3}$$

а через Γ_α ганкелевы матрицы

$$\Gamma_\alpha = \left(\frac{(2n-i-j)!\,\alpha^{2n-i-j+1}}{\prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1} (\alpha+k)} \right)_{i,j=1}^{n}, \quad 1 \leq \alpha < \infty, \tag{4}$$

$$\Gamma_\infty = ((2n-i-j)!)_{i,j=1}^{n}. \tag{5}$$

Тогда, на основании (3) – (5), из (1), (2) имеем $F_\alpha^{-1}(\Theta) = D^{-1}(\Theta) F_\alpha^{-1} D^{-1}(\Theta)$ и $F_\alpha^{-1} = D_1 \Gamma_\alpha D_1$ при $1 \leq \alpha \leq \infty$ и, следовательно, для нахождения матриц F_α нам требуется обратить матрицы Γ_α. Матрицы Γ_α (тем более, матрицы F_α^{-1}) являются плохо обусловленными и имеют уже для малых порядков большое число обусловленности, что вызывает трудности при численном нахождении обратных к ним матриц. С ростом же размерности матриц найти численно обратные к ним матрицы практически невозможно, в связи с чем возникает необходимость аналитического представления последних.

Аналитическое представление матриц Γ_α^{-1} дает

Теорема. *Пусть векторы x_α и y_α при $1 \leq \alpha < \infty$ задаются равенствами*

$$x_\alpha = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha+2n-k) \left(\frac{(-1)^{2n-j-1}}{(n-j)!\,\alpha^{2n-j}} C_{n-1}^{j-1} \prod_{k=j+1}^{n} (\alpha+2n-k) \right)_{j=1}^{n}, \tag{6}$$

$$y_\alpha = \left(\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!\,\alpha^{n-j+1}} C_{n}^{j-1} \prod_{k=j}^{n} (\alpha+2n-k) \right)_{j=1}^{n}, \tag{7}$$

и

$$x_\infty = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{(-1)^{2n-j-1}}{(n-j)!}C_{n-1}^{j}\right)_{j=1}^{n}, \tag{8}$$

$$y_\infty = \left(\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}C_{n}^{j-1}\right)_{j=1}^{n}, \tag{9}$$

а ганкелевые матрицы Γ_α имеют вид (4), (5).

Тогда обратные матрицы Γ_α^{-1} могут быть найдены по одной из следующих формул:

$$\Gamma_\alpha^{-1} = \left(\frac{1}{y_1^\alpha}\left(x_j^\alpha y_i^\alpha + \sum_{k=1}^{l}(x_{j+k}^\alpha y_{i-k}^\alpha - x_k^\alpha y_{j+k}^\alpha)\right)\right)_{i,j=1}^{n}, \quad l = \min(n-j, i-1),$$

$$\Gamma_\alpha^{-1} = \left(\frac{1}{y_1^\alpha}\left(x_i^\alpha y_j^\alpha + \sum_{k=1}^{s}(x_{i+k}^\alpha y_{j-k}^\alpha - x_{j-k}^\alpha y_{i+k}^\alpha)\right)\right)_{i,j=1}^{n}, \quad s = \min(n-i, j-1),$$

где x_i^α, y_i^α — компоненты векторов x_α и y_α.

Доказательство. Покажем, что вектор x_α вида (6) является решением системы $\Gamma_\alpha x_\alpha = e_1$, где $e_1=(1,0,\ldots,0)^T$ – n-мерный вектор, т.е. покажем, что

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha+2n-k)}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{2n-j-1}(2n-i-j)!C_{n-1}^{j-1}}{(n-j)!\alpha^{i-1}\prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1}(\alpha+k)}\prod_{k=j+1}^{n}(\alpha+2n-k) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i=1, \\ 0 & \text{при} \quad i=2,\ldots,n. \end{cases} \tag{10}$$

Положим

$$S_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{2n-j-1}(2n-i-j)!C_{n-1}^{j-1}}{(n-j)!\prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1}(\alpha+k)}\prod_{k=j+1}^{n}(\alpha+2n-k), \quad i=1,\ldots,n. \tag{11}$$

Тогда из (10), после умножения i-го равенства на α^{i-1} ($i=1,\ldots,n$), получаем, что нам требуется доказать справедливость равенств

$$S_i = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha+2n-k)} & \text{при} \quad i=1, \\ 0 & \text{при} \quad i=2,\ldots,n. \end{cases} \tag{12}$$

Для доказательства равенства (12) рассмотрим конечные разности назад m-го порядка для S_i из (11), которые вычисляются через значения S_i по формуле $\nabla^m S_i = \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k S_{i-k}$ и имеют вид

$$\nabla^m S_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{2n-j-1}(2n-i-j)!C_{n-1}^{j-1}}{(n-j)!\prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1}(\alpha+k)}\prod_{k=j+1}^{n}(\alpha+2n-k). \tag{13}$$

Рассмотрим конечную разность вида $\nabla^m S_n$. Из равенства (13) при $i = n$, используя формулу для биномиальных коэффициентов

$$C_{r+p}^{s} = \sum_{k=0}^{r} C_r^k C_p^{s-k}, \quad C_p^{s-k} = 0, \text{ если } s-k<0,\, s-k>p,$$

при $s = j-1$, $r = m$ и $p = n-m-1$, получаем

$$\nabla^m S_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^n S_{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\sum_{j=k+1}^{n-m+k} \frac{(-1)^{2n-j-1} C_{n-m-1}^{j-k-1}}{\prod\limits_{l=m+1}^{n-j+m+1} (\alpha+l)} \prod_{l=j+1}^{n} (\alpha+2n-l) \right), \quad m = \overline{0, n-1}. \quad (14)$$

Покажем, что в равенстве (14) при $m = 0, \ldots, n-2$ сумма, находящаяся в скобках, равна нулю для любого $k = 0, \ldots, m$. Представим ее в следующем виде:

$$\sum_{j=k+1}^{n-m+k} \frac{(-1)^{2n-j-1} C_{n-m-1}^{j-k-1}}{\prod\limits_{l=m+1}^{n-j+m+1} (\alpha+l)} \prod_{l=j+1}^{n} (\alpha+2n-l) = \Bigg(\Bigg(\ldots \Bigg(\Bigg((-1)^{2n-k-2} C_{n-m-1}^{0} \cdot$$

$$\cdot \frac{\alpha+2n-k-2}{\alpha+m+n-k} + (-1)^{2n-k-3} C_{n-m-1}^{1} \Bigg) \frac{\alpha+2n-k-3}{\alpha+m+n-k-1} + (-1)^{2n-k-4} \cdot$$

$$\cdot C_{n-m-1}^{2} \Bigg) \ldots \Bigg) \frac{\alpha+n+m-k}{\alpha+2m-k+2} + (-1)^{n+m-k-1} C_{n-m-1}^{n-m-1} \Bigg) \frac{r}{\prod\limits_{l=m+1}^{2m-k+1} (\alpha+l)}, \quad (15)$$

где

$$r = \begin{cases} 1, & \text{при } \quad k = m, \\ \prod\limits_{l=n}^{n+m-k-1} (\alpha+l), & \text{при } \quad k = 0, \ldots, m-1. \end{cases}$$

Обозначим через $(S)_p$ выражение в p-х скобках правой части равенства (15). Тогда

$$(S)_p = (-1)^{2n-k-p-2} \frac{\alpha+n+m-k-p}{p!(\alpha+n+m-k)} \prod_{l=m+2}^{m+p+1} (n-l), \quad p = \overline{1, n-m-1}. \quad (16)$$

Так как в правой части равенства (15) число скобок равно $n-m-1$, то из формулы (16) при $p = n-m-1$ получаем, что $(S)_{n-m-1} = 0$, и, следовательно, из равенства (14) имеем

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^n S_{n-k} = 0 \quad \text{при} \quad m = 0, \ldots, n-2. \quad (17)$$

Полагая в равенстве (17) последовательно $m = 0$, $m = 1$, $\ldots$, $m = n-2$, получаем, что $S_n = 0$, $S_{n-1} = 0$, $\ldots$, $S_2 = 0$, и тем самым установлена справедливость равенства (12) при $i = 2, \ldots, n$. Докажем его справедливость при $i = 1$. Для этого рассмотрим конечную разность $\nabla^{n-1} S_n$. Из равенства (14) при $m = n-1$ получаем, что

$$\prod_{j=1}^{n}(\alpha+2n-j)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}C_{n-1}^{k}S_{n-k} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{n-1}^{j-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\alpha+2n-k). \quad (18)$$

Положим $\gamma = \alpha + 2n$ и введем в рассмотрение полином $P(\gamma)$ следующего вида:

$$P(\gamma) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{n-1}^{j-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\gamma-k) - (n-1)!. \quad (19)$$

Покажем, что $P(\gamma) \equiv 0$. Для этого вычислим значение полинома $P(\gamma)$ при $\gamma = j$, $j = 1, \ldots, n$. Имеем

$$P(j) = (-1)^{n-j}C_{n-1}^{j-1}(j-1)\ldots(1)(-1)\ldots(j-n) - (n-1)! =$$

$$= (-1)^{2n-2j}\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!}(j-1)!(n-j)! - (n-1)! = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, полином $P(\gamma)$ имеет n корней $\gamma_1 = 1, \ldots, \gamma_n = n$, а так как $deg P(\gamma) = n-1$, то $P(\gamma)$ является константой, равной нулю, т.е. $P(\gamma) \equiv 0$. Тогда из равенства (19) получаем, что

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{n-1}^{j-1}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\alpha+2n-k) = (n-1)!,$$

и, следовательно, из (18) имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}C_{n-1}^{k}S_{n-k} = \frac{(n-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha+2n-k)}.$$

откуда с учетом того, что $S_i = 0$ при $i = 2, \ldots, n$, вытекает справедливость равенства (12) и при $i = 1$.

Покажем, что вектор y_α из (7) является решением системы $\Gamma_\alpha y_\alpha = e_n$, где $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}(2n-i-j)!\alpha^{n-i}C_k^{j-1}}{(n-j)!\prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1}(\alpha+k)}\prod_{k=j}^{n}(\alpha+2n-k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i = \overline{1, n-1}, \\ 1 & \text{при } i = n. \end{cases} \quad (20)$$

Обозначим

$$S_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}(2n-i-j)!C_n^{j-1}}{(n-j)!\prod\limits_{k=1}^{2n-i-j+1}(\alpha+k)}\prod_{k=j}^{n}(\alpha+2n-k),\qquad i=1,\ldots,n. \quad (21)$$

Тогда из (20) вытекает, что нам требуется показать справедливость равенств

$$S_i=\begin{cases}0 & \text{при} \quad i=1,\ldots,n-1,\\ 1 & \text{при} \quad i=n.\end{cases} \quad (22)$$

Так как конечные разности назад m-го порядка для S_i из (21) вычисляются по формуле

$$\nabla^m S_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}(2n-i-j)!C_n^{j-1}}{(n-j)!\prod\limits_{k=m+1}^{2n-i-j+m+1}(\alpha+k)}\prod_{k=j}^{n}(\alpha+2n-k),\quad m<i,\ i=\overline{1,n},$$

то разности $\nabla^m S_{m+1}$ при $m=\overline{0,n-2}$ имеют вид

$$\nabla^m S_{m+1}=\frac{(n-m-1)!}{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}(\alpha+k)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{2n-m-1-j}^{n-j}C_n^{j-1},\ m=0,\ldots,n-2. \quad (23)$$

Используя для биномиального коэффициента $C_{n+s-m-1}^{s}$ представление

$$(-1)^sC_{n+s-m-1}^{s}=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{s-k}C_m^kC_{n+s-k-1}^{s-k} & \text{при} \quad s\ge m,\\ \sum\limits_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}C_m^kC_{n+s-k-1}^{s-k} & \text{при} \quad 0\le s\le m,\end{cases}$$

при $s=n-j$, имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{2n-m-j-1}^{n-j}C_n^{j-1}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{n-j-k}C_n^{j-1}C_{2n-j-k-1}^{n-j-k}\right), \quad (24)$$

где $m=0,\ldots,n-2$. Покажем, что в правой части равенства (24) сумма, находящаяся в скобках, равна нулю для любого $k=0,\ldots,m$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{n-j-k}C_n^{j-1}C_{2n-j-k-1}^{n-j-k}=0,\quad k=0,\ldots,m. \quad (25)$$

Действительно, так как левая часть равенства (25) представима в виде:

$$\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^{n-j-k}C_n^{j-1}C_{2n-j-k-1}^{n-j-k}=\Bigl(\Bigl(\ldots\Bigl(\Bigl((-1)^{n-k-1}\frac{2n-k-2}{n-k-1}+(-1)^{n-k-2}C_n^1\Bigr).$$

$$\cdot\frac{2n-k-3}{n-k-2}+(-1)^{n-k-3}C_n^2\Big)\ldots\Big)n+C_n^{n-k-1}\Big)\equiv(S)_{n-k-1},\quad k=\overline{0,m}, \tag{26}$$

причем выражение в р-х скобках $(S)_p$ правой части равенства (26) вычисляется по формуле

$$(S)_p=(-1)^{n-k-p-1}\frac{(n-1)\ldots(n-p)(n-k-p-1)}{p!(n-k-1)},\ p=\overline{1,n-k-1},\ k=\overline{0,m},$$

то, на основании последнего равенства при $p=n-k-1$, имеем $(S)_{n-k-1}=0$ для любого $k=0,1,\ldots,m$. Таким образом, учитывая (25) и (24), из равенства (23) получаем

$$\nabla^m S_{m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k S_{m+1-k}=0 \text{ при } m=\overline{0,n-2}. \tag{26}$$

Пологая в равенстве (26) последовательно $m{=}0,\ m{=}1,\ \ldots,\ m{=}n{-}2$, получаем, соответственно, $S_1{=}0,\ S_2{=}0,\ \ldots,\ S_{n-1}{=}0$, т.е. равенство (22) установлено при $i=1,\ldots,n-1$. Докажем справедливость равенства (22) при $i=n$. Для этого представим S_n в следующем виде:

$$S_n=\Bigg(\Bigg(\ldots\Bigg(\Bigg((-1)^{n-1}\frac{\alpha+2n-1}{\alpha+n}C_n^0+(-1)^{n-2}C_n^1\Bigg)\frac{\alpha+2n-2}{\alpha+n-1}+$$

$$+(-1)^{n-3}C_n^2\Bigg)\cdot\ldots\Bigg)\frac{\alpha+n+1}{\alpha+2}+C_n^{n-1}\Bigg)\frac{\alpha+n}{\alpha+1}=(S)_{n-1}\frac{\alpha+n}{\alpha+1} \tag{27}$$

Так как выражение в p-х внутренних скобках $(S)_p$ правой части равенства (27) вычисляется по формуле

$$(S)_p=(-1)^{n-p-1}\frac{\alpha+n-p}{p!(\alpha+n)}\prod_{k=1}^{p}(n-k),\qquad p=1,\ldots,n-1,$$

то при р $=n-1$ из нее имеем, что $(S)_{n-1}=\frac{\alpha+1}{\alpha+n}$, чем и завершается доказательство равенства (22).

Рассмотрим предельный по α случай. Покажем, что вектор x_∞ из (8) является решением системы $\Gamma_\infty x_\infty=e_1$, т.е. выполнены следующие равенства:

$$S_i\equiv\begin{cases}1 & \text{при} \quad i=1,\\ 0 & \text{при} \quad i=2,\ldots,n,\end{cases} \tag{28}$$

где

$$S_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{2n-j-1}(2n-i-j)!}{(n-1)!(n-j)!}C_{n-1}^{j-1}=\frac{(n-i)!}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{2n-j-1}C_{2n-i-j}^{n-j}C_{n-1}^{j-1}.$$

Так как

$$(-1)^{n-1}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_{2n-j-1}^{n-j}C_{n-1}^{j-1},$$

то, очевидно, $S_1 = 1$. Докажем справедливость равенства (28) при $i = \overline{2, n}$. Для этого покажем, что

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} C_{2n-i-j}^{n-j} C_{n-1}^{j-1} = 0, \quad \text{при} \quad i = 2, \ldots, n. \tag{29}$$

Действительно, используя представление для биноминального коэффициента

$$(-1)^s C_{n-i-s}^{s} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} C_{i-2}^{k} C_{n+s-2}^{s-k} & \text{при} \quad 0 \le s \le i-2, \\ \sum\limits_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} C_{i-2}^{k} C_{n+s-2}^{s-k} & \text{при} \quad s \ge i-2, \end{cases}$$

при $s = n - j$, имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} C_{2n-i-j}^{n-j} C_{n-1}^{j-1} = \sum_{k=0}^{i-2} C_{i-2}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{n-j-k} C_{n-1}^{j-1} C_{2n-j-k-2}^{n-j-k} \right). \tag{30}$$

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{n-j-k} C_{n-1}^{j-1} C_{2n-j-k-2}^{n-j-k} = 0 \quad \text{для любого} \quad k = 0, \ldots, i-2. \tag{31}$$

Для этого представим левую часть равенства (31) в виде:

$$\sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{n-k-j} C_{n-1}^{j-1} C_{2n-k-j-2}^{n-k-j} =$$

$$= \left(\left(\ldots \left(\left((-1)^{n-k-1} \frac{2n-k-3}{n-k-1} + (-1)^{n-k-2} C_{n-1}^{1} \right) \cdot \frac{2n-k-4}{n-k-2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (-1)^{n-k-3} C_{n-1}^{2} \right) \ldots \right) \frac{(n-1)}{1!} + C_{n-1}^{n-k-1} \right), \; k = \overline{0, i-2}. \tag{32}$$

Так как выражение в p-х скобках $(S)_p$ правой части равенства (32) вычисляется по формуле

$$(S)_p = (-1)^{n-k-1-p} \frac{n-k-p-1}{p!(n-k-1)} \prod_{l=2}^{p+1} (n-l), \quad p = 1, \ldots, n-k-1,$$

то $(S)_{n-k-1} = 0$ для любого $k = 0, \ldots, i-2$, и справедливость равенства (31) установлена. Тогда, на основании (31) и (30), получаем равенство (29), чем и завершается доказательство равенства (28).

Покажем, что вектор y_∞ из (9) является решением системы $\Gamma_\infty y_\infty = e_n$, т.е.

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j} (2n-i-j)!}{(n-j)!} C_n^{j-1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = \overline{1, n-1}, \\ 1 & \text{при} \quad i = n. \end{cases} \tag{33}$$

Из (33) получаем, что

$$S_i = (n-i)! \sum (-1)^{n-j} C_{2n-i-j}^{n-j} C_n^{j-1} = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

так как доказательство этого равенства полностью совпадает с доказательством равенству нулю правой части равенства (23). Доказательство же равенства (33) при $i = n$ непосредственно следует из формулы бинома Ньютона для $(-x+1)^n$ при $x = 1$.

Таким образом, нами показано, что векторы x_α и y_α являются решениями систем $\Gamma_\alpha x_\alpha = e_1$, $\Gamma_\alpha y_\alpha = e_n$, $1 \leq \alpha \leq \infty$. Отметим, что элементы матриц, обратных к теплицевым и ганкелевым матрицам, определяются через элементы первого и последнего столбцов исходных матриц. Тогда по теореме Гохберга и Семенцула [5], [6] получаем утверждение теоремы.

Следствие. *Матрицы $F_\alpha(\Theta)$, являющиеся обратными к матрицам $F_\alpha^{-1}(\Theta)$ из (1) и (2), имеют вид*

$$F_\alpha(\Theta) = \left((-1)^{2n-i-j} (n-i)!(n-j)! \beta^{2n-i-j+1} \Theta^{-\frac{2n-i-j+1}{\alpha}} \gamma_{ij}^\alpha \right)_{i,j=1}^n,$$

$$F_\infty = \left((-1)^{2n-i-j} (n-i)!(n-j)! \beta^{2n-i-j+1} \gamma_{ij}^\infty \right)_{i,j=1}^n,$$

где γ_{ij}^α и γ_{ij}^∞ — элементы матриц Γ_α^{-1} и Γ_∞^{-1}, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. сб.– 1979.– Т. 109 (151), №4 (8).– С. 582 – 606.

2. Коробов В.И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР.– 1979.– Т. 248, №5.– С. 1051 – 1055.

3. Коробов В.И., Скляр Г.М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференц. уравн.– 1990.– Т. 26, №11.– С. 1914 – 1924.

4. Коробов В.И., Скляр Г.М. О множестве позиционных ограниченных управлений, решающих задачу синтеза // Докл. АН СССР.– 1990.– Т. 312, №6.– С. 1304 – 1308.

5. Иохвидов И.С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.– М.: Наука, 1974.– 264 с.

6. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.– М.: Наука, 1986.– 320 с.

Вiсник Харкiвського унiверситету
Серiя "Математика, прикладна математика i механiка"
УДК 517.977 № 444 , 1999, с.24-43

О нахождении оптимального времени и моментов переключения в задаче быстродействия

В.И.Коробов, В.В.Флоринский
Харьковский государственный университет
Szczecin University, Poland
Белгородский государственный университет, Россия

Для линейной автономной задачи быстродействия исследуется вопрос о гладкой зависимости времени быстродействия и моментов переключения от спектра матрицы, а также доказывается непрерывная зависимость решения нелинейной задачи оптимального управления от начальных данных и n-мерного параметра, которым в линейном случае может быть спектр матрицы.

Для линейной задачи быстродействия предложен численный метод, позволяющий по известному решению задачи быстродействия с данным спектром матрицы, находить решение задачи быстродействия с другим спектром путем вариации спектра матрицы.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для автономной линейной системы:

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad |u| \leq 1, \qquad x \in \mathrm{R}_n,$$

$$x(0) = x, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to min, \tag{1}$$

$$rank\,(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n,$$

где Θ — время оптимального быстродействия.

Пусть матрица A имеет вещественный спектр $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае число точек переключения (точек разрыва функции $u(t)$) будет не более $n-1$ [1]. Обозначим моменты переключения через $T_1, T_2, \ldots, T_n$, $(T_n = \Theta)$.

Для матриц A, имеющих, например, спектр $\lambda, 2\lambda, \ldots, n\lambda$ или другой спектр специального вида, в работах [2,3] дано точное решение задачи быстродействия, основанное на min-проблеме моментов. Время оптимального быстродействия [2] является корнем некоторого полинома, коэффициенты которого есть функции начальной точки. Моменты переключения есть корни полиномов, коэффициенты которых зависят от времени быстродействия и начальной точки. Для матриц A с произвольным спектром в [4] предложен метод сведения к задачам быстродействия с матрицей A, допускающим точное решение. Задача быстродействия в этом случае сводится к отысканию неподвижной точки некоторого отображения, а для ее нахождения методом последовательного приближения на каждом шаге используется решение системы (1), допускающей точное решение.

В данной работе исследуется вопрос о гладкой зависимости времени быстродействия и моментов переключения от спектра матрицы A. Затем, используя принцип максимума Понтрягина, ниже получим систему уравнений относительно времени быстродействия $\Theta = T_n$ и моментов переключения $T_1, \ldots, T_{n-1}$

$$F_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, T_1, \ldots, T_n, x) = 0, \qquad k = 1, ..., n, \tag{2}$$

здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — спектр матрицы A, x — начальная точка.

Пусть $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ такой вещественный спектр матрицы A, для которого известно точное аналитическое решение, а $T_1^0, \ldots, T_{n-1}^0$ — соответствующие моменты переключения и T_n^0— время быстродействия. Их нахождение сводится к нахождению корней полиномов [2].

Запишем систему (2) в векторной форме

$$F(\lambda, T) = 0, \tag{3}$$

где $F = (F_1, \ldots, F_n); \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n); T = (T_1, \ldots, T_n)$. Будем искать время быстродействия T_n и моменты переключения $T_1, \ldots, T_{n-1}$ для матрицы A с близким спектром к $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ методом Ньютона, записав (3) в виде:

$$F(\lambda, T) = F(\lambda, T^0 + \Delta T) = 0;$$

тогда

$$T^{(m+1)} = T^{(m)} + \Delta T^{(m)},$$

$$\Delta T^{(m)} = -(F_T'(\lambda, T^{(m)}))^{-1} F(\lambda, T^{(m)}).$$

Если расстояние между точками $\lambda^0(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ и $\lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ достаточно велико, то в этом случае отрезок $[\lambda^0; \lambda]$ разбиваем на конечное число достаточно малых отрезков и на каждом из них применяем описанный метод, причем, на очередном шаге за начальное приближение берем моменты переключения, полученные на предыдущем шаге. Ниже в работе приводится пример, показывающий, что предлагаемый метод сходится, когда отрезок $[\lambda^0; \lambda]$ и отрезки разбиения достаточно велики.

Основное отличие предлагаемого метода от метода, предложенного в [4], состоит в том, что требуется знание решения задачи быстродействия для системы (1) с матрицей A, имеющей спектр λ^0 только в начальной точке x. Метод, предложенный в [4] состоит в том, что переход от задачи быстродействия (1) со спектром λ^0 к задаче быстродействия со спектром λ основан на процедуре, в которой вместо изменения λ изменяется x (фактически подбирается точка x', из которой время быстродействия в силу системы (1) со спектром λ^0 равно времени быстродействия для системы (1) со спектром λ из точки x).

Полагая, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A являются частным случаем некоторого n-мерного параметра λ, в данной работе, кроме того, доказывается непрерывная зависимость решения задачи оптимального управления от параметра λ и начальных данных.

1. Непрерывная зависимость моментов переключения от спектра матрицы в линейной задаче быстродействия

Пусть $u(t)$ — оптимальное по быстродействию управление, переводящее точку из x в 0, тогда

$$x = \int_0^{\Theta} e^{-A\tau} bu(\tau)\, d\tau, \tag{1.1}$$

или

$$x = -\sum_{j=1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-A\tau} bu(\tau)\, d\tau, \tag{1.2}$$

здесь $T_0 = 0,\ u(\tau) = \pm 1$.

Теорема 1.1. *Пусть матрица A удовлетворяет следующим условиям:*

1) собственные значения λ_i вещественные;

2) в области изменения спектра жорданова форма и кратность спектра не меняются;

3) начальная точка $x(0) = x$ находится вне поверхности переключения.

Тогда моменты переключения $T_1, T_2, \ldots, T_n$ являются гладкими функциями от спектра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A системы (1).

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \quad (1 \le q \le n)$ — все различные собственные значения матрицы A кратности, соответственно, $s_1, \ldots, s_q \quad (s_1 + \cdots + s_q = n)$. Пусть A^* — матрица, сопряженная к матрице A. Пусть $V_1, \ldots, V_q$ — корневые векторы максимальной высоты $(s_1, \ldots, s_q$, соответственно) матрицы A^*, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \quad (1 \le q \le n)$.

Обозначим $z_m^k = (A^* - \lambda_m I)^k V_m$ — корневые векторы высоты $s_m - k$, отвечающие собственному значению $\lambda_m (k = 0, \ldots, s_m - 1; m = 1, \ldots, q)$, эти векторы образуют базис пространства R_n.

Умножим скалярно обе части равенства (1.2) на вектор z_m^k.

$$(z_m^k, x) = -\sum_{j=1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} (z_m^k, e^{-A\tau} b) u(\tau)\, d\tau,$$

$$(k = 0, \dots, s_m - 1; \quad m = 1, \dots, q).$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части.

$$(z_m^k, x) = -\sum_{j=1}^{n} \int_{T_{j-1}}^{T_j} (e^{-A^*\tau} z_m^k, b)\, d\tau,$$

учитывая, что

$$e^{-A^*\tau} V_m = e^{-\lambda_m \tau} \sum_{l=k}^{s_m-1} (-1)^{l-k} z_m^l \frac{\tau^{l-k}}{(l-k)!},$$

можно записать:

$$(z_m^k, x) = -(-1)^n \tilde{u} \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int_{T_{j-1}}^{T_j} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau}\, d\tau.$$

Здесь и далее $\tilde{u}$ — управление на конечном промежутке $[T_{n-1}; T_n]$, так как быстродействие оптимальное и $|u| \le 1$, то $\tilde{u}$ может принимать значения либо $+1$, либо -1, т.е. $\tilde{u} = \pm 1$.

Рассмотрим систему уравнений относительно функций $T_1, \dots, T_n$:

$$F_m^k(\lambda_1, \dots, \lambda_q; T_1, \dots, T_n) \equiv$$

$$\equiv (x, z_m^k) + (-1)^n \tilde{u} \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int_{T_{j-1}}^{T_j} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau}\, d\tau = 0, \tag{1.3}$$

$$m = 1, \dots, q; \quad k = 0, \dots, s_m - 1.$$

Так как $s_1 + \dots + s_q = n$, то система (1.3) состоит из n уравнений. Найдем частные производные функций $F_m^k(\lambda_1, \dots, \lambda_q; T_1, \dots, T_n)$ по T_j $(j = 1, \dots, n)$.

$$\frac{\partial F_m^k}{\partial T_j} = (-1)^{n+j}\, 2\, \tilde{u} \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) T_j^{l-k} e^{-\lambda_m T_j},$$

$$j = 1, \dots, n-1; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial F_m^k}{\partial T_n} = \tilde{u} \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!} (z_m^l, b) T_n^{l-k} e^{-\lambda_m T_n}.$$

Пусть для данной начальной точки $x = x(0)$ и собственных значений $\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0$ матрицы A моменты переключения $T_1^0, \dots, T_n^0$. Так как начальная точка находится вне поверхности переключения и быстродействие оптимальное, то выполняются неравенства $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n = \Theta$.

Якобиан системы (1.3)

$$J = \frac{D(F)}{D(T)} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-1)^{n+1}2\tilde{u}(z_1^{s_1-1}, b)e^{-\lambda_1 T_1} & \dots & \tilde{u}(z_1^{s_1-1}, b)e^{-\lambda_1 T_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}2\tilde{u}\sum\limits_{l=0}^{s_1-1} \frac{(-1)^l}{l!}(z_1^l, b)T_1^l e^{-\lambda_1 T_1} & \dots & \tilde{u}\sum\limits_{l=0}^{s_1-1} \frac{(-1)^l}{l!}(z_1^l, b)T_n^l e^{-\lambda_1 T_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}2\tilde{u}(z_q^{s_q-1}, b)e^{-\lambda_q T_1} & \dots & \tilde{u}(z_q^{s_q-1}, b)e^{-\lambda_q T_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1}2\tilde{u}\sum\limits_{l=0}^{s_q-1} \frac{(-1)^l}{l!}(z_q^l, b)T_1^l e^{-\lambda_q T_1} & \dots & \tilde{u}\sum\limits_{l=0}^{s_q-1} \frac{(-1)^l}{l!}(z_q^l, b)T_n^l e^{-\lambda_q T_n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{3}{2}n(n-1)}2^{n-1}\tilde{u}^n RP \begin{vmatrix} e^{-\lambda_1 T_1} & \dots & e^{-\lambda_1 T_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ T_1^{s_1-1}e^{-\lambda_1 T_1} & \dots & T_n^{s_1-1}e^{-\lambda_1 T_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-\lambda_q T_1} & \dots & e^{-\lambda_q T_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ T_1^{s_q-1}e^{-\lambda_q T_1} & \dots & T_n^{s_q-1}e^{-\lambda_q T_n} \end{vmatrix}.$$

Здесь $R = (z_1^{s_1-1}, b)^{s_1} \dots (z_q^{s_q-1}, b)^{s_q} \neq 0$, так как система (1) управляемая;

$$F = \frac{(-1)^{s_1-1}}{(s_1-1)!}\,\frac{(-1)^{s_1-2}}{(s_1-2)!} \cdots 1 \cdots \frac{(-1)^{s_q-1}}{(s_q-1)!}\,\frac{(-1)^{s_q-2}}{(s_q-2)!} \cdots 1 \neq 0;$$

полученный определитель представляет собой систему функций Чебышева и, следовательно, отличен от нуля при $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$ и попарно неравных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$.

Следовательно, якобиан системы (1.3)

$$J = \frac{D(F)}{D(T)} \neq 0$$

в точке

$$(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_q^0; T_1^0, \ldots, T_n^0).$$

В силу теоремы о неявных функциях, система (1.3) определяет в некоторой окрестности точки $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_q^0)$ однозначные функции $T_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ $(j = 1, \ldots, n)$, которые являются непрерывными и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.

Теорема доказана.

2. Непрерывная зависимость решения задачи управления от параметра и начальных данных

Рассмотрим более общую задачу – задачу отыскания минимума функционала

$$J(u, x_0, \lambda) = \int_0^T f_0(x(t), u(t), \lambda)\, dt, \tag{2.1}$$

где

$$\dot{x} = f(x, u, \lambda), \tag{2.2}$$

$$u(t) \in \Omega, \qquad x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_1,$$

здесь $x = (x^1, \ldots, x^n) \in E_n$, $\quad u = (u^1, \ldots, u^r) \in E_r$,
$f = (f_1, \ldots, f_n) \in E_n$, $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m) \in E_m$, Ω — ограниченное замкнутое множество с внутренней точкой в E_r, T — свободно, $u(t)$ — измеримая функция.

В дальнейшем будем предполагать, что функции $f_0(x, u, \lambda)$ и $f(x, u, \lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по x и λ и непрерывны по u при всех $x \in E_n$, $\lambda \in E_m$, $u \in \Omega$.

Каждому значению параметра $\lambda \in E_m$ и каждой точке $x_0 \in E_n$, из которой можно попасть в точку $x \in E_n$, в силу системы (2.2), за конечное время T, сопоставим наименьшее значение функционала (2.1). Такую функцию обозначим через $F(x_0, \lambda)$, т.е.

$$F(x_0, \lambda) = \inf_{u \in \Omega} \int_0^T f_0(x, u, \lambda)\, dt. \tag{2.3}$$

В работе [5] доказана непрерывная зависимость функции $F(x_0, \lambda)$ от начальной точки x_0. Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости оптимального значения функционала (2.1) от двух переменных x_0 и λ. Схему доказательства возьмем подобной доказательству в [5].

Обозначим через $B(\mu, x_1, \lambda)$ область управляемости системы (2.2) в точку x_1 за время, не большее μ. Пусть x_1 — точка покоя системы (2.2) при $\lambda = \lambda_0$, т.е. $f(x_1, u_0, \lambda_0) = 0$ (u_0 — внутренняя точка множества Ω). Будем полагать, что точка x_1 — внутренняя точка множества $B(\mu, x_1, \lambda)$.

Пусть L — множество точек $\lambda \in E_m$, для которых существуют управления $u(t, \lambda)$, позволяющие перевести точку x_0 в точку x_1 за конечное время, а C — множество точек $x \in E_n$, которые можно перевести в точку x_1 за конечное время. Рассмотрим те точки множества $C \times L$, для которых время $T(x, \lambda)$ движения по оптимальной траектории задачи (2.1)-(2.2) из точки x_0 в точку x_1 не более, чем $T_0 < \infty$, если таковая существует. Если же оптимального управления, переводящего x_0 в x_1 для данной точки x_0 и данного λ не существует, то рассмотрим минимизирующую последовательность управлений $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, переводящих точку x_0 в точку x_1 по траекториям $\{x_k(t, \lambda)\}$ за время $\{T_k(x_0, \lambda)\}$. Пусть минимизирующая последовательность управлений такова, что $T_k(x_0, \lambda) \leq T_0 < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Совокупность описанных выше точек обозначим через $M = C(T_0) \times L(T_0)$. В дальнейшем будем предполагать, что множество $M = C(T_0) \times L(T_0)$ ограничено (в противном случае рассматриваем его любую ограниченную часть), т.е. $M \in G$, где G — ограниченный замкнутый шар.

Теорема 2.1 *Если точка x_1 является внутренней точкой в области управляемости $B(\mu, x, \lambda)$ при всех $\mu \leq \mu_0$ и всех $\lambda \in L(T_0)$, то функция $F(x_0, \lambda)$ непрерывна на множестве $M = C(T_0) \times L(T_0)$.*

Доказательство. Покажем, что при $x_0 \in C(T_0)$ и $\lambda_0 \in L(T_0)$ функция $F(x_0, \lambda)$ непрерывна, т.е. для любого наперед заданного $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$-\epsilon < F(x_0, \lambda_0) - F(y, \lambda) < \epsilon, \tag{2.4}$$

если $|x_0 - y| < \delta$, $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$ и $y \in C(T_0)$, $\lambda \in L(T_0)$.

Зададим $\epsilon > 0$. Докажем сначала справедливость левой части неравенства (2.4). Пусть $\{u_k(t)\}$ минимизирующая последовательность, переводящая согласно системе (2.2) при $\lambda = \lambda_0$ точку x_0 в точку x_1 по траекториям $\{x_k\}$ за время $T_k = T_k(x_0, \lambda_0) \leq T_0 < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Поскольку

$$F(x_0, \lambda_0) = \inf_{u \in \Omega} \int_0^T f_0(x(\tau), u(\tau), \lambda_0)\, d\tau,$$

то можно выбрать так k, чтобы

$$J(u_k, x_0, \lambda_0) - F(x_0, \lambda_0) < \frac{1}{2}\epsilon \tag{2.5}$$

$$\left(J(u_k, x_0, \lambda_0) = \int_0^{T_k} f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)\, d\tau, \quad x_k(0) = x_0, \quad x_k(T_k) = x_1 \right).$$

Определим на отрезке $[0; T_k]$ решение $y_k(t)$ системы (2.2) при $\lambda \neq \lambda_0$, $u(t) = u_k(t)$ и $y(0) = y$. Функции $x_k(t)$ и $y_k(t)$ можно записать в виде:

$$x_k(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)\, d\tau,$$

$$y_k(t) = y + \int\limits_0^t f(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda)\, d\tau.$$

В силу предположения $|x_k(t) - y_k(t)| =$

$$= \left| x_0 + \int\limits_0^t f(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)\, d\tau - y - \int\limits_0^t f(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq |x_0 - y| + L_2\, |\lambda_0 - \lambda|\, T_0 + L_1 \int\limits_0^t |x_k(\tau) - y_k(\tau)|\, d\tau,$$

где L_1 и L_2 — константы Липшица.

По лемме Гронуолла-Беллмана можно записать:

$$|x_k(t) - y_k(t)| \leq (|x_0 - y| + L_2\, |\lambda_0 - \lambda|\, T_0)\, e^{L_1 T_0}. \tag{2.6}$$

Так как точка x_1 — внутренняя в множестве $B(\mu, x_1, \lambda)$, то существует шар $S(x_1, r(\mu))$ с центром в точке x_1 радиуса $r(\mu)$, принадлежащий множеству $B(\mu, x_1, \lambda)$. Потребуем, чтобы

$$\delta < \min \left\{ \frac{r(\mu) e^{-L_1 T_0}}{2}; \frac{r(\mu) e^{-L_1 T_0}}{2 L_2 T_0} \right\},$$

тогда, полагая $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$ и $|x_0 - y| < \delta$, получим:

$$|x_k(T_k) - y_k(T_k)| = |x_1 - y_k(T_k)| < r(\mu).$$

Таким образом, точка $y_k(T_k)$ принадлежит шару $S(x_1, r(\mu))$, а так как $S(x_1, r(\mu)) \subseteq B(\mu, x_1, \lambda)$, то точку $y_k(T_k)$ можно перевести некоторым допустимым управлением $\bar{u}_k(t)$ в точку x_1 в силу системы (2.2) при $\lambda \neq \lambda_0$ за время $\mu \leq \mu$.

Обозначим через $w_k(t)$ следующее управление:

$$w_k(t) = \begin{cases} u_k(t), & 0 \leq t \leq T_k, \\ \bar{u}_k(t), & T_k \leq t \leq T_k + \mu_1. \end{cases}$$

Управление $w_k(t)$ переводит за время $T_k + \mu_1$ точку y в точку x_1 в силу системы (2.2) при $\lambda \neq \lambda_0$ по траектории

$$Y_k = \begin{cases} y_k(t), & 0 \leq t \leq T_k, \\ \bar{y}_k(t), & T_k \leq t \leq T_k + \mu_1. \end{cases}$$

Покажем, что значение функционала $J(w_k(t), y, \lambda)$ близко к $F_0(x_0, \lambda_0)$. Оценим величину

$$A = |J(w_k, y, \lambda) - J(u_k, x_0, \lambda_0)| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{T_k+\mu_1} f_0(Y_k(\tau), w_k(\tau), \lambda)\, d\tau - \int\limits_0^{T_k} f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)\, d\tau \right|.$$

Нетрудно видеть, что

$$A \leq \int\limits_0^{T_k} |f_0(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)|\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{T_k}^{T_k+\mu_1} |f_0(\bar{y}_k(\tau), \bar{u}_k(\tau), \lambda)|\, d\tau. \tag{2.7}$$

В силу предположения можно записать, что

$$|f_0(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda)| \leq L_3 |y_k(\tau) - x_k(\tau)|,$$

$$|f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)| \leq L_4 |\lambda_0 - \lambda|,$$

где L_3 и L_4 — константы Липшица.

Тогда

$$\int\limits_0^{T_k} |f_0(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)|\, d\tau \leq$$

$$\leq L_3(|x_0 - y| + L_1 |\lambda_0 - \lambda| T_0) e^{L_1 T_0} T_k + L_4 |\lambda_0 - \lambda| T_k \leq$$

$$\leq T_0 \left[L_3 e^{L_1 T_0} |x_0 - y_0| + (L_1 L_3 T_0 e^{L_1 T_0} + L_4) |\lambda_0 - \lambda| \right].$$

Если теперь на δ наложить дополнительное ограничение, чтобы

$$\delta < \min \left\{ \frac{\epsilon\, e^{-L_1 T_0}}{8 T_0 L_3}; \frac{\epsilon}{8 T_0 (L_1 L_3 T_0 e^{L_1 T_0} + L_4)} \right\},$$

то при $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$ и $|x_0 - y| < \delta$ выполняется неравенство

$$\int_0^{T_k} |\, f_0(y_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) \; - \; f_0(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda_0)\,|\, d\tau \; < \; \frac{\epsilon}{4}\,.$$

Оценим второе слагаемое выражения (2.7), для чего обозначим через $M_0 = \max |f_0(x, u, \lambda)|$ при $u \in \Omega$, $\lambda \in L(T_0)$, $x \in B(\mu, x, \lambda)$ и положим $\mu = \frac{\epsilon}{4M_0}$, тогда

$$\int_{T_k}^{T_k+\mu_1} |\, f_0(\bar{y}_k(\tau), \bar{u}_k(\tau), \lambda)\,|\, d\tau \le M_0\mu = \frac{\epsilon}{4}.$$

Поэтому $A = |J(w_k, y, \lambda) - J(u_k, x_0, \lambda_0)| < \frac{\epsilon}{2}$, но так как $J(w_k, y_0, \lambda) \ge F(y_0, \lambda)$, то из этих неравенств и неравенства (2.5) следует, что $-\epsilon < F(x_0, \lambda_0) - F(y, \lambda)$, если $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$ и $|x_0 - y| < \delta$, где δ — любое положительное число такое, что

$$\delta < \min\left\{\frac{r\left(\frac{\epsilon}{4M_0}\right) e^{-L_1 T_0}}{2};\, \frac{r\left(\frac{\epsilon}{4M_0}\right) e^{-L_1 T_0}}{2L_2 T_0};\, \frac{\epsilon e^{-L_1 T_0}}{8L_3 T_0};\, \frac{\epsilon}{8T_0(L_1 L_3 T_0 e^{L_1 T_0} + L_4)}\right\}.$$

Справедливость правой части неравенства (2.4) доказывается аналогично. Пусть $\{v_l\}$ минимизирующая последовательность, переводящая согласно системе (2.2) при $\lambda \ne \lambda_0$ точку y в y_1 по траекториям $\{y_l(t)\}$ за время $T_l = T_l(y, \lambda) \le T_0 < \infty$, $\quad l = 1\,2, \ldots$. Снова выбираем такое l, чтобы выполнялось неравенство

$$J(v_l, y, \lambda) - F(y, \lambda) < \frac{\epsilon}{2}, \tag{2.8}$$

ϵ, μ, δ — прежние.

Затем из точки x_0 определяем решение уравнения

$$\dot{z}_l = f(z_l(t), v_l(t), \lambda)$$

на отрезке $[0; T_l]$. Применяя, как и ранее, лемму Гронуолла-Беллмана, можно показать, что

$$|z_l(t) - y_l(t)| < \delta(1 + L_2 T_0) e^{L_1 T_0}\,,$$

тогда

$$|z_l(T_l) - y_l(T_l)| = |z_l(T_l) - x_1| < r\left(\frac{\epsilon}{4M_0}\right).$$

Следовательно, точку $z_l(T_l)$ можно перевести по траектории $\bar{z}_l(t)$ в силу системы (2.2) при $\lambda = \lambda_0$ допустимым управлением $\bar{v}_l(t)$ в точку x_1 за время $\mu_2 \le \mu = \frac{\epsilon}{4M_0}$. Как и ранее, можно показать, что

$$A_1 = |J(\bar{w}_k, x_0, \lambda_0) - J(v_l, y, \lambda)| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{2.9}$$

где

$$\bar{w}_l(t) = \begin{cases} v_l(t), & 0 \le t \le T_l, \\ \bar{v}_l(t), & T_l \le t \le T_l + \mu_2. \end{cases}$$

Тогда из неравенств (2.8), (2.9) и неравенства $J(\bar{w}_l, x_0, \lambda_0) \ge F(x_0, \lambda_0)$ следует, что $F(x_0, \lambda_0) - F(y, \lambda) < \epsilon$, если $|x_0 - y| < \delta$ и $|\lambda_0 - \lambda| < \delta$.

Теорема доказана.

3. Численный метод решения задачи оптимального быстродействия, основанный на точном решении

Пусть для задачи (1) матрица A имеет спектр $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_q^0 (1 \le q \le n)$ и известны моменты переключения $T_1^0, T_2^0, \ldots, T_n^0$. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия:

$$\dot{x} = \tilde{A}x + bu, \qquad |u| \le 1,$$

$$x(0) = x, \qquad x(\Theta) = 0, \qquad \Theta \to \min, \tag{3.1}$$

$$rank(b, \tilde{A}b, \ldots, \tilde{A}^{n-1}b) = n.$$

Пусть матрица $\tilde{A}$ имеет спектр $\lambda_1, \ldots, \lambda_q, (1 \le q \le n)$, незначительно отличающийся от спектра матрицы A, причем кратность спектра матриц A и $\tilde{A}$ совпадают и начальные точки $x(0) = x$ для задач (1) и (3.1) лежат по одну сторону от поверхности переключения.

Гладкая зависимость моментов переключения от спектра матрицы позволяет по известным моментам переключения задачи (1), используя метод Ньютона, находить моменты переключения для задачи (3.1).

Представим спектры матриц $\tilde{A}$ и A в виде векторов $\lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ и $\lambda^0(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_q^0)$ соответственно; пусть векторы $T(T_1, \ldots, T_n)$ и $T^0(T_1^0, \ldots, T_n^0)$ задают моменты переключения для задач (3.1) и (1) соответственно. Обозначим $\Delta = T - T^0$ и $\Delta\lambda = \lambda - \lambda^0$ (предполагается, что $|\Delta\lambda|$ и $|\Delta|$ достаточно малы). Представим систему функций (1.3) в виде векторного уравнения (3), где $F(\lambda, T)$ — n-мерный вектор, координатами которого являются левые части уравнений (1.3).

Разложим функцию $F(\lambda, T)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q, T_1^0, \ldots, T_n^0)$ по степеням Δ и оставим только линейную часть разложения. Учитывая, что $F(\lambda, T) = 0$, получим:

$$F(\lambda, T^0) + F'_T(\lambda, T^0)\,\Delta \approx 0, \tag{3.2}$$

где $F'_T(\lambda, T^0)$ — матрица Якоби $n \times n$.
Как было доказано, $det(F'_T(\lambda, T^0)) \neq 0$, поэтому существует обратная матрица $(F'_T(\lambda, T^0))^{-1}$.

Тогда из (3.2) получим:

$$\Delta \approx -(F'_T(\lambda, T^0))^{-1}\ F(\lambda, T^0). \tag{3.3}$$

Таким образом, можно построить итерационный процесс:

$$T^{(p+1)} = T^{(p)} + \Delta^{(p)}, \qquad p = 0, 1, \dots, \tag{3.4}$$

$$\Delta^{(p)} = -(F'_T(\lambda, T^{(p)}))^{-1}\ F(\lambda, T^{(p)}). \tag{3.5}$$

Здесь по известному начальному приближению $T^{(0)} = T^0$ из (3.5) находим $\Delta^{(0)}$ и подставляем в (3.4) и т.д. В результате получаем последовательность $T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(p)}, \dots$, которая сходится к T, если точка λ находится достаточно близко к λ^0.

Для системы функций (1.3) линейная часть (3.2) имеет вид:

$$(-1)^n \tilde{u}(x, z_m^k) + \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!}(z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int\limits_{T_{j-1}^0}^{T_j^0} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{l=k}^{s_m-1} \left[\frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!}(z_m^l, b) \left(2\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (T_j^0)^{l-k} e^{-\lambda_m T_j^0} \Delta_j + \right.\right.$$

$$\left.\left. +(-1)^n (T_n^0)^{l-k} e^{-\lambda_m T_n^0} \Delta_n \right)\right] = 0,$$

$$m = 1, \dots, q; \ k = 0, \dots, s_m - 1.$$

Из последнего равенства, полагая, что $T_j^{(0)} = T_j^0$ и $\Delta_j^{(0)} = \Delta_j$, $j = 1, \dots, n$, для итерационного процесса (3.4) можно выписать систему из n линейных уравнений относительно $\Delta_j^{(p)}$:

$$2\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!}(z_m^l, b)(T_j^{(p)})^{l-k} e^{-\lambda_m T_j^{(p)}}\ \Delta_j^{(p)} +$$

$$+ \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k+n}}{(l-k)!}(z_m^l, b)(T_n^{(p)})^{l-k} e^{-\lambda_m T_n^{(p)}}\ \Delta_n^{(p)} =$$

$$= (-1)^{n+1}\ \tilde{u}\,(x, z_m^k) - \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k)!}(z_m^l, b) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int\limits_{T_{j-1}^{(p)}}^{T_j^{(p)}} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau}\, d\tau,$$

$$m = 1, \ldots, q; \qquad k = 0, \ldots, s_m - 1.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{T_{j-1}}^{T_j} \tau^{l-k} e^{-\lambda_m \tau}\, d\tau =$$

$$= -(l-k)! \left(e^{-\lambda_m T_j} \sum_{i=0}^{l-k} \frac{T_j^i}{i!\lambda^{l-k-i+1}} - e^{-\lambda_m T_{j-1}} \sum_{i=0}^{l-k} \frac{T_{j-1}^i}{i!\lambda^{l-k-i+1}} \right),$$

систему уравнений относительно $\Delta_j^{(p)}$ можно записать в виде:

$$2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=k}^{s_m - 1} \frac{(-1)^{l-k+j}}{(l-k)!} (z_m^l, b) (T_j^{(p)})^{l-k} e^{-\lambda_m T_j^{(p)}} \Delta_j^{(p)} +$$

$$+ \sum_{l=k}^{s_m-1} \frac{(-1)^{l-k+n}}{(l-k)!} (z_m^l, b) (T_n^{(p)})^{l-k} e^{-\lambda_m T_n^{(p)}} \Delta_n^{(p)} = (-1)^{n+1} \bar{u}\,(x, z_m^k) +$$

$$+ \sum_{l=k}^{s_m-1} (-1)^{l-k} (z_m^l, b) \sum_{i=0}^{l-k} \left[\frac{1}{i!\lambda^{l-k-i+1}} \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (T_j^{(p)})^i e^{-\lambda_m T_j^{(p)}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^n (T_n^{(p)})^i e^{-\lambda_m T_n^{(p)}} + \frac{i!}{\lambda^i} \right) \right],$$

$$m = 1, \ldots, q; \qquad k = 0, \ldots, s_m - 1.$$

Ниже рассмотрим два частных случая численного решения системы (1).

Рассмотрим систему (1), у которой матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{а вектор} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) запишется в виде:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u, \qquad |u| \le 1,$$

$$\dot{x}_i = x_{i-1} + \lambda_i x_i, \tag{3.6}$$

$$i = 2, \ldots, n.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ имеем каноническую систему, для которой известно аналитическое решение [2]. Найдем расчетные формулы для численного решения задачи (3.6). За начальное приближение будем принимать решение канонической задачи.

Предположим, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A попарно неравны и отличны от нуля.

Возьмем матрицу A^*, сопряженную матрице A, и ее собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, обозначим через $V_1, V_2, \ldots, V_n$, соответственно, они имеют вид:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 - \lambda_1 \\ (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, V_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n - \lambda_1 \\ (\lambda_n - \lambda_2)(\lambda_n - \lambda_1) \\ \vdots \\ \prod\limits_{j=1}^{k-1} (\lambda_n - \lambda_j) \end{pmatrix}$$

Умножим обе части равенства (1.2) на собственный вектор V_i матрицы A^*:

$$(V_i, x) = -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{T_{j-1}}^{T_j} (V_i, e^{-A\tau} bu(\tau))\, d\tau. \tag{3.7}$$

Так как

$$(V_i, e^{-A\tau} bu(\tau)) = (e^{-A^*\tau} V_i, bu(\tau)) = e^{-\lambda_i \tau}(V_i, b)u(\tau),$$

то равенство (3.7) можно записать в виде:

$$(V_i, x) = -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-\lambda_i \tau}(V_i, b)u(\tau)\, d\tau.$$

Проинтегрировав в правой части, получим:

$$(V_i, x) = (-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda_i} \left[2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + (-1)^n e^{-\lambda_i T_n} + 1 \right], \tag{3.8}$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Используя выражения для собственных векторов, можно записать:

$$(V_1, x) = x_1,$$

$$(V_i, x) = x_1 + \sum_{k=2}^{i} \prod_{j=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_j) x_k, \tag{3.9}$$

$$i = 2, \ldots, n.$$

Из равенств (3.8) и (3.9) получаем:

$$x_1 = (-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda_1} \left[2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_1 T_j} + (-1)^n e^{-\lambda_1 T_n} + 1 \right],$$

$$x_i = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{i-1} (\lambda_i - \lambda_j)} \left[(-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda_i} \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + (-1)^n e^{-\lambda_i T_n} + 1 \right) - \right.$$

$$\left. - x_1 - \sum_{k=2}^{i-1} \prod_{j=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_j) x_k \right], \quad i = 2, \ldots, n, \tag{3.10}$$

а из равенств (3.8) получаем:

$$\frac{(-1)^n \tilde{u} \lambda_i (V_i, x) - 1}{2} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_i T_j} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i T_n} \tag{3.11}$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Пусть при спектре $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$ матрицы A известны моменты переключения $T_1^0, T_2^0, \ldots, T_n^0$. Предположим, что спектру $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответствуют моменты переключения $T_j = T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, n$, тогда равенства (3.11) запишутся в виде:

$$\frac{(-1)^n \tilde{u} \lambda_i (V_i, x) - 1}{2} = \sum_{j-1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_i (T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)})} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i (T_n^{(0)} + \Delta_n^{(0)})}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Разложим правую часть полученного равенства в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами разложения:

$$\frac{(-1)^n \tilde{u} \lambda_i (V_i, x) - 1}{2} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \left(e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} - \Delta_j^{(0)} \lambda_i e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} \right) +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\left(e^{-\lambda_i T_n^{(0)}} - \Delta_n^{(0)} \lambda_i e^{-\lambda_i T_n^{(0)}}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Откуда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta_1^{(0)}, \Delta_2^{(0)}, \ldots, \Delta_n^{(0)}$:

$$\lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \Delta_j^{(0)} e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2} \Delta_n^{(0)} e^{-\lambda_i T_n^{(0)}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_i T_j^{(0)}} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i T_n^{(0)}} - \frac{(-1)^n \, \tilde{u}\, \lambda_i (V_i, x) - 1}{2},$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Решаем эту систему относительно $\Delta_j^{(0)}$, $(j = 1, \ldots, n)$, используя метод Гаусса или любой другой метод решения систем линейных алгебраических уравнений, и находим $T_j^{(1)} = T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)}$. $T_j^{(1)}$ принимаем за следующее приближение и, таким образом, получаем итерационный процесс, определяемый системой уравнений:

$$\lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \Delta_j^{(m)} e^{-\lambda_i T_j^{(m)}} + \frac{(-1)^n}{2} \Delta_n^{(m)} e^{-\lambda_i T_n^{(m)}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda_i T_j^{(m)}} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda_i T_n^{(m)}} - \frac{(-1)^n \, \tilde{u}\, \lambda_i (V_i, x) - 1}{2},$$

$$i = 1, \ldots, n, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

из которой находят $\Delta_j^{(m)}$, а по ним $T_j^{(m+1)} = T_j^{(m)} + \Delta_j^{(m)}$, $(i = 1, \ldots, n$; $m = 0, 1, \ldots)$.

Рассмотрим теперь случай, когда спектр матрицы A системы (3.6) кратный, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda \neq 0$. Тогда эта система запишется в виде:

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + u, \qquad |u| \leq 1,$$

$$\dot{x}_i = x_{i-1} + \lambda x_i, \tag{3.12}$$

$$i = 2, \ldots, n.$$

Учитывая, что для системы (3.12)

$$e^{-A\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\tau & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{\tau^2}{2!} & -\tau & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} & \frac{(-1)^{n-1}\tau^{n-1}}{(n-1)!} & \ldots & 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda t}$$

решение (1.1) системы (3.12) можно записать в виде:

$$x_i = \frac{(-1)^i}{(i-1)!} \int\limits_0^{\Theta} \tau^{i-1} e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (3.13)$$

Интегрируя правые части выражений (3.13), получим:

$$x_1 = (-1)^n \frac{\tilde{u}}{\lambda} \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda T_j} + (-1)^n e^{-\lambda T_n} + 1 \right),$$

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \left[(-1)^{n+i-1} \frac{\tilde{u}}{(i-1)!} \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j T_j^{i-1} e^{-\lambda T_j} + \right.\right. \qquad (3.14)$$

$$\left.\left. + (-1)^n T_n^{i-1} e^{-\lambda T_n} \right) - x_{i-1} \right], \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Перепишем равенства (3.14) в виде:

$$\frac{(-1)^n\, \tilde{u}\, \lambda x_1 - 1}{2} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda T_j} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda T_n},$$

$$\frac{(-1)^{n+i-1}\, \tilde{u} (i-1)!\, (\lambda x_i + x_{i-1})}{2} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j T_j^{i-1} e^{-\lambda T_j} + \frac{(-1)^n}{2} T_n^{i-1} e^{-\lambda T_n},$$

$$i = 2, \ldots, n.$$

Как и в случае некратного спектра, предположим, что для собственного значения λ^0 матрицы системы (3.12) известны моменты переключения $T_1^{(0)}, T_1^{(0)}, \ldots, T_n^{(0)}$. Пусть собственному значению λ соответствуют моменты переключения $T_j = T_j^{(0)} + \Delta_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, n$. Проводя те же самые рассуждения, что и в случае некратного спектра, получим систему линейных уравнений для определения $\Delta_j^{(m)}$ для случая кратного спектра.

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \Delta_j^{(m)} e^{-\lambda T_j^{(m)}} + \frac{(-1)^n}{2} \Delta_n^{(m)} e^{-\lambda T_n^{(m)}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{(-1)^n\, \tilde{u}\, \lambda\, x_1 - 1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e^{-\lambda T_j^{(m)}} + \frac{(-1)^n}{2} e^{-\lambda T_n^{(m)}} \right),$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (T_j^{(m)})^{i-2} (\lambda T_j^{(m)} - i + 1) e^{-\lambda T_j^{(m)}}\ \Delta_j^{(m)} + \qquad (3.15)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2} (T_n^{(m)})^{i-2} (\lambda T_n^{(m)} - i + 1) e^{-\lambda T_n^{(m)}}\ \Delta_n^{(m)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+i}\,\tilde{u}(i-1)!\,(\lambda x_i + x_{i-1})}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j (T_j^{(m)})^{i-1}\, e^{-\lambda T_j^{(m)}} +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2}(T_n^{(m)})^{i-1}\, e^{-\lambda T_n^{(m)}}, \qquad i = 2,\ldots,n.$$

По найденным из системы (3.15) $\Delta_j^{(m)}$ находим

$$T_j^{(m+1)} = T_j^{(m)} + \Delta_j^{(m)}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad m = 0,1,\ldots.$$

При заданной точности ϵ, вычисления производятся как для случая кратного, так и для случая некратного спектра, до тех пор, пока на m-ом шаге не будет выполнено одно из неравенств:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i^{(m)})^2} < \epsilon \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(m)})^2} < \epsilon,$$

где $x_i = x_i(0)$ — координаты начальной точки, а $x_i^{(m)}$ определяются из формул (3.10) для случая некратного спектра или из формул (3.14) для случая кратного спектра заменой x_i на $x_i^{(m)}$ в указанных формулах.

За начальное приближение принимаются моменты переключения, соответствующие канонической системе, которые можно найти аналитически [2]. Если расстояние между точками $0(0,0,\ldots,0)$ и $L(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ достаточно велико, то описанный метод может расходиться. В этом случае отрезок $[0, L]$ разбивают на конечное число достаточно малых отрезков и на каждом из этих отрезков применяем описанный метод, причем, на очередном шаге за начальное приближение берем моменты переключения, полученные на предыдущем шаге.

Пусть для канонической системы моменты переключения $T_1^{(0)}, T_2^{(0)},\ldots,T_n^{(0)}$. Тогда для системы

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + u, \quad |u| \le 1,$$
$$\dot{x}_i = x_{i-1} + i\lambda x_i, \quad i = 2,\ldots,n,$$

известно аналитическое решение [2] и моменты переключения могут быть найдены по формуле:

$$T_j = -\frac{1}{\lambda}\ln(-\lambda T_j^{(0)} + 1). \tag{3.16}$$

Пусть точка $L(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \in \Lambda$, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ — собственные значения матрицы системы (3.6) или (3.12) находятся в окрестности прямой

$$\frac{\Lambda_1}{1} = \frac{\Lambda_2}{2} = \cdots = \frac{\Lambda_n}{n}. \tag{3.17}$$

Пусть точка $L'(\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda)$, находящаяся на прямой (3.17), – ближайшая к точке L. Тогда итерационный процесс удобно строить по отрезку, соединяющему точки L' и L, при этом, за начальное приближение на первом шаге следует брать моменты переключения, соответствующие точке L', т.е. соответствующие спектру $\lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda$. Это удобно использовать, когда расстояние от точки L до L' меньше, чем до начала координат.

Замечание. Если начальная точка $x(0) = x$ находится между поверхностями переключения, соответствующим канонической и неканонической системам, то описанный метод может расходиться или сходиться к неверному решению.

Рассмотрим примеры.

Для канонической задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_2, \end{aligned}$$

$$x(0) = (1;1;1), \quad x(\Theta) = (0;0;0), \quad \Theta \to \min,$$

моменты переключения

$$T_1 \approx 2,77087; \quad T_2 \approx 5,82080; \quad T_3 \approx 7,09986; \tag{3.18}$$

и управление на конечном промежутке $\tilde{u} = -1$.

Используя эти данные, описанным методом было получено решение для задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -102x_1 + u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_2 &= -102x_2, \\ \dot{x}_3 &= -102x_3, \end{aligned}$$

$$x(0) = (1,1,1), \quad x(\Theta) = (0,0,0), \quad \Theta \to \min:$$

$$T_1 \approx 0,12153; \quad T_2 \approx 0,13593; \quad T_3 \approx 0,14017; \quad \tilde{u} = -1.$$

Вычисления проводились с шагом изменения λ, равным $-0,5$ и точностью 10^{-5}.

Для задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -6,2x_1 + u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_2 &= -6,3x_2, \\ \dot{x}_3 &= -6,4x_3, \end{aligned}$$

$$x0 = (1,1,1), \quad x(\Theta) = (0,0,0), \quad \Theta \to \min,$$

ближайшая точка на прямой (3.17) к точке $(-6,2; -6,3; -6,4)$ является точка

$$L(-2,71429; -5,42858; -8,14287).$$

Так как расстояние от точки $(-6,2;-6,3;-6,4)$ до начала координат больше, чем до точки L, то за начальное приближение удобнее брать не решение (3.18) канонической системы, а, используя решение (3.18) и формулу (3.16), получить решение для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2{,}71429x_1 + u, \qquad |u| \le 1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 5{,}42858x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - 8{,}14287x_3 : \end{aligned}$$

$$T_1 \approx 0,78935; \quad T_2 \approx 1,03944; \quad T_3 \approx 1,10865; \quad \tilde{u} = -1;$$

которое принять за начальное приближение для задачи (3.19), а итерационный процесс строить по прямой, соединяющей точку $(-6,2;-6,3;-6,4)$ с точкой L. Было получено решение задачи (3.19): $T_1 \approx 0,87035$; $T_2 \approx 1,08958$; $T_3 \approx 1,15441$; $\tilde{u} = -1$; при этом отрезок прямой, соединяющий вышеуказанные точки, делился на четыре части, вычисления производились с точностью 10^{-5}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.:Наука, 1976.– 392 с.

2. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов //Матем.сб.– 1987.– Т.134(176), N2(10).– С.186-206.

3. Коробов В.И., Скляр Г.М. Метод порождающей функции в проблеме моментов с периодическими пропусками //ДАН СССР.– 1991.– Т.318, N1.– С.32-35.

4. Коробов В.И., Скляр Г.М. Min-проблема моментов Маркова и быстродействие //Сибирский математический журнал.– 1991.– Т.32, N1(185). – С.60-71.

5. Коробов В.И. О непрерывной зависимости решения задачи оптимального управления со свободным временем от начальных данных //Дифференциальные уравнения.– 1971.– Т.VII,N6. – С.1120-1123.