ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ISSN 0321-4427

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

56

«ОСНОВА»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 56

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1991

УДК 513.33

Сборник посвящен 90-летию со дня рождения выдающегося советского матем-тика профессора Харьковского университета Н. И. Ахиезера (1901—1980) и с-держит статьи, связанные с основными направлениями его научной деятель-сти: спектральная теория дифференциальных операторов, теория аппроксим-ции, теория моментов, теория аналитических функций.
Для научных работников и специалистов.

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, унив-ситет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция естественнонаучной литературы
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Т $\frac{1602070000-047}{М226(04)-91}$ 55—91

НАУМ ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР

Прошло 11 лет со дня смерти Наума Ильича Ахиезера. Ежегодно Харьковское математическое общество собирается в марте на специальное заседание, приуроченное ко дню рождения Наума Ильича и посвященное его памяти. Было прочитано уже не менее десяти докладов, освещающих различные аспекты творчества Ахиезера, его замечательные результаты в теории аппроксимации и в проблеме моментов, в решении классических экстремальных задач, в математической физике. Однако богатства, заключенные в трудах ученого, далеко не исчерпаны, об его идеях, методах и результатах можно рассказывать еще не в одном десятке докладов.

1928 по 1936 г. Н. И. Ахиезер опубликовал большую часть своих работ на немецком языке в советских и зарубежных журналах, причем многие из них были опубликованы в малотиражных выпусках «Трудов» и «Записок» Математических обществ Харькова и Казани. По этим причинам ряд фундаментальных исследований Ахиезера практически оставался недоступным современному читателю. Это обстоятельство преодолевается Харьковским математическим обществом, под эгидой которого в Издательстве «Основа» будет печататься собрание трудов Н. И. Ахиезера.

Освещение жизни, творчества и значимости математических результатов Н. И. Ахиезера давалось в юбилейных статьях в УМН 6:2 (1951), 16:4 (1961), 26:6 (1971) и в некрологе (УМН, 36:4 (1981)). Все же мы полагаем уместным, опираясь на эти источники, еще раз коснуться основных моментов математической биографии Н. И. Ахиезера, тем более, что она продолжилась и после его смерти благодаря выходу в свет написанных ученым в последние годы жизни великолепных лекционных курсов «Лекции по вариационному исчислению» и «Лекции об интегральных преобразованиях» и в высшей степени интересной историко-математической статьи о чебышевском направлении в теории функций.

Активная научная деятельность Н. И. Ахиезера началась в аспирантуре у Д. А. Граве, которую он проходил с 1925 по 1928 г. Его диссертация «Аеродинамічні досліди» (1928) носила прикладной характер в соответствии с установками Д. А. Граве. Однако в ней был получен ряд интересных чисто математических результатов, в частности формула для конформного отображения двусвязной многоугольной области на круговое кольцо, впоследствии неоднократно переоткрывавшаяся. Вместе с тем уже в 1927 г. Н. И. Ахиезер начал заниматься теорией роста целых функций. Его

основные исследования и в дальнейшем были тесно связаны с ко-
плексным анализом даже при решении вещественных задач. Т
ника аналитического продолжения и конформных отображе
в руках Н. И. Ахиезера нашла неожиданные приложения. При
дем два примера трудных задач, восходящих по постановке к кл
сическим работам П. Л. Чебышева и Е. И. Золотарева и решен
Н. И. Ахиезером.

I. Найти многочлен степени n со старшим коэффициентом е
ница, наименее уклоняющийся от нуля на объединении двух за
ных отрезков (для определенности $[-1, \alpha]$ и $[\beta, 1]$, $-1 <$
$< \beta < 1$).

II. Найти многочлен $x^n + \sigma x^{n-1} + \rho x^{n-2} + \dots$
с заданными σ и ρ, наименее уклоняющийся от нуля на отр
$[-1, 1]$.

Между прочим, интерес Н. И. Ахиезера к этим задачам во
в переписке с Н. Г. Чеботаревым и, возможно, этим объясняе
то, что первый результат Н. И. Ахиезера в указанном направле
был опубликован в Известиях Казанского физико-математичес
общества (1928 г.). Он относится к задаче I, которая, как о
лось, решается в терминах автоморфных функций Шоттки. С
щение этого решения на m отрезков сводится к построению
ции Грина плоскости с $2m-1$ вещественными разрезами (m
ных отрезков и еще $m-1$ отрезков в лакунах между данн

Дальнейшее развитие этих идей в 60-х годах привело Н. И.
езера к решению некоторых обратных задач спектрального
лиза путем сведения к проблеме Якоби обращения гиперэлл
ческих интегралов. Таким образом, Н. И. Ахиезеру удалось
восхитить важные аспекты спектральной теории, положенн
основу современной теории нелинейных эволюционных уравн
математической физики, бурное развитие которой началось в
годах. Здесь хочется сказать о поразительных переменах во вз
дах математиков на основные ценности их науки. Если в XIX в. н
более (а, может быть, и единственно) интересными считались
ные решения тех или иных задач (решение алгебраических ур
нений в радикалах, эффективное построение инвариантов клас
ческих групп, интегрирование в элементарных функциях и ква
турах от них, решения экстремальных задач в элементарных
специальных функциях и т. д.), то в первой половине XX в. бл
даря прежде всего Гильберту возобладала абстрактная точка
ния, пренебрегающая конструктивными аспектами (и даже «к
структивист» Пуанкаре провозгласил переход от проблем реш
дифференциальных уравнений к качественной теории). С абстра
ной точки зрения необходимые и достаточные (нетривиальные,
нечно) условия на решение важнее, чем возможность явного о
сания. Например, теорема Чебышева об альтернансе «интересне
чем полученный даже с ее помощью явный ответ в той или и
задаче наилучшего приближения.

Однако во второй половине XX в. ориентация шкалы ценнос
вновь изменилась! Но внутренний мир таких крупных матема

ков, каким был Н. И. Ахиезер, не подвержен колебаниям моды. Это тем более впечатляет, что в исследованиях ученого широко использовались, например, идеи и методы функционального анализа, что особенно бросается в глаза при чтении его блестящих «Лекций по теории аппроксимации», где Н. И. Ахиезер легко переходит от общих рассмотрений в банаховых пространствах и алгебрах к тонким аналитическим исследованиям вплоть до нахождения точных констант в конструктивной теории функций. Можно предположить, что Н. И. Ахиезеру был внутренне присущ взгляд, аналогичный пушкинскому: «Все жанры хороши, кроме скучного».

Коль скоро мы затронули тему точных констант, упомянем два результата ученого, ставших классическими.

1) Рассмотрим класс C^r 2π-периодических функций $F(t)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $F^{(r-1)}(t)$, удовлетворяющую условию Липшица с константой 1 (для простоты записи). По теореме Джексона,

$$E_{n-1}^{(tr)}[F] \leqslant A_r/n^r,$$

где $A_r = \mathrm{const}$; $E_{n-1}^{(tr)}[F]$ — наименьшее равномерное уклонение от функции F тригонометрических полиномов степени $\leqslant n-1$.

Теорема Ахиезера — Крейна — Фавара. *Пусть*

$$\bar{A}_r = n^r \sup_{F \in C^r} E_{n-1}^{(tr)}[F]$$

— точная постоянная в неравенстве Джексона. Тогда

$$\bar{A}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

2) Как доказал С. Н. Бернштейн, если аналитическая функция f не превышает по модулю единицы внутри эллипса с фокусами $-1, 1$ и полусуммой осей $1/g$, то ее наилучшее приближение на $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени $\leqslant n-1$ удовлетворяет неравенству

$$E_{n-1}^{(alg)}[f] \leqslant \frac{2q^n}{1-q}.$$

Теорема Н. И. Ахиезера. *Пусть f — аналитическая функция внутри упомянутого эллипса,* $|\mathrm{Re}\, f| \leqslant 1$, *$f$ вещественна на* вещественной *оси. Тогда*

$$E_{n-1}^{(alg)}[f] \leqslant \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{q^{(2k+1)n}}{1+q^{2(2k+1)n}},$$

причем существуют функции, для которых достигается знак равенства.

Очень многое в творчестве Н. И. Ахиезера было связано с исследованиями С. Н. Бернштейна, с которым Ахиезер имел тесные научные и личные связи (Н. И. Ахиезер выполнил также огромную работу по редактированию 4-томного академического Собрания сочинений С. Н. Бернштейна).

Еще в 1924 г. С. Н. Бернштейн поставил следующую фундаментальную проблему.

Пусть на вещественной оси задана функция $\Phi(x) > 0$ такая, что

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x^n}{\Phi(x)} = 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассмотрим клас C_Φ^0 непрерывных функций $g(x)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Очевидно, все многочлены входят в C_Φ^0. При каких условиях множество многочленов плотно в C_Φ^0 относительно равномерной нормы с весом Φ:

$$\|g\|_\Phi = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|g(x)|}{\Phi(x)}?$$

Н. И. Ахиезер и С. Н. Бернштейн решили эту проблему в 1953 г (независимое решение получил С. Н. Мергелян в 1954 г.).

Бернштейновское направление Н. И. Ахиезер развивал также в плане аппроксимации целыми функциями конечной степени (т. е. конечного типа при первом порядке). Здесь ему удалось вновь применить свои аналитические методы для явного решения задач типа Чебышева и Золотарева. Эти методы оказались также адекватными средствами при обобщении знаменитого неравенства С. Н. Бернштейна на функции, аналитические вне некоторого замкнутого подмножества E вещественной оси. Этой важной проблеме посвящена совместная работа Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левина (1960 г.), где установлено, что экстремальная функция связана с конформно отображающей верхнюю полуплоскость на область типа «гребенки». Основание «гребенки» — вещественная ось — образ множества E; зубцы, торчащие вверх,— образы дополнительных интервалов (лакун). Впоследствии «гребенка» появилась в обратных задачах спектрального анализа оператора Шредингера (В. А. Марченко — И. В. Островский, 1975). Здесь роль E играет спектр оператора, а случай конечного числа лакун («конечнозонный потенциал») является отправным.

Еще один поток работ Н. И. Ахиезера, тесно связанных с теорией экстремальных задач,— это работы об ортогональных полиномах. В 30-х годах Н. И. Ахиезер начал изучать ортогональные (с весом) многочлены на системе интервалов (в завершении этих исследований принял участие Ю. Я. Томчук — один из учеников Н. И. Ахиезера (1963)).

В связи с ортогональными многочленами значительное внимание Н. И. Ахиезер уделил проблеме моментов. Перу ученого принадлежит монография «Классическая проблема моментов» (1961), создающая яркое и цельное впечатление об этом предмете. Именно проблемой моментов был обусловлен интерес Н. И. Ахиезера к общей теории линейных операторов, для которой, по словам ученого, проблема моментов была «путеводной звездой». В теории операторов его наиболее привлекали такие вещи, как спектральные разложения и индексы дефекта. Этот материал — сердцевина книги «Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве» (1950), написанной совместно с И. М. Глазманом. По этой книге, дважды переизданной (1966; 1977—1978 — в двух томах) и переведенной на ряд языков, учились и продолжают учиться математики и физики-теоретики во многих странах мира (в частности, для автора этих строк она была первым введением в серьезную современную математику). Выход второго ее издания был приурочен к Международному конгрессу математиков в Москве (август, 1966 г.), и привезенные на конгресс сотни экземпляров книг были раскуплены со скоростью движения выстроившейся при этом очереди.

Исследования самого Н. И. Ахиезера по проблеме моментов проходили в сотрудничестве с М. Г. Крейном в период 1933—1938 гг. и относились к так называемой L-проблеме моментов А. А. Маркова, где искомый вес ограничивается априори заданной константой $L > 0$. Между прочим, с более поздней точки зрения L-проблема моментов является задачей линейного программирования (в бесконечном пространстве), а полученное в 1938 г. Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном решение в терминах двойственной задачи предвосхитило этот ставший сейчас привычным подход (кстати, наиболее эффективный с прикладной точки зрения).

Свои результаты Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн собрали в книге «О некоторых вопросах теории моментов» (Харьков, 1938 г.). В 1962 г. Американское математическое общество выпустило перевод этой книги на английском языке, сочтя, очевидно, что ее содержание за четверть века не устарело (скорее, наоборот, к этому времени оно стало особенно актуальным).

Перу Н. И. Ахиезера принадлежит более 150 работ. В прилагаемый к настоящей статье список литературы не вошли лишь несколько ранних публикаций, на которые не удалось найти точных ссылок.

Как это было принято в 30-х и 40-х годах, Н. И. Ахиезер, цитируя ту или иную работу, часто не давал полной библиографической ссылки. Список печатных работ Н. И. Ахиезера, прилагаемый к настоящей статье, удовлетворяет современным требованиям. Он был тщательно подготовлен М. Л. Содиным, которому я приношу свою благодарность.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Н. И. АХИЕЗЕРА

1924

1. *Про одну* властивість методи сумування Weierstrass'a // Науч. зап. К. № [illegible] С. 72—77.
2. *К теории* квадратичных форм // Изв. Политехн. с.-х. ин-та. Вып. 19 С. 116—123. Совм. с И. Я. Штаерманом.

1925

3. *Ueber* eine Anwendung der Eulerschen Transformation // Зап. физ.-мат. отд АН УССР. К., **1**, № 4. С. 32—33.

1927

4. *Ueber* die Zusammenhang zwieschen der Stormerishen Integrations method und Bernullischen Polynomen // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К. 2, № 2 С. 16—24. Совм. с И. Я. Штаерманом.
5. *Новий* вивід необхідних умов належності цілої функції цілого порядку до певного типу // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К., **2**, № 3. С. 29—33.
6. *Про деякі* застосування сумаційної формули Poisson'a // Зап. ин-та нар просв. К., **2**. С. 157—162.
7. *Sur les fonctions* entiéres d'ordre entier // Rend. Circ. Math. Palermo. 51 P. 390—393.
8. *К теории* роста целых функций внутри некоторого угла // Тр. Всерос. мат съезда. С. 208—212.
9. *О вычислении* сил, действующих на аэропланное крыло // Тр. Всерос. мат съезда. С. 252—254.

1928

10. *Ueber* einige Funktionen die in gegebenen Intervallen am wenigsten von N[illegible] abweichen // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. **3**, № 3. С. 1—69.
11. *Аеродинамічні* досліди // Тр. физ.-мат. отд. АН УССР. К., **7**. С. 1—247.

1929

12. *Об одной* задаче Е. И. Золотарева // Изв. АН СССР. № 10. С. 919—931.

1930

13. *Нова* форма остачі в Taylor' овій формулі для функцій багатьох змінних // Зап. Нежин. ин-та нар. просв. **10**. С. 223—227.
14. *Про одне* узагальнення теореми Е. Landau // Зап. Нежин. ин-та нар. просв. **10**. С. 228—234.
15. *О полиномах*, наименее уклоняющихся от нуля // Тр. 1-го Всесоюз. мат. съезда. С. 284—289.
16. *О некоторых* полиномах наименьшего уклонения // ДАН СССР. С. 489—494.
17. *Об экстремальных* свойствах некоторых дробных функций // ДАН СССР. С. 495—499.
18. *Asymptotische* Lösung einer Aufgabe über Polynome minimaler Abweichung // Зап. Харьк. мат. об-ва. **4**. С. 141—144.
19. *Ueber* ein Tschebyscheffsches Extremumproblem // Math. Ann. **104**. S. 739—744.
20. *Sur les polynomes* de Tschebycheff pour deux segments // C. R. Acad. Sci. (Paris). **191**. P. 754—756.
21. *Sur les proprietes* asymptotiques des quelques polynomes // C.R. Acad. Sci. (Paris). **191**. P. 916—918.
22. *Sur la valeur* asymptotique de la meilleure approximation de quelques fractions par polynomes // C. R. Acad. Sci. (Paris). **191**. P. 991—993.

1931

23. *Об асимптотических* свойствах полиномов на двух интервалах // Изв. АН СССР. № 2. С. 161—178.
24. *Об одной* минимум-проблеме теории функций и о числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга // Изв. АН СССР, № 9. С. 1169—1189.

1932

25. *Ueber* asymptotische Grösse der besten Annäherung einiger rationalen Funktionen durch Polynome // Зап. Харьк. мат. об-ва. **5**. С. 37—47.
26. *Ueber* einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, I // Изв. АН СССР. № 9. С. 1163—1202.
27. *Аеродинаміка*. Х., ОНТВУ. 148 с. Совм. с В. И. Путятой.

1933

28. *Ueber* einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, II // Изв. АН СССР. № 3. С. 309—344.
29. *Ueber* einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, III // Изв. АН СССР. № 4. С. 499—536.
30. *Ueber* eine extremale Eigenshaft rationaler Funktionen // Зап. Харьк. мат. об-ва. **6**. С. 39—45.
31. *Курс* теорії функцій. Елементи загальної теорії функцій комплексного змінного. Х., ОНТВУ. 290 с.

1934

32. *Ueber* Jacksonschen Approximationsatz // Зап. Харьк. мат. об-ва. 8. С. 3—12.
33. *Ueber* eine Eigenschaft der «elliptischen» Polynome // Зап. Харьк. мат. об-ва. **9**. С. 3—8.
34. *Ueber* Fouriersche Reihen beschränkter summeirbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem, I // Зап. Харьк. мат. об-ва. **9**. С. 9—28. Совм. с М. Г. Крейном.
35. *Ueber* Fouriersche Reihen beschränkter summierbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem, II // Зап. Харьк. мат. об-ва. **10**. С. 3—32. Совм. с с М. Г. Крейном.
36. *О рядах* Фурье ограниченных суммируемых функций // Тр. II Всесоюз. мат. съезда. **2**. С. 151. Совм. с М. Г. Крейном.

1935

37. *Sur une formule* de quadrature de' Tchebycheff // C. R. Acad. Sci. (Paris). **200**. P. 890—893. Совм. с М. Г. Крейном.
38. *Ueber* eine Transformation der reelen Toeplitzschen Formen und das Momentenproblem in einem Intervalle // (Зап. Харьк. мат. об-ва. **11**. С. 21—26. Совм. с М. Г. Крейном.
39. *Bemerkung* über extremale Eigenschaften einiger mit Transformation der elliptischen Funktionen zusammenhängender Brüche // Зап. Харьк. мат. об-ва. **11**. С. 27—34.

1936

40. *О двух* минимум-проблемах, связанных с проблемой моментов // ДАН СССР. **10**, № 9. С. 331—334. Совм. с М. Г. Крейном.
41. *Das Momentumproblem* bei zusätzlichen Bedingung von A. Markoff // Зап. Харьк. мат. об-ва. **12**. С. 13—36. Совм. с М. Г. Крейном.
42. *Bemerkung* zur Arbeit ueber Fouriersche Reichen beschränkter summierbarer Funktionen und eine neues Extremumproblem // Зап. Харьк. мат. об-ва. **12**. С. 37—40. Совм. с М. Г. Крейном.
43. *Verallgemeinerung* einer Korkin-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe // Зап Харьк. мат. об-ва. **13**. С. 3—14.

1937

44. *Об одном* применении неравенства Г. Бора и Ж. Фавара // ДАН СССР. **14**, № 7. С. 419—422. Совм. с Б. М. Левитаном.
45. *О наилучшем* приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // ДАН СССР. **15**, № 3. С. 107—112. Совм. с М. Г. Крейном.
46. *Проблема* моментів на двох інтервалах при додатковій умові А. А. Маркова // Зап. Харьк. мат. об-ва. **14**. С. 47—60. Совм. с М. Г. Крейном.
47. *О наилучшем* приближении одного класса непрерывных периодических функций // ДАН СССР. **17**, № 9. С. 451—454.

48. *Про теорему* акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули П. Л. Чебишева // Журн. ин-та мат. АН УССР. К. 3. С. 75—82.
49. *Про одну* теорему С. Бохнера // Зап. Харьк. мат. об-ва. 14. С. 75—80.

1938

50. *О наилучших* приближениях аналитических функций // ДАН СССР. 18. С. 241—244.
51. *О некоторых* вопросах теории моментов. Х., ОНТВУ. 253 с. Совм. с М. Г. Крейном.
52. *Деякі* зауваження про коефіцієнти квадратурних формул Гаусовського типу // Тр. Одес. ун-та. 2. С. 29—38. Совм. с М. Г. Крейном.

1940

53. *Лекции* по теории аппроксимации. Х. 137 с.
54. *О построении* потока, обтекающего тонкий профиль // Сб. тр. ин-та мат. АН УССР. 4. С. 151—156.
55. *О некоторых* формулах квадратур П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Сб. памяти акад. Граве. С. 15—28. Совм. с М. Г. Крейном.
56. *Some* remarks about three papers of Verblunsky // Зап. Харьк. мат. об-ва. 16. С. 129—134. Совм. с М. Г. Крейном.
57. *О максимальных* симметрических операторах в гильбертовом пространстве // Науч. зап. Авиац. ин-та. Х. 3, № 1. С. 3—8.

1941

58. *Бесконечные* матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи мат. наук. 9. С. 126—156.

1945

59. *О некоторых* формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. 9. С. 275—290.
60. *Об одном* предложении А. Н. Колмогорова и одном предложении М. Г. Крейна // ДАН СССР. 50. С. 35—40.
61. *Общая* теория полиномов П. Л. Чебышева // Научное наследие П. Л. Чебышева. 1. М. С. 5—42.

1946

62. *Краткий* обзор трудов П. Л. Чебышева // П. Л. Чебышев. Избранные математические труды. М. С. 171—189.
63. *О некоторых* свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. 10. С. 411—428.
64. *О полиномах* Б. М. Левитана // ДАН СССР. 54. С. 3—6.
65. *Про один* клас інтегральних операторів // Сб. тр. ин-та мат. АН УССР. 8. С. 113—130.

1947

66. *Лекции* по теории аппроксимации. М. 325 с.
67. *Конструктивная* теория функций в Харьковском университете и Математическом ин-те, 1917—1947 // Успехи мат. наук. 2, вып. 3. С. 158—174.
68. *Интегральные* операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. 2, вып. 5. С. 93—131.
69. *О взвешенном* приближении многочленами непрерывных на всей числовой оси функций // ДАН СССР. 57. С. 315—318. Совм. с К. И. Бабенко.
70. *Русский* математик А. А. Марков (к 25-летию со дня смерти) // Природа. № 8. С. 76—81.

1948

71. *Элементы* теории эллиптических функций. М. 291 с.
72. *О некоторых* вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, I // Зап. Харьк. мат. об-ва. 19. С. 21—25.
73. *К теории* целых функций конечной степени // ДАН СССР. 63. С. 475—478.

74. *Андрей* Андреевич Марков. Биографический очерк / А. А. Марков. Избранные труды. М. С. 9—12.
75. *Примечания* к книге А. А. Марков. Избранные труды. М. С. 377—390.

1949

76. *Проблема* моментов А. А. Маркова относительно любого числа интервалов // Укр. мат. журн. **3**. С. 41—50.
77. *Об интерполировании* целых трансцендентных функций конечной степени // ДАН СССР. **65**, № 6. С. 781—784.
78. *О некоторых* вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, II // Зап. Харьк. мат. об-ва. **21**. С. 5—9. Совм. с В. А. Марченко.

1950

79. *О решениях* степенной проблемы моментов в неопределенном случае // Зап. Харьк. мат. об-ва. **22**. С. 99—106.
80. *Теория* линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. 483 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1952

81. *Об интерполировании* целых трансцендентных функций конечной степени // Зап. Харьк. мат. об-ва. **23**. С. 5—26. Совм. с Б. Я. Левиным.
82. *Доказательство* правила множителей изопериметрической задачи // Зап. Харьк. мат. об-ва. **23**. С. 91—93.
83. *Об одном* обобщении лемм Шварца и Левнера // Зап. Харьк. мат. об-ва **23**. С. 95—101. Совм. с М. Г. Крейном.
84. *О целых* функциях конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля // Мат. Сб. **31**. С. 415—438.
85. *О целых* трансцендентных функциях конечной степени, имеющих майоранту на последовательности вещественных точек // Изв. АН СССР. **16**, № 4. С. 353—364.
86. *Об одном* семействе целых функций конечной степени и одной Чебышевской задаче // Изв. АН СССР. **16**, № 5. С. 459—468.

1953

87. *Обобщение* теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов // ДАН СССР. **92**. С. 1109—1112. Совм. с С. Н. Бернштейном.
88. *О слабо* весовых функциях // ДАН СССР. 93, № 6. С. 949—952.

1954

89. *О наилучшем* взвешенном приближении на всей числовой оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР. **94**. С. 983—986.
90. *Об одном* обобщении преобразования Фурье и теоремы Винера — Палей // ДАН СССР. **96**. С. 889—892.
91. *О некоторых* спаренных интегральных уравнениях // ДАН СССР. **98**. С. 333—336.
92. *Работа* Н. Я. Сонина по приближенному вычислению определенных интегралов / Н. Я. Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М. С. 219—243.

1955

93. *П. Л. Чебышев* и его научное наследие / П. Л. Чебышев. Избранные труды. М. С. 843—887.
94. *Лекции* по вариационному исчислению. М. 248 с.
95. *К 90-летию* со дня рождения Владимира Андреевича Стеклова // Тр. Харьк. Политехн. ин-та, сер. инж.-физ. **5**, № 1. С. 3—14.
96. *О теореме* единственности для уравнения теплопроводности // Тр. Харьк. Политехн. ин-та, сер. инж.-физ. **5**, № 1. С. 51—55.
97. *Академик* С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. Х. 112 с.

1956

98. *Харьковское* математическое общество // Зап. Харьк. мат. об-ва. 24. С. 31—39.
99. *О взвешенном* приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси // Успехи мат. наук. 11, вып. 4. С. 3—43.
100. *Экстремальные* свойства целых трансцендентных функций конечной степени. Тр. III Всесоюз. мат. съезда. 2. М. С. 25.
101. *К задаче* о дифракции электромагнитных волн у круглого отверстия в плоском экране // ДАН СССР. 109. С. 53—56. Совм. с А. Н. Ахиезером.
102. *К теории* нормальных рядов С. Н. Бернштейна / С. Н. Бернштейн. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Х. С. 83—94.

1957

103. *К теории* спаренных интегральных уравнений // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 5—31.
104. *Эффективное* граничное условие на поверхности раздела мультиплицирующей и замедляющей сред // Журн. техн. физ. 27. С. 822—829. Совм. с А. И. Ахиезером и Г. Я. Любарским.
105. *Об обращении* некоторых сингулярных интегралов // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 191—198. Совм. с В. А. Щербиной.
106. *О некоторых* классах непрерывных функций, порождающих эрмитовы положительные ядра // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 205—217. Совм. с И. М. Глазманом.
107. *Неравенства* для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 117. С. 735—738. Совм. с Б. Я. Левиным.
108. *Борис* Яковлевич Левин (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 12, вып. 2. С. 237—242. Совм. с Н. В. Ефимовым.

1960

109. *О полиномах*, ортогональных на дуге окружности // ДАН СССР. 130, № 2. С. 247—250.
110. *Об ортогональных* многочленах на нескольких интервалах // ДАН СССР. 134, № 1. С. 9—12.
111. *Обобщение* неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М. С. 111—165. Совм. с Б. Я. Левиным.

1961

112. *К теории* ортогональных многочленов на нескольких интервалах / ДАН СССР. 138, № 4. С. 743—746. Совм. с Ю. Я. Томчуком.
113. *Классическая* проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М. 310 с.
114. *Одна* экстремум-проблема относительно многочленов // Ann. Univ. Sci. Budapestinensis. 3—4. P. 9—14. Совм. с М. Г. Крейном.
115. *Вклад* С. Н. Бернштейна в теорию дифференциальных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 16, вып. 2. С. 5—20. Совм. с И. Г. Петровским.
116. *Континуальные* аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР. 141, № 2. С. 263—266.
117. *Континуальный* аналог многочленов, ортогональных на дуге окружности // ДАН СССР. 141, № 4. С. 769—772.
118. *О некоторых* формулах обращения // Зап. Харьк. мат. об-ва. 27. С. 91—95.

1962

119. *Some* questions in the theory of moments / Amer. Math. Soc. Providence. Rhode Island. 265 p. Совм. с М. Г. Крейном.

1963

120. *Об одном* уравнении Штурма—Лиувилля на полуоси // Зап. Харьк. мат. об-ва. 29. С. 44—52.

1964

21. *Континуальный* аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах // Укр. мат. журн. **16**, № 4. С. 445—462.
22. *Об уравнениях* Лямэ // Зап. Харьк. мат. об-ва. **30**. С. 5—17.
23. *Ортогональные* многочлены на системе интервалов и их континуальные аналоги / Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. **2**. С. 623—628.

1965

24. *Лекции* по теории аппроксимации. М. 407 с.
25. *О максимуме* на луче производной от монотонной целой функции нормального типа порядка половина // Теория функций, функцион. анализ и их прил. **1**. С. 136—140.
26. *Экстремальные* свойства целых функций экспоненциального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. **1**. С. 111—135.
27. *The classical* moment problem and some related questions in analysis. Edinburgh, Oliwer & Boyd. 253 p.
28. *Борис* Моисеевич Левитан (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 20, вып. 3. С. 227—234. Совм. с В. А. Марченко.

1966

29. *Теория* линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. 543 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1968

30. *О континуальных* аналогах многочленов, ортогональных на окружности // Укр. мат. журн. **20**, № 1. С. 3—24. Совм. с А. М. Рыбалко.

1969

31. *Замечания* к статье А. М. Рыбалко «О преобразовании Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ с весом» // Мат. физика, функцион. анализ. Тр. ФТИНТ АН УССР. **1**. С. 165—172.
32. *Сергей* Натанович Бернштейн, некролог // Успехи мат. наук. 24, вып. 3. С. 211—219. Совм. с П. С. Александровым, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоровым.
33. *Израиль* Маркович Глазман, некролог // Успехи мат. наук. 24, вып. 5 С. 215—219. Совм. с Э. М. Жмудем, Ю. И. Любичем, В. А. Марченко.
34. *Алексей* Васильевич Погорелов (к пятидесятилетию со дня рождения) // Укр. мат. журн. **21**, № 3. С. 354—360. Совм. с .Я П. Бланком, В. А. Марченко и Ю. А. Митропольским.

1970

135. *Элементы* теории эллиптических функций. Изд. 2-е, перераб. М. 304 с.

1971

136. *Об одном* неопределенном уравнении чебышевского типа в задачах построения ортогональных систем // Мат. физика и функцион. анализ. ТР. ФТИНТ АН УССР. 2. С. 3—14.

1973

137. *О сепаратно-аналитических* функциях многих переменных и теоремах «Об острие клина» // Успехи мат. наук. **28**, вып. 3. С. 27—42. Совм. с Л. И. Ронкиным.

1976

138. *О сепаратно аналитических* функциях многих переменных // Вопросы математической физики и функционального анализа. К. С. 3— 10 Совм. с Л. И. Ронкиным.

1977

139. *Теория* линейных операторов в гильбертовом пространстве, **1**. Х. 316 с. Совм. с И. М. Глазманом.

140. *Борис* Яковлевич Левин (к семидесятилетию со дня рождения) // Усп. мат. наук. 32, вып. 5. С. 211—213. Совм. с Н. В. Ефимовым, М. Г. Крейном, М. А. Лаврентьевым, В. А. Марченко, И. В. Островским, Б. В. Шабатом.

1978

141. *Теория* линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2. Х. 288 с. Совм. с И. М. Глазманом.
142. *К спектральной* теории уравнения Ляме / Историко-математические исследования, вып. 23. С. 77—86.

1980

143. *Theory* of linear operators in Hilbert space. Vols. I, II. Pitman Press. 200 p. Совм. с И. М. Глазманом.

1981

144. *Вариационное* исчисление. Х. 168 с.

1984

145. *Лекции* об интегральных преобразованиях. Х. 120 с.

1987

146. *Чебышевское* направление в теории функций // Математика XIX века. С. 9—79.

1988

147. *The Calculus* of Variations. New York, Harwood Academic Publishers. 280 p.
148. *Lectures* on integral transforms American Mathematical Soc. Providence, Rhode Island. 108 p.

Ю. И. Л...

УДК 517.9

В. А. МАРЧЕНКО

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим краевую задачу Штурма — Лиувилля:

$$-y'' + q(x)\,y = \mu\,y;\ \ y'(0) = 0;\ \ 0 \leqslant x < \infty \qquad (1)$$

с вещественным локально суммируемым потенциалом $q(x)$ и обозначим через $c(\lambda, x)$ решение уравнения $-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y$ при начальных данных $c(\lambda, 0) = 1$, $c'(\lambda, 0) = 0$. Согласно теореме Вейля существует, по крайней мере, одна неубывающая спектральная функция этой задачи $\rho(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty)$, порождающая формулы разложения:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\, c(\sqrt{\mu}, x)\, d\rho(\mu);$$

$$c(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^{\infty} f(x)\, c(\sqrt{\mu}, x)\, dx$$

и равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\overline{c(\sqrt{\mu}, g)}\,d\rho(\mu),$$

где $f(x)$, $g(x)$ — произвольные функции из пространства $L_2(0, \infty)$, а интегралы сходятся в метриках пространств $L_2(0, \infty)$ и $L_2(d\rho(\mu))$ соответственно.

В 1949 г., подготавливая первое издание монографии [1], Н. И. Ахиезер заинтересовался вопросом, может ли спектральная функция быть ограниченной. Этот вопрос возбудил интерес к исследованию поведения спектральных функций при $\mu \to \pm\infty$. Оказалось [2], что при $\mu \to -\infty$ спектральные функции быстро стремятся к конечным пределам $\rho(-\infty)$, а при $\mu \to +\infty$ они удовлетворяют асимптотическому равенству:

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} + o(\sqrt{\mu}),$$

дающему ответ на вопрос Наума Ильича. Вскоре Б. М. Левитан [3] уточнил эту асимптотическую формулу, доказав, что при $\mu \to +\infty$

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} + \rho(-\infty) + o(1).$$

В настоящей работе устанавливается зависимость между скоростью убывания при $\mu \to +\infty$ функции

$$\varepsilon(\mu) = \rho(\mu) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} - \rho(-\infty)$$

и скоростью роста при $x \to +\infty$ функции

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt.$$

Одновременно с задачей (I) рассмотрим семейство аналогичных краевых задач с потенциалами

$$q_l(x) = \begin{cases} q(x) & 0 \leqslant x \leqslant l; \\ 0 & l < x < \infty. \end{cases}$$

Обозначим их спектральные функции через $\rho_l(\mu)$, а решения соответствующих уравнений — через $c_l(\lambda, x)$.

Так как $c(\lambda, x) \equiv c_l(\lambda, x)$ при $x \in [0, l]$, то $c(\sqrt{\mu}, f) = c_l(\sqrt{\mu}, f)$ для всех функций $f(x)$, равных нулю при $x > l$, откуда следует, что для таких функций при $x \in [0, l]$ выполняются равенства

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\,c(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\,c(\sqrt{\mu}, x)\,d\rho_l(\mu).$$

Интегралы в этих равенствах абсолютно сходятся, если функци $c(\lambda, f)$ суммируема на вещественной оси $-\infty < \lambda < \infty$ [4], и в этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\mu}, f)\, d\rho_l(\mu) = f(0).$$

Из существования операторов преобразования и теоремы Пели — Винера следует, что множество обобщенных преобразований Фурье $c(\lambda, f)$ функций $f(x)$, принадлежащих пространству $L_2(0, \infty)$ и равных нулю при $x > l$, совпадает с множеством всех четных функций экспоненциального типа l квадратично суммируемых на вещественной оси [4]. Согласно вышесказанному отсюда следует, что на множестве $Z(l)$ всех четных функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа $\leqslant l$, суммируемых на вещественной оси, выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu})\, d\rho_l(\mu).$$

Заметим теперь, что вместе с функцией $g(\lambda)$ множеству $Z(l)$ принадлежат также все функции вида $g(\sqrt{\lambda^2 + c})$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu + c})\, d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu + c})\, d\rho_l(\mu),$$

откуда следует, что на множестве $Z(l)$ при всех вещественных значениях c выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{\mu})\, d\rho(\mu - c) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\sqrt{\mu})\, d\rho_l(\mu - c). \qquad (\ $$

причем интегралы в них сходятся абсолютно.

Как известно, спектр краевой задачи (1) с финитным потенциало $q_l(x)$ состоит из абсолютно непрерывной части, заполняющей вс положительную полуось, и конечного числа отрицательных собствен ных значений. Спектральная функция $\rho_l(\mu)$ этой задачи непрерывн дифференцируема на положительной полуоси, причем

$$\frac{d\rho_l(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}\,|\,1 + h_l(\sqrt{\mu})\,|^2} \quad (0 < \mu < \infty), \qquad (\ $$

где

$$h_l(\lambda) = \frac{i}{\lambda}\int_0^l e^{i\lambda t} q(t)\, c(\lambda, t)\, dt. \qquad (3$$

Оценим нижнюю границу спектра и скорость сходимости к единиц функции $|\,1 + h_l(\lambda)\,|^{-2}$ при $\lambda \to +\infty$.

Из интегрального уравнения

$$c(\lambda, x) = \cos\lambda x + \lambda^{-1}\int_0^x \sin\lambda(x - t)\, q(t)\, c(\lambda, t)\, dt, \qquad (4$$

которому удовлетворяет решение $c(\lambda, x)$, следует, что в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|e^{i\lambda x}c(\lambda, x)| \leqslant 1 + \int_0^x |\lambda|^{-1}|q(t)||e^{i\lambda t}c(\lambda, t)|\,dt.$$

Поэтому функция $|e^{i\lambda x}c(\lambda, x)|$ мажорируется решением уравнения $y' = |\lambda|^{-1}|q(x)|\,y$ с начальным условием $\tilde{y}(0) = 1$, т. е.

$$|e^{i\lambda x}c(\lambda, x)| \leqslant \exp(|\lambda|^{-1}\sigma(x)), \tag{5}$$

где

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt. \tag{6}$$

Из этой оценки и уравнения (4) следует далее, что

$$|e^{i\lambda x}(c(\lambda, x) - \cos\lambda x)| \leqslant e^{|\lambda|^{-1}\sigma(x)} - 1. \tag{7}$$

Так как $q_l(x) = 0$ при $x > l$, то согласно (4), (3′) на полуоси $l < x < \infty$ решения $c_l(\lambda, x)$ являются такой комбинацией экспонент:

$$c_l(\lambda, x) = \frac{1}{2}\{e^{i\lambda x}(1 + h_l(-\lambda)) + e^{-i\lambda x}(1 + h_l(\lambda))\}.$$

Поэтому они принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$ только при тех значениях λ из верхней полуплоскости, которые являются корнями уравнения

$$1 + h_l(\lambda) \equiv 1 + i\lambda^{-1}\int_0^l e^{i\lambda t}q(t)\,c(\lambda, t)\,dt = 0.$$

Но согласно (5), (6)

$$|h_l(\lambda)| = \left| i\lambda^{-1}\int_0^l e^{i\lambda t}q(t)\,c(\lambda, t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^l |\lambda|^{-1}|q(t)|\,e^{|\lambda|^{-1}\sigma(t)}dt = e^{|\lambda|^{-1}\sigma(l)} - 1, \tag{8}$$

откуда следует, что все корни этого уравнения лежат в области $\exp(|\lambda|^{-1}\sigma(l)) - 1 \geqslant 1$, т. е. их модули удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \leqslant (\ln 2)^{-1}\sigma(l) \leqslant \frac{3}{2}\sigma(l)$$

и нижняя граница спектра лежит правее точки $-\frac{9}{4}\sigma(l)^2$. Таким образом, полуось $-\infty < \mu < -\frac{9}{4}\sigma(l)^2$ свободна от спектра и спектральная функция $\rho_l(\mu)$ на ней постоянна:

$$\rho_l(\mu) = \rho_l(-\infty), \quad -\infty < \mu < -\frac{9}{4}\sigma(l)^2. \tag{9}$$

Для оценки функции $|1+h_l(\lambda)|^{-2}$ мы воспользуемся выполняющимся в круге $|z|<1$ неравенством

$$||1+z|^{-2}-(1-z-\bar{z})|\leqslant|z|^2\left\{3+\frac{3|z|}{1-|z|}+\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\right\},$$

из которого вытекает такое неравенство:

$$||1+z|^{-2}-(1-z-\bar{z})|\leqslant|z|^2\{3+18|z|\} \tag{10}$$

для круга $|z|\leqslant\frac{2}{3}$.

Пусть $\alpha=|\lambda|^{-1}\sigma(l)\leqslant\frac{1}{2}$, т.е. будем рассматривать вещественные λ, удовлетворяющие неравенству $|\lambda|\geqslant 2\sigma(l)$. Так как $e^{\alpha}-1<$ $<\alpha\left(1+\frac{2}{3}\alpha\right)$, если $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, то согласно (8) $|h_l(\lambda)|\leqslant\alpha\left(1+\frac{2}{3}\alpha\right)\leqslant$ $\leqslant\frac{2}{3}$ и в силу (10)

$$|1+h_l(\lambda)|^{-2}-(1-2\operatorname{Re}h_l(\lambda))|\leqslant\alpha^2\left(1+\frac{2}{3}\alpha\right)^2\left(3+\right.$$
$$\left.+18\alpha\left(1+\frac{2}{3}\alpha\right)\right)\leqslant\alpha^2\left[3+\alpha\left\{47+\frac{1}{3}\right\}\right]. \tag{11}$$

Далее, из формулы (3′) и оценки (7) следует, что

$$2\operatorname{Re}h_l(\lambda)=2\lambda^{-1}\int_0^l\sin\lambda t\,c(\lambda,t)\,q(t)\,dt=$$

$$=2\lambda^{-1}\int_0^l\sin\lambda t\cos\lambda t q(t)\,dt+2\lambda^{-1}\int_0^l\sin\lambda t\,(c(\lambda,t)-\cos\lambda t)\,q(t)\,dt,$$

$$\left|2\lambda^{-1}\int_0^l\sin\lambda t\,(c(\lambda,t)-\cos\lambda t)\,q(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^l|\lambda|^{-1}\left(e^{|\lambda|^{-1}\sigma(t)}-1\right)|q(t)|\,dt=$$

$$=2\left\{e^{|\lambda|^{-1}\sigma(l)}-1-|\lambda|^{-1}\sigma(l)\right\}=2(e^{\alpha}-1-\alpha)$$

и так как при $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ $e^{\alpha}-1-\alpha\leqslant\frac{\alpha^2}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$, то

$$\left|2\operatorname{Re}h_l(\lambda)-\lambda^{-1}\int_0^l\sin 2\lambda t q(t)\,dt\right|\leqslant\alpha^2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right). \tag{12}$$

Сопоставление неравенств (11), (12) показывает, что

$$|1+h_l(\lambda)|^{-2}=1-\int_0^l\frac{\sin 2\lambda t}{\lambda}q(t)\,dt+\frac{\sigma(l)^2}{\lambda^2}\left(4+48\frac{\sigma(l)}{|\lambda|}\right)\theta(\lambda,l),$$

где $|\theta(\lambda,l)|\leqslant 1$ при $|\lambda|\geqslant 2\sigma(l)$.

Отсюда и из формулы (3) следует, что при $\sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$

$$\frac{d\rho_l(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}\,|1+h_l(\sqrt{\mu})|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}}\left\{1+\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}+4\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^2+48\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^3\right\} \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\mu}}\left\{1+15\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right\}, \quad (13)$$

а при $\sqrt{\mu_1} > \sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$

$$\rho_l(\mu_1)-\rho_l(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}\,|1+h_l(\sqrt{\mu})|^2} = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{\mu}}^{\sqrt{\mu_1}}\frac{d\lambda}{|1+h_l(\lambda)|^2} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big\{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu}-\int_0^l [J(2\sqrt{\mu}\,t)-J(2\sqrt{\mu_1}\,t)]\,q(t)\,dt +$$
$$+4\sigma(l)^2\left[\frac{1}{\sqrt{\mu}}-\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}+6\sigma(l)\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu_1}\right)\right]\theta(l,\mu,\mu_1)\Big\},$$

где

$$J(2\sqrt{\mu}\,t) = \int_{2\sqrt{\mu}t}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \int_{\sqrt{\mu}}^{\infty}\frac{\sin 2\lambda t}{\lambda}\,d\lambda$$

и $|\theta(l,\mu,\mu_1)| \leqslant 1$. Устремляя здесь μ_1 к $+\infty$ и замечая, что $\lim\limits_{\mu_1\to+\infty}\left(\rho_l(\mu_1)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu_1}\right) = \rho_l(-\infty)$, получаем следующую формулу для спектральных функций $\rho_l(\mu)$:

$$\rho_l(\mu)-\rho_l(-\infty) = \frac{2}{\pi}\Big\{\sqrt{\mu}+\int_0^l J(2\sqrt{\mu}\,t)\,q(t)\,dt +$$
$$+4\frac{\sigma(l)^2}{\sqrt{\mu}}\left(1+6\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)\theta(l,\mu)\Big\}, \quad (14)$$

где $|\theta(l,\mu)| \leqslant 1$ при $\sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$.
Из этой формулы и неравенства

$$|J(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (0 \leqslant x < \infty) \quad (15)$$

вытекает такая оценка для спектральных функций при $\sqrt{\mu} \geqslant 2\sigma(l)$:

$$\rho_l(\mu)-\rho_l(-\infty) \leqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}\left\{1+\frac{\pi}{2}\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}+4\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^2+\right.$$
$$\left.+24\left(\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)^3\right\} \leqslant 12\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}. \quad (16)$$

Полагая

$$Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt,$$

после интегрирования по частям находим, что

$$\int_0^a J(2\sqrt{\mu}t)\,q(t)\,dt = J(2\sqrt{\mu}a)\,Q(a) + \int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}t}{t}\,Q(t)\,dt$$

и, значит, при любых положительных $a \leqslant l$

$$\left|\int_0^l J(2\sqrt{\mu}t)\,q(t)\,dt - \int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}t}{t}\,Q(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^l J(2\sqrt{\mu}t)\,q(t)\,dt + J(2\sqrt{\mu}a)\,Q(a)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |J(2\sqrt{\mu}a)|\,|Q(a)| + \max_{t>a}|J(2\sqrt{\mu}t)|\int_a^l |q(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma(a)}{a\sqrt{\mu}} + \frac{\sigma(l)-\sigma(a)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{\sigma(l)}{a\sqrt{\mu}},$$

так как $|J(x)| \leqslant 2x^{-1}$ при всех $x > 0$. Поэтому из формулы (14) следует также, что

$$\left|\rho_l(\mu) - \rho_l(-\infty) - \frac{2}{\pi}\left\{\sqrt{\mu} + \int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}t}{t}\,Q(t)\,dt\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sigma(l)}{a\sqrt{\mu}} + 4\frac{\sigma(l)^2}{\sqrt{\mu}}\left(1 + 6\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}\right)\right\} \qquad (17)$$

при всех положительных $a \leqslant l$ и $\mu \geqslant 4\sigma(l)^2$.

Полученные оценки спектральных функций $\rho_l(\mu)$ позволяют уточнить поведение спектральной функции $\rho(\mu)$ исходной краевой задачи с помощью равенств (2). Для этого сначала нужно найти хорошее приближение ступенчатой функции

$$\chi\left(\frac{\xi}{\mu}\right) = \begin{cases} 1 & -\infty < \xi < \mu \\ \frac{1}{2} & \xi = \mu \\ 0 & \mu < \xi < \infty \end{cases}$$

функциями вида $g(\sqrt{\xi})$, где $g(\lambda) \in Z(l)$.

Определим четную функцию $\varphi(x)$ равенствами

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\cos\frac{x}{4}\right)^4 & |x| < 2\pi; \\ 0 & |x| \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

Она имеет три абсолютно непрерывные производные и ограниченную производную четвертого порядка. Так как $\left(\cos\frac{x}{4}\right)^4$, так же, как

$$\frac{\left(\cos\frac{x}{4}\right)^4-1}{x}=\frac{\cos^2\frac{x}{4}-1}{x}\left(1+\cos^2\frac{x}{4}\right)=-\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}\sin\frac{x}{4}\left(1+\cos^2\frac{x}{4}\right)$$

являются целыми функциями экспоненциального типа 1, причем модуль первой не превышает 1, а второй — $\sqrt{\frac{2}{27}}$, то согласно неравенству С. Н. Бернштейна модули их производных всех порядков не превышают соответственно 1 и $\sqrt{\frac{2}{27}}$. Следовательно,

$$\max_{|x|<2\pi}|\varphi^{(k)}(x)|\leqslant 1,\quad \max_{|x|<2\pi}\left|\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)^{(k)}\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{27}},\tag{18}$$

а при $|x|>2\pi$

$$\varphi^{(k)}(x)=0,\quad \left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)^{(k)}=(-1)^{k+1}k!\,x^{-(k+1)}.\tag{19}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda,N)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\cos\lambda x\,dx,$$

где N — произвольное положительное число. Поскольку функция $\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)$ — четырежды дифференцируема и равна нулю вне интервала $(-2\pi,\ 2\pi)$, $f(\lambda,N)$ является четной суммируемой на вещественной оси функцией экспоненциального типа 2π, т. е. $f(\lambda,N)\in Z(2\pi)$. При вещественных значениях λ

$$f(\lambda,N)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\cos\lambda x\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin Nx\cos\lambda x\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)dx=$$

$$=D\left(\frac{\lambda}{N}\right)+S(N+\lambda)+S(N-\lambda),\tag{20}$$

где $D\left(\frac{\lambda}{N}\right)$ — разрывный множитель Дирихле:

$$D\left(\frac{\lambda}{N}\right)=\begin{cases}1 & |\lambda|<N;\\ \frac{1}{2} & |\lambda|=N;\\ 0 & |\lambda|>N\end{cases}$$

$$S(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\xi x\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)dx.$$

Интеграл в правой части последнего равенства можно четыре раза интегрировать по частям. Поэтому

$$(1+\xi^2)^2 S(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\xi x\left\{\frac{\varphi(x)-1}{x}-2\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)''+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)^{\mathrm{IV}}\right\}dx,$$

откуда, используя оценки (15), (18), (19), находим, что $|S(\xi)|\leqslant\leqslant 3(1+\xi^2)^{-2}$ и тем более $|S(\xi)|\leqslant A(\xi)^2$, где

$$A(\xi)=\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ch}\pi-1}\left(\frac{\operatorname{ch}\pi-\cos\pi\xi}{1+\xi^2}\right). \tag{21}$$

Отсюда согласно (20) следует, что

$$\left|D\left(\frac{\lambda}{N}\right)-f(\lambda,N)\right|\leqslant|S(N+\lambda)|+|S(N-\lambda)|\leqslant$$

$$\leqslant A(N+\lambda)^2+A(N-\lambda)^2\leqslant(A(N+\lambda)+A(N-\lambda))^2,$$

т. е. при вещественных значениях λ

$$-g_1(\lambda,N)+f(\lambda,N)\leqslant D\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\leqslant f(\lambda,N)+g_1(\lambda,N),$$

где функции $f(\lambda,N)$ и

$$g_1(\lambda,N)=(A(N+\lambda)+A(N-\lambda))^2 \tag{22}$$

принадлежат множеству $Z(2\pi)$. Так как

$$D\left(\frac{\lambda}{N}\right)=D\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right)=\chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right)(\nu=\lambda^2>0),$$

то полученные неравенства эквиваленты таким:

$$-g_1(\sqrt{\nu},N)+f(\sqrt{\nu},N)\leqslant\chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right)\leqslant f(\sqrt{\nu},N)+$$

$$+g_1(\sqrt{\nu},N). \tag{23}$$

Заметим, что функция $A(N+\lambda)+A(N-\lambda)$ принимает вещественные значения как при вещественных, так и при чисто мнимых значениях λ. Поэтому неравенство

$$g_1(\sqrt{\nu},N)=\{A(N+\sqrt{\nu})+A(N-\sqrt{\nu})\}^2\geqslant 0$$

выполняется на всей вещественной оси $-\infty<\nu<\infty$.

Рассмотрим теперь чисто мнимые значения $\lambda = i\tau$ $(\tau > 0)$. В этом случае

$$f(i\tau, N) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\,\mathrm{ch}\,\tau x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin Nx\,\varphi(x)\left\{\int\limits_0^{\tau} \mathrm{sh}\,\xi x d\xi + x^{-1}\right\} dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}dx +$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin Nx\left(\frac{\varphi(x)-1}{x}\right)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\tau} d\xi \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \sin Nx\,\mathrm{sh}\,\xi x\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= 1 + 2S(N) + \int\limits_0^{\tau}\{C(N+i\xi) - C(N-i\xi)\}\,d\xi,$$

где

$$C(N \pm i\xi) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\varphi(x)\cos(N \pm i\xi)\,xdx =$$

$$= i\,(2\pi(N \pm i\xi)^4)^{-1}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\varphi^{\mathrm{IV}}(x)\cos(N \pm i\xi)\,xdx$$

и согласно предыдущему $|S(N)| \leqslant 3(1+N^2)^{-2}$.

Так как $|\varphi^{\mathrm{IV}}(x)| \leqslant 1$, то

$$|C(N \pm i\xi)| \leqslant (2\pi(N^2+\xi^2)^2)^{-1}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}|\cos(N \pm i\xi)\,x|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi(N^2+\xi^2)^2)^{-1}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{ch}\,\xi xdx = \frac{\mathrm{sh}\,2\pi\xi}{\pi(N^2+\xi^2)^2\xi}$$

и, значит,

$$\left|\int\limits_0^{\tau}\Big\{C(N+i\xi) - C(N-i\xi)\Big\}d\xi\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\tau}\frac{\mathrm{sh}\,2\pi\xi}{\xi(N^2+\xi^2)^2}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\mathrm{ch}\,2\pi\tau - 1}{\tau^2}\,\frac{\tau}{(N^2+\tau^2)^2} + \int\limits_0^{\tau}\frac{\mathrm{ch}\,2\pi\xi - 1}{\xi^2}\left(\frac{1}{(N^2+\xi^2)^2} + \frac{4\xi^2}{(N^2+\xi^2)^3}\right)d\xi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{ch}\,2\pi\tau - 1}{\pi^2\tau^2}\left\{\frac{1}{N^3} + \frac{1}{N^3}\int\limits_0^{N\tau}\frac{1+5t^2}{(1+t^2)^3}\right\}dt \leqslant \frac{3}{\pi^2 N^3}\,\frac{\mathrm{ch}\,2\pi\tau - 1}{\tau^2},$$

откуда согласно (24) следует, что

$$|1 - f(i\tau, N)| \leqslant 2|S(N)| + \frac{3}{\pi^2 N^3}\,\frac{\mathrm{ch}\,2\pi\tau - 1}{\tau^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6}{(1+N^2)^2} + \frac{3}{\pi^2 N^3}\,\frac{\mathrm{ch}\,2\pi\tau - 1}{\tau^2} \leqslant \frac{6}{\pi^2 N^3}\,\frac{\mathrm{ch}\,2\pi\tau - 1}{\tau^2},$$

т. е. при $\lambda = i\tau$

$$|1 - f(\lambda, N)| \leqslant g_2(\lambda, N), \tag{25}$$

где функция

$$g_2(\lambda, N) = \frac{6}{\pi^2 N^3} \frac{\operatorname{ch} 2\pi\tau - 1}{\tau^2} = \frac{12}{N^3}\left(\frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}\right)^2 \tag{26}$$

принадлежит множеству $Z(2\pi)$ и принимает неотрицательные значения всех вещественных и чисто мнимых значениях λ. Так как при отрицательных значениях ν $\chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) = 1$, то согласно (25) на отрицательной полуоси $-\infty < \nu < 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} -g_2(\sqrt{\nu}, N) + f(\sqrt{\nu}, N) \leqslant \chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) \leqslant \\ \leqslant f(\sqrt{\nu}, N) + g_2(\sqrt{\nu}, N), \end{aligned} \tag{27}$$

причем функция $g_2(\sqrt{\nu}, N)$ неотрицательна на всей вещественной оси $-\infty < \nu < \infty$.

Содержащиеся в неравенствах (23), (27) функции $g_1(\sqrt{\nu}, N)$, $g_2(\sqrt{\nu}, N)$ неотрицательны при всех вещественных значениях ν. Поэтому каждая из них мажорируется функцией

$$g(\sqrt{\nu}, N) = g_1(\sqrt{\nu}, N) + g_2(\sqrt{\nu}, N) \tag{28}$$

и неравенства

$$-g(\sqrt{\nu}, N) + f(\sqrt{\nu}, N) \leqslant \chi\left(\frac{\nu}{N^2}\right) \leqslant f(\sqrt{\nu}, N) + g(\sqrt{\nu}, N)$$

выполняются на всей вещественной оси $-\infty < \nu < \infty$.

Полагая здесь $\nu = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \xi$, $N = \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}$, получаем выполняющиеся при всех $\xi \in (-\infty, \infty)$ и $\mu \in (0, \infty)$ неравенства

$$\begin{aligned} -g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) + f\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant \chi\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \leqslant \\ \leqslant f\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) + g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right), \end{aligned}$$

в которых функции $\left(g\frac{l\lambda}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right)$, $f\left(\frac{l\lambda}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right)$ принадлежат множеству $Z(l)$. Из этих неравенств и тождеств (2) следует, что

$$\begin{aligned} |\rho(\mu - c) - \rho(-\infty) - (\rho_l(\mu - c) - \rho_l(-\infty)| \leqslant \\ \leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l(\xi - c) \end{aligned}$$

при всех $c \in (-\infty, \infty)$, а так как согласно (9) $\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right) = \rho_l(-\infty) = \text{const}$ при всех $\xi \leqslant 0$, то, беря $c = \frac{9}{4}\sigma(l)^2$, получаем следующее неравенство:

$$\left|\rho\left(\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)\right)^2 - \rho(-\infty) - \left(\rho_l\left(\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right) - \rho_l(-\infty)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\infty g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right). \qquad (29)$$

Для оценки интеграла, стоящего в правой части этого неравенства, разобьем его на два:

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\mu} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right),$$

$$J_2 = \int_{\frac{1}{2}\mu}^\infty g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)$$

и оценим каждый из них при

$$\mu \geqslant 2\left(4 + \frac{9}{4}\right)\sigma(l)^2. \qquad (30)$$

Из формул (21), (22), (26), (28) и неравенства $\left(\frac{\operatorname{ch}\pi + 1}{\operatorname{ch}\pi - 1}\right)^2 < \frac{3}{2}$ следует, что при положительных значениях ξ и μ

$$g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3 \left(\frac{\sin\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}{\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}\right)^2 +$$

$$+ \frac{9}{2}\left\{\frac{1}{1 + \left(\frac{l}{2\pi}(\sqrt{\mu} + \sqrt{\xi})\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{2\pi}(\sqrt{\mu} - \sqrt{\xi})\right)^2}\right\}^2.$$

Огрубляя это неравенство, получаем на сегменте $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\mu$ такую оценку:

$$g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\left\{1 + 54\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)\right\}, \qquad (31)$$

а на полуоси $\frac{1}{2}\mu \leqslant \xi < \infty$ — такую:

$$g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant \frac{9}{2\left\{1+\left(\frac{l}{2\pi}(\sqrt{\mu}-\sqrt{\xi})\right)^2\right\}^2} + \\ + \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \frac{27}{2(\sqrt{\mu}+\sqrt{\xi})^2} + 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3 \left(\frac{\sin\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}{\frac{l\sqrt{\xi}}{2}}\right)^2. \qquad (32)$$

Заметим, что при рассматриваемых значениях μ выполняется неравенство $\frac{1}{2}\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2 \geqslant 4\sigma(l)^2$, позволяющее пользоваться на полуоси $\frac{1}{2}\mu \leqslant \xi < \infty$ оценками (13), (16) для функции $\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)$ и ее производной. Поэтому

$$\rho_l\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right) - \rho_l(-\infty) \leqslant \frac{12}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2} \leqslant 3\sqrt{\mu} \qquad (33)$$

и, так как $\frac{\sigma(l)^2}{\mu} \leqslant \frac{2}{25}$, то при $\xi \geqslant \frac{1}{2}\mu$

$$\sqrt{\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2}\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2} \geqslant \frac{8}{13}\sqrt{\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2},$$

$$\sqrt{\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2} \geqslant \sqrt{\xi}\sqrt{1 - \frac{9\sigma(l)^2}{2\mu}} \geqslant \sqrt{\xi}\left(1 + \frac{9}{2}\frac{\sigma(l)^2}{\mu}\right)^{-1},$$

откуда согласно (13) следует, что при $\xi \geqslant \frac{1}{2}\mu$

$$\frac{d\rho_l\left(\xi - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right)}{d\xi} \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\left(1 + \frac{9}{2}\frac{\sigma(l)^2}{\mu}\right)\left(1 + 25\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\left(1 + 36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right), \qquad (34)$$

где

$$\mu' = \mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2.$$

Из оценок (31), (33) следует, что

$$J_1 \leqslant \left(\rho_l\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2\right) - \rho_l(-\infty)\right) \max_{0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\mu} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) \leqslant \\ \leqslant l^{-1}\, 72\pi \left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^2 \left(1 + 54\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)\right),$$

из оценок (32), (34) следует, что

$$J_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right)\int_{\frac{1}{2}\mu}^{\infty} g\left(\frac{l\sqrt{\xi}}{2\pi}, \frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi}\right) d\sqrt{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right)\left(\frac{9\pi^2}{2l}+\frac{81\pi}{5l}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+\frac{12\pi}{l}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right) =$$

$$= 9\pi l^{-1}\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right)\left(1+\frac{18}{5\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+\frac{8}{3\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right).$$

Мы получили эти оценки при условии (30), наложенном на μ. Это условие заведомо выполняется, если $\mu' \geqslant 16\sigma(l)^2$ и, так как в этом случае $\left(1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}\right) \leqslant 10$, то

$$J_2 \leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+\frac{180}{5\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+\frac{80}{3\pi}\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+9\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3\right\}.$$

Следовательно, если $\mu' = \mu - \frac{9}{4}\sigma(l)^2 \geqslant 16\sigma(l)^2$, то $J_1 + J_2 \leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+\delta(l\sqrt{\mu})\right\}$, и тем более $J_1 + J_2 \leqslant 9\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu'}}+\delta(l\sqrt{\mu'})\right\}$, где $\delta(z) = 12\left(\frac{2\pi}{z}\right)+8\left(\frac{2\pi}{z}\right)^2+441\left(\frac{2\pi}{z}\right)^3$, непосредственным следствием полученной оценки и неравенств (17), (29) является следующая

Теорема 1. *При любых положительных значениях* l, $a \leqslant l$ *и* $\mu \geqslant 16\sigma(l)^2$ *спектральная функция* $\rho(\mu)$ *краевой задачи* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\left|\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\mu}+\int_0^a \frac{\sin 2\sqrt{\mu}t}{t} Q(t)\,dt\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sigma(l)}{\pi a\sqrt{\mu}}+\frac{20\sigma(l)^2}{\pi\sqrt{\mu}}+18\pi l^{-1}\left\{1+36\frac{\sigma(l)}{\sqrt{\mu}}+\delta(l\sqrt{\mu})\right\}, \tag{35}$$

где

$$Q(t) = \int_0^t q(x)\,dx, \quad \sigma(l) = \int_0^l |q(x)|\,dx,$$

$$\delta(l\sqrt{\mu}) = 12\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)+8\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^2+441\left(\frac{2\pi}{l\sqrt{\mu}}\right)^3.$$

Переходя к оценке остаточного члена $\varepsilon(\mu) = \rho(\mu) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}$, введем заданную на положительной полуоси непрерывную и неубывающую функцию: $l\sigma(l)^2+4\sigma(l)$ $(0 \leqslant l < \infty)$. Начиная некоторого значения l, она строго растет от 0 до $+\infty$ (тривиал ный случай, когда $q(x)\equiv 0$, исключаем). Поэтому при всех $\mu >$ уравнение

$$l\sigma(l)^2+4\sigma(l)=\sqrt{\mu} \quad (3$$

имеет единственное решение $l=l(\mu)$, функция $l(\mu)$ строго раст от 0 до $+\infty$,

$$\frac{\sigma(l(\mu))^2}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{l(\mu)}-\frac{4\sigma(l(\mu))}{l(\mu)\sqrt{\mu}}, \quad \frac{\sigma(l(\mu))}{\sqrt{\mu}}=\frac{1}{4+l(\mu)\sigma(l(\mu))} \quad (3$$

и $l(\mu)\geqslant 1$, если $\sqrt{\mu}\geqslant\sigma(1)^2+4\sigma(1)$. Следовательно, все услов теоремы 1 вюполняются при $a=1$, $l=l(\mu)$, $\mu\geqslant(\sigma(1)^2+4\sigma(1))$ и согласно (35), (37)

$$\left|\rho(\mu)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\mu}+\int_0^1\frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}Q(t)\,dt\right)\right|\leqslant\frac{2\varphi(\mu)}{\pi l(\mu)}, \quad (3$$

где

$$\varphi(\mu)=10+9\pi^2+\frac{l(\mu)}{4+l(\mu)\sigma(l(\mu))}+$$
$$+\frac{36\cdot 9\pi^2-40}{l(\mu)(4+l(\mu)\sigma(l(\mu))}+9\pi^2\delta\left(l(\mu)\sqrt{\mu}\right), \quad ($$
$$\lim_{\mu\to\infty}\varphi(\mu)=10+9\pi^2+\sigma(\infty)^{-1}<100+\sigma(\infty)^{-1}.$$

Очевидным следствием неравенств (38), (39) является

Теорема 2. *На положительной полуоси $0<\mu<\infty$ спектральн функция $\rho(\mu)$ краевой задачи* (I) *представима в виде*

$$\rho(\mu)-\rho(-\infty)=\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\mu}+\int_0^1\frac{\sin 2\sqrt{\mu}t}{t}Q(t)\,dt+\frac{100+\sigma(\infty)^{-1}}{l(\mu)}\theta(\mu)\right),$$

где $l(\mu)$ — решение уравнения (36) и

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}|\theta(\mu)|<1.$$

Мы видим, что остаточный член

$$\varepsilon(\mu)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t}\right)Q(t)\,dt+\frac{100+\sigma(\infty)^{-1}}{l(\mu)}\theta(\mu)\Big)$$

состоит из двух слагаемых, причем скорость убывания перво зависит от гладкости потенциала в окрестности нуля, а второго от скорости роста функции $\sigma(l)$. При $\mu \to +\infty$ главный вклад в $\varepsilon(\mu)$ может вносить каждое из них. Например, если

$$q(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & 0 < x \leqslant 1,\ 0 < \alpha < 1; \\ \beta x^{\beta-1} & 1 \leqslant x < \infty,\ 0 < \beta < \infty, \end{cases}$$

то

$$Q(t) = \sigma(t) = \begin{cases} t^{\alpha} & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ t^{\beta} & 1 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

и при $\sqrt{\mu} > 5$ уравнение (36) имеет такой вид: $l^{1+2\beta} + 4l^{\beta} = \sqrt{\mu}$. Следовательно, при $\mu \to +\infty$

$$l(\mu) = (\sqrt{\mu})^{\frac{1}{1+2\beta}}(1 + o(1))$$

и

$$\int_0^1 \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t} Q(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\sin 2\sqrt{\mu}\,t}{t} t^{\alpha} dt = (2\sqrt{\mu})^{-\alpha} \int_0^{2\sqrt{\mu}} \frac{\sin \xi}{\xi^{1-\alpha}} d\xi =$$

$$= (2\sqrt{\mu})^{-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi^{1-\alpha}} d\xi\,(1 + o(1)),$$

откуда следует, что при $\alpha(1 + 2\beta) < 1$ главный вклад вносит первое слагаемое, а при $\alpha(1 + 2\beta) > 1$, в общем случае, — второе.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.; Л, 1950. 483 с. 2. *Марченко В. А.* О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка // Докл. АН СССР. 1950. **74**, № 4. С. 657—660. 3. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953. **17**, вып. 4. С. 331—364; **19**. вып. 1. С. 33—58. 4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. К., 1977. 369 с.

Поступила в редколлегию 12.02.90

УДК 519.9

М. В. НОВИЦКИЙ

О ПОЛНОМ ОПИСАНИИ ОСНОВНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЕРИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА

1. *Введение.* Пусть $u(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция с периодом 1, т. е. $u(x+1) = u(x)$. Обозначим через $\{\lambda_i(H)\}_{i=0}^{\infty}$ спектр оператора Хилла $H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ в пространстве $L^2[0, 1]$ с периодическими граничными условиями.

Определение 1. *Функционал $F(u)$, заданный на бесконечно-дифференцируемых функциях с периодом 1, будем называть спектральным инвариантом оператора H, если он обладает свойством: из того, что операторы $H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + u_i(x)$, $i = 1, 2$ имеют одинаковый спектр периодической задачи, следует, что $F(u_1) = F(u_2)$.*

Наиболее известной дискретной серией спектральных инвариантов оператора Хилла является полиномиальная серия $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ первых интегралов уравнения $K_g\Phi\, u_t = 6u \cdot u_x - u_{xxx}$. Величины I_n этой серии задаются равенством

$$I_n = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 P_{n+1}(u,\ u',\ \ldots)\, dx,$$

где $P_n(u,\ u',\ \ldots)$ — универсальные многочлены степени точно n без постоянных слагаемых, определяемые рекуррентной формулой:

$$\left(-\frac{d^3}{dx^3}\right) + 4u\frac{d}{dx} + 2\frac{d}{dx}u\Big)P_n = 4\frac{d}{dx}P_{n+1}$$

с условием $P_0 \equiv 1$. Основные дискретные серии спектральных инвариантов оператора Хилла могут быть запараметризованы индексом $n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$. Серии $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ соответствует индекс $n = 0$. Для описания n-серий введем функцию

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\lambda_i t),\ \ t > 0.$$

Функция $\theta(t)$ допускает разложение вида $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(t)$, где $\theta_n(t)$ имеют вид

$$\theta_n(t) = \int_0^1 e(t,\ x,\ x+n)\, dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{n^2}{4t}\right)F_n(t).$$

Здесь $e(t,\ x,\ y)$ — фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial e}{\partial t} = He$ на всей прямой, функции $F_n(t)$ допускают представление

$$F_n(t) = \int_0^1 M\left[\exp\left(-t\int_0^1 u(x + n\tau + \sqrt{t}\, w(\tau)\, d\tau\right)\right] dx, \tag{1}$$

в котором M — это математическое ожидание случайной величины, $w(\tau)$ — «винеровский мост», определяемый как одномерный условный винеровский процесс, задаваемый условиями: $i)$ $w(0) = w(1) = 0$; $ii)$ $w(\tau)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $B(s,\ t) = (s \wedge t)(1 - s \vee t)$.

Определение 2. *n-серией спектральных инвариантов оператора Хилла будем называть набор величин $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, задаваемых асимптотическим разложением:*

$$F_n(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n t^k, \ t \downarrow 0. \tag{2}$$

Известно [1], что O — серия коэффициентов $\{b_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ совпадает с точностью до универсальных множителей с набором $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ или более точно

$$b_{k+1}^0 = \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{(2k-1)!!} I_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Нами предложены явные формулы, по которым коэффициенты n-серии вычисляются через набор $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ (теорема 1). Кроме того, доказывается (теорема 2), что коэффициенты асимптотического разложения собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ периодической задачи совпадают с величинами $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ с точностью до явно вычисляемых констант. Эти теоремы уточняют результаты работ [2, 3].

2. *n-серии* коэффициентов $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 1. *Коэффициенты n-серии $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ выражаются через коэффициенты O-серии $\{b_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ соотношением*

$$b_k^n = \sum_{l=1}^{k} n^{2(k-l)} b_l^0, \ k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

и связаны с набором $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ равенством

$$b_k^n = \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^l 2^{l-1} n^{2(k-l)}}{(2l-3)!!} I_{l-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что (5) является очевидным следствием (3), (4), поэтому будем доказывать только соотношение (4). Известно (см., например [4]), что набор $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ образует базис в линейном пространстве локальных законов сохранения уравнения. Это обозначает, что если задан функционал вида

$$F(u) = \int_0^1 f(u, u', \ldots, u^{(N)})\, dx,$$

где f — бесконечно дифференцируемая функция от конечного числа N переменных и $F(u(t, x))$ не меняет значения при $t \geqslant 0$, где

$u(t, x)$ — решение уравнения $K_g\Phi$ с начальным условием $u(0, x) = u(x)$, то существуют константы $\{\rho_k\}_{k=0}^N$, не зависящие от $u(x)$ такие, что

$$F(u) = \sum_{k=0}^{N} \rho_k I_k(u). \tag{6}$$

Величины $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ являются спектральными инвариантами оператора H и, следовательно, законами сохранения уравнения $K_g\Phi$. Более того, из (1) следует, что

$$b_k^n = \int_0^1 P_{k,n}(u, u', \ldots)\,dx, \tag{7}$$

где $P_{k,n}$ — многочлены от функции u и ее производных. Производящей функцией многочленов $P_{k,n}$ является функция $e(t, x, x+n) \times \exp\left(\frac{n^2}{4t}\right)$. Поэтому существуют константы $\rho_l(k, n)$ такие, что

$$b_k^n = \sum_{l=1}^{k} \rho_l(k, n)\, b_l^0. \tag{8}$$

Для нахождения коэффициентов $\rho_l(k, n)$ понадобится следующее свойство «квазиоднородности» многочленов $P_{k,n}$. Для этого введем семейство многочленов $P_{k,s}$, $s > 0$ с производящей функцией $e(t, x, x+s)\exp\left(\frac{s^2}{4t}\right)$.

Лемма. *Имеет место следующее соотношение:*

$$P_{k,n}(\lambda u, \ldots, \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)}, \ldots) = \lambda^k P_{k, \frac{n}{\sqrt{\lambda}}}(u, u', \ldots u^{(s)}, \ldots). \tag{9}$$

В частности, при $n = 0$ получаем

$$P_{k,0}(\lambda u, \ldots, \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)}, \ldots) = \lambda_k P_{k,0}(u, u', \ldots, u^{(s)}, \ldots). \tag{10}$$

Доказательство. Для проверки свойства (9) отметим, что производящей функцией многочленов $P_{k,s}$ является функция

$$f_s = M\left[\exp\left(-t\int_0^1 u(x + st + \sqrt{t}\,w(\tau))\,d\tau\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k,s}, \tag{11}$$

где

$$\varphi_{k,s}(t, u, u', \ldots) = \frac{(-t)^k}{k!}\left[\sum_{l=0}^{\infty} u^{(l)}(x)\int_0^1 M\left(st + \sqrt{t}\,w(\tau)\right)^l d\tau\right]^k. \tag{12}$$

Функция $\varphi_{k,s}$ удовлетворяет условию

$$\varphi_{k,s}(t, \lambda u, \ldots, \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)}, \ldots) = \\ = \varphi_{k, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}} (\lambda t, u, u', \ldots). \tag{13}$$

Поэтому свойством (13) обладает и функция f_s, т. е.

$$f_s(t, \lambda u, \ldots, \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)}, \ldots) = f_{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}} (\lambda t, u, u', \ldots).$$

Разлагая левую и правую часть этого равенства в ряд Тейлора и приравнивая коэффициенты разложения, получим (9). Отметим также, что равенства (11) и (12) следует понимать как асимптотические равенства при $t \downarrow 0$.

Для доказательства соотношения (4) в равенстве

$$b_k^n(u) = \sum_{l=1}^{k} \rho_l(k, n)\, b_l^0(u)$$

подставим вместо $u(x)$ функцию $\lambda u(\sqrt{\lambda} x)$. Тогда в силу свойства (10) получим

$$b_k^n(\lambda u(\sqrt{\lambda} x)) = \sum_{l=1}^{k} \rho_l(k, n)\, \lambda^l b_l^0(u(\sqrt{\lambda} x)).$$

С другой стороны, согласно (9) имеем

$$b_k^n(\lambda u(\sqrt{\lambda} x)) = \lambda^k b_k^{\frac{n}{\sqrt{\lambda}}}(u(\sqrt{\lambda} x)).$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^{k} b_l^0 \rho_l(k, n)\, \lambda^l = \sum_{l=1}^{k} b_l^0 \lambda^k \rho_l\left(k, \frac{n}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Выражение для $\rho_l(k, s)$ будем искать в виде $\rho_l(k, s) = s^{\nu(k, l)}$. Из равенства $\rho_l(k, n)\, \lambda^l = \lambda^k \rho_l\left(k, \frac{n}{\sqrt{\lambda}}\right)$ получим соотношение $s^\nu \lambda^{l+\frac{\nu}{2}} = \lambda^k s^\nu$. Поэтому $\nu = 2(k-l)$ и, значит, $\rho_l(k, s) = s^{2(k-l)}$, что и доказывает (4).

3. Коэффициенты асимптотического разложения собственных значений периодической задачи.

Известно [5], что для бесконечно дифференцируемого потенциала $u(x)$ собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ периодической задачи допускают полное асимптотическое разложение:

$$\sqrt{\lambda_{2n-1}} \sim 2\pi n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(u)}{n^{2k+1}}, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Те же коэффициенты разложения имеет и величина $\sqrt{\lambda_{2n}}$, $n \to \infty$.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$a_k(u) = d_k I_k(u), \qquad (1\cdot$$

где

$$d_k = (-1)^{k+1} 2\pi (4\pi^2)^k. \qquad (1$$

Доказательство. В работе [2] было установлено, что меж конечными наборами $\{I_m\}_{m=0}^{k}$ и $\{a_m\}_{m=0}^{k}$ существует взаимно одн значное соответствие, задаваемое соотношениями

$$a_k = R_k^1(I_0, I_1, \dots I_k),\ I_k = R_k^2(a_0, \dots, a_k),$$

где R_k, $i = 1, 2$ — универсальные многочлены, удовлетворяюш условию

$$R_k^i(\lambda\xi_0, \dots \lambda^{s+1}\xi_s, \dots, \lambda^{k+1}\xi_k) = \lambda^{k+1} R_k^i(\xi_0, \dots, \xi_k). \qquad (17$$

Величина a_k является локальным законом сохранения, поэтому существуют константы $\rho_{k,l}$ такие, что

$$a_k(u) = \sum_{l=0}^{k} \rho_{k,l} I_l(u).$$

Поэтому многочлен R_k^1 имеет вид

$$R_k^1(\xi_0, \dots, \xi_k) = \sum_{l=0}^{k} \rho_{k,l}\xi_l.$$

Из свойства (17) следует что $\rho_{k,l} = 0$ при $l < k$. Это влечет соотношение $a_k(u) = d_k I_k(u)$, где $d_k = \rho_{k,k}$. Для вычисления этой величины подставим в разложение (14) функцию $u(x) \equiv \lambda$.
Имеем

$$\sqrt{\lambda_{2n-1}} \sim 2\pi n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{n^{2k+1}},\ n \to \infty,$$

где

$$a_k(\lambda) = \frac{(-1)^{k+1}\pi(2k-1)!!\,\lambda^{k+1}}{2^k(k+1)!}.$$

Для функции $u(x) \equiv \lambda$ имеем $b_k^0 = \frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}$. Подставляя выражения $a_k(\lambda)$ и $I_k(\lambda)$ в равенство $a_k(\lambda) = d_k I_k(\lambda)$, получим (16).

Замечание. В работе [6] доказано, что в классе $C(m_n)$ по набору величин $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ можно восстановить спектр $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ тогда и только тогда, когда класс $C(m_n)$ является квазианалитическим. Согласно соотношению (5) в этом утверждении набор $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ можно заменить произвольной n-серией величин $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \dots$.

Список литерратуры: 1. *Mc Kean H. P., Moerbeke van P.* The spectrum of Hill's equation // Inventiones math, 1975. 30. P. 217—274. 2. *Новицкий М. В.* Об эквивалентных системах спектральных инвариантов оператора Хилла // Мат. физика, функцион. анализ: Тр. ФТИНТ АН УССР. 1986. С. 40—47. 3. *Sunada T.* Traceformula for Hill's operators, 1980. 47, № 3. P. 529—546. 4. *Serre D.* Les invariants locaux de l'equation de Korteweg de Vries. 1981, C. R. Acad. Sc. Paris, 293, Ser. I. P. 505—508. 5. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. 1977. С. 68—91. 6. *Новицкий М. В.* Двусторонние оценки полиномиальных законов сохранения для уравнения $K_g\Phi$ и их приложения // Функцион. анализ и его прил. 1989, 23, № 3. С.

Поступила в редколлегию 30.05.89

УДК 517.9
Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ОЦЕНКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ТИПА ВО ВСЕМ R^n

Для эллиптических операторов высших порядков широких классов, самосопряженность которых связана со сходимостью интегралов энергетического типа [1], устанавливаются оценки названных интегралов в норме графика и интерполяционные, а также неравенства типа Гординга для нефинитных функций. Работа инициирована вопросом М. Ш. Бирмана, которому автор искренне признателен. Для операторов второго порядка подобные вопросы рассмотрены в [2]. См. также литературу в [1—8].

§1. *Предварительные сведения.* Рассматриваемое дифференциальное выражение L полагаем представленным в виде суперпозиции одномерных выражений L_η, [1, § 1]:

$$L = \int_\omega \mu(d\omega_\eta)\, L_\eta, \quad L_\eta = \sum_{k=0}^{2m} l_{\eta,k}, \tag{1}$$

где $\omega = \{\eta \in R^n : |\eta| = 1\}$, $\partial_\eta = (\eta, \nabla_x)$ $x \in R^n$; μ — неотрицательная мера на ω;

$$l_{\eta,2j} = (-1)^j \partial_\eta^j p_{\eta,2j}(x)\, \partial_\eta^j,$$
$$l_{\eta,2j-1} = \frac{(-1)^{j-1}}{2i}\{\partial_\eta^j p_{\eta,2j-1}(x)\, \partial_\eta^{j-1} + \partial_\eta^{j-1} p_{\eta,2j-1}(x)\, \partial_\eta^j\}. \tag{2}$$

Считаем L сильно эллиптическим, т. е.

$$\operatorname{Re}\int_\omega p_{\eta,2m}(x)\,(\eta,\xi)^{2m}\mu(d\omega_\eta) \geqslant \varepsilon(x)\,|\xi|^{2m}, \tag{3_1}$$

где $\varepsilon(x) > 0$; $\xi \in R^n$, и с достаточно гладкими коэффициентами, чем обеспечивается [3, с. 381] включение

$$D(L_{max}) \subset W_{2,\,\mathrm{loc}}^{2m}(R^n). \tag{3_2}$$

Пример. Пусть $x=\{x_1, x_2\}\in \boldsymbol{R}^2$, $\partial_{3,4}=(\partial_1\pm\partial_2)/\sqrt{2}$ — д ренцирование в направлении биссектрис координатных углов, $= \Delta p(x)\Delta=(\partial_1^2+\partial_2^2)\,p(x_1, x_2)\,(\partial_1^2+\partial_2^2)$. Тогда

$$L=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{4}\left\{\partial_k^2 p\partial_k^2-\partial_k\left(p''_{kk}-\frac{3}{4}\Delta p\right)\partial_k\right\}$$

есть представление (1) с дискретной мерой μ, сосредоточенной в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ на ω. Если же μ — лебегова мера на окружности, то

$$\Delta p\Delta=\frac{4}{3\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\partial_\eta^2 p\partial_\eta^2-\partial_\eta\left(p''_{\eta\eta}-\frac{3}{4}\Delta p\right)\partial_\eta\right\}d\varphi,$$

где $\partial_\eta=\cos\varphi\partial_1+\sin\varphi\partial_2$, $\eta=\{\cos\varphi, \sin\varphi\}\in\omega$. Обозначаем $\langle\cdot, \cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норму в $L_2(\boldsymbol{R}^n)$, $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ — то же в $\boldsymbol{C}^n$. Полагаем $0\cdot\infty=0$.

§ 2. *Леммы об оценках интерполяционного и равномерного типов.* Полагая

$$I_j^2[u, \tau]=\int_{R^n\times\omega}\varphi_{\eta, j}^2(x, \tau)\,|\partial_\eta^j u(x)|^2\mu(d\omega_\eta)\,dx, \qquad (4)$$

$$j=0, 1, \dots m,$$

где $0\leqslant\varphi_{\eta, j}(x, \tau)\in C_0^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\tau>0$ — параметр,

$$\varphi_{\eta, j}^2\leqslant C\varphi_{\eta, j-1}\varphi_{\eta, j+1}, \ |\partial_\eta\varphi_{\eta, j}|\leqslant C\varphi_{\eta, j-1}, \ j=1, \dots m-1, \qquad (5)$$

имеем при $u\in W_{2, \mathrm{loc}}^m$ для $I_j[u, \tau]$ в силу интегрирования по частям систему неравенств [1, лемма 3.3]:

$$I_j^2\leqslant a_j I_{j-1}I_{j+1}+b_j I_{j-1}I_j, \quad j=1, \dots m-1, \qquad (6)$$

где $a_j\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть неотрицательные величины I_j удовлетворяют системе неравенств* (6). *Тогда для них справедливы оценки интерполяционного типа:*

$$0\leqslant I_j\leqslant A_{mj}I_0^{\frac{m-j}{m}}I_m^{\frac{j}{m}}+B_{mj}I_0, \quad j=1, \dots m-1, \qquad (7)$$

где $A_{mj}=A_{mj}(a)\geqslant 0$, $B_{mj}=B_{m, j}(a, b)\geqslant 0$ — *непрерывные от* $a=|\{a_1, \dots a_{m-1}\}|$, $b=|\{b_1, \dots b_{m-1}\}|$ *функции степенного роста,* $A_{mj}(0)=0$, $B_{mj}(a, 0)=0$.

Доказательство. Из (6) следует $I_j^2\leqslant a_j I_{j-1}I_{j+1}+\frac{1}{2}b_j^2 I_{j-1}^2+\frac{1}{2}I_j^2$, откуда

$$I_j\leqslant(2a_j)^{1/2}I_{j-1}^{1/2}I_{j+1}^{1/2}+b_j I_{j-1}, \qquad (8)$$

что при $j=1$ означает справедливость леммы для $m=2$. Проведем индукцию по m. Допуская справедливость леммы вплоть до некоторого $m \geqslant 2$, установим ее справедливость и для $m+1$, когда (6) и (8) справедливы вплоть до $j=m$. Полагая в (8) $j=m$, подставим туда оценку для I_{m-1} из (7). Получаем, с использованием неравенства Юнга:

$$I_m \leqslant (2a_m)^{1/2}\left(A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}} I_m^{\frac{m-1}{m}} + B_{m,\,m-1} I_0\right)^{1/2} I_{m+1}^{1/2} +$$

$$+ b_m \left(A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}} I_m^{\frac{m-1}{m}} + B_{m,\,m-1} I_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(2^{\frac{2m-1}{m}} a_m A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}} I_{m+1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} I_m\right)^{\frac{m-1}{2m}} +$$

$$+ \left(2a_m I_0^{\frac{1}{m}} I_{m+1}\right)^{1/2} \left(B_{m,\,m-1} I_0^{\frac{m-1}{m}}\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(2^{\frac{2(m-1)}{m}} b_m A_{m,\,m-1} I_0^{\frac{1}{m}}\right) (2^{-2} I_m)^{\frac{m-1}{m}} + b_m B_{m,\,m-1} I_0 \leqslant$$

$$\leqslant I_0^{\frac{1}{m+1}} I_{m+1}^{\frac{m}{m+1}} \cdot \frac{m+1}{m} 2^{\frac{m-2}{m+1}} a_m^{\frac{m}{m+1}} \left(A_{m,m-1}^{\frac{m}{m+1}} + 2^{\frac{1-m}{m+1}}\right) +$$

$$+ I_0 \cdot \left(b_m B_{m,\,m-1} + \frac{1}{m} 2^{2m-2} b_m^m A_{m,\,m-1}^m + \frac{m-1}{2m} B_{m,\,m-1}^{\frac{m}{m-1}}\right) +$$

$$+ \frac{m-1}{2m} I_m,$$

откуда следует, что

$$I_m \leqslant A_{m+1,\,m} I_0^{\frac{1}{m+1}} I_{m+1}^{\frac{m}{m+1}} + B_{m+1,\,m} I_0, \tag{9}$$

где

$$A_{m+1,\,m} = 2^{\frac{m}{m+1}} a_m^{\frac{m}{m+1}} \left(2^{\frac{m-1}{m+1}} A_{m,\,m-1}^{\frac{m}{m+1}} + 1\right),$$

$$B_{m+1,\,m} = \frac{1}{m+1} 2^{2m-1} b_m^m A_{m,\,m-1}^m + \frac{2m}{m+1} b_m B_{m,\,m-1} +$$

$$+ \frac{m-1}{m+1} B_{m,\,m-1}^{\frac{m}{m-1}}. \tag{10}$$

Подставляя (9) в (7) и замечая, что $(\alpha+\beta)^{j/m} \leqslant \alpha^{j/m} + \beta^{j/m}$ при $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, получаем

$$I_j \leqslant A_{m+1,\,j} I_0^{\frac{m+1-j}{m+1}} I_{m+1}^{\frac{j}{m+1}} + B_{m+1,\,j} I_0, \tag{11}$$

где

$$A_{m+1,\,j} = A_{m,\,j} A_{m+1,\,m}^{\frac{j}{m}}, \tag{12}$$

$$B_{m+1,\,j} = A_{m,\,j} B_{m+1,\,m}^{\frac{j}{m}} + B_{m,\,j}; \quad j = 1, \ldots m-1.$$

таким образом, (7) доказано в силу (9), (11), а утверждения леммы о свойствах коэффициентов $A_{m,j}$, $B_{m,j}$ следуют из (10), (12). Лемма доказана.

Следствие 1. *При условиях леммы для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_m(\varepsilon; a, b) > 0$ такое, что*

$$0 \leqslant I_j \leqslant \varepsilon I_m + C_m(\varepsilon; a, b) I_0, \quad j = 1, \ldots m-1. \tag{13}$$

Доказательство. В силу неравенства Юнга

$$I_0^{\frac{m-j}{m}} I_m^{\frac{j}{m}} = \left(\gamma^{-\frac{j}{m-j}} I_0\right)^{\frac{m-j}{m}} (\gamma I_m)^{\frac{j}{m}} \leqslant \frac{j}{m} \gamma I_m + \frac{m-j}{m} \gamma^{-\frac{j}{m-j}} I_0,$$

а потому из (7) следует (13) при достаточно малом $\gamma(\varepsilon) > 0$.

Замечание 1. (13) доказано* в [4, лемма 3] и является в то же время следствием [1, формула (3.6)], как уже отмечалось [5]. Отметим также, что (7) является в определенном смысле обобщением известных неравенств для норм производных различных порядков (см., например, [7, п. 26]) и переходит в эти неравенства (но без точных констант) при $B_{mj} = 0$, т. е. при $b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$ в (6).

Лемма 2. *Пусть в некотором гильбертовом пространстве H заданы выпуклые функционалы $I_j = I_j[u, \tau]$, $j = 0, 1, \ldots m$, $F[u, \tau]$, $u \in H$, неубывающие по параметру $\tau \in (0, \infty)$, причем $I_0[u, \tau]$ непрерывен по $u \in H$ при каждом τ. И пусть они удовлетворяют системе неравенств* (6) *и при некотором $\theta \in (0, 1)$*

$$F^2[u, \tau] + I_m^2[u, \tau] \leqslant CS_\theta[u, \tau] + \Phi[u, \tau], \tag{14}$$

где

$$S_\theta[u, \tau] = \sum_{j=0}^{m-1} I_j^2[u, \tau] + \left(\sum_{j=0}^{m-1} I_j^2[u, \tau]\right)^\theta (I_m^2[u, \tau] + \alpha F^2[u, \tau])^{1-\theta},$$

$\alpha \geqslant 0$, $\Phi[u, \tau]$ — *квадратичный, непрерывный в H функционал***, *для которого существует конечный предел:*

$$\lim_{\tau \to \infty} \Phi[u, \tau] \equiv \Phi[u], \quad \forall u \in H. \tag{15}$$

Если, кроме того, выполнены условия либо 1°:

$$\sup_\tau I_0[u, \tau] < \infty, \quad \forall u \in H, \tag{16}$$

либо 2°:

$$F^2[u, \tau_k] + I_m^2[u, \tau_k] + I_0^2[u, \tau_k] \leqslant o_u(S_\theta[u, \tau_k]) + \Phi[u, \tau_k], \tag{17}$$

---

* При a_j, b_j специального вида.

** Знакоопределенность Φ не требуется. Можно допустить иные функционалы Φ, например, квадрат выпуклого функционала.

где при каждом $u \in H$ *имеем* $\tau_k = \tau_k[u] \to \infty$ $(k \to \infty)$ *и*

$$o_u(s)/s \to 0, \quad (s \to \infty), \tag{18}$$

то являются непрерывными выпуклыми функционалами $I_j[u, \tau]$, $F[u, \tau]$ *и их пределы по* τ: $F[u] = \lim\limits_{\tau\to\infty} F[u, \tau] \leqslant K_F \| u \|_H$,

$$I_j[u] = \lim_{\tau\to\infty} I_j[u, \tau] \leqslant K_j \| u \|_H, \quad j = 0, 1, \dots m, \tag{19}$$

и для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ *найдется* $C(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$\Phi[u] \geqslant \varepsilon I_m^2[u] - C(\varepsilon) I_0^2[u] + (1 - \alpha + \alpha\varepsilon) F^2[u], \tag{20}$$

$$\varepsilon(1 - \alpha\gamma) F^2[u] + I_j^2[u] \leqslant \varepsilon\Phi[u] + C_j(\varepsilon) I_0^2]u], \quad j = 1, \dots m-1; \quad \gamma \in (0, 1). \tag{20_1}$$

Константы допускают явные выражения (или оценки) через коэффициенты (14) *и* (6): $C(\varepsilon) = C(\varepsilon, \theta, C, a_1, \dots b_{m-1})$, $K_j = K_j(K_0, K_m, a_1, \dots b_{m-1})$, $j = 1, \dots m-1$, $K_m^2 \leqslant 2\left\{K_\Phi^2 + C\left(\frac{1}{2}\right) K_0^2\right\}$, *где* $K_\Phi^2 = \sup\limits_{\|u\| \leqslant 1} |\Phi[u]|$.

Таким образом, в отличие от условия (17), где $o = o_u$, оценки (19), (20) равномерны в H. При близких условиях, но без рассмотрения зависимости от u конечность величин F, I_j доказана в [1, лемма 3.2].

Доказательство. В силу леммы 1 и неравенства Юнга при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется $K(\varepsilon_1; a, b) > 0$ такое, что

$$S_\theta[u, \tau] \leqslant \varepsilon_1 (I_m^2[u, \tau] + \alpha F^2[u, \tau]) + K(\varepsilon_1) I_0^2[u, \tau]. \tag{21}$$

Отсюда и из (14) при достаточно малом $\varepsilon_1(\varepsilon, C)$ имеем

$$(1 - \alpha + \alpha\varepsilon) F^2[u, \tau] + \varepsilon I_m^2[u, \tau] \leqslant C(\varepsilon) I_0^2[u, \tau] + \Phi[u, \tau]. \tag{22}$$

Это означает ограниченность в единичном шаре, а потому и непрерывность выпуклого по условию функционала $(F + I_m)[u, \tau]$. Затем получаем (20), переходя в (22) к пределу при $\tau \to \infty$, который конечен в случае 1° в силу (15) и (16), а в случае 2° — в силу неравенства $\lim\limits_{\tau\to\infty} (F^2[u, \tau] + I_m^2[u, \tau] + I_0^2[u, \tau]) < \infty$, которое вытекает из (17) с учетом (15), (18), (21). В обоих случаях $I_0[u]$, $I_m[u]$, $F[u]$ оказываются непрерывными выпуклыми функционалами по лемме И. М. Гельфанда [6, п. 21, следствие], и по той же лемме, в силу (13), все $I_j[u]$ — непрерывные выпуклые функционалы. Оценка K_m^2 следует из (20), конечность K_Φ — из теоремы о сходящейся последовательности билинейных функционалов [6, с. 99], (20_1) следует из (20) и (13).

Ниже в качестве H будем рассматривать $D(L_{\max})$ с нормой графика или пространство с метрикой интеграла Дирихле (см. § 5).

§ 3. *Основные теоремы.* (Ср. [1]). Рассматриваются операторы L вида (1), (2), подчиненные условию

$$\operatorname{Re}\langle Lf,\ f\rangle \geqslant \langle (L_c + G^2) f,\ f\rangle,\ f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n), \tag{23}$$

где L_c — оператор сравнения

$$L_c = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s c_s \int_\omega \mu(\partial\omega_\eta)\, \partial_\eta^s V_{\eta,s}(x) \partial_\eta^s, \tag{24}$$

$$c_s \in \boldsymbol{R}^1,\ V_{\eta,s}(x) \geqslant 0,\ s = 0, \dots m;\quad c_m > 0,\ c_0 V_0(x) \geqslant -KQ(x),$$
$$(V_{\eta,0}(x) \equiv V_0(x)),\ 0 \leqslant G(x) \in C,$$

$1 \leqslant Q(x) \leqslant \infty$, равенство $Q(x) = \infty$ на множестве положительной меры не исключается. Коэффициенты оператора L (1), (2) подчинены, кроме младшего $p_{\eta,0}(x) \equiv p_0(x)$, оценкам

$$|p_{\eta,\nu}(x)| \leqslant C V^{1/2}_{\eta,\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}(x)\, V^{1/2}_{\eta,\left[\frac{\nu}{2}\right]}(x),\ \nu = 1, \dots 2m. \tag{25}$$

Теорема А. *При перечисленных выше условиях порождаемые выражением L (1), (2) с комплекснозначными коэффициентами $p_{\eta,\nu}(x)$ минимальный и максимальный $L_{\max} \overset{\text{def}}{=} (L^+_{\min})^*$ операторы совпадают (L^+ — формально сопряженное к L выражение):*

$$L_{\max} = L_{\min},\quad L^+_{\max} = L^+_{\min}, \tag{26}$$

для $u \in D(L_{\max})$ сходятся интегралы энергетического типа $J_j[u]$, $\| Q^{-1/2} G u \| < \infty$ и допускают оценку в норме графика ($j = 0, \dots m$):

$$J_j^2[u] \equiv \int_{R^n \times \omega} Q^{-1}(x) V_{\eta,j}(x) |\partial_\eta^j u|^2 \mu(d\omega_\eta)\, dx \leqslant K_j^2 (\| Lu \|^2 + \| u \|^2), \tag{27}$$

если L_c принадлежит одному из классов, описываемых ниже теоремами 1 — 3. При условиях теорем 1 или 2 справедливы неравенства типа Гординга с любым $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\operatorname{Re}\langle Q^{-1} Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon c_m J_m^2[u] + \langle Q^{-1} G^2 u,\ u\rangle - C(\varepsilon) J_0^2[u], \tag{28}$$

и оценки интерполяционного типа (7), (13) *для $J_j[u]$, а потому и*

$$J_j^2[u] \leqslant \varepsilon \operatorname{Re}\langle Q^{-1}(L - G^2) u,\ u\rangle + C_j(\varepsilon) J_0^2[u],\ j = 1, \dots m-1. \tag{29}$$

При условиях теоремы 3 имеем вместо (28) при $Q(x) \equiv 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\operatorname{Re}\langle Lu,\ u\rangle \geqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{m} c_j J_j^2[u] + \| Gu \|^2 - C(\varepsilon) \| u \|^2. \tag{28$_3$}$$

При тех же условиях, но с заменой в утверждениях теоремы А L на L^+, она остается в силе для $u \in D(L^+_{\max})$.

Замечание 2. Неравенства вида (28), (29), (28_3) (возможно, с другими $C(\varepsilon)$, $C_j(\varepsilon)$) верны также с заменой в них $\langle Q^{-1}Lu, u\rangle$ на $A_L[u, u]$ (60), $\langle Lu, u\rangle$ на $D_L[u, u]$ (54), (55) (см. § 5).

Всюду ниже полагаем

$$1 \leqslant P(x) \in C^{2m}, \quad P(x) \to \infty \ (|x| \to \infty). \tag{30}$$

Теорема 1. *Если*

$$V_{\eta, s}(x) = a_\eta^{2s}(x)\, q^{2m-2s}(x), \ s = 0, \ldots m, \tag{31}$$

где $0 < a_\eta(x) \in C^m$,

$$1 \leqslant q(x) \leqslant \infty, \ q^{-m}(x) \in C^{2m}, \tag{32}$$

$$|\partial_\eta (a_\eta(x)\, q^{-1}(x))| \leqslant C, \ (\text{только при } m > 1) \tag{33_1}$$

$$|\partial_\eta^j q^{-m}(x)| \leqslant C a_\eta^{-j}(x)\, q^{j-m}(x), \ j = 1, \ldots m, \tag{33_2}$$

$$|\partial_\eta^j P(x)| \leqslant C P(x)\, a_\eta^{-j}(x)\, q^j(x), \ j = 1, \ldots m, \tag{34}$$

то все утверждения теоремы **А**, *кроме* (26), *выполнены при* $Q(x) = q^{2m}(x)$, $c_m > 0$, $c_s > -\infty$ $(s = 0, \ldots m-1)$, *причем* (23) *требуется лишь при*

$$\operatorname{supp} f(x) \subset U_q \equiv \{x \in \boldsymbol{R}^n : q(x) \neq \infty\}. \tag{35}$$

При тех же условиях, но с заменой (34) *более жестким*

$$|\partial_\eta^j P(x)| \leqslant C P(x)\, a_\eta^{-j}(x)\, q^{j-2m}(x), \ j = 1, \ldots m, \tag{36}$$

обеспечено и выполнение (26).

Теорема 2. *Если*

$$V_{\eta, s}(x) = h_\eta^{2s}(x)\, g^{2m-2s}(x), \ s = 0, \ldots m, \tag{37}$$

где $0 < h_\eta(x)$, $g(x)$; $h_\eta(x)$, $g(x) \in C^m$,

$$|\partial_\eta (g^{m-s} h_\eta^s)| \leqslant C g^{m-s+1} h_\eta^{s-1}, \ s = 1, \ldots m-1, \tag{38}$$

$$|\partial_\eta^j P(x)| = o\,(P(x)\, h_\eta^{-j}(x)\, g^j(x)), \ j = 1, \ldots m, \tag{39}$$

$$P(x) \geqslant g^\varepsilon(x), \quad (\varepsilon > 0), \tag{40}$$

то теорема **А** *верна при* $Q(x) \equiv 1$, c_0, $c_m > 0$, $c_s = 0$ $(0 < s < m)$; операторы (26) максимально аккретивны.

Теорема 3. *Если* $V_{\eta, s}(x) \geqslant \delta > 0$,

$$\gamma^2(x)\, V_{\eta, k+1}(x) \leqslant C V_{\eta, k}^{1-\frac{1}{m-k}}(x), \ k = 0, \ldots m-1, \tag{41}$$

где

$$0 \leqslant \gamma(x) \leqslant 1; \quad |\partial_\eta^j P(x)| \leqslant C \gamma^j(x), \ j = 1, \ldots m, \tag{42}$$

то теорема **А** *выполнена при* $c_s > 0$ $(s = 0, \ldots m)$, $Q(x) \equiv 1$; *операторы* (26) *максимально аккретивны.*

Доказательства теорем 1—3 аналогичны доказательствам соответствующих теорем из [1] об условиях существенной самосопряженности симметрического оператора L и сходимости интегралов (27) (при $G(x) \equiv 0$). Условия теорем 1—3 (без (36)) обеспечивают применимость леммы 1 к величинам $I_j[u, \tau]$ (4) соответственно при

$$\varphi_{\eta, j}(x, \tau) = \begin{cases} q^{-j}(x)\, a_\eta^j(x)\,(1 - P(x)/\tau)_+^{m+j}, & \text{(теорема 1)}, \\ g^{m-j}(x)\, h_\eta^j(x)\,(1 - P(x)/\tau)_+^{m+j}, & \text{(теорема 2)}, \\ (1 - P(x)/\tau)_+^{m+j}, & \text{(теорема 3)}. \end{cases}$$

Применимость леммы 2, — вариант 1°, в случае теорем A и 1 (без (36)) или 3, и вариант 2° в случае теорем A и 2, — также обеспечена, если положить в (14)

$$\Phi[u, \tau] = \mathrm{Re}\langle \psi^2(\cdot, \tau)\, Lu, u\rangle, \tag{43}$$

где $\psi(x, \tau) = Q^{-1/2}(x)\,(1 - P(x)/\tau)_+^{2m}$, и, в случае теорем 1 или 2, $F^2[u, \tau] = \langle \psi^2(\cdot, \tau)\, G^2 u, u\rangle$, а в случае теоремы 3 $F^2[u, \tau] = \langle \psi^2(\cdot, \tau)\, G^2 u, u\rangle + \sum_{j=0}^{m} \int \psi^2(x, \tau)\, V_{\eta, j}(x)\, |\partial_\eta^j u(x)|^2 \mu(\partial\omega_\eta)\, dx$, и учесть, что при заданных $\varphi_{\eta, j}$ в случае теорем 1, 2 $J_j[u] = I_j[u]$, $j = 0, \ldots m$, в силу (27) и (4), (19), а в случае теоремы 3 $J_m[u] \geqslant \delta \cdot I_m[u]$, $\delta > 0$. В силу лемм 1 и 2 получаем все утверждения теоремы A, кроме (26), которое следует из (27), и из теоремы 5 (см. ниже, § 5).

§ 4. *Ограничения на слоях.* Пусть $\{\Omega_k\}_0^\infty$ — последовательность конечных односвязных областей, $\overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup \Omega_k = \boldsymbol{R}^n$, h_k есть минимальная ширина телесного слоя $T_k = \Omega_{2k+1} \diagdown \Omega_{2k}$. Строим C^∞ или C^{2m} — гладкие функции $P_k(x)$, $q_k^{-1}(x)$ такие, что $0 \leqslant P_k, q_k^{-1} \leqslant 1$,

$$P_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{2k}, \\ 1, & x \notin \Omega_{2k+1}, \end{cases}; \quad q_k^{-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin T_k. \\ 1, & x \in \operatorname{supp} |\nabla P_k|. \end{cases}$$

Положим при $0 < \delta < 1/2$ $T_k(\delta) = \{x \in T_k : \operatorname{dist}(x, \partial T_k) \geqslant \delta h_k\}$ $q_k^{-1}(x) = q_{k\delta}^{-1}(x)$ — осреднение с C^∞ или C^{2m} — ядром радиуса $\delta h_k/2$ функции

$$r_{k\delta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in T_k(\delta/2). \\ 0, & x \in \boldsymbol{R}^n \diagdown T_k(\delta/2), \end{cases}$$

$P_k(x) = P_{k\rho}(x)$ — осреднение с ядром радиуса ρh_k функции

$$s_k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}\{\operatorname{dist}(x, \Omega_{2k}) - \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{R}^n \diagdown \Omega_{2k+1})\}.$$

Так построенные $P_k(x)$, $q_k^{-1}(x)$ удовлетворяют при $\delta+\rho<1/2$ всем перечисленным условиям и, кроме того,

$$|\partial_\eta^j P_{k\rho}(x)| \leqslant C(\rho h_k)^{-j},\ |\partial_\eta^j q_{k\delta}^{-1}(x)| \leqslant C(\delta h_k)^{-j},\ j=1, \ldots 2m.$$

Теорема 4. *Если при* $f \in C_0^\infty(T_k)$, $k=0, 1, \ldots,$

$$\operatorname{Re}\langle Lf, f\rangle \geqslant \sum_{j=0}^{m} c_j V_{kj} \int\limits_{T_k\times\omega} |\partial_\eta^j f(x)|^2 \mu(\partial\omega_\eta)\,\partial x, \tag{44}$$

где $c_m>0$, $c_j\leqslant 0$, $j=0, \ldots m-1$ — *не зависят от* k,

$$V_{kj} = \alpha_k^{2j}\left(\max\{\alpha_k h_k^{-1};\ \ \gamma_k^{\frac{1}{2m}}\}\right)^{2m-2j}, \tag{45}$$

$\alpha_k>0$, $\gamma_k\geqslant 1$ — *константы, а для коэффициентов оператора* L, *кроме младшего, выполнены на слоях оценки*

$$|p_{\eta\nu}(x)| \leqslant C\alpha_k^\nu\left(\max\{\alpha_k h_k^{-1};\ \ \gamma_k^{\frac{1}{2m}}\}\right)^{2m-\nu},\ x\in T_k,\ \nu=1, \ldots 2m, \tag{46}$$

то независимо от поведения коэффициентов между слоями (но с *сохранением ими гладкости) для любого* $u\in D(L_{\max})$ *сходятся суммы интегралов энергетического типа по слоям* $\forall\,\delta\in(0,\ 1/2)$:

$$J_{j\delta}^2[u] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2j} a_k^{2j} \int\limits_{T_k\times\omega} q_{k\delta}^{-2j}(x)\,|\partial_\eta^j u(x)|^2 \mu(d\omega_\eta)\,dx,\quad j=0, 1, \ldots m, \tag{47}$$

и допускают оценку в норме графика (27), *а также удовлетворяют неравенству Гординга* (28) *с* $F\equiv 0$ *и* $Q_\delta^{-1}(x) = q_\delta^{-2m}(x)$,

$$q_\delta^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q_{k\delta}^{-1}(x),\ a_k = \min\left\{\frac{h_k}{\alpha_k},\ \gamma_k^{-\frac{1}{2m}}\right\}, \tag{48}$$

т. е. при любом $\varepsilon\in(0,\ c_m)$, $\delta\in(0,\ 1/2)$

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{2m}\int\limits_{T_k} q_{k\delta}^{-2m}(x)\,\bar{u}Lu\,dx \geqslant \varepsilon J_{m\delta}^2[u] - C_\delta(\varepsilon)\,J_{0,\,\delta}^2[u], \tag{49}$$

а также интерполяционным оценкам (7), (13), *а потому и* (29):

$$J_{j\delta}^2[u] \leqslant \varepsilon\operatorname{Re}\langle Q_\delta^{-1}Lu,\ u\rangle + C_{j\delta}(\varepsilon)\,J_{0\delta}^2[u],\ j=1, \ldots m-1. \tag{50}$$

Если дополнительно

$$\sum_{k=0}^{\infty}\min\left\{\left(\frac{h_k}{\alpha_k}\right)^{2m},\ \ \frac{h_k}{\alpha_k}\gamma_k^{-1+\frac{1}{2m}}\right\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{h_k}{\alpha_k}V_{k0}^{-1+\frac{1}{2m}} = \infty, \tag{51}$$

то выполнено и (26) : $L_{\max} = L_{\min}$, $L_{\max}^{+} = L_{\min}^{+}$.

Доказательство основано на применении теоремы 1. Положим в (31) $a_\eta(x) \equiv a(x) \in C^\infty(R^n)$, где $a(x) \equiv \alpha_k$, $x \in T_k$, пусть $q^{-1}(x) \equiv q_\delta^{-1}(x)$ задано (48). Тогда $V_{\eta s}(x) \geqslant V_{ks}$, $V_{\eta m}^{(x)} \equiv V_{km}$, $x \in T_k$, и поэтому, учитывая знаки c_s, имеем (23) с $F \equiv 0$ в силу (44), а (25) — в силу (45), (46). Непосредственно проверяется, что, кроме (36), выполнены и остальные условия теорем A и 1 при

$$P(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(x), \tag{52}$$

если положить $b_k = 1, k = 0, 1, \ldots$, а потому выполнена теорема A кроме (26). Условием (51) обеспечивается возможность, соблюдая, (30), положить в (52) $b_k = \alpha_k^{-1} h_k a_k^{2m-1}$, чем обеспечивается (36). Действительно, при $x \in \operatorname{supp} |\nabla P_k|$ имеем $|\partial_\eta^j P(x)| = |b_k \partial_\eta^j P_k(x)| \leqslant$ $\leqslant C b_k (\rho h_k)^{-j} = C(\rho)\, \alpha_k^{-j} (h_k/\alpha_k)^{1-j} a_k^{2m-1} \leqslant C(\rho)\, \alpha_k^{-j} a_k^{2m-j} \leqslant C(\rho) \times$ $\times P(x)\, a^{-j}(x)\, q_\delta^{j-2m}(x)$, т. е. (36) выполнено, а потому и (26) доказано. Отметим, что существенная самосопряженность симметрического оператора L с ограничениями на его коэффициенты, заданными на слоях, при $\alpha_k = 1$, установлена в [1], а в одномерном случае для двучленных операторов установлена Р. С. Исмагиловым (1962 г.). Случай $\gamma_k = 1$ рассмотрен в [4] при $n = 1$.

§ 5. *Интеграл Дирихле и примыкающие вопросы.* Обозначим в соответствии с (1), (2)

$$L[u, v] = \int_\omega \mu(d\omega_\eta) \sum_{k=0}^{2m} l_{\eta, k}[u, v],$$

$$l_{\eta, 2j}[u, v] = p_{\eta, 2j}(x)\, (\partial_\eta^j u(x))\, (\partial_\eta^j \bar{v}(x)),$$

$$l_{\eta, 2j-1}[u, v] = \frac{1}{2i} p_{\eta, 2j-1} \{(\partial_\eta^j u)(\partial_\eta^{j-1} \bar{v}) - (\partial_\eta^{j-1} u)(\partial_\eta^j \bar{v})\},$$

Теорема 5. *При условиях теорем A и 1 (включая (36)), 2 или 3 и при любой $u \in D(L_{\max})$ и любой такой $v \in W_{2, \mathrm{loc}}^m \cap L_2(R^n)$, что заданные в (27)*

$$J_j[v] < \infty, \quad j = 0, 1, \ldots m - 1, \tag{53}$$

существует D_L, — интеграл Дирихле в смысле суммирования с ядром $\varphi_\gamma(x, \tau) = \left(1 - \left(\frac{P(x)}{\tau}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln \tau}}}\right)_+^\gamma$ при любом $\gamma \geqslant m$:

$$D_L[u, v] \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\tau \to \infty} \int \varphi_\gamma(x, \tau)\, L[u, v]\, dx \tag{54}$$

и справедливы равенства, из которых второе — при $v \in D(L_{\max}^+)$:

$$\langle Lu, v \rangle = D_L[u, v] = \overline{D_{L^+}[v, u]}. \tag{55}$$

Доказательство. Так как $\bar{v}Lu \in L_1(R^n)$, то достаточно доказать, что

$$\lim_{\tau\to\infty} \int \varphi_\gamma(x, \tau)(L[u, v] - \bar{v}Lu)\,dx = 0. \tag{56}$$

Рассмотрим интеграл от типичного слагаемого ($j = 1, \ldots m$):

$$S_{2j}(\tau) \equiv \int_{R^n\times\omega} \varphi_\gamma(x, \tau)\{p_{\eta,2j}\cdot(\partial_\eta^j u)(\partial_\eta^j \bar{v}) - \\ -(-1)^j \partial_\eta^j(p_{\eta,2j}\partial^j u)\bar{v}\}\,\mu(d\omega_\eta)\,dx = \tag{57}$$

$$= -\sum_{k=1}^{j}\binom{j}{k}\int(\partial_\eta^k\varphi_\gamma(x, \tau))\,p_{\eta,2j}\cdot(\partial_\eta^j u)(\partial_\eta^{j-k}\bar{v})\,\mu(d\omega_\eta)\,dx.$$

В силу неравенства

$$|(\partial_\eta^k\varphi_\gamma(x, \tau))\,p_{\eta,2j}(x)| \leqslant C\frac{1}{\sqrt{\ln\tau}}Q^{-1}(x)\,V_{\eta,j}^{1/2}(x)\,V_{\eta,j-k}^{1/2}(x) \tag{58}$$

в $S_{2j}(\tau)$ каждый интеграл оценивается* по неравенству Буняковского—Шварца величиною $C\frac{1}{\sqrt{\ln\tau}}J_j[u]\,J_{j-k}[v] \to 0$, а потому (56) и (55) доказаны. Близкие рассуждения применялись при доказательстве леммы 3.1 в [1]. (55) $\Rightarrow$ (26), так как $\overline{D_{L^+}[v, u]} = \langle u, L^+v\rangle$.

Замечание 3. Отбросить суммирующее ядро в (54) в общем случае нельзя, как видно из построенного в [8] примера самосопряженного оператора Штурма—Лиувилля $My = -y'' + q(x)\,y$ с $q(x) \geqslant -Kx^2$, для которого не при всех $y \in D(M_{\max})$ существует $\lim\limits_{\tau\to\infty}\int_1^\tau(|y'|^2 + q(x)|y|^2)\,dx$ и тем более $\int^\infty$ не сходится абсолютно.

Теорема 6. *При условиях теоремы* 5 *существуют и не зависят от* γ

$$A_0[u, v] \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to\infty}\int \varphi_\gamma(x, \tau)\,Q^{-1}(x)\,p_0(x)\,u(x)\,\overline{v(x)}\,dx, \tag{59}$$

$$A_L[u, v] \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau\to\infty}\int \varphi_\gamma(x, \tau)\,Q^{-1}(x)\,L[u, v]\,dx, \tag{60}$$

и если $\operatorname{Re} p_0(x) \geqslant -KQ(x)$, $\operatorname{Jm} p_0(x) \geqslant -CQ(x)$ (*или* $\leqslant CQ(x)$), *то абсолютно сходятся интегралы по всему* R^{n}

$$\int Q^{-1}(x)\,|p_0(x)\,u(x)\,\bar{v}(x)|\,dx < \infty,\quad \int Q^{-1}(x)\,|L[u, v]|\,dx < \infty. \tag{61}$$

Доказательство. Так как

$$A_0[u, v] = A_L[u, v] - \sum_{k=1}^{2m}\int_{R^n\times\omega} Q^{-1}(x)\,l_{\eta,k}[u, v]\,\mu(d\omega_\eta)\,dx,$$

---

* Аналогично оценивается $S_{2j-1}(\tau)$.

где интегралы под знаком суммы сходятся абсолютно в силу (25) и (27), (53), то утверждения о существовании величин (59) и (60) (и их независимости от γ) эквивалентны. Но при условиях теорем 2 или 3 $Q(x) = 1$ и $A_L[u, v] = \langle Lu, v\rangle$ по теореме 5. А при условиях теоремы 1

$$A_L[u, v] = \langle Q^{-1}Lu, v\rangle + \lim_{\tau\to\infty} \int \varphi_\gamma(x, \tau)\, Q^{-1} \cdot (L[u, v] - \bar{v}Lu)\, dx,$$

где существование и независимость от $\gamma \geqslant m$ конечного предела (в отличие от (56) не обязательно равного 0) следует из справедливости (57) с заменой φ_γ на $\varphi_\gamma Q^{-1}$ и из оценок $|p_{\eta, 2j}\partial_\eta^k (Q^{-1} \times$ $\times \varphi_\gamma)| \leqslant |p_{\eta, 2j}\varphi_\gamma \partial_\eta^k Q^{-1}| + \sum\limits_{s=1}^{k} \left| \binom{k}{s} p_{\eta, 2j} (\partial_\eta^s \varphi_\gamma)\, \partial_\eta^{k-s} Q^{-1} \right| \leqslant (C\varphi_\gamma(x, \tau) +$ $+ C_\gamma/\sqrt{\ln\tau})\, Q^{-1}(x)\, V_{\eta, j}^{1/2}(x)\, V_{\eta, j-k}^{1/2}(x)$, справедливих в силу (25), (31), (33$_2$) и (58). (Для оператора Штурма—Лиувилля из замечания 3 (61) с $Q(x) = x^2$ доказано в [8]).

Список литературы: 1. *Брусенцев А. Г., Рофе-Бекетов Ф. С.* Условия самосопряженности сильно эллиптических систем произвольного порядка // Мат. сб. 1974. 95, № 1 (9). С. 108—129. 2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженность эллиптических операторов и оценки энергетического типа во всем R^n. 1. Второй порядок // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1990. Вып. 54. С. 3—16. 3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., 1965. 800 с. 4. *Atkinson F. V.* Limit-*n* criteria of integral type // Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A). 1975. 73. P. 167—198. 5. *Брусенцев А. Г.* О самосопряженности в существенном полуограниченных эллиптических операторов высших порядков // Диф. уравнения. 1985. 21, № 4. С. 668—677. 6. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963. 340 с. 7. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. Х., 1977. 316 с. 8. *Everitt W. N., Giertz M., Mc Leod J. B.* On the strong and weak limit-point classification of second-order differential expressions // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. 29. P. 142—158.

Поступила в редколлегию 07.03.90

УДК 517.968

Ю. В. ГАНДЕЛЬ

ТЕОРИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ Н. И. АХИЕЗЕРА И ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА КРУГОВОМ ДИСКЕ

1°. Речь идет о теории, развитой в работах [1, 2] и впервые примененной при решении задачи о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране [3].

В настоящей статье метод Н. И. Ахиезера применяется для обоснования решений классических задач математической теории фракции волн на круговом диске, которые приводят к парным интегральным уравнениям двух типов:

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda \, d\lambda = 0, \quad a < r < \infty \tag{1}$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda \, d\lambda}{\gamma} = f(r), \quad 0 < r < a \tag{2}$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, а ветвь радикала выбирается так, что

$$\gamma > 0 \text{ при } \lambda > k \text{ и } \operatorname{Im} \gamma < 0 \text{ при } 0 < \lambda < k; \tag{3}$$

$f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$ — заданная гладкая функция, а функция $C(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$ подлежит определению) и

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda \, d\lambda}{\gamma} = 0, \quad a < r < \infty \tag{4}$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda \, d\lambda = f(r), \quad 0 < r < a. \tag{5}$$

Теорема 1. *Функция $C(\lambda)$, найденная по формуле*

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos \gamma s \, ds, \tag{6}$$

где $h(s)$ — решение уравнения Фредгольма

$$h(x) + \frac{i}{\pi} \int_0^a \left\{ \frac{\operatorname{sh} k(x+s)}{x+s} + \frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{x-s} \right\} h(s) \, ds =$$

$$= \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x r f(r) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{x^2 - r^2}} \, dr, \tag{7}$$

удовлетворяет парному интегральному уравнению (1)—(2) и выполняется условие

$$\int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda \, d\lambda}{|\gamma|} < \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (7) однозначно разрешимо, его решение — гладкую функцию $h(s)$ подставляем в (6) и находим $C(\lambda)$.

Функция

$$C\left(\sqrt{k^2 + t^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos ts \, ds \tag{9}$$

является косинус-преобразованием Фурье функции из L_2 и поэтому принадлежит $L^2(0, \infty)$, откуда вытекает выполнение условия (8):

$$\int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} = \int_0^k |C(\sqrt{k^2-t^2})|^2\, dt + \int_0^\infty |C(\sqrt{k^2+t^2})|^2\, dt < \infty.$$

Покажем, что $C(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) при любой гладкой функции $h(s)$: для этого, проинтегрировав по частям в (6), представим $C(\lambda)$ в виде

$$C(\lambda) = C_1(\lambda) + C_2(\lambda), \tag{10}$$

где

$$C_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, h(a) \frac{\sin a\gamma}{\gamma}; \quad C_2(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h'(s) \frac{\sin \gamma s}{\gamma}\, ds,$$

и, используя разрывный интеграл Сонина [2],

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\gamma}{\gamma} J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = \begin{cases} 0 \text{ при } r > a > 0; \\ \dfrac{\operatorname{ch} k\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}, \ 0 < r < a \end{cases} \tag{11}$$

непосредственно убеждаемся в справедливости утверждения.

Далее подставим $C(\lambda)$ (6) в левую часть уравнения (2), имеем

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma} \equiv \tilde{f}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a. \tag{12}$$

Остается убедиться, что $\tilde{f}(r) = f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$.

Применим к обеим частям тождества (12) преобразование Сонина:

$$(Sg)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x r g(r) \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\, dr,$$

изменим порядок интегрирования в левой части тождества (применимость теоремы Фубини следует из (10)), воспользуемся соотношением [2]:

$$\int_0^s J_0(\lambda r) \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{s^2-r^2}}{\sqrt{s^2-r^2}}\, r\, dr = \frac{\sin \gamma s}{\gamma}$$

и, учитывая выбор ветви радикала $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ (3) и заменяя переменную интегрирования, преобразуем (12) к виду

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^k C\left(\sqrt{k^2 - t^2}\right)\frac{\operatorname{sh} xt}{t}\,dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty C\left(\sqrt{k^2 + t^2}\right)\frac{\sin xt}{t}\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{x^2 - r^2}}\,dr.$$

Подставляя сюда, вытекающие из (6), выражения для $C\left(\sqrt{k^2 - t^2}\right)$, $0 < t < k$; $C\left(\sqrt{k^2 + t^2}\right)$, $t > 0$ и изменяя порядок интегрирования во втором слагаемом (допустимость перемены порядка интегрирования — следствие равенства Парсеваля для функций

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\cos ts\,ds, \quad t > 0$$

и

$$q(t) = \frac{\sin xt}{t}, \ t > 0 \ (x > 0)$$

и их косинус-преобразований Фурье), а затем, используя известный разрывный интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ts\frac{\sin xt}{t}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < s < x; \\ 0 & \text{при } s > x > 0, \end{cases}$$

получаем

$$\int_0^x h(s)\,ds + \frac{2i}{\pi}\int_0^a h(s)\,ds\int_0^k \frac{\operatorname{sh} tx}{t}\operatorname{ch} ts\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{x^2 - r^2}}\,dr,$$

где правая часть — дифференцируемая функция. Продифференцируем обе части последнего тождества по x. После элементарных преобразований находим

$$h(x) + \frac{i}{\pi}\int_0^a \left\{\frac{\operatorname{sh} k(s + x)}{s + x} + \frac{\operatorname{sh} k(s - x)}{s - x}\right\} h(s)\,ds =$$

$$= \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{x^2 - r^2}}\,dr. \qquad (13)$$

Сравнивая (13) с (7), имеем

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr =$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r f(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr,$$

откуда по формулам обращения Сонина [2] получаем

$$\tilde{f}(r)=f(r),\quad 0\leqslant r\leqslant a,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Функция* $C(\lambda)$, *найденная по формуле*

$$C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\sin\gamma s\,ds,$$

где $h(s)$ — *решение уравнения Фредгольма*

$$h(x)=\frac{i}{\pi}\int_0^a\left\{\frac{\operatorname{sh} k(x+s)}{x+s}-\frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{x-s}\right\}h(s)\,ds=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r f(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr,$$

удовлетворяет системе (4)—(5), причем для $C(\lambda)$ *выполняется условие*

$$\int_0^\infty |C(\lambda)|^2\frac{\lambda\,d\lambda}{|\gamma|}<\infty.$$

2°. Скалярные задачи дифракции волн на диске состоят в отыскании рассеянного поля $u=u(x,\ y,\ z)$, удовлеторяющего следующим условиям:

1) всюду вне диска

$$\Delta u+k^2u=0; \tag{14}$$

2) в каждой конечной области V пространства энергия поля конечна:

$$\iiint_V\{|u|^2+|\operatorname{grad} u|^2\}\,dv<\infty; \tag{15}$$

3) на бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда:

$$R|u| \leqslant C < \infty, \quad \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right) = 0, \tag{16}$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

4) на диске выполняется некоторое граничное условие, вид которого зависит от свойства диска:

$$\begin{aligned} &\text{А)}\ u|_{\text{на диске}} = f \ \text{(мягкий диск)};\\ &\text{Б)}\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{на диске}} = f \ \text{(жесткий диск)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Диск — множество точек $\{(x, y, z) : z = 0,\ x^2 + y^2 < a^2\}$.

В [4] доказаны теоремы существования и единственности решения общей задачи о дифракции волн на плоском экране в связи с построением коротковолновой асимптотики для этих задач, а в [ ] дано обоснование коротковолновой асимптотики в задаче о дифракции волн на круговом диске.

Метод Н. И. Ахиезера позволяет получить удобное для численного анализа представление решений задач о дифракции на диске и провести его строгое обоснование.

Теорема 3. *Решение аксиально-симметричной краевой задачи (14)—(17)*А *представляется в виде*

$$u(r, z) = \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\gamma|z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}, \tag{18}$$

где

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos \gamma s\, ds, \tag{6}$$

а функция $h(s)$ *— решение интегрального уравнения (7).*

Доказательство. Из результатов теоремы 1 следует существование пределов $u(r, +0)$ и $u(r, -0)$, причем эти пределы совпадают и равны $f(r)$ при $0 < r < a$. Таким образом, краевое условие (17) А удовлетворяется в каждой точке диска.

Далее, поскольку интегралы $\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}$ и $\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) \times$ $\times \lambda\, d\lambda$ — также сходящиеся при $r > a$ (теорема 1), то при $r > a$ непрерывны при $z = 0$ функции $u(r, z)$ и $\frac{\partial u}{\partial z}(r, z)$, а так как функция $u(r, z)$, определенная равенством (18), удовлетворяет уравнению Гельмгольца при $z > 0$ и при $z < 0$, то она удовлетворяет уравнению (14) всюду вне диска.

Далее, чтобы убедиться в выполнении условий излучения (16), подставим представление (6) в (18) и изменим порядок интегрирования. Имеем при $z \gtrless 0$

$$u(r,\ z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s)\,ds \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, \frac{e^{-\gamma(|z|-is)} + e^{\gamma(|z|+is)}}{2}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}.$$

Используя интеграл Зоммерфельда

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\gamma(|z| \mp is)}\, \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma} = \frac{e^{ikR_\mp}}{R_\mp}$$

(ветвь функции $\gamma(\lambda)$ определена условиями (3)), находим

$$u(r,\ z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left\{ \frac{e^{ikR_-}}{R_-} + \frac{e^{ikR_+}}{R_+} \right\} h(s)\,ds, \tag{19}$$

где

$$R_\pm = \sqrt{r^2 + (|z| \pm is)^2}, \quad 0 < s < a.$$

Обозначим $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $r = R\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. При $z \gtrless 0$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left(ik\,\frac{e^{ikR_-}}{R_-} - \frac{e^{ikR_-}}{R_-^2} \right) \frac{R - is\,|\cos\theta|}{R_-}\, h(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \left(ik\,\frac{e^{ikR_+}}{R_+} - \frac{e^{ikR_+}}{R_+^2} \right) \frac{R + is\,|\cos\theta|}{R_+}\, h(s)\,ds$$

и, поскольку при $R \to \infty$ и $0 \leqslant s \leqslant a$ $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{R_\pm}{R} = 1$, то из (19) и (20) следует

$$R|u| \leqslant C < \infty \ \text{ и } \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) = 0.$$

Осталось проверить выполнение условия (15) — конечности энергии поля в любой конечной области, содержащей диск. В силу симметрии поля для этого достаточно показать, что при $h > 0$, $b > a$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} 2\pi \int_\varepsilon^h \int_0^b \left\{ |u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \right\} r\,dr\,dz < \infty.$$

йствительно, при каждом $z > 0$

$$|u|^2 \leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \int_0^\infty |J_0(\lambda r)|^2 e^{-(\gamma+\bar{\gamma})z} \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \left(2k + \int_{k\sqrt{2}}^\infty |J_0(\lambda r)|^2 e^{-2\gamma z} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}\right) \qquad (20)$$

есь использовано представление (18) и неравенство Буняковского.

Интегрируя (20) по z от ε до h, после очевидных преобразований получаем

$$\int_\varepsilon^h |u|^2\, dz \leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \cdot \left(2kh + \int_{k\sqrt{2}}^\infty |J_0(\lambda r)|^2 e^{-2\gamma\varepsilon} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\gamma^2}\right),$$

далее, используя известное соотношение

$$\int_0^x J_0^2(t)\, t\, dt = \frac{x^2}{2}\left(J_0^2(x) + J_1^2(x)\right),$$

одим

$$\int_\varepsilon^h \int_0^b |u|^2 r\, dr\, dz \leqslant \int_0^\infty |C(\lambda)|^2 \frac{\lambda\, d\lambda}{|\gamma|} \cdot \frac{b^2}{2} \times$$

$$\times \left(2kh + \int_{k\sqrt{2}}^\infty \frac{J_0^2(\lambda b) + J_1^2(\lambda b)}{2} e^{-2\gamma\varepsilon} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma^2}\right).$$

к что существует предел интеграла

$$\int_\varepsilon^h \int_0^b |u|^2 r\, dr\, dz \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

уществование предела интеграла

$\int_\varepsilon^h \int_0^b |\operatorname{grad} u|^2 r\, dr\, dz$ доказывается аналогично, если воспользоваться первой формулой Грина.

Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается соответствующее представление для торой краевой задачи.

Теорема 4. *Решение аксиально-симметричной краевой задачи (14)—(17) Б представляется в виде*

$$u(r, z) = \frac{|z|}{z} \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\gamma|z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\gamma}, \quad z \gtrless 0,$$

де

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \sin \gamma s\, ds,$$

а функция $h(s)$ — решение интегрального уравнения, входящ в условие теоремы 2.

Теоремы 3 и 4 позволяют получить удобные для вычислен формулы полей в окрестности ребра диска и в дальней зоне. Та например, поле в дальней зоне дается формулой

$$u(r, z) \sim \Phi(\theta) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R \to \infty,$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, а

$$\Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \operatorname{ch}(ks \cos\theta)\, ds \text{ (мягкий диск)};$$

$$\Phi(\theta) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \operatorname{sh}(ks \cos\theta)\, ds \text{ (жесткий диск)}.$$

При проведении конкретных вычислений главное — найти приближенное решение соответствующего уравнения Фредгольма. Эффективный приближенный метод решения предложен в [6].

3°. Аксиально-симетричные задачи о дифракции волн на круговом диске (или круговом отверстии в диафрагме), расположенном в трубе, приводят к парным сумматорным уравнениям — дискретным аналогам рассмотренных парных интегральных уравнений.

Теория соответствующих парных рядов Фурье-Бесселя и Дини была разработана в [7—9], причем существенно используется метод Н. И. Ахиезера [1, 2] и некоторые факты из [10].

Сформулируем типичный результат.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — все положительные ноли функции $J_0(\lambda R)$, $k > 0$, $k \notin \{\lambda_n\}$. Рассматриваются парные сумматорные уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r) = f(r), \quad 0 \leqslant r < a,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r) = 0, \quad a < r < R,$$

где $f(r)$, $0 \leqslant r \leqslant a$ — заданная гладкая функция, $a < R$, а ветвь радикала $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ определяется условиями (3). Коэффициенты C_n подлежат определению, причем предполагается, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n|^2}{\lambda_n} < \infty$. Для C_n найдено представление

$$C_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s) \cos\left(s\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) ds,$$

функция $h(s)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фред-льма:

$$h(x)+\int_0^a K(x,\ s)\,h(s)\,ds=\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x rf(r)\,\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr$$

дром

$$K(x,\ s)=K_1(x,\ s;\ k)+K_2(x,\ s;\ k,\ R),$$

$$K_1(x,\ s;\ k)=\frac{i}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sh} k(x+s)}{x+s}+\frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{x-s}\right\}$$

R не зависит, а

$$K_2(x,\ s;\ k,\ R)=-\frac{4}{\pi^2}\int_C\frac{K_0(Rz)}{I_0(Rz)}\times$$

$$\times\operatorname{ch}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{z^2+k^2}\right)\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+k^2}}$$

(z) — функция Макдональда, $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя, контур интегрирования состоит из дуги окружности $=k$ от точки $-ik$ до точки k и луча $z=x>k$).

сок литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* О некоторых спаренных интегральных уравнениях // Докл. АН СССР, 1954. **98**, № 3. С. 333—336. 2. *Ахиезер Н. И.* теории спаренных интегральных уравнений // Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та рьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва. 1957. XXV. С. 5—31. 3. *Ахиезер Н. И.*, *зер А. Н.* К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отвер- в плоском экране // Докл. АН СССР. 1956. **109**, № 1. С. 53—56. 4. *Марчен- В. А.*, *Маслов К. В.* Коротковолновое приближение в задачах о дифракции на ском экране // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1966. Вып. 3. 158—182. 5. *Сологуб В. Г.* Коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на круглом диске // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 1972. 2. С. 388—412. 6. *Гандель Ю. В.* О решении одного интегрального уравнения тематической теории дифракции волн // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат. 0. **35**. С. 23—28. 7. *Гандель Ю. В.* Об одной паре сумматорных уравнений функциями Бесселя // Вестн. ХГУ, зап. мех.-мат. ф-та и Харьк. мат. об-ва. 7. **33**. С. 115—119. 8. *Гандель Ю. В.* К теории парных рядов Фурье-Бессе- // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1970. Вып. 12. С. 59—69. *Гандель Ю. В.* Замечание к теории парных рядов Фурье-Бесселя // Теория нкций, функцион. анализ и их прил. 1975. Вып. 22. С. 35—41. 10. *Sned- J. N.* Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, 1966. р.

Поступила в редколлегию 14.12.89

УДК 517.5

М. Л. СОДИН, П. М. ЮДИЦКИЙ

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ Е. И. ЗОЛОТАРЕВА И Н. И. АХИЕЗЕРА О МНОГОЧЛЕНАХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ

Хорошо известно, что ряд классических задач о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, решается с помощью эллиптических функций [1]. Наиболее важными задачами такого типа являются, по-видимому, задачи Е. И. Золотарева и Н. И. Ахиезера. Напомним их формулировки.

Задача Е. И. Золотарева. Для заданного числа $\sigma > 0$ определить многочлен степени n $P_n(x) = x^n - n\sigma x^{n-1} + \cdots$, наименее уклоняющийся от нуля на интервале $[-1, 1]$.

Задача Н. И. Ахиезера. Для заданного числа ξ, $0 < \xi < 1$, определить многочлен нечетной степени $2n+1$ $A_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + \cdots$, наименее уклоняющийся от нуля на двух симметричных интервалах $[-1, -\xi] \cup [\xi, 1]$.

В настоящей работе приведем алгебраические решения этих задач, основываясь на следующем наблюдении, восходящем к П. Л. Чебышеву. Экстремальные многочлены в этих задачах удовлетворяют неопределенному функциональному уравнению типа уравнения Пелля. С другой стороны, аналогичным уравнениям удовлетворяют и некоторые ортогональные многочлены. Это позволяет показать, что наименее уклоняющиеся от нуля многочлены являются ортогональными при некотором вспомогательном весе. После того, как этот вес определен, многочлены легко выписываются в виде определителей. Отметим, что роль уравнений типа Пелля в различных задачах анализа подчеркивалась многими математиками, начиная с П. Л. Чебышева [2—5], и что предлагаемый ниже прием применим к другим задачам о наименее уклоняющихся от нуля функциях (см., например, [6]).

В конце работы свяжем вновь найденное алгебраическое решение задач Золотарева и Ахиезера с их классическим решением, использующим эллиптические функции.

§ 1. *Задача Золотарева.* При $\sigma \leqslant \sigma_n = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$ задача Золотарева решается элементарно, так как экстремальный многочлен является чебышевским для интервала $[-1, \beta]$, $\beta = 1 + 2\sigma$. Поэтому далее мы рассматриваем лишь нетривиальный случай $\sigma > \sigma_n$. В этом случае чебышевский многочлен $T_n\left(\frac{2x - \beta + 1}{1 + \beta}\right)$ не является экстремальным, так как, по крайней мере, одна из его точек альтернанса (суть корней чебышевского многочлена 2-го рода $U_{n-1}\left(\frac{2x - \beta + 1}{1+\beta}\right)$) больше единицы.

Из теоремы об альтернансе следует (см., например, [2]), известное функциональное уравнение для экстремального многочлена:

$$L^2 = P_n^2(x) - (x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)\,Q_{n-2}^2(x), \tag{1}$$

где $1<\alpha<\beta$, $\beta>\beta_n=\dfrac{1+\cos^2(\pi/2n)}{\sin^2(\pi/2n)}$ — неопределенные числовые значения, $Q_{n-2}(x)=P'_n(x)/(n(x-\gamma))$, $\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\sigma$ — многочлен степени $n-2$, корнями которого являются точки альтернанса многочлена P_n, лежащие внутри интервала $[-1, 1]$, L — величина уклонения многочлена P_n от нуля на интервале $[-1, 1]$.

Покажем, что для каждого $\beta>\beta_n$ уравнение (1) имеет единственное решение при дополнительном условии принадлежности всех корней многочлена Q_{n-2} интервалу $[-1, 1]$, соответствующий многочлен P_n является экстремальным для задачи Золотарева. При этом будет получено явное выражение для параметра $\sigma=\sigma(\beta)$, из которого вытекает непрерывная зависимость σ от β. Поэтому при возрастании β от β_n до $+\infty$ параметр σ также непрерывно возрастает от σ_n до $+\infty$.

Итак, зафиксируем значение $\beta>\beta_n$ и перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$\frac{L^2(x-1)}{P_n^2(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)}=$$

$$=\frac{x-1}{(x-\alpha)(x-\beta)(x+1)}-\left(\frac{(x-1)\,Q_{n-2}(x)}{P_n(x)}\right)^2.$$

Выберем положительную при $x>\beta$ ветвь функции $\omega(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$, тогда

$$\omega(x)-\frac{(x-1)\,Q_{n-2}(x)}{P_n(x)}=O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),\quad x\to\infty. \tag{2}$$

Из (2) следует, что дробь $R=\dfrac{(x-1)\,Q_{n-2}}{P_n}$ является подходящей к непрерывной дроби для

$$\omega(x)=\int_E\frac{p(t)}{x-t}\,dt,\quad E=[-1,\ 1]\cup[\alpha,\ \beta],$$

где

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{1-t}{(t+1)(t-\alpha)(t-\beta)}}, & t\in E\\ 0, & t\notin E\end{cases}$$

— неотрицательный вес. Поэтому многочлены P_n и $(x-1)\,Q_n$ являются ортогональными многочленами соответственно 1-го и 2-го рода при весе $p(x)$ [7]. Таким образом,

$$P_n(x) = \frac{1}{\det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \hline 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix},$$

$$\sigma = -\frac{1}{n \det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-2} & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} & s_{n+1} \\ \hline s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-3} & s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$L = -P_n(1) = -\frac{1}{\det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \hline 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

где s_k — моменты функции $p(t)$, т. е.

$$s_k = \int_E p(t)\, t^k\, dt$$

или

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{x^{k+1}}.$$

Как следует из (3), числа s_k суть многочлены степени k от чисел α и β; используя формулу бинома Ньютона, нетрудно написать для них явную формулу.

Теперь остается определить значение параметра α. Оно определяется из условия, что многочлен 2-го рода степени $n-1$ при весе $p(t)$ обращается в ноль в точке $x=1$. Чтобы придать этому условию более явный вид, напомним выражение для ортогонального многочлена 2-го рода:

$$\tilde{Q}_{n-1}(x) = (x-1)\,Q_{n-2}(x) = \int_E \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t}\, p(t)\, dt = \frac{1}{\det \| s_{i+j} \|_{i,\,j=0}^{n-1}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \hline 0 & s_0 & \ldots & s_0 x^{n-1} + s_1 x^{n-2} + \cdots + s_{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ \hline 0 & s_0 & s_0 + s_1 & \ldots & s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получили алгебраическое уравнение для определения параметра α, так как определитель в левой части (4) есть многочлен от α. Укажем, какой из корней этого уравнения необходимо выбрать.

Покажем, что искомым является положительный корень этого уравнения $\alpha^* < \beta$, ближайший к β. Будем следить за корнями ортогонального многочлена второго рода $\tilde{Q}_{n-1}(x)$.

Прежде всего отметим, что все корни многочлена $\tilde{Q}_{n-1}$ — простые и лежат внутри интервала $(-1, \beta)$, на котором сосредоточен вес $p(t)$. При $\alpha = \beta$ вес $p(t)$ имеет вид

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(\beta - t)} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

поэтому все корни ортогонального многочлена 2-го рода $\tilde{Q}_{n-1}$ расположены внутри интервала $(-1, 1)$. При $\alpha = 1$

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{-\frac{1}{(1+t)(t-\beta)}}, & t \in [-1, \beta], \\ 0, & t \notin [-1, \beta] \end{cases}$$

— чебышевский вес на $[-1, \beta]$. Следовательно,

$$\tilde{Q}_{n-1}(x) = U_{n-1}\left(\frac{2x - \beta + 1}{1 + \beta}\right),$$

и, по крайней мере, один из корней этого многочлена больше единицы.

Будем уменьшать α, начиная с $\alpha = \beta$. При α, близких к β, корни уравнения $\tilde{Q}_{n-1}(x) = 0$ по-прежнему расположены внутри интервала $(-1, 1)$. Так как при $\alpha = 1$ это неверно, то найдется значение α^*, при котором наибольший из корней многочлена $\tilde{Q}_{n-1}$ равен единице. Это искомое значение и есть ближайший к β корень $\alpha^* < \beta$ уравнения (4). Многочлен P_n является экстремальным, так как он имеет $n-2$ точки альтернанса (суть нулей Q_{n-2}), расположенных на $(-1, 1)$ и две точки альтернанса на концах отрезка $x = \pm 1$.

§ 2. *Некоторые замечания*. 1. Рассмотрим разложение функции

$$\sqrt{(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)} = x^2 - \mu_{-2}x - \mu_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}}.$$

Здесь μ_k, $k \geqslant 0$ — моменты веса

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{(1-t^2)(t-\alpha)(t-\beta)}, & t \in E, \\ 0, & t \notin E, \end{cases}$$

их нетрудно выразить через моменты s_k либо непосредственно через α и β. Сам вес $q(t)$ положительный на $(-1, 1)$ и отрицательный при $\alpha < t < \beta$. Рассмотрим матрицу

$$S(\alpha) = \|\mu_{i+j}\|_{i,\, j=0}^{n-2}.$$

Она положительно определена при $\alpha = \beta$ и имеет, по крайней м одно отрицательное собственное значение при $\alpha = 1$. Да $\det S(\alpha)$ — многочлен от α и в качестве искомого значения необходимо взять ближайший к β корень уравнения

$$\det S(\alpha) = 0, \qquad (4')$$

меньший β. Иными словами, α^* — граница области положительно определенности матрицы $S(\alpha)$. В несколько иной ситуации связ определяющих экстремальную функцию параметров с границе области положительной определенности отмечалась в [8].

2. Пусть многочлен $U_{n-1}\left(\frac{2x-\beta+1}{\beta+1}\right)$ имеет $k \leqslant n-1$ корне больших единицы. Тогда у уравнения (4) и (4′) имеется k корне расположенных на интервале $(1, \beta)$. Переход α через такой корен соответствует переходу корня ортогонального многочлена 2-го род $\tilde{Q}_{n-1}(x, \alpha)$ через точку $x = 1$. Причем при каждом α в лаку $(1, \alpha)$ может находиться не более одного корня многочлена $\tilde{Q}_{n-1}(x, \alpha$ Аналогичная ситуация детально исследовалась А. А. Марковы [9, с. 34—43].

3. Чтобы получить все решения уравнения Пелля (1) при фи сированном значении β, необходимо перебрать все корни α урав ния (4), формулы для P_n и Q_{n-2} сохраняются. При этом значени можно не предполагать вещественным.

4. Касаясь задачи Золотарева, А. А. Марков в [9, с. 51—75] у зал на целесообразность нахождения алгебраического реше этой задачи и дал набросок пути, на котором такое решение мог быть найдено, не доводя вычисления до конкретного ответа. Вы такое решение выписано, оно сводится к нахождению определе ного корня алгебраического уравнения (4) или (4′), а не тран цендентного уравнения, как в решении самого Е. И. Золотаре [2]. Отметим, что предложенный в этой работе прием нахожден алгебраического решения экстремальных задач Золотарева и Ах езера отличается от предлагавшегося А. А. Марковым.

§ 3. *Задача Ахиезера.* Будем предполагать, что $\xi > \sin\frac{\pi}{2(2n+1)}$ в противном случае экстремальным является чебышевский мно член $T_n(x)$. Из теоремы об альтернансе следует функциональн уравнение:

$$L^2 = A^2_{2n+1}(x) - (x^2-1)(x^2-\xi^2)(x^2-\delta^2)B^2_{2n-2}(x). \qquad ($$

В этом уравнении значение ξ фиксировано, а нечетный экстремальны многочлен A_{2n+1}, параметр δ, $0 < \delta < \xi$, величина уклонения и четный многочлен B_{2n-2}, корнями которого являются точк альтернанса многочлена A_{2n+1}, расположенные внутри интервал $[-1, -\xi]$, $[\xi, 1]$, подлежат определению.

Введем новую переменную $y = x^2$. Тогда $A_{2n+1}(x) = xp_n(x$ $B_{2n-2}(x) = q_{n-1}(x^2)$, далее, положим $\mu = \xi^2$, $\nu = \delta^2$. Уравнение (примет следующий вид:

$$L^2 = yp_n^2(y) - (y-1)(y-\mu)(y-\nu)q^2_{n-1}(y).$$

Перепишем это уравнение аналогично тому, как это было сделано при решении задачи Золотарева:

$$\frac{L^2(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)\,p_n^2(y)}=\frac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}-\left(\frac{(y-\mu)\,q_{n-1}(y)}{p_n(y)}\right)^2$$

или

$$\sqrt{\frac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}}-\frac{(y-\mu)\,q_{n-1}(y)}{p_n(y)}=0\left(\frac{1}{y^{2n+1}}\right),\ y\to\infty, \tag{6}$$

где ветвь квадратного корня предполагается положительной при $y>1$. Положим

$$\sqrt{\frac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}}=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k}{y^{k+1}},$$

где числа s_k — моменты неотрицательного веса

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sqrt{-\dfrac{y(y-\mu)}{(y-1)(y-\nu)}}, & t\in[0,\ \nu]\cup[\mu,\ 1],\\ 0, & t\notin[0,\ \nu]\cup[\mu,\ 1].\end{cases}$$

Эти числа являются многочленами от ν и μ степени $k+1$. Тогда в силу (6) $p_n(y)$ и $(y-\mu)\,q_{n-1}(y)-p_n(y)$ являются ортогональными многочленами соответственно 1-го и 2-го рода при весе $\varphi(t)$. Следовательно,

$$A_{2n+1}(x)=xp_n(x^2)=\frac{x}{\det\|s_{i+j}\|_{i,\,j=0}^{n-1}}\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & \dots & s_n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1}\\ \hdashline 1 & x^2 & \dots & x^{2n}\end{vmatrix},$$

$$L=A_{2n+1}(1)=\frac{1}{\det\|s_{i+j}\|_{i,\,j=0}^{n-1}}\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & \dots & s_n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1}\\ \hdashline 1 & 1 & \dots & 1\end{vmatrix},$$

и число ν является наименьшим положительным корнем алгебраического уравнения:

$$\begin{vmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n\\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1}\\ \hdashline s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1}\\ 1 & s_0+\mu & s_1+s_0\mu+\mu^2 & \dots & s_{n-1}+s_{n-2}\mu+\dots+s_0\mu^{n-1}+\mu^n\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

§ 4. *Связь с классическим решением задач Золотарева и Ахиезера.* Алгебраические уравнения, эквивалентные (4) и (7), можно получить иным путем, исходя из классического решения задач Золотарева и Ахиезера, использующего эллиптические функции

[1, 10, 11]. Остановимся вкратце на этом вопросе для случая задачи Ахиезера. Напомним сперва параметризацию решения этой задачи в якобиевых функциях, данную самим Н. И. Ахиезером [1, 10].

Определим модуль k $(0 < k < 1)$ из уравнения

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2n+1},\ k\right) = \xi, \tag{8}$$

модуль k связан с величиной δ равенством

$$k^2 = \frac{\xi^2 - \delta^2}{\xi^2 (1 - \delta^2)}.$$

Положим

$$x = \frac{\xi \operatorname{cn} u}{\sqrt{\xi^2 - \operatorname{sn}^2 u}},$$

где радикал выбран так, что $x = 1$ при $u = 0$. Тогда

$$A_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} L_n \left\{ \left[\frac{H(\rho + u)}{H(\rho - u)}\right]^{n+\frac{1}{2}} + \left[\frac{H(\rho - u)}{H(\rho + u)}\right]^{n+\frac{1}{2}} \right\},$$

где $\rho = \dfrac{K}{2n+1}$, и

$$L_n = \frac{}{2^{n-1}} \left[\frac{\Theta(0)}{\Theta(\rho)} \frac{\Theta_1(0)}{\Theta_1(\rho)}\right]^n.$$

Роль алгебраического уравнения (7) здесь играет трансцендентное уравнение (8). Можно показать, что оно имеет единственное решение [10, с. 212—213] (см. также [12]). Покажем, как привести уравнение (8) к алгебраическому.

Добавим к равенству (8) равенство

$$\operatorname{sn}^2(K,\ k) = 1. \tag{9}$$

Далее, $\operatorname{sn}^2(mu,\ k)$ является рациональной функцией от $\operatorname{sn}^2(u,\ k)$ и k^2. В самом деле, воспользуемся теоремами сложения [10, табл. XIV]. Имеем

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)},$$

тогда

$$\operatorname{sn}^2 2u = \frac{4 \operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u)^2}.$$

Положим

$$\operatorname{sn}^2(mu,\ k) = R_m(\operatorname{sn}^2(u,\ k),\ k^2),\ \operatorname{sn}^2 u = z.$$

В этих обозначениях $R_1(z,\ k^2) \equiv z$ и

$$R_2(z,\ k^2) = \frac{4z(1 - z)(1 - k^2 z)}{(1 - k^2 z^2)^2}.$$

Дальнейшие функции R_m вычисляются индуктивно:

$$\operatorname{sn}(m+1)u \operatorname{sn}(m-1)u = \frac{\operatorname{sn}^2 mu - \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 mu},$$

или

$$R_{m+1}(z, k^2) R_{m-1}(z, k^2) = \left(\frac{R_m(z, k^2) - z}{1 - k^2 z R_m(z, k^2)} \right)^2.$$

В частности, из последнего равенства следует, что все R_m — рациональные функции от z и k^2. (Если ввести вместо k^2 новую переменную $w = zk^2$, то рекуррентная формула несколько упростится).

Таким образом, вместо (8) можно решать алгебраическое уравнение относительно k^2:

$$R_{2n+1}(\xi^2, k^2) = 1. \tag{10}$$

Чтобы придать наглядный смысл корням этого уравнения, введем параметр ρ $(-K \leqslant \operatorname{Re}\rho \leqslant K, -K' \leqslant \operatorname{Im}\rho \leqslant K')$ равенством $\operatorname{sn}^2 \rho = \xi^2$. Тогда уравнение (10) эквивалентно тому, что $\operatorname{sn}^2(2n+1)\rho = 1$, или $(2n+1)\rho \equiv K \pmod{2iK', 2K}$. Искомому решению k^2 уравнения (10) соответствует значение $\rho = K/(2n+1)$.

Используя факторизационный метод, предложенный Н. И. Ахиезером для решения неопределенных уравнений типа уравнения Пелля (см. [10, § 53], а также [4, 5]), можно показать, что алгебраические уравнения (7) и (10) эквивалентны. Мы не будем здесь доказывать это утверждение.

Когда эта статья была подготовлена к печати, Ф. Пехерсторфер любезно предоставил авторам текст своей статьи «Orthogonal and Chebyshev polinomials on two intervals», которая вскоре будет опубликована в журнале «Acta Math. Sci. Hungary». В этой статье среди прочего им были получены аналогичные алгебраические решения задач Золотарева и Ахиезера. Близким вопросам посвящены и другие недавние работы Ф. Пехерстофера, среди которых отметим [13—15].

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965. 2. *Ахиезер Н. И.* Чебышевское направление в теории функций. Математика XIX в. М., 1987. С. 9—97. 3. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров λ-зон устойчивости // ДАН СССР. 1953. **93**. № 5. С. 767—770. 4. *Ахиезер Н. И.* Об одном неопределенном уравнении Чебышевского типа в задачах построения ортогональных систем // Мат. физика и функцион. анализ. 1971. Вып. 2. С. 3—14. 5. *Krein M. G., Levin B. Ya., Nudelman A. A.* On a special representation of polynomials that are positive on a system of closed intervals // Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2. 1989. V. 142. 6. *Юдицкий П. М.* О верхней огибающей семейства рациональных функций, не превосходящих единицы на единичной окружности, с фиксированными полюсами и с фиксированным нулем // ДАН СССР. 1989. **307**, № 4. С. 815—818. 7. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 8. *Горин Е. А.* Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов // Вестн. Харьк. ун-та. 1980. № 205. С. 77—105. 9. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л., 1948. 100 с. 10. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М., 1970. 11. *Carlson B. C., Todd J.* Zolotarev's First Problem // Aequat. Math. 1983. **26**, P. 1—33. 12. *Carlson B. C., Todd J.*

The degenerating behavior of elliptic functions // SIAM J. Numer. Anal. 1983. 20. N 6. P. 1120—1129. 13. *Peherstorfer F.* On Tchebysheff polynomials on disjoint intervals // Coll. Math. Soc. I. Bolyai 49. A Haar Mem. Conf., Budapest. 1985. P. 737—751. 14. *Peherstofer F.* Orthogonal polynomials in L^1-approximation // Journ. Approx. Theory. 1988. 52, N 3. P. 241—268. 15. *Peherstorfer F.* On Bernstein-Szegö orthogonal polynomials on several intervals II: orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients // To appear in Journ. Approx. Theory. P. 59—88.

Поступила в редколлегию 17.03.90

УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

ОЦЕНКИ СБЛИЖЕНИЯ n-КРАТНЫХ СВЕРТОК ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ И ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Работа посвящена новому подходу к вопросу об аппроксимации n-кратных сверток законов распределения (з. р.) безгранично делимыми (б. д.) з. р. Этот подход связан с одним результатом Ю. В. Прохорова [1] и является попыткой систематического исследования неравномерной аппроксимации n-кратных сверток з. р. б. д. з. р. Рассматриваемая задача является задачей теории вероятностей, в которой, как оказалось, можно эффективно использовать методы классического анализа, связанные с проблемой моментов, задачей о продолжении эрмитово положительных функций. Особо отметим, что будут использованы некоторые идеи Н. И. Ахиезера, памяти которого посвящен настоящий сборник.

Пусть $\boldsymbol{F}$ — множество всех з. р., заданных на вещественной оси $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}_+$ — множество з. р. с неотрицательными характеристическими функциями, $\boldsymbol{D}$ — совокупность б. д. з. р. и пусть $\rho(F, G)$ — равномерное расстояние между з. р. F и G, т. е.

$$\rho(F, G) = \sup_{x \in \mathbf{R}} | F(x) - G(x) |.$$

В 1955 г. Ю. В. Прохоров [1] доказал, что для любого з. р. F

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \rho(F^{n*}, D) \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{1}$$

где F^{n*} — n-кратная свертка з. р. F. А. Н. Колмогоров [2] обнаружил, что сходимость в (1) к нулю равномерна относительно F во всем классе $\boldsymbol{F}$. Затем последовали работы ряда авторов (история вопроса подробно изложена в [3]), в которых были получены оценки сверху и снизу функций:

$$\psi(n) = \sup_{F \in \mathbf{F}} \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}), \quad \psi_+(n) = \sup_{F \in \mathbf{F}_+} \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}).$$

Окончательный ответ дал Т. В. Арак [4—7], который доказал следующие оценки:

$$c_1 n^{-2/3} \leqslant \psi(n) \leqslant c_2 n^{-2/3}, \quad c_3 n^{-1} \leqslant \psi_+(n) \leqslant c_4 n^{-1}, \tag{2}$$

где c_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ — абсолютные положительные постоянные.

Вернемся к результату Ю. В. Прохорова и поставим вопрос о возможной скорости убывания к нулю при $n \to \infty$ величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ для з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$. Обозначим через $I(F)$ — наибольший симметричный относительно нуля отрезок, на котором х. ф. $\varphi(t; F)$ з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ совпадает с х. ф. некоторого б. д. з. р. Он может вырождаться в точку $\{0\}$. Введем величину: $m(F) = \min\limits_{t \in I(F)} |\varphi(t; F)|$. Эта величина, очевидно, удовлетворяет неравенству $0 < m(F) \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ и пусть величина $N_\nu(n)$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $\nu > 0$) определяется соотношением*

$$N_\nu(n) = \inf\left\{x > 0 : F\left(-\frac{x}{n}\right) + 1 - F\left(\frac{x}{n} + 0\right) \leqslant (e^{-\nu} m(F))^n\right\}.$$

Тогда для любого $\nu > 0$ имеет место неравенство

$$\varliminf_{n \to \infty} (\ln (N_\nu^3(n) \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})))/n \geqslant 7 \ln m(F). \tag{3}$$

Следствие 1. *Для з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ такого, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta dF(x) < \infty \quad (\exists \delta > 0),$$

найдется постоянная $b = b(F) > 0$, что $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \geqslant e^{-bn}$ ($n \in \boldsymbol{N}$).

Теорема 1 допускает уточнение для з. р. F таких, что их симметризации $F_s = F \ast \bar{F}$, где $\bar{F}(x) = 1 - F(-x + 0)$, не являются б. д. з. р. Предположение $F_s \notin \boldsymbol{D}$ жестче предположения $F \notin \boldsymbol{D}$, поскольку существуют з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$ и $F_s \in \boldsymbol{D}$. Примером такого з. р. (см. [8, с. 47]) служит з. р. с х. ф. вида

$$\exp(e^{-2it} + 2e^{it} - e^{2it} + 3e^{3it} + 3e^{4it} - 8).$$

Теорема 2. *Пусть з. р. F такой, что $F_s \notin \boldsymbol{D}$. Тогда*

$$\varlimsup_{n \to \infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n \leqslant -2 \ln m(F_s). \tag{4}$$

Из теоремы 2 извлекаем очевидное следствие.

Следствие 2. *Пусть симметричный з. р. $F \notin \boldsymbol{D}$, тогда для него выполняется соотношение* (4).

Из этого утверждения видим, что величина $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ не может убывать при $n \to \infty$ быстрее экспоненциальной функции для произвольных симметричных не б. д. з. р.

Теорема 2 является следствием результата выясняющего как отражается на свойствах х. ф. з. р. F экспоненциальное убывание величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть для з. р. F выполняется соотношение*

$$\varlimsup_{n \to \infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n > \Delta \quad (0 < \Delta < \infty). \tag{5}$$

Тогда х. ф. з. р. F_s на интервале $(-A_F, A_F)$, где

$$A_F = \sup\{M > 0 : \min_{|t|<M} |\varphi(t; F)| \geqslant e^{-\Delta/4}\},$$

совпадает с х. ф. некоторого б. д. з. р.

Для теоремы 3 справедливо в известной степени обратное утверждение.

Теорема 4. *Пусть з. р. F таков, что его х. ф. совпадает на некотором отрезке $[-A, A]$ $(0 < A < \infty)$ с. х. ф. некоторого з. р. из $\boldsymbol{D}$. Пусть $D \in \boldsymbol{D}$ — з. р. с х. ф. $\varphi(t; D) \in L^p(-\infty, \infty)$ $(p \geqslant 1)$. Тогда*

$$\varliminf_{n\to\infty} (-\ln \rho(F^{n*} \ast D^{n*}, \boldsymbol{D}))/n \geqslant b\ (e^{-b} = \sup_{|t|\geqslant A} |\varphi(t; D)|).$$

Сузим теперь класс рассматриваемых з. р. до класса $\boldsymbol{F}_+$. Для з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ и $F \notin \boldsymbol{D}$ справедливы оценки

$$e^{-bn} \leqslant \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant cn^{-1}\ (n \in \boldsymbol{N}), \tag{6}$$

где $b > 0$ — постоянная зависящая от з. р. F, а c — абсолютная постоянная. Левая часть оценки (6) вытекает из следствия 2, а правая — из оценки (2) величины $\psi_+(n)$. Поставим вопрос о том, какая на самом деле возможна скорость убывания величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ при $n \to \infty$ для з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ и $F \notin \boldsymbol{D}$. Э. Л. Пресман [9] доказал, что существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ со степенным убыванием порядка один величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$. Следующая теорема о существовании з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ с любым степенным убыванием величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$.

Теорема 5. *Для $k = 2, 3, \ldots$ существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ такие, что*

$$b_1 (n^k \ln^{3k+3}(n+1))^{-1} \leqslant \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant b_2 n^{-k}\ (n \in \boldsymbol{N}),$$

где b_1, b_2 — положительные постоянные, зависящие лишь от з. р. F.

Теорема 4 и следствие 2 позволяют построить з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ с экспоненциальным убыванием $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$.

Теорема 6. *Существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$, для которых*

$$\varliminf_{n\to\infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n > 0,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (-\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}))/n < \infty.$$

З.р. F из теоремы 6, как это следует из теоремы 3, таковы, что их х.ф. в некоторой окрестности нуля совпадают с х.ф.б.д.з.р. Ответ на вопрос о существовании з.р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ с более чем степенным убыванием величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$ дает

Теорема 7. *Для любого $\gamma_0 > 0$ существуют з. р. $F \in \boldsymbol{F}_+$ такие, что*

$$\gamma_0 \ln^2 n \leqslant -\ln \rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) = o(n)\ (n \to \infty). \tag{7}$$

Если отказаться от условия симметричности з.р. F, то теорема 7 допускает уточнение.

Теорема 8. *Для любого* $\alpha_0 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ *существуют з.р. (несимметричные) такие, что правая часть оценки* (7) *сохранится, а левая часть заменится на* n^{α_0}.

При доказательстве теорем 5, 7, 8 используются методы, связанные с проблемой моментов и задачей о продолжении с отрезка эрмитово положительных функций.

§ 1. Доказательство теорем 1—4. Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть для з.р. F найдется последовательность* $\{n\}$*-натуральных чисел, что выполнено соотношение*

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant \varepsilon_n < 1, \ \varepsilon_n \downarrow 0 \ (n \to \infty). \tag{1.1}$$

Тогда существует последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ *такая, что для любых* $M_n > 0$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{|t| \leqslant A_n} (|\varphi(t;\ F)|^2 - |\varphi(t;\ D_n)|^2)^2\, dt \leqslant 32\pi A_n \varepsilon_n^{1-4(n-1)/M_n},$$

где A_n *— любое положительное число, не превосходящее* $\alpha_n = \sup(M > 0 : \min\limits_{|t| \leqslant M} |\varphi(t;\ F)| \geqslant \varepsilon_n^{1/M_n})$.

Доказательство. В силу соотношения (1.1) найдется последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ такая, что $\rho(F^{n*}, D_n) \leqslant 2\varepsilon_n$. Для симметризаций F_s, D_{ns} соответственно з.р. F, D_n в силу последнего неравенства имеем

$$\begin{aligned}\rho(F_s^{n*},\ D_{ns}^{n*}) &\leqslant \rho(F_s^{n*},\ F^{n*} \divideontimes \overline{D}_n^{n*}) + \rho(F^{n*} \divideontimes \overline{D}_n^{n*},\ D_{ns}^{n*}) \leqslant \\ &\leqslant \rho(\overline{F}^{n*},\ \overline{D}_n^{n*}) + \rho(F^{n*},\ D_n^{n*}) \leqslant 4\varepsilon_n.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Обозначим $V_n = (F_s^{n*} - D_{ns}^{n*})^{2*} \divideontimes Q_{2A_n}$, где Q_{2A_n} — з.р. с х.ф. вида

$$\varphi(t;\ Q_{2A_n}) = \begin{cases} 1 - |t|/(2A_n), & |t| \leqslant 2A_n, \\ 0 & |t| > 2A_n. \end{cases} \tag{1.3}$$

С помощью формулы обращения (см. [8, с. 13]) имеем

$$V_n(x) - V_n(-x) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-2A_n}^{2A_n} \frac{\sin xt}{t} (\varphi^n(t;\ F_s) - \varphi^n(t;\ D_{ns}))^2\, \varphi(t;\ Q_{2A_n})\, dt. \tag{1.4}$$

Поскольку на отрезке $[-A_n, A_n]$ $|\varphi(t;\ F)| \geqslant \varepsilon_n^{1/M_n}$, то на нем справедлива очевидная оценка:

$$\begin{aligned}&(\varphi^n(t;\ F_s) - \varphi^n(t;\ D_{ns}))^2 = \\ &= (\varphi(t;\ F_s) - \varphi(t;\ D_{ns}))^2 \Big(\sum_{m=0}^{n-1} \varphi^{n-m-1}(t;\ F_s)\, \varphi^m(t;\ D_{ns})\Big)^2 \geqslant \\ &\geqslant \varepsilon_n^{4(n-1)/M_n} (\varphi(t;\ F_s) - \varphi(t;\ D_{ns}))^2.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Положим в формуле (1.4) $x = \pi/(4A_n)$, тогда с помощью неравен (1.2), (1.5) и неравенства $\sin u \geqslant (2/\pi)\, u$ $(0 \leqslant u \leqslant \pi/2)$ легко получа

$$16\varepsilon_n \geqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{A_n} \frac{\sin(\pi t/(4A_n))}{t} \left(\varphi^n(t;\ F_s) - \varphi^n(t;\ D_{ns})\right)^2 \varphi(t;\ Q_{2A_n})\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi A_n}\, \varepsilon_n^{4(n-1)/M_n} \int\limits_0^{A_n} \left(|\varphi(t;\ F)|^2 - |\varphi(t;\ D_n)|^2\right)^2 dt,$$

откуда выводим утверждение леммы 1.

Доказательство теоремы 3. Из соотношения (5) следует, что для з.р. F выполняются условия леммы 1 с $\varepsilon_n = \exp(-(\Delta + \eta)\, n)$ $(\exists \eta > 0)$, а n пробегает некоторую последовательность натуральных чисел. Тогда в силу леммы 1 найдется последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ такая, что справедливы неравенства для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n\}$ $(n \to \infty)$ и любых $\tilde{A}_F \in (0, A_F)$:

$$\int\limits_{|t| \leqslant \tilde{A}_F} \left(|\varphi(t;\ F)|^2 - |\varphi(t;\ D_n)|^2\right)^2 dt \leqslant 32\pi \tilde{A}_F e^{-\eta n}. \qquad (1.6)$$

Действительно для этого достаточно положить $M_n = 4n(\Delta + \eta)/\Delta$ и заметить, что $A_F = \alpha_n$. Покажем теперь, что из последовательности б.д.з.р. $\{D_{ns}\}$ $(D_{ns} = D_n \ast \overline{D}_n)$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Для этого проверим, что для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_n \left(D_{ns}(-N_\varepsilon) + 1 - D_{ns}(N_\varepsilon)\right) \leqslant \varepsilon. \qquad (1.7)$$

В самом деле, с помощью неравенства Гельдера получаем из (1.6)

$$\int\limits_{|t| \leqslant \tilde{A}_F} |\varphi(t;\ F_s) - \varphi(t;\ D_{ns})|\, dt \leqslant \sqrt{32\pi}\, \tilde{A}_F e^{-\eta n/2}, \qquad (1.8)$$

а из хорошо известного неравенства для оценки «хвостов» з.р. (см. [8, с. 108]) имеем

$$\int\limits_{|x| \geqslant 1/u} dD_{ns}(x) \leqslant \frac{7}{u} \int\limits_0^u (1 - \varphi(t;\ D_{ns}))\, dt \quad (u > 0).$$

Из последних двух неравенств легко извлекаем неравенство (1.7), из которого следует слабая компактность последовательности з.р. D_{ns}. Слабо сходящуюся подпоследовательность б.д.з.р. будем обозначать по-прежнему $\{D_{ns}\}$. Таким образом, $D_{ns} \Rightarrow D$ $(n \to \infty)$, где D — б.д.з.р. Поскольку (1.6) имеет место для любого сколь угодно близкого к A_F числа $\tilde{A}_F < A_F$, то получаем $\varphi(t;\ F_s) = \varphi(t;\ D)$ $(t \in (-A_F,\ A_F))$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Если бы соотношение (4) не выполнялось, то соотношение (5) выполнялось бы для $\Delta = -2\ln m(F_s) + \eta$ с некоторым $\eta > 0$. Тогда в силу теоремы 3 на отрезке $[-A_F, A_F] \supset I(F_s)$ х.ф.з.р. F_s совпадает с х.ф. некоторого б.д.з.р., что противоречит выбору отрезка $I(F_s)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть неравенство (3) не имеет места. Тогда найдется последовательность б.д.з.р. $\{D_n\}$ ($\{n\}$ — бесконечная подпоследовательность натуральных чисел) такая, что для некоторого $\eta \in (0, \nu)$ и всех n справедливы оценки

$$\rho(F^{n*}, D_n^{n*}) \leqslant N_\nu^{-3}(n)\ (e^{-\eta/7} m(F))^{7n}. \tag{1.9}$$

Обозначим $W_n = F^{n*} - D_n^{n*}$, $-\overline{W}_n(x) = W_n(-x+0)$, тогда

$$|\varphi^n(t;\ F) - \varphi^n(t;\ D_n)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(W_n \ast \overline{W}_n)(x).$$

По формуле обращения имеем

$$(W_n \ast \overline{W}_n \ast Q_a)(x) - (W_n \ast \overline{W}_n \ast Q_a)(-x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin xt}{t} \big|\, |\varphi(t;\ F)|^n e^{in\arg\varphi(t;\ F)} -$$

$$- |\varphi(t;\ D_n)|^n e^{in\arg\varphi(t;\ D_n)}\big|^2 \varphi(t;\ Q_a)\, dt, \tag{1.10}$$

где функция $\varphi(t;\ Q_a)$ определяется формулой (1.3), непрерывные однозначные ветви аргументов х.ф.з.р. F и D_n выделяются условиями $\arg\varphi(0;\ F) = \arg\varphi(0;\ D_n) = 0$. Поскольку из (1.9) следует оценка

$$\rho(F_s^{n*},\ D_{ns}^{n*}) \leqslant 2N_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{7n} e^{-\eta n},$$

то аналогично доказательству леммы 1 приходим к следующей оценке для всех рассматриваемых n:

$$\int\limits_{-A}^{A} (|\varphi(t;\ F)|^n - |\varphi(t;\ D_n)|^n)^2\, dt \leqslant cAN_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{5n} e^{-4\eta n/5}, \tag{1.11}$$

где A выбрано так, что отрезок $[-A,\ A] \supset I(F)$ и для $t \in [-A,\ A]$ выполняется оценка $|\varphi(t;\ F)| \geqslant e^{-\eta/10} m(F)$; c — абсолютная постоянная. Всюду ниже под c будем понимать положительные абсолютные постоянные не всегда одни и те же. Полагая в формуле (1.10) $a = 2A$, $x = \pi/(4A)$ и пользуясь неравенствами (1.9), (1.11), выводим неравенство

$$\int\limits_{-A}^{A} |\varphi(t;\ F)|^{2n} |e^{in\arg\varphi(t;\ F)} - e^{in\arg\varphi(t;\ D_n)}|^2\, dt \leqslant cAN_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{5n} e^{-4\eta n/5}.$$

Из него извлекаем нижнюю оценку:

$$\int_{-A}^{A} | e^{in\arg\varphi(t;\, F)} - e^{in\arg\varphi(t;\, D_n)} |^2\, dt \leqslant cAN_\nu^{-3}(n)\,(m(F))^{3n} e^{-3\eta n/5} = \varepsilon_{n1}. \quad (1.12)$$

Отсюда получаем, что вне множества e_{n1} ($\operatorname{mes} e_{n1} \leqslant \varepsilon_{n1}^{1/3}$) на отрезке $[-A, A]$ подынтегральное выражение в (1.12) не превосходит $\varepsilon_{n1}^{2/3}$. Таким образом, в каждой точке $t \in E_{n1} = [-A, A] \diagdown e_{n1}$ справедлива оценка

$$| n(\arg\varphi(t;\, F) - \arg\varphi(t;\, D_n)) + 2\pi l_n(t) | \leqslant c\varepsilon_{n1}^{1/3}, \quad (1.13)$$

где $l_n(t)$ — целочисленная функция.

Покажем, что для $t \in E_{n1}$ и достаточно больших $n \geqslant n_0$ функция $l_n(t) \equiv 0$. Вернемся к неравенству (1.9). Из него следует оценка

$$|F^{n*}(-N_\nu(n)) - F^{n*}(N_\nu(n)+0) - D_n^{n*}(-N_\nu(n)) + D_n^{n*}(N_\nu(n)+0)| \leqslant$$
$$\leqslant 2(N_\nu(n))^{-3}(m(F))^{7n} e^{-\eta n}. \quad (1.14)$$

С помощью следующего легко усматриваемого неравенства

$$F^{n*}(-N_\nu(n)) + 1 - F^{n*}(N_\nu(n)+0) \leqslant n(F(-N_\nu(n)/n) +$$
$$+ 1 - F(N_\nu(n)/n+0),$$

учитывая определение параметра $N_\nu(n)$, имеем

$$F^{n*}(-N_\nu(n)) + 1 - F^{n*}(N_\nu(n)+0) \leqslant n(e^{-\nu} m(F))^n.$$

Отсюда и из (1.14) извлекаем оценку

$$D_n^{n*}(-N_\nu(n)) + 1 - D_n^{n*}(N_\nu(n)+0) \leqslant 2n(e^{-\eta} m(F))^n.$$

Теперь замечаем, что для х.ф. любого з.р G верна оценка

$$|\varphi(t+h;\, G) - \varphi(t;\, G)| \leqslant 2 \int\limits_{|x| > N_\nu(n)} dG(x) + \Big| \int\limits_{|x| \leqslant N_\nu(n)} e^{itx}(e^{ihx} - 1) \times$$
$$\times dG(x) \Big| \leqslant G(-N_\nu(n)) + 1 - G(N_\nu(n)) + N_\nu(n)\, h \ \ (t,\ h \in \boldsymbol{R}).$$

Применяя ее к з.р. F^{n*}, D_n^{n*} для $t \in \boldsymbol{R}$ и для $|h| \leqslant c\varepsilon_{n1}^{1/3}$, получаем неравенство

$$|\varphi^n(t+h;\, F) - \varphi^n(t;\, F)| + |\varphi^n(t+h;\, D_n) - \varphi^n(t;\, D_n)| \leqslant$$
$$\leqslant cn(A+1)(m(F))^n e^{-\eta n/5} = \varepsilon_{n2}. \quad (1.15)$$

Из последнего неравенства для $t \in [-A, A]$ и $h \in [-2\varepsilon_{n1}^{1/3}, 2\varepsilon_{n1}^{1/3}]$ таких, что $t + h \in [-A, A]$, следует соотношение для достаточно больших $n \geqslant n_0$:

$$| n(\arg\varphi(t+h;\, F) - \arg\varphi(t;\, F)) + 2\pi l_{n1}(t, h)| \leqslant e^{-\eta n/12}, \quad (1.16)$$

где $l_{n1}(t, h)$ — целочисленная функция. Так как $\arg\varphi(t+h;\, F)$ — непрерывная для рассматриваемых t, h функция, то из (1.16) для $n \geqslant n_0$ и указанных выше значений t, h следует $l_{n1}(t, h) \equiv m_1$ ($m_1 \in \boldsymbol{Z}$). Поскольку $\arg\varphi(0;\, F) = 0$, то $m_1 = 0$.

Соотношение, аналогичное (1.16), имеет место и для $\arg \varphi (t; D_n)$ для достаточно больших n. Действительно, в силу неравенства (1.11) для $t \in [-A, A] \setminus e_{n2}$ ($\operatorname{mes} e_{n2} \leqslant c (A+1) (N_\nu (n))^{-1} (m (F))^{5n/3} \times e^{-4\eta n/15} = \varepsilon_{n3}$) выполняется оценка

$$||\varphi (t; F)|^n - |\varphi (t; D_n)|^n| \leqslant \varepsilon_{n3} \tag{1.17}$$

и потому для указанных t и достаточно больших n: $|\varphi (t; D_n)|^n \geqslant \geqslant \frac{1}{2} (e^{-\eta/10} m (F))^n$. В силу неравенства (1.15) с учетом неравенства $\varepsilon_{n3} \leqslant c\varepsilon_{n1}^{1/3}$ замечаем, что оценка $|\varphi (t; D_n)|^n \geqslant \frac{1}{4} (e^{-\eta/10} m (F))^n$ справедлива для всех $t \in [-A, A]$. Тогда из соотношения (1.15) легко извлекаем соотношение, справедливое для $t, t+h \in [-A, A]$, $h \in [-2\varepsilon_{n1}^{1/3}, 2\varepsilon_{n1}^{1/3}]$ и достаточно больших n:

$$|\arg \varphi (t+h; D_n) - \arg \varphi (t; D_n)| \leqslant e^{-\eta n/12}. \tag{1.18}$$

Вернемся к соотношению (1.13). Из неравенств (1.16), (1.18) следует, что для $t \in E_{n1}$ функция $l_n (t) \equiv m_2$ ($m_2 \in \boldsymbol{Z}$). Поскольку в ближайшей к точке нуль точке t_0 из множества E_{n1} выполняется $|\arg \varphi (t_0; F) - \arg \varphi (t_0; D_n)| \leqslant 2e^{-\eta n/12}$, то из (1.13) следует $m_2 = 0$ для достаточно больших $n \geqslant n_0$. Поэтому для $n \geqslant n_0$ справедлива оценка

$$|\arg \varphi (t; F) - \arg \varphi (t; D_n)| \leqslant \varepsilon_{n1}^{1/3} \quad (t \in E_{n1}). \tag{1.19}$$

Из оценок (1.17), (1.19) извлекаем для $n \geqslant n_0$ неравенство

$$\int\limits_{|t| \leqslant A} |\varphi (t; F) - \varphi (t; D_n)| \, dt \leqslant e^{-\eta n/12}. \tag{1.20}$$

Отсюда по аналогии с доказательством теоремы 3 получаем существование последовательности б.д.з.р. $\{D_{n'}\}$, слабо сходящейся к з.р. $D \in \boldsymbol{D}$. Из (1.20) тогда следует, что $\varphi (t; F) = \varphi (t; D)$ ($|t| \leqslant A$), что приводит нас к противоречию (для этого достаточно вспомнить, что $[-A, A] \supset I (F)$). Теорема 1 доказана.

Утверждение следствия 1 сразу следует из теоремы 1, если заметить, что величина $N_\nu (n)$ в предположении следствия допускает оценку: $N_\nu (n) \leqslant \exp (b_1 n)$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $\exists b_1 = b_1 (F) > 0$).

Доказательство теоремы 4. Пусть з.р. $D_0 \in \boldsymbol{D}$ и его х.ф. совпадает на отрезке $[-A, A]$ с х.ф.з.р. F. С помощью формулы обращения имеем оценку

$$\rho ((F \ast D)^{n*}, (D_0 \ast D)^{n*}) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant A} |t|^{-1} |\varphi (t; D)|^n |\varphi^n (t; F) -$$

$$- \varphi^n (t; D_0)| \, dt \leqslant \frac{2}{\pi A} e^{-b(n-p)} \int\limits_{|t| \geqslant A} |\varphi (t; D)|^p \, dt.$$

Из этой оценки следует утверждение теоремы 4.

§ 2. Доказательство теоремы 5. При доказательстве этой теоремы будут существенно использоваться некоторые идеи Э. Л. Пресмана (см. [3, с. 180—190]). В частности, доказываемые ниже леммы 2, 4—7 являются переработанными для наших целей аналогами соответствующих лемм Э. Л. Пресмана.

Пусть $k = 2, 3, \dots$. Введем в рассмотрение х.ф. $\varphi(t; F_\delta)$, допускающую в окрестности нуля разложение

$$\varphi(t; F_\delta) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + (-1)^{k-1}\delta t^{2k}(1 + O(t))\right). \qquad (2.1)$$

Х.ф. $\varphi(t; F_\delta)$ — $2k$ раз дифференцируемая и первые $2k$ моментов $m_0, m_1, \dots, m_{2k-1}$ з.р. F_δ совпадают с первыми $2k$ моментами стандартного нормального з.р. Φ $s_0, s_1, \dots, s_{2k-1}$. Из исследования проблемы моментов (см. [10, с. 35]) хорошо известно, что если $\delta > 0$ в (2.1) брать достаточно малым, то найдутся з.р. F_δ с не более чем $k + 1$ точкой роста и такие, что для их х.ф. выполняется (2.1). Такие з.р. F_δ и будем рассматривать ниже.

Рассмотрим з.р. $F = \Phi \divideontimes F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta$ и покажем, что для него имеет место

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}) \leqslant bn^{-k+1} \quad (n \in \boldsymbol{N}). \qquad (2.2)$$

Впредь под b, b_1, b_2 будем понимать положительные постоянные, зависящие лишь от з.р. F. При этом символ b будет использоваться для обозначения как одинаковых, так и различных постоянных в тех случаях, когда нас не интересует их численное значение. Обозначим через Φ_{0,σ^2} — нормальный з.р. с математическим ожиданием нуль и дисперсией σ^2. Тогда с помощью формулы обращения получаем

$$\rho(F^{n*}, \Phi_{0,3n}) \leqslant \sup_x \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin tx}{t}\right| e^{-nt^2/2}\,\big||\varphi(t; F_\delta)|^{2n} - e^{-nt^2}\big|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant b\sup_x \int_{-1}^{1}\left|\frac{\sin tx}{t}\right| e^{-nt^2/2}\left(|e^{3\delta nt^{2k}} - 1| + |e^{-3\delta nt^{2k}} - 1|\right) dt +$$

$$+ b\int_{|t|\geqslant 1} e^{-nt^2/2}dt \leqslant b\sup_x \int_{-1}^{1}\left|\frac{\sin tx}{t}\right| nt^{2k}e^{-nt^2/4}dt + be^{-n/2} \leqslant$$

$$\leqslant bn\int_{-1}^{1}|t|^{2k-1}e^{-nt^2/4}dt + be^{-n/2},$$

откуда следует (2.2).

Теперь покажем, что для з.р. F имеет место оценка снизу:

$$\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D}_s) \geqslant bn(n\ln^3(n+1))^{-k} \quad (n \in \boldsymbol{N}), \qquad (2.3)$$

где $\boldsymbol{D}_s$ — множество всех симметричных б.д.з.р.

Сначала докажем ряд вспомогательных лемм. Далее под $Q(F, h)$ будем понимать функцию концентрации з.р. F, т. е.

$$Q(F, h) = \sup_x \{F(x+h+0) - F(x)\}, \ h \geqslant 0.$$

Лемма 2. *Пусть з.р. $D \in \boldsymbol{D}_s$, т. е. его х.ф. имеет вид*

$$\varphi(t; D) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dG_D(x)\right),$$

где G_D — неубывающая ограниченная функция. Пусть D_L — б.д.з.р. с х.ф.:

$$\varphi(t; D_L) = \exp\left(\int_{-L}^{L+0} (\cos tx - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dG_D(x)\right).$$

Тогда для любого з.р. H имеем

$$\rho(H, D_L) \leqslant 5\rho(H, D) + 2(1 - Q(H, 2L)).$$

Доказательство леммы 2. Представим з.р. D в виде: $D = D_L \divideontimes D_{L,1}$. Тогда для б.д.з.р. $D_{L,1}$, очевидно, выполняется оценка $\rho(D_{L,1}, E) \leqslant 1 - \exp(-a_L)$, где E — единичный з.р. с точкой роста нуль, а

$$a_L = \int_{|x|>L} \frac{1+x^2}{x^2} dG_D(x).$$

Отсюда получаем неравенство

$$\rho(F, D_L) \leqslant \rho(F, D) + \rho(D_L \divideontimes D_{L,1}, D_L) \leqslant \rho(F, D) + 1 - e^{-a_L}. \quad (2.4)$$

Б.д.з.р. $D_{L,1}$ представим в виде

$$D_{L,1} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a_L} \frac{a_L^m}{m!} G_{L,1}^{m*},$$

где $G_{L,1}$ — симметричный з.р. с точками роста вне отрезка $(-L, L)$. Поскольку для з.р. $G_{L,1}$ справедливо $Q(G_{L,1}, 2L) \leqslant 1/2$, то имеем оценку

$$Q(D, 2L) \leqslant Q(D_{L,1}, 2L) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a_L} \frac{a_L^m}{m!} Q(G_{L,1}^{m*}, 2L) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-a_L} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a_L} \frac{a_L^m}{m!} \leqslant e^{-a_L} - \frac{1}{2}(1 - e^{-a_L}) \leqslant 1 - \frac{1}{2}(1 - e^{-a_L}),$$

из которой следует, что $2(1-Q(D, 2L)) \geqslant 1-\exp(-a_L)$. Учтывая, что $Q(F, 2L) - Q(D, 2L) \leqslant 2\rho(F, D)$, получаем тогда неравенство

$$1 - e^{-a_L} \leqslant 4\rho(F, D) + 2(1 - Q(F, 2L)),$$

применяя которое к (2.4), приходим к утверждению леммы.

Лемма 3. *(Неравенство Бернштейна). Если для моментов* m_s $(s=0, 1, \ldots)$ *з.р.* H *выполнены соотношения* $m_1 = 0$, $|m_s| \leqslant \leqslant \alpha m_2 \tau^{s-2} s! \left(s = 3, 4, \ldots, \alpha \geqslant \frac{1}{2}, \tau > 0\right)$, *то для* $x > 0$

$$\max\{H^{n*}(-x),\ 1 - H^{n*}(x)\} \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/(4m_2 n)}, & 0 \leqslant x \leqslant m_2 n/(2\alpha\tau), \\ e^{-x/(8\alpha\tau)}, & x > m_2 n/(2\alpha\tau). \end{cases}$$

Доказательство см. в [3, с. 37]. Обозначим через τ_δ наибольшую точку роста з.р. $F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta$. Тогда для з.р. $H = F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta$ неравенство Бернштейна выполняется с параметрами $\alpha = 1$, $\tau = \tau_\delta$. Введем параметр $\widetilde{L} = b_1 \sqrt{n \ln(n+1)}$, где $b_1 = 10k(\tau_\delta + 1)$. Определим теперь классы б.д.з.р.:

$$D_{n,F} = \left\{D : \varphi(t;\ D) = \exp\left(\int\limits_{-\widetilde{L}}^{\widetilde{L}+0} (\cos tx - 1)\,\frac{1+x^2}{x^2}\, dG_D(x),\right.\right.$$

$$\left.\rho(D,\ F^{n*}) < b_2 n\,(n \ln^3(n+1))^{-k}\right\} \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

(здесь постоянная b_2 — достаточно мала и ее выбор определяется нижеследующими рассуждениями). Классы $\boldsymbol{D}_{n,F}$ могут быть пустыми.

Лемма 4. *Если все классы* $\boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geqslant b)$ *пустые, то для з.р.* F *справедлива оценка* (2.3).

Доказательство леммы 4. В силу предположения леммы для любого з.р. $D \in \boldsymbol{D}_s$ с учетом леммы 2 $(H = F)$ выполняется цепочка неравенств:

$$b_2 n\,(n \ln^3(n+1))^{-k} \leqslant \rho(D_{\widetilde{L}},\ F^{n*}) \leqslant 5\rho(D,\ F^{n*}) +$$

$$+ 2(1 - Q(F^{n*},\ 2\widetilde{L})) \leqslant 5\rho(D, F^{n*}) + 4(1 - F^{n*}(\widetilde{L})) \quad (n \geqslant b). \quad (2.5)$$

Поскольку верна простая оценка

$$1 - F^{n*}(\widetilde{L}) \leqslant 2(1 - (F_\delta \divideontimes \overline{F}_\delta)^{n*}(\widetilde{L}/2)) + 2(1 - \Phi^{n*}(\widetilde{L}/2)) \quad (n \in \boldsymbol{N}),$$

то в силу леммы 3 и неравенства

$$1 - \Phi^{n*}(x) = 1 - \Phi\left(x/\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-x^2/(2n)}\,\frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

получаем

$$1 - F^{n*}(\widetilde{L}) \leqslant b n^{-k-1} \quad (n \in \boldsymbol{N}). \quad (2.6)$$

Применяя эту оценку к (2.5), приходим для достаточно больших $n \geqslant b$ к неравенству (2.3), откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Существует такая постоянная b, что если $D \in \boldsymbol{D}_{n,F}$, где $n \geqslant b$, то $1 - D(x) \leqslant c \exp(-x/\tilde{L})$ $(x > 0)$.*

Доказательство. Для х.ф.з.р. $D \in \boldsymbol{D}_{n,F}$ справедлива формула

$$\varphi(iy;\ D) = \exp\left(\int\limits_{-\tilde{L}}^{\tilde{L}+0} (\operatorname{ch}(yx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG_D(x)\right) \quad (y \in \boldsymbol{R}).$$

Из нее легко извлекаем неравенство

$$e^{\sigma^2 y^2/2} \leqslant \varphi(iy;\ D) \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 e^{\tilde{L}|y|}\right), \tag{2.7}$$

где σ^2 — второй момент з.р. D. Для любых $T > L > 0$ и $y > 0$ имеем

$$\varphi(-iy;\ D) = \int\limits_{-L}^{L} e^{yx} dD(x) + \int\limits_{L<|x|<T} \ldots + \int\limits_{|x|>T} \ldots \leqslant$$
$$\leqslant e^{yL} + 2e^{yT}(1 - D(L)) + e^{-yT}(\varphi(-2iy;\ D) + 1).$$

Отсюда с учетом оценки (2.7) выводим

$$1 - D(L)) \geqslant e^{-yT}\varphi(-iy;\ D) - e^{y(L-T)} - e^{-2yT}(\varphi(-2iy;\ D) + 1) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-yT+\sigma^2y^2/2} - e^{y(L-T)} - \exp(-2yT + 2\sigma^2 y^2 e^{2\tilde{L}y}) - e^{-2yT}.$$

Положим в этом неравенстве $L = \tilde{L}$, $T = e^{10}\sigma$, $y = 4/\sigma$, предполагая, что $\sigma^2 > 2\tilde{L}^2$. Тогда находим, что $1 - D(\tilde{L}) \geqslant b$. С другой стороны, в силу определения класса $\boldsymbol{D}_{n,F}$ и оценки (2.6) имеем

$$1 - D(\tilde{L}) \leqslant 1 - F^{n*}(\tilde{L}) + \rho(F^{n*},\ D) \leqslant bn^{-k+1},$$

что для достаточно больших $n \geqslant b$ противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, справедлива оценка $\sigma^2 \leqslant 2\tilde{L}^2$. Поскольку из (2.7) следует $\varphi(-i/\tilde{L};\ D) \leqslant c$, то получаем искомую оценку:

$$1 - D(x) \leqslant \varphi(-i/\tilde{L};\ D)\, e^{-x/\tilde{L}} \leqslant ce^{-x/\tilde{L}} \quad (x > 0).$$

Лемма 6. *Справедлива оценка: $1 - F^{n*}(x) \leqslant c\,(e^{-x/(2\tilde{L})} + e^{-x^2/(8n)})$ $(x > 0,\ n \in \boldsymbol{N})$.*

Доказательство. Имеем

$$1 - F^{n*}(x) \leqslant 2\,(1 - \Phi^{n*}(x/2) + 1 - (F_\delta \ast \overline{F}_\delta)^{n*}(x/2) \leqslant$$
$$\leqslant ce^{-x^2/(8n)} + 2e^{-x/(2\tilde{L})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{u/\tilde{L}} d\,(F_\delta \ast \overline{F}_\delta)^{n*}(u) \leqslant$$
$$\leqslant ce^{-x^2/(8n)} + 2e^{\left(-\frac{1}{2}x\tilde{L} + \tau_\delta^2 n\right)\Big/\tilde{L}^2} \leqslant c\,(e^{-x^2/(8n)} + e^{-x/(2\tilde{L})}),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Существует постоянная b (не зависящая от параметра b_2), что для з.р. $D \in \boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geqslant b + b_2^{-1})$ справедливы оценки*

$$|\varkappa_{2k}(D) - \varkappa_{2k}(F^{n*})| \leqslant bb_2 n, \tag{2.8}$$

где $\varkappa_{2k}(D)$, $\varkappa_{2k}(F^{n*})$ — семиинварианты $2k$ порядка соответственно з.р. D и F^{n*}.

Доказательство. Подчеркнем, что постоянные b, фигурирующие при доказательстве леммы 7, от параметра b_2 не зависят. Пусть $M = 10k\tilde{L}\ln(n+1)$. Тогда с помощью интегрирования по частям находим следующие неравенства для моментов $2s$-го порядка $m_{2s}(D)$, $m_{2s}(F^{n*})$ $(s = 1, \ldots, k)$ соответственно з.р. D, F^{n*}:

$$|m_{2s}(D) - m_{2s}(F^{n*})| \leqslant 2s \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2s-1} |D(x) - F^{n*}(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant cs \int_{|x|>M} |x|^{2s-1} \left(e^{-x^2/(8n)} + e^{-|x|/(2\tilde{L})}\right) dx + cM^{2s}\rho(D, F^{n*}) \leqslant$$

$$\leqslant c(2s+1)!\tilde{L}^{2s} n^{-2k} + b \cdot b_2 n \left(n \ln^3(n+1)\right)^{s-k}. \tag{2.9}$$

Из определения семиинварианты $\varkappa_{2s}(F^{n*})$ видим, что она допускает представление

$$\varkappa_{2s}(F^{n*}) = \sum_{2l_1+\ldots+2l_p=2s} A_{l_1,\ldots,l_p} m_{2l_1}(F^{n*}) \ldots m_{2l_p}(F^{n*}), \tag{2.10}$$

где $A_{l_1,\ldots,l_p}$ — коэффициенты, по модулю не превосходящие постоянной, зависящей лишь от s. Запишем

$$m_{2l_1}(F^{n*}) = m_{2l_1}(D) + w_{2l_1}, \ \ldots, \ m_{2l_p}(F^{n*}) = m_{2l_p}(D) + w_{2l_p}.$$

Тогда имеем формулу

$$m_{2l_1}(F^{n*}) \ldots m_{2l_p}(F^{n*}) = m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_p}(D) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} w_{2l_j} m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_{j-1}}(D)\, m_{2l_{j+1}}(D) \ldots m_{2l_p}(D) + \ldots + w_{2l_1} \ldots w_{2l_p}. \tag{2.11}$$

Эта формула является представлением произведения моментов $m_{2l_j}(F^{n*})$ $(j = 1, \ldots, p)$ в виде суммы слагаемых, каждое из которых является суммой произведений фиксированного числа q $(q = 0, 1, \ldots, p)$ множителей w_{2l_j} на $p - q$ множителей вида $m_{2l_j}(D)$. Поскольку з.р. F — симметричный, то для его моментов $m_{2s}(F^{n*})$ $(s = 1, \ldots, k)$ справедлива простая оценка: $m_{2s}(F^{n*}) \leqslant (bn)^s$. Такая же оценка в силу (2.9) имеет место и для моментов $m_{2s}(D)$ $(s = 1, \ldots, k)$. В силу той же оценки (2.9) величины w_{2l_j} $(j = 1, \ldots, p)$

превосходят по модулю величин $b \cdot b_2 n (n \ln^3 (n+1))^{l_j - k}$ при $\geqslant b + b_2^{-1}$, поэтому из формулы (2.11) легко получаем неравенства

$$| m_{2l_1}(F^{n*}) \ldots m_{2l_p}(F^{n*}) - m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_p}(D) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} | w_{2l_j} | m_{2l_1}(D) \ldots m_{2l_{j-1}}(D) m_{2l_{j+1}}(D) \ldots m_{2l_p}(D) + \ldots +$$

$$+ \prod_{j=1}^{p} | w_{2l_j} | \leqslant \sum_{j=1}^{p} b^s n^{s-l_j} b_2 n (n \ln^3 (n+1))^{l_j - k} + \ldots +$$

$$+ (b \cdot b_2)^s (n \ln^3 (n+1))^{s-kp} n^p \leqslant b \cdot b_2 n.$$

Эти неравенства, примененные к формуле (2.10), приводят к оценке (2.8), что и требовалось доказать.

Теперь уже нетрудно показать, что имеет место (2.3). Для этого достаточно показать, что все классы $\boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geqslant b)$ пусты для столь малых b_2, что в оценке (2.8) $b \cdot b_2 < \delta$. Действительно, с одной стороны, имеет место оценка (2.8). С другой стороны, по определению з.р. F его $2k$ — семиинварианта $\varkappa_{2k}(F)$ равна $-2\delta(2k)!$ в то время как $2k$ — семиинварианта любого б.д.з.р. $D \in \boldsymbol{D}_{n,F}$ неотрицательна. Поэтому имеем оценку $\delta(2k)! \leqslant b \cdot b_2 < \delta$, приводящую к противоречию, если бы классы $\boldsymbol{D}_{n,F}$ $(n \geqslant b)$ не были пусты.

Остается заметить, что, как легко видеть, оценка (2.3) сохраняется, если класс $\boldsymbol{D}_s$ заменить на класс всех б.д.з.р. $\boldsymbol{D}$.

§ 3. Доказательство теорем 6—8. Сначала докажем теорему 6. Рассмотрим з.р. Q_A с х.ф. вида (1.3) и по нему построим искомый з.р. F. х.ф.з.р. F имеет вид

$$\varphi(t;\ F) = \begin{cases} \exp(-2|t|/A), & |t| \leqslant A, \\ e^{-1}(2 - |t|/A)\exp(-|t|/A), & A \leqslant |t| \leqslant 2A, \\ 0, & |t| \geqslant 2A. \end{cases}$$

То, что это х.ф., сразу следует из хорошо известной теоремы Г. Полиа:

Пусть $\varphi(t)$ — неотрицательна, четна, непрерывна, выпукла книзу при $t < 0$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда $\varphi(t)$ — х.ф.

Из этой же теоремы следует, что является х.ф. также функция $\psi(t) = \varphi(t;\ F)\exp(|t|/A)$. Кроме того, функция $\psi(t)$ совпадает на отрезке $[-A, A]$ с б.д.х.ф. $\exp(-|t|/A)$. Применяя к з.р. F теорему 4 ($\varphi(t;\ D) = \exp(-|t|/A)$), получаем, что для з.р. F выполняется первое из соотношений теоремы 6. Второе из соотношений теоремы 6 вытекает из теоремы 3. Действительно, если бы оно не выполнялось, то из теоремы 3 следовало бы, что з.р. $F \in \boldsymbol{D}$. А это не так, поскольку $\varphi(t;\ D) = 0$ для $|t| \geqslant 2A$.

Доказательство теоремы 7. Пусть $F_{л\gamma}$ — логнормальный з.р. с х.ф. вида

$$\varphi(t;\ F_{л\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \int_0^\infty e^{itx - (\ln x)^2/(2\gamma)} \frac{dx}{x} \quad (\gamma > 0).$$

Моменты $m_k(F_{л\gamma})$ порядка k $(k=0, 1, \ldots)$ з.р. $F_{л\gamma}$ легко подсчитываются:

$$m_k(F_{л\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}\int\limits_0^\infty x^k e^{-(\ln x)^2/(2\gamma)}\frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{ku-\frac{u^2}{2\gamma}}du = e^{\gamma k^2/2}.$$

Рассмотрим з.р. $F_{л\gamma s} = F_{л\gamma} \divideontimes \overline{F}_{л\gamma}$. Легко видеть, что з.р. $F_{л\gamma s}$ — абсолютно непрерывный и для его плотности $p(x)$ справедлива оценка

$$p(x) = \frac{1}{2\pi\gamma}\int\limits_0^{|x|} e^{-(\ln^2(|x|-u)+\ln^2 u)/(2\gamma)}\frac{du}{(|x|-u)u} \geqslant \frac{1}{2\pi\gamma}\int\limits_{|x|/4}^{|x|/2}\ldots\, du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{b}{|x|}e^{-2(\ln|x|)^2/\gamma} \quad (x\in \boldsymbol{R}\diagup\{0\}). \tag{3.1}$$

Здесь и в дальнейшем при доказательстве теоремы 7 через b обозначаем положительные постоянные не всегда одни и те же, зависящие лишь от параметра γ. Для моментов $m_{2k}(F_{л\gamma s})$ $(k=0, 1, \ldots)$ з.р. $F_{л\gamma s}$ нетрудно проверить справедливость оценки

$$m_{2k}(F_{л\gamma s}) \leqslant \sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l e^{\frac{1}{2}\gamma((2k-l)^2+l^2)} \leqslant e^{2\gamma k^2}\sum_{l=0}^{2k} C_{2k}^l = 2^{2k}e^{2\gamma k^2}. \tag{3.2}$$

Из оценки (3.1) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^\infty (1+x^2)^{-1}\ln p(x)\,dx > -\infty,$$

тогда, как было показано М. Г. Крейном (см. [10, с. 112]), последовательность $\{m_k(F_{л\gamma s})\}_{k=0}^\infty$ порождает неопределенную проблему моментов. Р. Неванлинной было дано полное описание всех решений неопределенной проблемы моментов. Напомним его. Обозначим через $P_k(z)$, $Q_{k+1}(z)$ — ортогональные полиномы степени k соответственно первого и второго рода, отвечающие неопределенной проблеме моментов $\{m_k(F_{л\gamma s})\}_{k=0}^\infty$. Полиномы $P_k(z)$, $Q_k(z)$ — вещественные на вещественной оси и для них ряды

$$\sum_{k=0}^\infty |P_k(z)|^2,\ \sum_{k=0}^\infty |Q_k(z)|^2$$

сходятся всюду в открытой комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$. Обозначим

$$\rho(z) = \Big(\sum_{k=0}^\infty (P_k(z))^2\Big)^{-1},\ \rho_n(z) = \Big(\sum_{k=0}^n (P_k(z))^2\Big)^{-1}\ (n\in \boldsymbol{N}).$$

Далее определим четверку функций формулами

$$A(z) = z\sum_{k=0}^\infty Q_k(0)Q_k(z),\ B(z) = -1 + z\sum_{k=0}^\infty Q_k(0)P_k(z),$$

$$C(z) = 1 + z\sum_{k=0}^\infty P_k(0)Q_k(z),\ E(z) = z\sum_{k=0}^\infty P_k(0)P_k(z).$$

Как было установлено М. Риссом (см. [10, с. 75]), функции $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $E(z)$ являются целыми функциями не выше минимального типа порядка один.

По теореме Р. Неванлинны (см. [10, с. 124—125]) формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = -\frac{A(z)\,\varphi(z) - C(z)}{B(z)\,\varphi(z) - E(z)} \tag{3.3}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между совокупностью V всех решений $\sigma(u)$ рассматриваемой проблемы моментов и совокупностью всех функций $\varphi(z)$ класса Неванлинны (определение функций класса Неванлинны см. [10, с. 117]), пополненного константой ∞. Конечные вещественные постоянные по определению входят в этот класс функций. Нас будет интересовать только решение проблемы моментов, отвечающее функции $\varphi(z) \equiv 0$. Это решение будем обозначать через $\sigma_0(u)$. З.р. σ_0 является дискретным с точками роста, расположенными в нулях функции $E(z)$. Как известно [10], нули этой функции — вещественные кратности один. Наша ближайшая задача — показать, что нули функции $E(z)$ расположены очень редко.

Лемма 8. *Функция $E(z)$ допускает оценку*

$$|E(z)| \leqslant b \exp\left(\frac{7}{\gamma} \ln^2 (|z|+1)\right) \quad (z \in \boldsymbol{C}).$$

Доказательство. Зададимся $T > 0$ и введем функцию

$$f_{nT}(z) = \int_0^T (\rho_n(t+z))^{-1}\, dt.$$

Оценим эту функцию для вещественных z. Сначала заметим, что для любого решения $\sigma(u)$ рассматриваемой проблемы моментов и $n \in \boldsymbol{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^{-1} (\rho_n(u))^{-1}\, d\sigma(u) \leqslant b. \tag{3.4}$$

Это неравенство принадлежит Н. И. Ахиезеру (см. [10, с. 69—70]). Из (3.4) получаем для $z > 0$ с учетом оценки (3.1)

$$b \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)\,dx}{(1+x^2)\,\rho_n(x)} \geqslant \int_0^T \frac{p(x+z)\,dx}{(1+(x+z)^2)\,\rho_n(x+z)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{b f_{nT}(z)}{1+(T+z)^3} e^{-\frac{6}{\gamma}(\ln^2 z + \ln^2(T+1))}.$$

Отсюда имеем нужную оценку для $z > 0$:

$$0 \leqslant f_{nT}(z) \leqslant b\,(1+(T+z)^3)\, e^{6(\ln^2 z + \ln^2(T+1))/\gamma}.$$

В комплексной плоскости с разрезом по положительному лучу C_+ рассмотрим функцию

$$f_{nT1}(z) = f_{nT}(z) \exp(-7 (\ln z)^2/\gamma),$$

причем однозначную ветвь $\ln z$ выбираем условием, что на верхнем берегу разреза $\operatorname{Im} \ln z = 0$. Функция $f_{nT1}(z)$ в C_+ — однозначная аналитическая непрерывная вплоть до границы. На обоих берегах разреза ее модуль не превосходит $b(1+T)^3 \exp(6(\ln(T+1))^2/\gamma)$. Так как функция $f_{nT1}(z)$ в C_+ растет, очевидно, не быстрее полинома 1-й степени, то в силу принципа Фрагмена — Линделефа (см. [11, с. 211]) получаем в C_+ неравенство

$$|f_{nT1}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp(6(\ln(T+1))^2/\gamma),$$

что влечет за собой нужную оценку:

$$|f_{nT}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp((7\ln^2|z| + 6\ln^2(T+1))/\gamma) \quad (z \in C_+). \tag{3.5}$$

Поскольку $f_{nT}(z)$ — аналитическая в круге $|z| \leqslant 1$ функция, то из (3.5) следует $|f_{nT}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp\left(\frac{6}{\gamma}\ln^2(T+1)\right)$ ($|z| \leqslant 1$). Из последних двух оценок с помощью формулы Коши для $f_{nT}^{(1)}(z)$ легко получаем оценку

$$|f_{nT}^{(1)}(z)| \leqslant b(1+T)^3 \exp((14\ln^2(|z|+1) + 6\ln^2(T+1))/\gamma) \quad (z \in C). \tag{3.6}$$

Теперь воспользуемся формулой

$$f_{nT}^{(1)}(z) = \int_0^T \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho_n(t+z)}\,dt = \frac{1}{\rho_n(T+z)} - \frac{1}{\rho_n(z)}. \tag{3.7}$$

Так как $1/\rho_n(0) \leqslant b$, то, полагая в (3.7) $z = 0$, получаем с помощью (3.6) оценку

$$|\rho_n(T)|^{-1} \leqslant b(1+T)^3 \exp\left(\frac{6}{\gamma}\ln^2(T+1)\right) \quad (T \geqslant 0,\ n \in N).$$

Поэтому эта оценка сохранится для функции $1/\rho(T)$ $(T \geqslant 0)$. Из (3.7) и определения функции $E(z)$ имеем для $T \geqslant 0$

$$|E(T)| \leqslant \frac{1}{2}T\sum_{k=0}^{\infty}(P_k^2(0) + P_k^2(T)) \leqslant \frac{1}{2}T\left(\frac{1}{\rho(0)} + \frac{1}{\rho(T)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant b|T|(1+|T|)^3 \exp\left(\frac{6}{\gamma}\ln^2(|T|+1)\right).$$

Аналогично такие же оценки доказываются для $T < 0$.

Вспомним, что по теореме М. Рисса функция $E(z)$ — целая не выше минимального типа порядка один. Поэтому к функции $E_1(z) = E(z)\exp\left(-\frac{7}{\gamma}\ln^2 z\right)$ (однозначная ветвь $\ln z$ выбирается условием $\operatorname{Im}\ln z = 0$, $z > 0$) в верхней и нижней полуплоскостях применим принцип Фрагмена — Линделефа. Из него сразу следует, что функция $E(z)$ в $\boldsymbol{C}$ допускает оценку $|E(z)| \leqslant b\exp\left(\frac{7}{\gamma}\ln^2(|z|+1)\right)$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $n(r)$ число нулей функции $E(z)$ в круге $|z| \leqslant r$. Отметим, что, как легко усматривается из определения функций $C(z)$, $E(z)$, функция $E(z)$ — нечетная, а функция $C(z)$ — четная. Отсюда следует симметричность з.р. σ_0.

Лемма 9. *Пусть* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(y_k \uparrow \infty)$ — *положительные корни функции* $E(z)$. *Найдется такое число* $b > 1$ *и бесконечная подпоследовательность положительных корней* $\{y_{k'}\}$ *такие, что* $y_{k'+1}/y_{k'} \geqslant b > 1$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы 9 неверно. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого k_0, зависящего, конечно, от ε, выполняется $y_{k+1} < (1+\varepsilon)y_k$. Поскольку функция $E(z)$ — нечетная, это означает, что функция $n(t)$ для $t \geqslant t_0(\varepsilon)$ допускает оценку $n(t) \geqslant (\ln t)/\ln(1+\varepsilon)$. Для функции $E_0(z) = E(z)/z$ справедливо хорошо известное неравенство Иенсена [11, с. 221]:

$$\ln M(r, E_0) - \ln E_0(0) \geqslant \int_0^r \frac{n(t)-1}{t}\,dt. \tag{3.8}$$

Здесь $M(r, E_0) = \max_{|z|=r}|E_0(z)|$. Из этой формулы, учитывая оценку снизу функции $n(t)$ и оценку сверху функции $E(z)$, даваемую леммой 8, приходим к неравенству для больших $r > t_0(\varepsilon)$:

$$\frac{7}{\gamma}\ln^2(r+1) + b \geqslant \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\int_{t_0(\varepsilon)}^{r} \frac{(\ln t)-1}{t}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\ln^2 r - \frac{1}{2}\ln^2 t_0(\varepsilon) - \ln\frac{r}{t_0(\varepsilon)}\right).$$

Очевидно, что для достаточно малых $\varepsilon < b$ приходим к противоречию. Лемма 9 доказана.

Перейдем к построению з.р. $F \in \boldsymbol{F}_+$, удовлетворяющего неравенствам (7). Определим $F = (\Phi \divideontimes \sigma_0)^{2*}$. Сначала покажем, что для этого з.р. F выполняется левое из неравенств (7). Как было показано Ториным [12], логнормальный з.р. $F_{\text{л}\gamma}$ является б.д., поэтому з.р. $(\Phi \ast F_{л\gamma s})^{(2n)*}$ тоже является б.д. С помощью формулы обращения имеем

$$\rho(F^{n*}, (\Phi^{2*} \ast F^{2*}_{л\gamma s})^{n*}) \leqslant \sup_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} \left| \frac{e^{ixt}-1}{t} \right| |\varphi^{2n}(t;\ \sigma_0) -$$

$$- \varphi^{2n}(t;\ F_{л\gamma s})|\, dt \leqslant \sup_x \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2} \left| \frac{e^{ixt}-1}{t} \right| |\varphi(t;\ \sigma_0) - \varphi(t;\ F_{л\gamma s})|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{\pi} \Bigg(\sup_x \int_{|t|\leqslant\delta_n} \left| \frac{e^{ixt}-1}{t} \right| |\varphi(t;\ \sigma_0) - \varphi(t;\ F_{л\gamma s})|\, dt +$$

$$+ 4 \int_{|t|>\delta_n} \delta_n^{-1} e^{-nt^2} dt \Bigg) = \frac{n}{\pi}(I_{1n} + I_{2n}), \tag{3.9}$$

где $\delta_n = (\ln n)/\sqrt{\gamma n}$. По формуле Тейлора

$$\varphi(t;\ \sigma_0) - \varphi(t;\ F_{л\gamma s}) = \frac{1}{k!}(\varphi^{(k)}(\theta t;\ \sigma_0) - \varphi^{(k)}(\theta t;\ F_{л\gamma s}))\, t^k$$

$$\left(t \in [-\delta_n,\ \delta_n],\ \frac{1}{2}k = \left[\frac{1}{4\gamma}\ln n\right],\ 0 < \theta < 1 \right). \tag{3.10}$$

С помощью формулы (3.10) и оценки (3.2) легко получаем для достаточно больших $n \geqslant b$

$$I_{1n} \leqslant \frac{4}{k!} m_k(F_{л\gamma s})\, \delta_n^k \leqslant \frac{4}{k!} 2^k e^{\gamma k^2/2} \delta_n^k \leqslant e^{-\frac{1}{8\gamma}\ln^2 n}.$$

Кроме того, для больших $n \geqslant b$ имеем

$$I_{2n} = \frac{4}{\delta_n \sqrt{n}} \int_{|t|>\delta_n\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant e^{-(\delta_n\sqrt{n})^2} = e^{-\frac{1}{\gamma}\ln^2 n}.$$

Применяя две последние оценки к неравенству (3.9), получаем левую часть неравенства (7), если в качестве γ_0 брать $(10\gamma)^{-1}$.

Приступим для з.р. F к доказательству правой части неравенства (7). Для этого достаточно показать, что х.ф.з.р. F ни на каком симметричном относительно нуля отрезке (невырожденном) не совпадает с х.ф.б.д.з.р. Действительно, если это будет доказано, то из того, что для некоторой последовательности индексов $n_k \to \infty$: $\rho(F^{n_k*},\ \boldsymbol{D}) \leqslant \exp(-\Delta n_k)$ $(\exists \Delta > 0)$ следует в силу теоремы 3, что х.ф.з.р. F совпадает на некотором отрезке $[-a,\ a]$ $(a > 0)$ с х.ф. некоторого б.д.з.р., что невозможно.

В свою очередь, искомое свойство х.ф. $\varphi(t;\ F)$ является следствием факта, что функция $\varphi(t;\ F_1)$, где з.р. $F_1 = \Phi \ast \sigma_0$, допускает с любого отрезка $[-a,\ a]$ $(a > 0)$ единственное непрерывное эрмитово положительное продолжение. В этом случае из совпадения х.ф. $\varphi(t;\ F)$ на некотором отрезке $[-a,\ a]$ $(a>0)$ с х.ф. какого-нибудь б.д.з.р. D следует, что на этом же отрезке $\varphi(t;\ F_1)=\varphi^{1/2}(t;\ D)=\varphi(t;\ D_1)$ $(D_1\in \boldsymbol{D})$. Отсюда заключаем, что $F_1\in \boldsymbol{D}$ и для $t\in \boldsymbol{R}$ имеет место

$$e^{-t^2/2}\varphi(t,\ \sigma_0)=\varphi(t;\ D_1)\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\cos tx-1)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_{D_1}(x)\right),$$

где G_{D_1} — неубывающая, ограниченная функция. Из этого представления следует, что б.д.з.р. D_1 имеет гауссову компоненту Φ. Но тогда из этого же представления получаем, что з.р. $\sigma_0\in \boldsymbol{D}$. Поскольку з.р. σ_0 — симметричный дискретный со скачками в точках $\{-y_k\}_{k=1}^{\infty}\cup\{0\}\cup\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и в силу леммы 9 для некоторой бесконечной последовательности индексов k' выполняется $y_{k'+1}\geqslant by_{k'}$ $(\exists b>1)$, то легко видеть, что з.р. σ_0 не может быть б.д. Таким образом, доказательство правой части неравенства (7) свелось к доказательству единственности решения задачи М. Г. Крейна о продолжении с любого фиксированного отрезка $[-a,\ a]$ $(a>0)$ эрмитово положительной непрерывной функции $\varphi(t;\ F_1)$.

Вопрос о единственности продолжения х.ф. $\varphi(t;\ F_1)$ с любого отрезка $[-a,\ a]$ $(a>0)$ связан с поведением функции Мергеляна $W_{ma}(x,\ F_1)$ (см. [13, с. 192—227]), определяемой следующим образом: $W_{ma}(x,\ F_1)=\sup|f(x)|^2$, где sup берется по множеству всех целых функций вида

$$f(z)=\int\limits_0^a e^{izt}\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi\in L^2([0,\ a]) \tag{3.11}$$

удовлетворяющих неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dF_1(x)\leqslant 1. \tag{3.12}$$

Как установлено в [13, с. 202—227], если х.ф. $\varphi(t;\ F_1)$ допускает неединственное непрерывное эрмитово положительное продолжение с отрезка $[-a,\ a]$, то $W_{ma}(x,\ F_1)$ $(x\in \boldsymbol{R})$ является непрерывной функцией и такой, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln^+W_{ma}(x,\ F_1)\,dx<\infty$$

(для $y>0$ $\ln^+y=\max(\ln y,\ 0)$). Поэтому нужное утверждение следует из такой леммы.

Лемма 10. *Для з.р.* F_1 *имеет место соотношение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\ln^+W_{ma}(x,\ F_1)\,dx=+\infty\quad(0<a\leqslant 1).$$

Доказательство. Воспользуемся одним приемом Де Бранжа — П. Куусиса [14, с. 235—237]. Из леммы 9 следует, что з.р. σ_0 — симметричный дискретный с точками роста во множестве $\{-y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($y_k > 0$, $y_k \uparrow \infty$) и для некоторой бесконечной последовательности индексов k' выполняется неравенство $y_{k'+1} > by_{k'}$ ($\exists b > 1$). Построим функцию $\omega(x)$ следующим образом. Для $x \geqslant 0$ она равна нулю вне отрезков $[(b+3)\,y_{k'}/4,\ (3b+1)\,y_{k'}/4]$, а на каждом из таких отрезков $\omega(x)$ совпадает с ломаной линией с вершинами $((b+3)\,y_{k'}/4,\ 0)$, $((b+1)\,y_{k'}/2,\ (b-1)\,y_{k'}/4)$, $((3b+1)\,y_{k'}/4,\ 0)$. Для $x < 0$ положим $\omega(x) = \omega(-x)$. Рассмотрим функцию $W(x) = \exp(\omega(x))$. Эта функция $W(x) \geqslant 1$ и удовлетворяет условию $|\ln(W(x_2)/W(x_1))| \leqslant c\,|x_2 - x_1|$ для всех $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$. Следуя П. Куусису, введем функцию $f_x(z) = \cos\left(\frac{a}{2}\sqrt{(z-x)^2 - R^2}\right)$, где $R = (\ln W(x))/\sqrt{c^2 + a^2/4}$, $z \in \boldsymbol{C}$, $x \in R$. Это — целая функция экспоненциального типа $\leqslant a/2$, для которой

$$|f_x(x)| \geqslant \frac{1}{2}\,(W(x))^{a/\sqrt{4c^2+a^2}} \quad (x \in \boldsymbol{R}), \tag{3.13}$$

$$|f_x(u)| \leqslant W(u) \quad (u \in \boldsymbol{R}) \tag{3.14}$$

(см. [14, с. 235—236]). Далее, не уменьшая общности, считаем $W(x) = 1$ ($|x| \leqslant b_0$, b_0 — достаточно большая постоянная). Покажем, что

$$W_{ma}(x) \geqslant \frac{1}{10^3 x^2}\,(W(x))^{a/\sqrt{4c^2+a^2}} \quad \Big(x \in \bigcup_{y_{k'} > b_0} I_{k'}\Big), \tag{3.15}$$

где $I_{k'} = [(b+2)\,y_{k'}/3,\ (2b+1)\,y_{k'}/3]$. Для этого рассмотрим функцию $\tilde{f}_x(z) = e^{iaz/2}\,(f_x(z) - f_x(0))/10z$ ($z \in \boldsymbol{C}$) и проверим, что она содержится во множестве целых функций, определяющем функцию Мергеляна $W_{ma}(x, F_1)$. Функция $\tilde{f}_x(z)$, очевидно, имеет вид (3.11) и для нее, как легко убедиться с помощью (3.14), справедлива оценка: $|\tilde{f}_x(u)| \leqslant (W(u) + 1)/(10\,|u|)$ ($|u| \geqslant 1$). Кроме того, очевидно, $|\tilde{f}_x(u)| \leqslant 1/10$ ($|u| \leqslant 1$). Поэтому имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_x(u)|^2\,dF_1(u) \leqslant \frac{1}{100} + \frac{1}{50}\int_{|u| \geqslant 1} u^{-2}\,dF_1(u) + {}$$

$$+ 2\sum_{y_{k'} > b_0} \frac{1}{100}\int_{I_{k'}} u^{-2}\,(W(u) + 1)^2\,dF_1(u). \tag{3.16}$$

Плотность з.р. F_1 на каждом отрезке $I_{k'}$ допускает следующую простую оценку:

$$F_1'(u) \leqslant e^{-(u - y_{k'})^2/4} + e^{-(u - y_{k'+1})^2/4} \leqslant 2e^{-bu^2}.$$

Поскольку $W(u) \leqslant \exp(c|u|)$ $(u \in \boldsymbol{R})$, то

$$\sum_{y_{k'} \geqslant b_0} \int_{I_{k'}} u^{-2} (W(u)+1)^2 dF_1(u) \leqslant \sum_{y_{k'} \geqslant b_0} 2 \int_{I_{k'}} e^{cu-bu^2} du \leqslant 1.$$

Применяя полученную оценку к (3.16), получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_x(u)|^2 dF_1(u) \leqslant 1,$$

что и требовалось доказать. Теперь искомое неравенство (3.15), очевидно, следует из неравенства (3.13). На каждом отрезке $I_{k'}$ справедлива оценка $\ln W(x) \geqslant b|x|$, поэтому из неравенства (3.15) извлекаем оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} \ln^+ W_{ma}(x, F_1) dx \geqslant \frac{a}{\sqrt{4c^2+a^2}} \sum_{y_{k'} \geqslant b_0} \int_{I_{k'}} \frac{b|x|dx}{1+x^2} -$$

$$- c \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} \ln(|x|+1)\, dx = +\infty,$$

из которой следует утверждение леммы 9.

Доказательство теоремы 8. Зададимся числом $2\alpha \in \left(\frac{99}{100}, 1\right)$ и рассмотрим б.д.з.р. F_α с х.ф. вида

$$\varphi(t;\ F_\alpha) = \exp\left(\int_0^\infty (e^{itx}-1)\, e^{-x^\alpha} dx\right) = e^{-c_\alpha} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_\alpha^q(t)}{q!}, \qquad (3.17)$$

где

$$f_\alpha(t) = \int_0^\infty e^{itx - x^\alpha} dx, \quad c_\alpha = \int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx.$$

Оценим моменты з.р. F_α. Прежде всего замечаем, что

$$f_\alpha^{(k)}(0) = i^k \int_0^\infty x^k e^{-x^\alpha} dx = \frac{i^k}{\alpha} \int_0^\infty x^{\frac{k+1}{\alpha}-1} e^{-x} dx = i^k \Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right) \alpha^{-1}.$$

Поскольку имеет место формула

$$(f_\alpha^q(t))^{(k)} = \sum_{k_1+\ldots+k_q=k} \frac{k!}{k_1!\ldots k_q!} f_\alpha^{(k_1)}(t) \ldots f_\alpha^{(k_q)}(t),$$

в которой число слагаемых не превосходит C_{k+q-1}^{k}, то с помощью предыдущего соотношения и формулы Стирлинга легко получаем оценку

$$|(f_{\alpha}^{q}(t))^{(k)}| \leqslant \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{q} k! \sum_{k_1+\ldots+k_q=k} e^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)(k_1+1)\ln(k_1+1)} \times$$

$$\times e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)(k_1+1)} \ldots e^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)(k_q+1)\ln(k_q+1)+\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)(k_q+1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{k+q}^{k}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{q} k!\, e^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)k\ln(k+1)+\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)(k+q)+q\ln(k+1)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi(k+1)^{q+1} e^{\frac{1}{\alpha}k\ln(k+1)+\left(2\ln 2-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)k} e^{\left(2+\ln 2-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln\alpha\right)q} \quad (q \geqslant 1).$$

Эта оценка позволяет оценить моменты з.р. F_{α}. Действительно, с ее помощью из формулы (3.17) выводим

$$m_k(F_{\alpha}) \leqslant b(k+1)\, e^{\frac{1}{\alpha}k\ln(k+1)+ck} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots). \tag{3.18}$$

Здесь и далее через b обозначаем положительные постоянные не всегда одни и те же, зависящие лишь от параметра α.

Теперь рассмотрим симметричный з.р. $F_{\alpha s}$, задаваемый для $x>0$ формулой $F_{\alpha s}(x)=\frac{1}{2}(F_{\alpha}(x^2)+1)$ и для $x<0$ — формулой $F_{\alpha s}(x)=$ $=\frac{1}{2}(1-F_{\alpha}(x^2))$. Как и при доказательстве теоремы 7, с помощью критерия М. Г. Крейна устанавливаем, что последовательность моментов $\{m_k(F_{\alpha s})\}_{k=0}^{\infty}$ порождает неопределенную последовательность моментов. Так же, как при доказательстве теоремы 7, выберем решение этой проблемы моментов, отвечающее функции $\varphi(z)\equiv 0$ из формулы Неванлинны (3.3). Это решение — з.р. σ_0 является симметричным дискретным з.р. Определим з.р. $\tilde{\sigma}_0(u)=0$ для $u\leqslant 0$ и $\tilde{\sigma}_0(u)=\sigma_0(\sqrt{u})-\sigma_0(-\sqrt{u})$ для $u>0$. З.р. $\tilde{\sigma}_0$ является решением проблемы моментов $\{m_k(F_{\alpha})\}_{k=0}^{\infty}$.

Покажем теперь, что з.р. $F=\Phi \ast \tilde{\sigma}_0$ является искомым. С помощью формулы обращения имеем

$$\rho(F^{n*},\ (\Phi \ast F_{\alpha})^{n*}) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\left|\frac{e^{itx}-1}{t}\right| |\varphi^n(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi^n(t;\ F_{\alpha})|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{2\pi}\sup_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\left|\frac{e^{itx}-1}{t}\right| |\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha})|\, dt = \frac{n}{2\pi} I_n. \tag{3.19}$$

Из формулы Тейлора для функций $\mathrm{Re}\,(\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha}))$, $\mathrm{Jm}\times$ $\times(\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha}))$ легко получаем оценку

$$|\varphi(t;\ \tilde{\sigma}_0)-\varphi(t;\ F_{\alpha})| \leqslant \frac{4}{k!} m_k(F_{\alpha})\,|t|^k \ (t\in \boldsymbol{R}),$$

справедливую для любого $k \in \boldsymbol{N}$. Будем считать $k=[n^{\alpha_0}]$, $0<\alpha_0<\alpha/(2-\alpha)$. Используя эту оценку, выводим для достаточно больших n

$$I_n \leqslant \frac{b}{k!} m_k(F_\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2} |t|^{k-1} dt \leqslant \frac{b}{k!} m_k(F_\alpha) \left(\frac{1}{2}n\right)^{-k/2} \Gamma(k/2) \leqslant$$

$$\leqslant b \exp\left\{ck + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) k \ln(k+1) - \frac{1}{2} k \ln n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant b \exp\left\{cn^{\alpha_0} + \left(\alpha_0\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)(n^{\alpha_0} - 1)\ln n\right\} \leqslant \frac{1}{n} \exp(-n^{\alpha_0}).$$

Применяя последнее неравенство к (3.19), приходим к нужной оценке сверху величины $\rho(F^{n*}, \boldsymbol{D})$.

Правая часть неравенства (7) для з.р. $F \notin \boldsymbol{D}$ следует из теоремы 1. Действительно, поскольку у з.р. F существуют k-е ($k=1, 2, \ldots$) моменты, то для величины $N_\nu(n)$ справедлива оценка: $N_\nu(n) \leqslant \exp(\eta\nu n)$ для $\forall \eta>0$ и $n \geqslant n_0(\eta, F)$. Кроме того, у з.р. F величина $m(F)=1$. Чтобы это доказать, достаточно показать, что х.ф. $\varphi(t; F)$ ни на каком отрезке $[-a, a]$ $(a>0)$ не совпадает с х.ф. некоторого б.д.з.р. D. Поскольку х.ф. $\varphi(t; F)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Jm} t>0$, то из совпадения $\varphi(t; F)$ на каком-нибудь отрезке $[-a, a]$ $(a>0)$ с х.ф. некоторого б.д.з.р. D следует в силу теоремы П. Леви — И. Марцинкевича (см. [8. с. 38—39]), что х.ф. $\varphi(t; D)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Jm} t>0$. Так как функции $\varphi(t; F)$, $\varphi(t; D)$ к тому же непрерывны в полуплоскости $\operatorname{Jm} t \geqslant 0$, то в силу теоремы единственности они совпадают всюду на вещественной прямой. Поэтому, чтобы доказать правую часть неравенства (7), как это уже отмечалось при доказательстве теоремы 7, достаточно показать, что з.р. $\tilde{\sigma}_0 \notin \boldsymbol{D}$. Вспомним, что з.р. $\tilde{\sigma}_0$ — дискретный со скачками в точках $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(x_k \uparrow +\infty)$, где x_k по построению з.р. σ_0 нули целой функции $E(z)$ из формулы (3.3). Как известно (см. [10]), $E(z)$ имеет только вещественные нули. Поскольку $E(z)$ — целая функция не выше минимального типа порядка один, то из формулы (3.8) легко следует, что найдется подпоследовательность точек $\{x_{k'}\}_{k'=1}^{\infty}$ $(x_{k'} \uparrow +\infty)$ такая, что для любого $d>0$ найдется $k'(d) \in \boldsymbol{N}$, что для $k' \geqslant k'(d)$ $x_{k'+1} - x_{k'} > d$. Отсюда сразу получаем, что $\tilde{\sigma}_0 \notin \boldsymbol{D}$, ибо в противном случае должно было найтись такое число $d_1>0$, что на каждом отрезке длины d_1 найдется скачок з.р. $\tilde{\sigma}_0$. Тем самым теорема 8 доказана.

Список литературы: 1. *Прохоров Ю. В.* О суммах одинаково распределенных величин // Докл. АН СССР. 1955. **105**, № 4. С. 645—647. 2. *Колмогоров А. Н.* Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых // Теория вероятн. и ее применение. 1956. **1**, № 4. С. 426—436. 3. *Арак Т. В., Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Тр. МИАН. 1986. **174**. С. 3—214. 4. *Арак Т. В.* О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами // Теория вероятн. и ее применение. 1980. **25**,

№ 4. С. 225—246. 5. *Арак Т. В.* О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I, II // Теория вероятн. и ее применение. 1981. **26**, № 2. С. 225—245, № 3. С. 449—463. 6. *Арак Т. В.* Уточнение нижней оценки для скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова // Теория вероятн. и ее применение. 1982. **27**, № 4. С. 767—772. 7. *Арак Т. В.* Об аппроксимации n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, безгранично делимыми распределениями // Тр. Таллин. политехн. ин-та. 1980. № 482. С. 81—85. 8. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., 1972. 480 с. 9. *Пресман Э. Л.* О сближении биномиальных и безгранично делимых распределений // Теория вероятн. и ее применение. 1983. **28**. № 2. 372—382. 10. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. 2. М., 1968. 624 с. 12. *Thorin O.* On the Infinite Divisibility of the Lognormal Distribution // Scand. Actuarial I. 1977. 3. P. 121—148. 13. *Кацнельсон В. Э.* Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. I.— Деп. ВИНИТИ, № 171, 1983. 250 с. 14. *Koosis P.* The logarithmic integral I. Cambridge univ. press, 1987. 602 p.

Поступила в редколлегию 16.11.89

УДК 517.535

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ СУЖЕНИЙ НА $\mathbb{R}^n$ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Пусть функция $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}$, а E — подмножество $\boldsymbol{R}^n$. Назовем эту функцию E-эрмитово-позитивной, если $(\forall N \in \boldsymbol{N})(\forall x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in E)$ $(\forall \zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \boldsymbol{C})$:

$$\sum_{j,k=1}^{N} f(x^{(j)} - x^{(k)})\, \zeta_j \bar{\zeta}_k \geqslant 0. \tag{1}$$

При $E = \boldsymbol{R}^n$ функция f, удовлетворяющая условию (1), *положительно определена* в обычном смысле.

В настоящей работе изучается вопрос, для каких множеств E и классов функций f из того, что f E-эрмитово-позитивна, вытекает положительная определенность этой функции. Если от функций f не требовать ничего, кроме E-эрмитово-позитивности, то естественное необходимое условие того, что эти функции положительно определены, таково: алгебраическая разность $E - E = \{x - y : x \in E,\ y \in E\}$ должна совпадать с $\boldsymbol{R}^n$. Как следует из приведенного ниже примера, это условие не является достаточным даже для классов $\boldsymbol{C}^k(\boldsymbol{R}^n)$, $k \in \boldsymbol{N}$. Более сильное условие на множество E: его дополнение измеримо и не является относительно плотным подмножеством $\boldsymbol{R}^n$ — достаточно для всего класса E-эрмитово-позитивных функций. Напомним, что множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ называется относительно плотным, если оно измеримо и для некоторых постоянных $L > 0$ и $\delta > 0$ лебегова мера пересечения A с кубом

$$K(x, L) = \{y \in \boldsymbol{R}^n : \max\{|y_j - x_j| : j = \overline{1, n}\} \leqslant L\}$$

е меньше, чем δ, при любом $x \in \boldsymbol{R}^n$. Достаточность сформулированного условия становится очевидной, если заметить, что при его выполнении для любого конечного набора векторов $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in \boldsymbol{R}^n$ найдется такой набор векторов $y^{(1)}, \ldots, y^{(N)} \in E$, что для любых индексов $j, k \in \{1, \ldots, N\}$ имеет место равенство $x^{(j)} - x^{(k)} = y^{(j)} - y^{(k)}$. В справедливости замечания легко убедиться, если учесть, что для любых постоянных $M > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой куб $K(x, M)$, что лебегова мера его пересечения с дополнением E меньше ε, и оценить меру множества

$$\{y \in K(x, M) \cap E \mid \exists j \in \{1, \ldots, N\} : y + x^{(j)} - x^{(1)} \notin E\}.$$

Однако это достаточное условие не необходимо. Усмотреть это проще всего при $n = 1$; этим случаем мы и ограничимся. Зададимся произвольным числом $\delta \in (0, 1)$. Для любых натуральных j и k найдутся такое число $N_k^{(j)} \in \boldsymbol{N}$ и такое множество $F_k^{(j)} \subset [0, N_k^{(j)}]$, что, во-первых, лебегова мера пересечения $F_k^{(j)} \cap [m, m+1]$ равна δ при $m = 0, 1, \ldots, N_k^{(j)} - 1$, во-вторых, для любых чисел $\rho_{1,1}, \rho_{1,2} \ldots, \rho_{j-1,j}, \rho_{j,j} \in [-k, k]$, для которых $\rho_{\lambda,\mu} + \rho_{\mu,\nu} = \rho_{\lambda,\nu}$ для всех $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant j$ (а, стало быть, $\rho_{1,1} = \ldots = \rho_{j,j} = 0$), найдутся j точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(j)} \in [0, N_k^{(j)}] \setminus F_k^{(j)}$, для которых при $1 \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant j$ выполняется $x^{(\mu)} - x^{(\nu)} = \rho_{\mu,\nu}$. Зададим множество E, определив его дополнение. Во-первых, потребуем, чтобы $CE = -CE$, т. е. множества E и CE должны быть симметричными относительно начала координат. Во-вторых, положим $CE \cap \boldsymbol{R}_+ = F_1^{(2)} \cup (F_1^{(3)} + N_1^{(2)}) \cup (F_2^{(2)} + N_1^{(2)} + N_1^{(3)}) \cup (F_2^{(3)} + N_1^{(2)} + N_1^{(3)} + N_2^{(2)}) \cup (F_3^{(2)} + N_1^{(2)} + N_1^{(3)} + N_2^{(2)} + N_2^{(3)}) \cup (F_1^{(4)} + N_1^{(2)} + N_1^{(3)} + N_2^{(2)} + N_2^{(3)} + N_3^{(2)}) \cup \ldots$. Оба множества E и CE относительно плотны. Из конструкции следует, что любая E-эрмитово-позитивная функция положительно определена.

Скажем, следуя Планшерелю и Пойа [1], что целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип (конечную степень) не выше σ, если величина $\sup\{|f(z)| \exp\{-A(|z_1| + \ldots + |z_n|)\} : z = (z_1, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n\}$ конечна при любом $A > \sigma$. Если к тому же эта величина бесконечна при любом $A < \sigma$, то экспоненциальный тип f в точности равен σ. Через $[1, \sigma]_n$ обозначается класс всех целых в $\boldsymbol{C}^n$ функций экспоненциального типа не выше σ, через $[1, \infty)_n$ — класс $\bigcup_{\sigma>0} [1, \sigma]_n$, т. е. класс всех целых в $\boldsymbol{C}^n$ функций конечной степени. Для вывода достаточных условий на множество E, при выполнении которых любая E-эрмитово-позитивная функция, являющаяся сужением на $\boldsymbol{R}^n$ целой функции конечной степени, положительно определена, нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема А. *Пусть E — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$. Любому $\sigma \in (0, \infty)$ отвечает такая конечная величина $C = C(\sigma, E)$, что для каждой функции $f \in [1, \sigma]_n$ выполняется неравенство*

$$\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant C \sup\{|f(x)| : x \in E\}. \tag{2}$$

Наименьшая из величин C, для которых неравенство (2) справедливо при всех функциях $f \in [1, \sigma]_n$, называется *константой нормирования* и обозначается $\Gamma_\sigma(E)$.

Теорема B. *Пусть E — ε-сеть для $\boldsymbol{R}^n$, т. е.* $\sup\{\inf\{|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| : y \in E\} : x \in \boldsymbol{R}^n\} < \varepsilon$. *Тогда, каково бы ни было число $\sigma \in (0, (2([en] + 1)\varepsilon)^{-1})$, для любой функции $f \in [1, \sigma]_n$ справедлива оценка:* $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant (1 - \sigma\varepsilon)^{-1} \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.

Теорема C. *Пусть F — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$, а E — ε-сеть для F, что означает:* $\sup\{\inf\{|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| : y \in E\} : x \in F\} < \varepsilon$. *Тогда, каково бы ни было положительное число σ, для которого $2([en] + 1)\sigma\Gamma_{2([en]+1)\sigma}(F)\varepsilon < 1$, для любой функции $f \in [1, \sigma]_n$ справедлива оценка:* $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant \Gamma_\sigma(F)(1 - \sigma\Gamma_\sigma(F)\varepsilon)^{-1} \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.

Сформулированные теоремы являются многомерными аналогами классической теоремы Картрайт [2] о целой в $\boldsymbol{C}$ функции экспоненциального типа, ограниченной на последовательности целых точек вещественной оси (вернее, ее обобщений, полученных Боасом [3] и Б. Я. Левиным [4]). Теорема A была сформулирована Б. Я. Левиным в докладе на Всесоюзной конференции по комплексному анализу (Харьков, 1971 г.), теорема B доказана в [5], а теорема C — в работе [6]. Следующие теоремы 1, 2 и 3 вытекают из теорем A, B и C соответственно.

Теорема 1. *Пусть множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ имеет положительную меру Лебега, а алгебраическая разность $E - E$ относительно плотна. Тогда любая E-эрмитово-позитивная функция $f \in [1, \infty)_n$ положительно определена.*

Доказательство. Точно так же, как для обычных положительно определенных функций (см., например, [7]), проверяется, что для любого вектора $x \in E - E$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant f(0)$. Если $f \in [1, \infty)_n$, то найдется такое $\sigma_1 < \infty$, что $f \in [1, \sigma_1]_n$. По теореме A справедлива оценка $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant Cf(0)$, где конечная величина C зависит лишь от E и σ_1. Из теоремы Бохнера — Хинчина (см. [7]) вытекает, что произведение E-эрмитово-позитивной функции на положительно определенную E-эрмитово-позитивно. Значит, при любом $\varepsilon \in (0, 1/2]$ функция $f_\varepsilon(z) = f(z)\prod_{j=1}^n \{\sin(\varepsilon z_j)/(\varepsilon z_j)\}^2$, принадлежащая классу $[1, \sigma]_n$, где $\sigma = \sigma_1 + 1$, является E-эрмитово-позитивной. Кроме того, ее сужение на $\boldsymbol{R}^n$ лежит в пространстве $L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$. По теореме Винера — Пэли существует функция $\varphi_\varepsilon(t) \in C(\boldsymbol{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset K(0, \sigma)$, для которой

$$f_\varepsilon(z) = \int\limits_{K(0,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t) \exp\{-i\langle z, t\rangle\}\,dt, \quad \langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j.$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ функция $\varphi_\varepsilon(t)$ неотрицательна. Тогда все функции $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, положительно определены и, переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, убеждаемся, что тем же свойством обладает и функция f.

Если непрерывная функция f является E-эрмитово-позитивной, то для любой функции $\rho \in L^2(E)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{E^2} f_\varepsilon(x-y)\,\rho(x)\,\overline{\rho(y)}\,dxdy \geqslant 0 \text{ или}$$

$$\int\limits_{K(0,\,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,|\hat{\rho}(t)|^2\,dt \geqslant 0, \tag{3}$$

це через $\hat{\rho}(t)$ обозначено преобразование Фурье-функции ρ. Про-рка этого утверждения дублирует проверку соответствующего тверждения для положительно определенных функций. Покажем, то из неравенства (3), справедливого для всех функций $\rho \in L^2(E)$, текает неотрицательность функции $\varphi_\varepsilon(t)$. Доказательство прохо-ит в два этапа: вначале проверяется, что $\operatorname{Im}\varphi_\varepsilon(t) \equiv 0$, а затем отрицательность $\varphi_\varepsilon(t)$. Поскольку проверка обоих свойств произ-дится одинаково, то будем считать, что вещественнозначность t) уже доказана и нужно лишь доказать, что эта функция не-ицательна. Предварительно заметим, что множество сужений на $K(0,\sigma)$ преобразований Фурье-функций из $L^2(E)$ плотно в про-анстве $L^2(K(0,\sigma))$. Если бы это было не так, то нашлась бы улевая функция $\psi \in L^2(K(0,\sigma))$, ортогональная всем таким су-иям. Из равенства Парсеваля следовало бы, что преобразова- Фурье $\hat{\psi}$ функции ψ ортогонально пространству $L^2(E)$, т. е. $= 0$. Так как $\hat{\psi}$ — целая функция, а $\operatorname{mes}_n E > 0$, то $\psi = 0$ почти ду, чего не может быть. Пусть, вопреки тому, что мы доказы-м, есть точка $t^{(0)} \in K(0,\sigma)$, в которой $\varphi_\varepsilon(t^{(0)}) < 0$. Тогда найду- такие положительные числа δ и ω, что $\max\{\varphi_\varepsilon(t) : t \in K(t^{(0)},\delta)\} = -\omega$. По доказанному для любого $\eta > 0$ найдется такая функ $h = h_\eta \in L^2(E)$, что $\int_{K(0,\sigma)} |\hat{h}(t) - \chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)|^2\,dt < \eta^2$, где че-з $\chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)$ обозначен индикатор куба $K(t^{(0)},\delta)$. Имеем

$$\int\limits_{K(0,\,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,|\hat{h}(t)|^2\,dt = \int\limits_{K(0,\,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,\chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)\,dt +$$

$$+\,2\int\limits_{K(0,\,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,\chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)\,\operatorname{Re}\{\hat{h}(t) - \chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)\}\,dt +$$

$$+\int\limits_{K(0,\,\sigma)} |\hat{h}(t) - \chi_{K(t^{(0)},\delta)}(t)|^2\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt \leqslant -\omega(2\delta)^n + 2\eta\max\{|\varphi_\varepsilon(t)| :$$

$$t \in K(0,\sigma)\}\,(2\delta)^n + \eta^2\max\{|\varphi_\varepsilon(t)| : t \in K(0,\sigma)\}.$$

Ри достаточно малых положительных η правая часть последнего равенства отрицательна. Значит, $\int\limits_{K(0,\,\sigma)} \varphi_\varepsilon(t)\,|\hat{h}(t)|^2\,dt < 0$,

то не может быть.

Замечание 1. Требование аналитичности функции f в предыду-й теореме нельзя существенно ослабить даже в случае, когда $= 1$, а $E - E = \boldsymbol{R}$. Например, его нельзя заменить требованием, чтобы ограниченная функция $f \in C^k(\boldsymbol{R})$, $k = 0, 1, \ldots$. Начнем с п строения соответствующего примера в классе $C(\boldsymbol{R})$. Положим $E = [0, 1/2] \cup \boldsymbol{Z}$, а функцию $f(x)$ определим равной $\cos \pi x$ при $x \in [-1/2, 1/2]$ и равной 0 при $|x| \geqslant 1/2$. Ясно, что $E - E =$ Преобразование Фурье $\hat{f}(t)$ функции $f(x)$ равно $\cos(t/2)\{1/(\pi + t) + 1/(\pi - t)\}$, т. е. меняет знак на оси. По теореме Бохнера — Хинчина функция $f(x)$ не является положительно определенной. Тем не менее эта функция E-эрмитово-позитивна. Действительно, при любых $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in E$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in \boldsymbol{C}$ имеем

$$\sum_{j, k=1}^{N} f(x^{(j)} - x^{(k)}) \zeta_j \bar{\zeta}_k = \sum_{0 < x^{(j)}, x^{(k)} < 1/2} \cos \pi (x^{(j)} - x^{(k)}) \zeta_j \bar{\zeta}_k +$$
$$+ \sum\nolimits_{|x^{(j)} - x^{(k)}| > 1/2} f(x^{(j)} - x^{(k)}) \zeta_j \bar{\zeta}_k + f(0) \sum\nolimits_{x^{(j)} \notin [0, 1/2]} |\zeta_j|^2.$$

Первая сумма в правой части последнего неравенства неотрицательна, так как функция $\cos \pi x$ положительно определена. Третья сумма также неотрицательна, а вторая равна нулю.

Теперь нетрудно построить пример для $k \in \boldsymbol{N}$. При любых $n \in \boldsymbol{N}$ и $\delta > 0$ функция $f_k(x) = f_k(x;\ n, \delta) = f(x)\{(1 + \exp\{2\pi inx\}) \times \sin(\delta x)/(\delta x)\}^k \in C^k(\boldsymbol{R})$. Кроме того, эта функция E-эрмитово-позитивна как произведение E-эрмитово-позитивной на положительно определенную. Преобразование Фурье $\hat{f}_k(t)$ функции $f_k(x)$ равно

$$\cos \frac{t}{2} \left\{\frac{1}{\pi + t} + \frac{1}{\pi - t}\right\} * \left\{\frac{1}{2\delta}\left(\chi_{[-\delta, \delta]}(t) + \chi_{[2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta]}(t)\right)\right\} *$$
$$\ldots * \left\{\frac{1}{2\delta}\left(\chi_{[-\delta, \delta]}(t) + \chi_{[2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta]}(t)\right)\right\}, \tag{4}$$

где множитель $\{(2\delta)^{-1}(\chi_{[-\delta, \delta]}(t) + \chi_{[2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta]}(t))\}$ повторяется в свертке k раз. Зафиксируем $k \in \boldsymbol{N}$ и будем считать число $n \in \boldsymbol{N}$ достаточно большим, а $\delta > 0$ — достаточно малым. При этих условиях свертка k последних сомножителей в (4) представляет собой сумму «шапочек» с разнесенными носителями; у одной из этих шапочек носителем является отрезок $[-k\delta, k\delta]$. Выберем достаточно близкий к началу координат отрезок $[a, b]$, на котором $\cos(t/2) \{\pi + t)^{-1} + (\pi - t)^{-1}\} \leqslant -\omega < 0$. При достаточно большом $n \in \boldsymbol{N}$ и $\delta k < (b - a)/2$ знак свертки (4) в точке $t = (a + b)/2$ определяется сверткой функции $\cos(t/2)\{(\pi + t)^{-1} + (\pi - t)^{-1}\}$ с шапочко носитель которой — отрезок $[-k\delta, k\delta]$, а эта свертка в указанн точке отрицательна. По теореме Бохнера — Хинчина функция $f_k($ не является положительно определенной.

Теорема 2. *Пусть $E \subset \boldsymbol{R}^n$ — множество единственности д винеровского класса $W^2_{\sigma, n} = \{f \in [1, \sigma]_n\colon \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2\, dx < \infty\}$, а ал раическая разность $E - E$ является ε-сетью для $\boldsymbol{R}^n$, при $2([en] + 1)\sigma\varepsilon < 1$. Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция конечной с пени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперпл кость E-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Доказательство. Пусть для функции f выполнены условия теоремы. Из ее E-эрмитово-позитивности и теоремы B следует, что $\sup\{|f(x)| : x \in \boldsymbol{R}^n\} \leqslant (1-\sigma\varepsilon)^{-1} f(0)$. Рассмотрим семейство функций $f_\eta(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \{\sin(\eta z_j)/(\eta z_j\}^2$, $0 < \eta < \eta_0$, где число η_0 выбрано настолько малым, что все функции $f_\eta \in [1, \sigma]_n$. Так как сужение f_η на $\boldsymbol{R}^n$ является E-эрмитово-позитивным и лежит в пространстве $L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$, то найдется функция $\varphi_\eta \in C(\boldsymbol{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_\eta \subset K(0, \sigma)$, для которой $f_\eta(z) = \hat{\varphi}_\eta(z)$ и $\int\limits_{K(0,\sigma)} \varphi_\eta(t) |\sum\limits_k c_k \exp\{-i < x^{(k)}, t >\}|^2 dt \geqslant 0$ для любого тригонометрического многочлена $\sum\limits_k c_k \exp\{-i < < x^{(k)}, t >\}$ с показателями $x^{(k)} \in E$. Дальнейшее доказательство полностью копирует доказательство теоремы 1, если заметить, что тригонометрические многочлены указанного вида плотны в $L^2(K(0, \sigma))$, так как E — множество единственности для винеровского класса $W^2_{\sigma, n}$.

Теорема 3. *Пусть F — относительно плотное подмножество $\boldsymbol{R}^n$, $E \subset \boldsymbol{R}^n$ — множество единственности для класса $W^2_{\sigma, n}$, а алгебраическая разность $E - E$ является ε-сетью для F, причем выполнено условие $2([en]+1)\sigma\Gamma_{2([en]+1)\sigma}(F)\varepsilon < 1$. Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция f конечной степени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперплоскость E-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство предыдущей с единственным исключением: вместо теоремы B можно сослаться на теорему C.

Следующие две теоремы вытекают из результатов о «медленном росте», полученных в работе [6].

Теорема 4. *Пусть измеримое множество $F \subset \boldsymbol{R}^n$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию $\int\limits_{CF} (\max\{\ln(x_1^2 + \ldots + x_n^2), 1\})^{\alpha/n} dx < \infty$, E — множество единственности для винеровского класса $W^2_{\sigma, n}$, для которого алгебраическая разность $E - E$ — плотное относительно F множество (это означает, что найдутся такие положительные постоянные L и δ, что лебегова мера пересечения $E - E$ с любым кубом $K(x, L)$, центр x которого лежит в F, не меньше, чем δ). Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция f конечной степени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперплоскость $\boldsymbol{R}^n$ E-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Теорема 5. *Пусть множество $F \subset \boldsymbol{R}^n$ такое же, как в предыдущей теореме, E — множество единственности для класса $W^2_{\sigma, n}$, а алгебраическая разность $E - E$ является ε-сетью для F, причем $4([en]+1)\sigma\varepsilon < 1$. Тогда любая целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция f конечной степени, меньшей σ, сужение которой на вещественную гиперплоскость E-эрмитово-позитивно, положительно определена на $\boldsymbol{R}^n$.*

Теоремы **4** и **5** доказываются аналогично, приведем доказательство первой из них. Как и раньше, для любого вектора $x \in E - E$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant f(0)$. Пусть $f \in [1, \sigma_1]_n$, где по условию теоремы $\sigma_1 < \sigma$. Согласно утверждению теоремы 4 работы [6] для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая конечная величина $C_\varepsilon = C(E, F, \sigma, \varepsilon)$, что оценка $|f(x)| \leqslant C_\varepsilon \exp\left\{\varepsilon\left(\ln^+ \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)^{\alpha/n}\right\} f(0)$ выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}^n$. Мы используем эту оценку при $\varepsilon = 1$, записывая для простоты C вместо C_1. Найдется неквазианалитический класс $C\{m_k\} = \{\varphi(\tau) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$: $\sup\{\sqrt[k]{|\varphi^{(k)}(\tau)|/m_k}: k \in \boldsymbol{N}, \tau \in \boldsymbol{R}\} < \infty$, $\sup\{|\varphi(t)|: \tau \in \mathbb{R}\} < \infty\}$, функция А. Островского $T(\rho) = \max\{\rho^k/m^k : k = 0, 1, \ldots\}$, $\rho \geqslant 0$, которого мажорирует на положительном луче функцию $\sqrt[n]{Cf(0)} \cdot \exp\{n \ln^+ \rho)^{(2+\alpha/n)}\}$. Как известно (см., например, [8]), любой неквазианалитический класс $C\{m_k\}$ содержит ненулевую неотрицательную функцию $\psi_0(\tau)$ с компактным носителем. Не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{supp} \psi_0 \subset [-\eta, \eta]$, где $\sigma_1 + \eta \leqslant \sigma$, и $\int_{-\eta}^{\eta} \psi_0(\tau)\, d\tau = 1$. Пусть $\psi(t) = \Pi_{j=1}^n \psi_0(t_j)$, $t \in \boldsymbol{R}^n$. Преобразование Фурье $\hat{\psi}(z)$ этой функции — целая в $\boldsymbol{C}^n$ функция из класса $[1, \eta]_n$, а $\hat{\psi}|_{\mathbb{R}_n}$ — положительно определенная функция. Интегрированием по частям в формуле, связывающей $\hat{\psi}(z)$ и $\psi(t)$, легко получить оценку скорости убывания функции $\psi(x)$ при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty$ через скорость роста функции $T(|x_1|) \ldots T(|x_n|)$. Из этой оценки следует, что сужения на $\boldsymbol{R}^n$ семейства целых функций $\{f_\omega(z) = f(z)\psi(\omega z): 0 < \omega \leqslant 1\} \subset [1, \sigma]_n$ E-эрмитово-позитивны и лежат в пространстве $L^1(\boldsymbol{R}^n) \cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Так как $f_\omega(z) \to f(z)$ при $\omega \to 0$ равномерно на каждом компакте в $\boldsymbol{C}^n$, то для доказательства положительной определенности функции $f(x)$ достаточно проверить, что положительно определены функции $f_\omega(x)$, $0 < \omega \leqslant 1$, а такую проверку мы уже осуществили, доказывая теорему 2.

Список литературы: 1. *Plancherel M., Polya G.* Fonctions entiéres et intégrale de Fourier multiples // Comm. Math. Helv. 1937—1938. **10**. P. 110—163. 2. *Cartwright M. L.* On certain integral functions of order One // Quart. Journal of Math. Oxf. ser. 1936. **7**. P. 46—55. 3. *Boas R. P.* Entire functions bounded on a line // Duke Math. Journal. 1940. **6**, N 3. P. 148—186. 4. *Левин Б. Я.* О функциях конечной степени, ограниченных на последовательности точек // Докл. АН СССР. 1949. **65**, № 3. С. 265—268. 5. *Логвиненко В. Н.* Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт // Докл. АН СССР. 1974. **219**, № 3. С. 546—549. 6. *Логвиненко В. Н.* Условия ограниченности и условия медленного роста на вещественной гиперплоскости целых функций экспоненциального типа // Сиб. мат. журн. 1988. **29**, № 4. С. 126—138. 7. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. Х., 1984. 120 с. 8. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. М.; Л., 1937. 107 с.

Поступила в редколлегию 17.03.90

УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ. I

Краевая задача Римана с бесконечным индексом впервые встретилась, по-видимому, в работе Н. И. Ахиезера [1]. Общую теорию краевых задач Римана с бесконечным индексом степенного характера построил в 60- годах Н. В. Говоров; изложение дано в монографии [2]. Теория Н. В. Говорова обобщалась рядом авторов в различных направлениях (см. [3—5], где имеется подробная библиография). В этой теории и ее обобщениях, как правило, контур, на котором задано краевое условие, предполагается прямолинейным. Исключение составляют работа самого Н. В. Говорова [2, § 19] и работы А. Г. Алехно [6—8], в которых контур предполагается гладким и имеющим касательную на бесконечности, а также работа Е. А. Данилова [9], в которой контур является логарифмической спиралью. В этих исследованиях предполагалось также, что аргумент коэффициента задачи имеет степенную асимптотику на бесконечности. В настоящей работе мы рассмотрим однородную краевую задачу для контуров более общего характера и с менее правильным поведением аргумента коэффициента.

В качестве контуров будем рассматривать кривые вида $L = \{z: z = re^{i\varphi(r)},\ 2 \leqslant r_0 \leqslant r < \infty\}$, где φ — вещественная непрерывно дифференцируемая на $[r, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{\ln r}\right) = 0, \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{|\varphi(r)|}{\ln r} < \infty. \tag{1}$$

Такие кривые будем называть *допустимыми*. Примерами допустимых кривых являются логарифмические спирали ($\varphi(r) = c\ln r$, $c = \mathrm{const}$), а также кривые, названные в [10] кривыми правильного вращения и определяемые условием: существует конечный $\lim\limits_{r\to\infty} r\varphi'(r)$.

Однако класс допустимых кривых этими примерами не исчерпывается. В частности, допустимыми являются кривые L, для которых

$$\varphi(r) = (a + b\sin(\ln\ln r)^{\alpha})\ln r, \qquad 2 \leqslant r < \infty, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, a и b — положительные постоянные. Для любой допустимой кривой L введем величины

$$C(L) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{|\varphi(r)|}{\ln r}, \qquad c(L) = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{|\varphi(r)|}{\ln r}.$$

Пример (2) показывает, что для любой пары чисел (x, y), $0 \leqslant x \leqslant y < \infty$, существует допустимая кривая L такая, что $c(L) = x$, $C(L) = y$. Заметим, что все результаты настоящей статьи сохранят силу, если расширить класс допустимых кривых, присоединив к нему гладкие жордановы кривые L такие, что для некоторого $R(L)>2$ допустимой является кривая $L\cap\{z:|z|\geqslant R(L)\}$.

Обозначим через D плоскость, разрезанную вдоль допустимой кривой L. Пусть (D) — множество получаемое присоединением к D обоих берегов разреза вдоль $L\setminus\{t_0\}$, $t_0=r_0e^{i\varphi(r_0)}$. *Однородной краевой задачей Римана на* L будем называть задачу о нахождении аналитической в D, непрерывной и ограниченной в (D) функции Φ, предельные значения которой $\Phi^\pm$ на берегах разреза удовлетворяют уравнению

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t),\qquad t\in L\setminus\{t_0\},\tag{3}$$

где G — коэффициент задачи — заданная непрерывная и не обращающаяся в нуль на L функция.

Пусть ψ — комплекснозначная функция на L, удовлетворяющая условию Дини. Последнее означает, что для любых $t_1, t_2\in L$ выполняется

$$|\psi(t_1)-\psi(t_2)|\leqslant\omega(|t_1^{-1}-t_2^{-1}|),\tag{4}$$

где ω — неубывающая функция на $[0,\infty)$, $\omega(0)=0$, такая, что $\int\limits_0^1\omega(\ )\,\delta^{-1}\,d\delta<\infty$. Очевидно, из выполнения условия Дини следует существование предела $\psi(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)$. Будем предполагать, что $\psi(\infty)>0$.

Пусть $l=l(r)$ — уточненный порядок Бутру [11, с. 91], удовлетворяющий условию

$$p<\lambda:=\varliminf_{r\to\infty}l(r)\leqslant\rho:=\varlimsup_{r\to\infty}l(r)<p+1,\tag{5}$$

где p — целое неотрицательное число. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$-2\pi<\operatorname{Re}\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}|_{t=t_0}\leqslant 0.\tag{6}$$

Рассмотрим однородную краевую задачу Римана на L с коэффициентом

$$G(t)=\exp\{i\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}\},\qquad t\in L.\tag{7}$$

Очевидно, что $\arg G(t)=\operatorname{Re}\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}\sim\psi(\infty)\,|t|^{l(|t|)}\to+\infty$, $t\to\infty$. По терминологии Н. В. Говорова это означает, что задача имеет плюс-бесконечный индекс. Заметим, что $\ln|G(t)|=-\operatorname{Im}\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}=o(|t|^{l(|t|)})$, $t\to\infty$.

В настоящей первой части работы задача будет рассматриваться при условии

$$\rho<\frac{1}{2}(1+c^2(L)).\tag{8}$$

Это условие является аналогом условия $\rho < \frac{1}{2}$ из [2, гл. IV] и сводится к последнему, если L имеет касательную на бесконечности, так как в этом случае $c(L) = 0$. Во второй части работы условие (8) будет отброшено, а предположение, что коэффициент G имеет вид (7), будет заменено менее ограничительными, близкими к тем, которые в случае, когда L — луч, использовались нами в [5]. Однако при этом нам придется сузить класс допустимых кривых и усложнить формулы для решения задачи.

Теорема 1. *Однородная краевая задача Римана на допустимой кривой L с коэффициентом G, задаваемым формулой* (7), *при выполнении условия* (8) *имеет решение*

$$\Phi(z) = \exp\left\{\frac{z^{p+1}}{2\pi}\int_L \frac{\psi(t)\,|t|^{l(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}\right\}, \qquad z \in D. \tag{9}$$

Если кривая L имеет касательную на бесконечности, $l(r) \equiv \rho$, ψ удовлетворяет условию Гельдера на L, получаем результат Ф. Д. Говорова [2, § 19]. Если L — логарифмическая спираль, $l(r) \equiv \rho$, ψ удовлетворяет условию Гельдера на L, получаем результат Д. А. Данилова [9].

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая лемма об асимптотике интеграла типа Коши.

Лемма. *Пусть $L = \{z : z = re^{i\varphi(r)},\ 2 \leqslant r_0 \leqslant r < \infty\}$ — допустимая кривая, l — уточненный порядок Бутру, удовлетворяющий условию* (5). *Положим*

$$I(z) = \frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int_L \frac{|t|^{l(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}, \quad z \in I. \tag{10}$$

При $\theta \in (\varphi(r),\ \varphi(r) + 2\pi)$ справедлива равномерная относительно θ асимптотика $(r \to \infty)$:

$$(1 - e^{2\pi i\beta(r)})\, I(re^{i\theta}) = \exp\{\beta(r)(\ln r + i\theta)\} + o(r^{l(r)}), \tag{11}$$

где $\beta(r) = (l(r)\ln r)(\ln r + i\varphi(r))^{-1}$.

Заметим, что интеграл (10) абсолютно сходится. Это вытекает из условий (5) и того обстоятельства, что для элемента длины допустимой кривой справедлива оценка

$$|dt| = \sqrt{1 + (|t|\varphi'(|t|))^2}\, d|t| \leqslant C d|t|$$

(через C здесь и ниже обозначаются положительные не обязательно одинаковые постоянные).

В случае, когда L — логарифмическая спираль $\{z : z = re^{ic\ln r}\}$, а $l(r) \equiv \rho$, имеем $\beta(r) = \rho/(1 + ic)$, и асимптотику (11) можно усилить

$$\left(1 - \exp\left(\frac{2\pi i\rho}{1+ic}\right)\right) I(re^{i\theta}) = \exp\left(\frac{\rho(\ln r + i\theta)}{1+ic}\right) + O(r^{\rho}). \tag{12}$$

Соотношение (12) содержится в [10], доказательство таково. Если $\varphi(r)=c\ln r$, то при $t\in L$ имеем $|t|^{\rho}=t^{\rho/(1+ic)}$. Пусть $D_R=\{z: r_0< <|z|<R\}\setminus L$; по теореме Коши при $z\in D_R$ имеем

$$z^{\rho/(1+ic)}=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_R}\frac{t^{\rho/(1+ic)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}.$$

Устремляя $R\to\infty$, получим $z^{\rho/(1+ic)}=\left(1-\exp\frac{2\pi i\rho}{1+ic}\right)I(z)-\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\times \times\int\limits_{|t|=r_0}\frac{t^{\rho/(1+ic)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}$, откуда и следует (12).

В случае, когда L — кривая правильного вращения, а l — обычный уточненный порядок (т. е. в (5) имеем $\lambda=\rho$), в [10] установлено, что (11) имеет место равномерно относительно $\theta\in\in(\varphi(r)+\varepsilon,\ \varphi(r)+2\pi-\varepsilon)$ для любого фиксированного $\varepsilon>0$. Для этого использовалась оценка разности между интегралом $I(s)$ и интегралом по логарифмической спирали с параметром $c=\lim\limits_{r\to\infty}r\varphi'(r)$ и $l(r)\equiv\rho$, а также равенство (12) для последнего интеграла. Для доказательства леммы мы используем другой путь.

Приступим к доказательству. Заметим, что при $t\in L$ выполняется $|t|^{l(|t|)}=t^{\beta(|t|)}$. Применяя к области D_R обобщенную теорему Коши, получим

$$z^{\beta(|z|)}=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_R}\frac{t^{\beta(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}+\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\iint\limits_{D_R}\frac{\bar\partial t^{\beta(|t|)}}{t^{p+1}(t-z)}\,dt\wedge d\bar t.$$

Замечая, что $|z^{\beta(|z|)}|\sim|z|^{l(|z|)}$, $z\to\infty$, и устремляя $R\to\infty$, будем иметь

$$z^{\beta(|z|)}=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{(1-e^{2\pi i\beta(|t|)})\,|t|^{l(|t|)}}{t^{p+1}(t-z)}\,dt-$$

$$-\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=r_0}\frac{t^{\beta(|t|)}\,dt}{t^{p+1}(t-z)}+\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\iint\limits_{D_\infty}\frac{\bar\partial t^{\beta(|t|)}\,dt\wedge d\bar t}{t^{p+1}(t-z)}=I_1+I_2+I_3. \quad (13)$$

Оценим сначала интеграл I_3. Будем далее полагать $z=re^{i\theta}$, $\theta\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$, $r>r_0$, и покажем, что справедлива равномерная относительно θ оценка

$$I_3(re^{i\theta})=o(r^{l(r)}),\qquad r\to\infty. \quad (14)$$

Имеем $\bar\partial t^{(\beta|t|)}=(t^{\beta(|t|)}\ln t)\,\beta'(|t|)\,\bar\partial|t|$, $t=|t|e^{i\tau}$, $\tau\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+ +2\pi)$. Легко видеть, что из первого из условий (1) и соотношения $l'(r)\,r\ln r=o(1)$, $r\to\infty$ (имеющего место по определению уточненного порядка Бутру), вытекает оценка $\beta'(r)\,r\ln r=o(1)$, $r\to\infty$. Учитывая также, что $|t^{\beta(|t|)}|\sim|t|^{l(|t|)}$, $|\ln t|=O(\ln|t|)$, $|t|\to\infty$ (использовалось второе из условий (1)), заключаем, что

$$|\bar\partial t^{\beta(|t|)}|=o(|t|^{l(|t|)-1})\leqslant\varepsilon(|t|)\,|t|^{l(|t|)-1},$$

где $\varepsilon(r)>0$ — некоторая монотонно стремящаяся к 0 при $r\to\infty$ функция. Поэтому

$$|I_3(re^{i\theta})|\leqslant\frac{r^{p+1}}{\pi}\iint\limits_{D_\infty}\frac{\varepsilon(|t|)\,|t|^{l(|t|)-1}}{|t|^{p+1}\,|t-re^{i\theta}|}\left(\frac{1}{2i}\,dt\wedge d\bar t\right)=$$

$$=\frac{r^{p+1}}{\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}\varepsilon(s)\,s^{l(s)-p-1}\,ds\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\tau}{|se^{i\tau}-re^{i\theta}|}=$$

$$=2r^p\int\limits_{r_0}^{\infty}\varepsilon(s)\,s^{l(s)-p-1}\eta(s/r)\,ds,$$

где принято обозначение

$$\eta(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|ue^{i\tau}-1|^{-1}\,d\tau,\quad 0\leqslant u<\infty$$

Функция η неоднократно использовалась в теории мероморфных функций [11, гл. V]). Легко видеть, что при $u\geqslant 2$ выполняется $\eta(u)\leqslant 2/u$, а при $0\leqslant u\leqslant 2$ имеем

$$\eta(u)=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{|u-1|}+\int\limits_{|u-1|}^{\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)\frac{d\tau}{|u-e^{i\tau}|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left(1+\int\limits_{|u-1|}^{\pi/2}\frac{d\tau}{\sin\tau}+\frac{\pi}{2}\right)\leqslant C\ln\frac{4}{|u-1|}.$$

Следовательно,

$$|I_3(re^{i\theta})|\leqslant Cr^p\int\limits_{r_0}^{2r}\varepsilon(s)\,s^{l(s)-p-1}\ln\frac{4r}{|s-r|}\,ds+$$

$$+Cr^{p+1}\int\limits_{2r}^{\infty}\varepsilon(s)\,s^{l(s)-p-2}\,ds\leqslant Cr^p\int\limits_{r_0}^{r/2}\varepsilon(s)\,s^{l(s)-p-1}\,ds+$$

$$+C\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)r^{l(r)-1}\int\limits_{r/2}^{2r}\ln\frac{4r}{|s-r|}\,ds+Cr^{p+1}\varepsilon(2r)\int\limits_{2r}^{\infty}s^{l(s)-p-2}\,ds.$$

Используя свойства уточненного порядка Бутру [11, с. 91], убеждаемся в справедливости оценки (14).

Перейдем к рассмотрению интеграла I_1. Положим $Q(z)=I_1(z)-(1-e^{2\pi i\beta(|z|)})\,I(z)$ и покажем, что равномерно относительно $\theta\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$ выполняется

$$Q(re^{i\theta})=o(r^{l(r)}),\qquad r\to\infty.\tag{15}$$

Пусть $\delta\in(0,\ 1/2)$ — малое число. Считая $r=|z|$ достаточно большим, положим $L_1=L\cap\{t: r_0\leqslant|t|\leqslant\delta r\}$, $L_2=L\cap\{t:\delta r\leqslant|t|\leqslant r/\delta\}$, $L_3=L\cap\{t:|t|\geqslant r/\delta\}$.
Имеем

$$Q(z)=\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}+\int\limits_{L_3}\right)\frac{(e^{2\pi i\beta(r)}-e^{2\pi i\beta(|t|)})\,|t|^{l(|t|)}\,dt}{t^{p+1}\,(t-z)}=$$
$$=Q_1(z)+Q_2(z)+Q_3(z).$$

Так как $|e^{2\pi i\beta(r)}|\leqslant e^{\pi l(r)}\leqslant C$, то, используя свойства уточненного порядка Бутру [11, с. 91], получаем

$$|Q_1(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r_0}^{\delta r}\frac{s^{l(s)-p-1}}{r-s}\,ds\leqslant Cr^{p}\int\limits_{r_0}^{\delta r}s^{l(s)-p-1}\,ds\leqslant C\delta^{(\lambda-p)/2}r^{l(r)},$$

$$|Q_3(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r/\delta}^{\infty}\frac{s^{l(s)-p-1}}{s-r}\,ds\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r/\delta}^{\infty}s^{l(s)-p-2}\,ds\leqslant C\delta^{(p+1-\rho)/2}r^{l(r)}.$$

Чтобы оценить $Q_2(z)$, понадобится неравенство

$$|e^{2\pi i\beta(r)}-e^{2\pi i\beta(s)}|\leqslant C\,|r-s|\,\{\delta r\ln(\delta r)\}^{-1},\qquad s\in[\delta r,\ r/\delta],\qquad (16)$$

для получения которого достаточно заметить, что

$$|e^{2\pi i\beta(r)}-e^{2\pi i\beta(s)}|\leqslant C\,|\beta(r)-\beta(s)|\leqslant$$
$$\leqslant C\,|r-s|\max\{|\beta'(u)|: u\in[\delta r,\ r/\delta]\}$$

и, что как было установлено ранее, $|\beta'(u)|\leqslant C\{u\ln u\}^{-1}$. Используя (16), получаем

$$|Q_2(z)|\leqslant\frac{Cr^p}{\delta\ln(r\delta)}\int\limits_{\delta r}^{r/\delta}s^{l(s)-p-1}\,ds\leqslant C\delta^{-2}r^{l(r)}/\ln(r\delta)=o\,(r^{l(r)}),\ \ r\to\infty.$$

Пользуясь произволом в выборе δ, приходим к (15).

Из (15) следует, что $I_1(z)=(1-e^{2\pi i\beta(r)})\,I(z)+o\,(r^{l(r)})$. Подставляя это и (14) в (13) и учитывая очевидное равенство $I_2(z)=O\,(r^p)$, $r\to\infty$, убеждаемся в справедливости леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим функцию Φ, определяемую равенством (9). Ее аналитичность в области D очевидна, непрерывность в (D) следует из известной теоремы Племеля—Привалова, поскольку функция ψ удовлетворяет условию Дини. Формулы Сохоцкого — Племеля показывают, что Φ удовлетворяет краевому условию (3). Так как в силу (6) имеем $-2\pi<\arg G(t_0)\leqslant\leqslant 0$, то ограниченность функции Φ в окрестности точки $z=t_0$ доказывается так же, как в [2, с. 115]. Поэтому теорема будет доказана, если удастся установить, что функция Φ ограничена в $D\cap\{z:|z|\geqslant R\}$ при некотором R.

Полагая $r=|z|$, $\zeta(r)=re^{i\varphi(r)}$, запишем равенство (9) в виде

$$\ln\Phi(z)=\psi(\zeta(r))\,iI(z)+S(z), \tag{17}$$

где $I(z)$ определяется равенством (10), а

$$S(z)=\frac{z^{p+1}}{2\pi}\int\limits_L \frac{\psi(t)-\psi(\zeta(r))}{t^{p+1}(t-z)}\,|t|^{l(|t|)}\,dt.$$

Покажем, что равномерно относительно $\theta\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$ выполняется

$$S(re^{i\theta})=o(r^{l(r)}),\qquad r\to\infty. \tag{18}$$

Для заданного $\varepsilon>0$ выберем $R>r_0$ таким, чтобы при $|t|$, $r/2>R$ выполнялось $|\psi(t)-\psi(\zeta(r))|<\varepsilon$ (это возможно, так как существует конечный $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\psi(\infty)$). Полагая $L_1=L\cap\{t:r_0\leqslant|t|\leqslant R\}$, $L_2=L\cap\{t:R\leqslant|t|\leqslant r/2\}$, $L_3=L\cap\{t:r/2\leqslant t\leqslant 2r\}$, $L_4=L\cap\{t:2r\leqslant|t|<\infty\}$, запишем

$$S(z)=\frac{z^{p+1}}{2\pi}\Big(\int\limits_{L_1}+\int\limits_{L_2}+\int\limits_{L_3}+\int\limits_{L_4}\Big)\frac{\psi(t)-\psi(\zeta(r))}{t^{p+1}(t-z)}\,|t|^{l(|t|)}dt=$$
$$=S_1(z)+S_2(z)+S_3(z)+S_4(z).$$

Ясно, что $S_1(z)=O(r^p)$, $r\to\infty$. Интегралы $S_2(z)$ и $S_4(z)$ оцениваются с помощью свойств уточненного порядка Бутру:

$$|S_2(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_R^{r/2}\frac{\varepsilon s^{l(s)}\,ds}{s^{p+1}(r-s)}\leqslant C\varepsilon r^p\int\limits_{r_0}^{r/2}s^{ls-p-1}ds\leqslant C\varepsilon r^{l(r)},$$
$$|S_4(z)|\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{\varepsilon s^{l(s)}\,ds}{s^{p+1}(s-r)}\leqslant C\varepsilon r^{p+1}\int\limits_{2r}^{\infty}s^{l(s)-p-2}\,ds\leqslant C\varepsilon r^{l(r)}.$$

Чтобы оценить $S_3(z)$, понадобится неравенство

$$|\psi(t)-\psi(\zeta(r))|\leqslant\omega(Cr^{-2}\,||t|-r|),\ |t|\in[r/2,\ 2r], \tag{19}$$

где ω — функция, фигурирующая в условии Дини (4). Это неравенство получается так. На основании (4) имеем

$$|\psi(t)-\psi(\zeta(r))|\leqslant\omega(|t^{-1}-(\zeta(r))^{-1}|)\leqslant\omega(Cr^{-2}|t-\zeta(r)|).$$

Так как $|t-\zeta(r)|^2=(|t|-r)^2+4|t|r\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(|t|)-\varphi(r))\leqslant$ $\leqslant(|t|-r)^2(1+|t|r\max\{|\varphi'(\tau)|^2:\tau\in[r/2,\ 2r]\})\leqslant C(|t|-r)^2$ (мы воспользовались условиями (1), в силу которых $r\varphi'(r) = O(1)$, $r \to \infty$), получаем (19). Используя (19), имеем

$$|S_3(z)| \leqslant Cr^{p+1} \int\limits_{r/2}^{2r} \frac{\omega(Cr^{-2}|s-r|)}{|s-r|} s^{l(s)-p-1}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant Cr^{l(r)} \int\limits_{r/2}^{2r} \frac{\omega(Cr^{-2}|s-r|)}{|s-r|}\, ds \leqslant Cr^{l(r)} \int\limits_{0}^{C/r} \frac{\omega(\delta)}{\delta}\, d\delta = o(r^{l(r)}),\ r \to \infty.$$

Тем самым соотношение (18) доказано.

Покажем, что равномерно относительно $\theta \in (\varphi(r), \varphi(r) + 2\pi)$ выполняется

$$\operatorname{Im} I(re^{i\theta}) \geqslant A(L, G)\, r^{l(r)} + o(r^{l(r)}),\ r \to \infty, \tag{20}$$

где $A(L, G)$ — положительная, не зависящая от r и θ величина, определяемая кривой L и коэффициентом G (точнее, выбором функций $\varphi(r)$ и $l(r)$).

Заметим, что $|\operatorname{Im}\beta(r)| \leqslant \frac{1}{2} l(r)$, и в силу условия (8) выполняется

$$0 \leqslant \frac{\lambda}{1 + C^2(L)} \leqslant \varliminf_{r \to \infty} \operatorname{Re}\beta(r) \leqslant \varlimsup_{r \to \infty} \operatorname{Re}\beta(r) \leqslant \frac{\rho}{1 + C^2(L)} < \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Поэтому для достаточно больших r имеем

$$|1 - e^{2\pi i\beta(r)}| = \{(1 - e^{-2\pi i \operatorname{Im}\beta(r)})^2 + 4e^{-2\pi \operatorname{Im}\beta(r)} \sin^2 \pi \operatorname{Re}\beta(r)\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant 2e^{-\pi \operatorname{Im}\beta(r)} \sin \pi \operatorname{Re}\beta(r) > e^{-\pi\rho/2} \sin \frac{\pi\lambda}{1 + C^2(L)} > 0. \tag{22}$$

Следовательно, асимптотическую формулу (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I(re^{i\theta}) &= (1 - e^{2\pi i\beta(r)})^{-1} \exp\{\beta(r)(\ln r + i\theta)\} + o(r^{l(r)}) = \\ &= \{(1 - e^{2\pi i\beta(r)})^{-1} \exp(i\beta(r)(\theta - \varphi(r)))\}\, r^{l(r)} + o(r^{l(r)}) = \\ &= B(\beta(r), \theta - \varphi(r))\, r^{l(r)} + o(r^{l(r)}),\quad r \to \infty. \end{aligned} \tag{23}$$

Положим

$$A(L, G) = \varliminf_{r \to \infty} \min\{\operatorname{Im} B(\beta(r), \alpha) : 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi\} \tag{24}$$

и покажем, что $A(L, G) > 0$. Действительно, учитывая (21), для достаточно больших r имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} B(\beta(r), \alpha) &= (e^{2\pi \operatorname{Im}\beta(r)} + e^{-2\pi \operatorname{Im}\beta(r)} - 2\cos 2\pi \operatorname{Re}\beta(r))^{-1} \times \\ &\times (e^{(2\pi-\alpha)\operatorname{Im}\beta(r)} \sin \alpha \operatorname{Re}\beta(r) + e^{-\alpha \operatorname{Im}\beta(r)} \sin(2\pi - \alpha) \operatorname{Re}\beta(r)) \geqslant \\ &\geqslant (e^{\pi \operatorname{Im}\beta(r)} + e^{-\pi \operatorname{Im}\beta(r)})^{-2} e^{-2\pi|\operatorname{Im}\beta(r)|}\, 2 \sin \pi \operatorname{Re}\beta(r) \cos(\pi - \alpha) \operatorname{Re}\beta(r) \geqslant \\ &\geqslant (e^{2\pi|\operatorname{Im}\beta(r)|} + 1)^{-2}\, 2\sin \pi \operatorname{Re}\beta(r) \cos \pi \operatorname{Re}\beta(r). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A(L,\ G) \geqslant (e^{\pi\rho}+1)^{-2}\, 2\sin\frac{\pi\lambda}{1+C^2(L)}\cos\frac{\pi\rho}{1+C^2(L)} > 0,$$

что и доказывает справедливость (20).

Поскольку $\lim_{r\to\infty}\psi(\zeta(r))=\psi(\infty)>0$, то из (17), (18) и (20) вытекает, что равномерно относительно $\theta\in(\varphi(r),\ \varphi(r)+2\pi)$ выполняется соотношение

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})| \leqslant -\psi(\infty)\,A(L,\ G)\,r^{l(r)}+o(r^{l(r)}),\quad r\to\infty. \tag{25}$$

Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Функцию (9) естественно назвать *канонической функцией* рассматриваемой краевой задачи Римана, так как она обладает свойствами, аналогичными свойствам канонической функции, введенной Н. В. Говоровым [2, §§ 19, 24], а именно:

1) функция Φ аналитична в D, непрерывна и не обращается в нуль в (D);

2) функция Φ удовлетворяет краевому условию (3);

3) выполняется условие нормировки $\Phi(z)=1+O(|z|^{p+1}),\ z\to 0$;

4) в окрестности точки $z=t_0$ (начала контура) справедлива оценка

$$C_1|z-t_0|^{\alpha} \leqslant |\Phi(z)| \leqslant C_2,\quad 0\leqslant\alpha<1;$$

5) функция Φ ограничена в D.

Покажем, что, как и в случае, рассмотренном Н. В. Говоровым [2, с. 122, 134], этими свойствами функция Φ определяется однозначно. Предварительно заметим, что для функции Φ, определенной равенством (9), справедлива оценка

$$\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi} |\ln\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta = O(r^{l(r)}),\quad r\to\infty. \tag{26}$$

Эта оценка вытекает из соотношений (17), (18), (23) и того обстоятельства, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\max\{|B(\beta(r),\ \alpha)| : 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi\}<\infty.$$

Пусть теперь Φ_1 — произвольная функция, обладающая свойствами 1) — 5). Рассмотрим функцию $f=\Phi_1/\Phi$, где Φ определяется (9). Так как условия 1), 2), 4) выполнены и для Φ_1, и для Φ, то функция f — целая и не имеет нулей. Используя условие 5) для Φ_1 и оценку (26) для Φ, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}\ln^+|\Phi_1(re^{i\theta})|\,d\theta +$$

$$+\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}\ln^+|1/\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta = O(r^{l(r)}) = o(r^{p+1}),\quad r\to\infty. \tag{27}$$

Отсюда следует [11, с. 51], что $f(z) = \exp P(z)$, где P — полином степени не выше p. Но из выполнения для Φ_1 и Φ условия 3) вытекает, что $f(z) = 1 + O(|z|^{p+1})$, $z \to 0$. Поэтому $P \equiv 0$, $f \equiv 1$, $\Phi_1 \equiv \Phi$.

Заметим, что оценка (26) сохранит силу, если свойство 5) (в (27) оно применяется к функции Φ_1) заменить более слабым 5') выполняется соотношение $\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi} \ln^+|\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta = O(r^{l(r)})$. То, что этим свойством (и даже более сильным (26)) обладает функция (9), можно доказать при более слабом, чем (8), условии: $\rho < 1 + c^2(L)$. Действительно, последнего условия достаточно (ср. (22)) для справедливости оценки $\varliminf\limits_{r\to\infty} |1 - e^{2\pi i\beta(r)}| > 0$, которая позволяет перейти от (11) к (23). Таким образом, функция Φ, задаваемая формулой (9), однозначно определяется свойствами 1) — 4), 5') при условии $\rho < 1 + c^2(L)$, хотя последнее, как легко видеть, уже не обеспечивает ее ограниченности в D.

Пусть F — любая целая функция, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{r\to\infty} r^{-l(r)} \ln M(r, F) < \psi(\infty) A(L, G), \tag{28}$$

$$M(r, F) = \max\{|F(z)| : |z| = r\},$$

где $A(L, G)$ — постоянная, определяемая равенством (24). Такие функции можно строить, например, с помощью приемов, изложенных в [11, с. 92—95]. Из (25) следует, что произведение $F\Phi$, где Φ — каноническая функция, является решением однородной краевой задачи Римана на L с коэффициентом (7). Так как среди функций F, удовлетворяющих (28), бесконечно много линейно независимых, заключаем, что множество решений рассматриваемой краевой задачи бесконечномерно. Этот факт является обобщением одного утверждения Н. В. Говорова [2, с. 121, следствие 1].

Следующий результат является обобщением теоремы 20.3 Н. В. Говорова [2, с. 120].

Теорема 2. *Для того, чтобы произведение $F\Phi$, где F — целая, а Φ — каноническая (9) функция, являлось решением однородной краевой задачи Римана в условиях теоремы 1 и дополнительном условии $c(L) = C(L)$ (т. е. L является кривой правильного вращения), необходимо и достаточно, чтобы порядок функции F не превосходил $\rho = \varlimsup\limits_{r\to\infty}(l(r))$ и, кроме того, при $t \in L$ выполнялось условие*

$$\ln|F(t)| \leqslant -\ln|\Phi^\pm(t)| + O(1),\ t \to \infty \tag{29}$$

(одновременно для Φ^+ и Φ^-).

Доказательство. Если произведение $F\Phi$ является решением задачи Римана, то оно ограничено. Следовательно, $\ln|F(z)| \leqslant -\ln|\Phi(z)| + C$, $z \in D$, откуда сразу вытекает (29). Кроме того, учитывая (25), заключаем, что $\ln M(r, F) \leqslant \psi(\infty) A(L, G) r^{l(r)} + o(r^{l(r)})$ и порядок функции F не превосходит ρ.

Пусть теперь функция F удовлетворяет условиям теоремы. Функция $\Phi_1 = F\Phi$ аналитична в D, непревывна в (D), удовлетворяет краевому условию (3) и ограничена в $D \cap \{z: |z| \leqslant R\}$ при любом $R > 0$. Учитывая (25), имеем для любого $\varepsilon > 0$ оценку $\ln|\Phi_1(z)| \leqslant C_\varepsilon |z|^{\rho+\varepsilon}$, $|z| > r_0$. В силу условия (29) функция Φ ограничена на кривой L. Так как выполнено условие (8), а кривая L имеет правильное вращение, можем применить аналог принципа Фрагмена—Линделефа для области D [12, с. 108, теорема 2.4.3] и заключить, что функция Φ_1 ограничена в D.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. **9**. С. 275—290. 2. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977. 640 с. 4. *Рогозин С. В.* Краевые задачи и особые интегральные уравнения с бесконечным индексом // Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам. Минск, 1985. С. 95—103. 5. *Островский И. В.* Условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 55. С. 20—37. 6. *Алехно А. Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на контуре Ляпунова// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 1. С. 51—57. 7. *Алехно А. Г.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения // Докл. АН БССР. 1981. 25, № 8. С. 681—684. 8. *Алехно А. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом произвольного степенного порядка / Докл. АН БССР. 1988. 32, № 2. С. 112—115. 9. *Данилов Е. А.* Однородная задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка на логарифмической спирали // Интегр. и диф. уравнения и прибл. решения. Элиста, 1985. С. 159—164. 10. *Балашов С. К.* О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. **37**. С. 603—629. 11. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1972. 592 с. 12. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М., 1962. 200 с.

Поступила в редколлегию 13.12.89

УДК 517.5

В. Э. КАНЦЕЛЬСОН

ЗАДАЧА О ДОСТРОЙКЕ ЧАСТИЧНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ КАК КЛАССИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА

0. В настоящей работе рассматривается задача о достройке голоморфной внутри единичного круга «частичной» матрицы-функции вида $\begin{bmatrix} a_1(z) & ? \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}$ до голоморфной внутри единичного круга «полной» матрицы-функции $\begin{bmatrix} a_1(z) & w(z) \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}$, имеющей там неотрицательную вещественную часть. Эта задача может рассматриваться как некоторое обобщение задачи о весовой аппроксимации в равномерной метрике антианалитической функции посредством аналитических. Она оказывается так называемой классической интерполяционной задачей. Простейшими и наиболее известными представителями классических интерполяционных задач явля-

ются задача Неванлинны—Пика, степенная и тригонометрическая проблемы моментов. Классические интерполяционные задачи рассматриваются обычно в классах сжимающих аналитических функций (оператор-функций), функций с положительной вещественной (или мнимой) частью, или родственных классах. Характерной чертой таких задач является то, что критерием их разрешимости является положительность некоторого ядра (матрицы), а совокупность решений описывается посредством дробно-линейного преобразования. Сам термин «классические интерполяционные задачи» навеян названием известной монографии Н. И. Ахиезера «Классическая проблема моментов» [1], введен в употребление математиками одесской школы около пятнадцати лет назад и в настоящее время стал общепринятым. Одним из наиболее эффективных способов исследования таких задач является метод, базирующийся на теории расширений операторов в гильбертовом пространстве. Уместно отметить, что метод исследования классических интерполяционных задач, базирующийся на теории расширений, был впервые предложен в пионерской работе М. С. Лившица [2], а интерес М. С. Лившица к теории операторов был в значительной степени стимулирован литографированным курсом лекций Н. И. Ахиезера по теории операторов, читавшимся в Харьковском институте математики в конце 30-х годов.

Цель настоящей работы — включить задачу о достройке в общую теорию классических интерполяционных задач — развитую нами ранее абстрактную схему, и, базируясь на этой схеме, дать критерий разрешимости задачи о достройке и описание множества ее решений. Изложение по необходимости не является автономным.

Обозначения. Через $\boldsymbol{T}$ обозначена единичная окружность комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, через $\boldsymbol{D}$ — открытый единичный круг, $m\,(dt)$ — нормированная мера Лебега на $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{E}$ — гильбертовы пространства, $\mathrm{Hom}\,(\boldsymbol{H})$ — множество всех непрерывных линейных операторов в $\boldsymbol{H}$, $\mathrm{Hom}\,(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ — множество всех непрерывных операторов, действующих из $\boldsymbol{H}_1$ в $\boldsymbol{H}_2$. Через $\langle x, y\rangle_H$ обозначено скалярное произведение векторов x и y гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$. $H^2_+(\boldsymbol{H})$, $(H^2_-(\boldsymbol{H}))$ — это класс Харди H^2 внутри (вне) единичной окружности, состоящий из функций со значениями в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$.

1°. Весьма плодотворной оказалась следующая задача: *задана последовательность чисел* $\{\gamma\}_{k=1,2,3,\ldots}$. *Когда существует функция* $f(t)$, $f:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{C}$, *удовлетворяющая условиям*

$$c_{-k}(f)=\gamma_k \quad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots) \quad (1) \quad \text{и} \quad \sup|f(t)|\leqslant 1 \quad (t\in T), \quad (2)$$

и как описать совокупность таких f, *если эта совокупность непуста?*

Здесь $c_{-k}(f)=\int\limits_{\mathbf{T}} f(t)\,t^k m\,(dt)$ — *коэффициенты Фурье функции* f.

Эта задача рассматривалась впервые в работе З. Нехари [3], а затем весьма полно и всесторонне — в цикле работ В. М. Адамяна, Д. З. Арова и М. Г. Крейна [4 — 7]. Поэтому эту задачу называют иногда *задача Нехари*, а иногда — *проблема моментов Адамяна — Арова — Крейна (ААК)*.

В дальнейшем эта задача и некоторые ее обобщения привлекли к себе внимание специалистов по теоретической электротехнике (задача широкополосного согласования, см. [8]), теории автоматического регулирования и управления. Возникло даже научное направление, называемое «H^{∞} — теория управления» (см., например, обзоры [9], [10]).

2°. Задача Нехари была сформулирована нами как задача гармонического анализа. Однако она может быть сформулирована и как задача теории аппроксимации. Так как γ_k — коэффициенты Фурье ограниченной функции, то естественно с самого начала предполагать, что $\sum\limits_k |\gamma_k|^2 < \infty$, а тогда функция $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{k \geq 1} \gamma_k \zeta^{-k}$ принадлежит классу Харди H_-^2 во внешности единичного круга, и существуют граничные значения $\varphi(t) = \sum\limits_{k \geq 1} \gamma_k t^{-k}$. Все коэффициенты Фурье с отрицательными номерами функции $w(t) \overset{\text{def}}{=} f(t) - \varphi(t)$ равны нулю, поэтому функцию $w(t)$ можно рассматривать как граничные значения некоторой функции $w(z)$ из нласса Харди H_+^2.

Теперь задача Нехари (проблема моментов ААК) может быть сформулирована следующим образом: *на единичной окружности задана антианалитическая функция — функция $\varphi(t) \in H_-^2$. Существует ли аналитическая функция — функция $w(t) \in H_+^2$ такая, что т — почти всюду на единичной окружности выполняется неравенство*

$$|w(t) + \varphi(t)| \leq 1 \qquad (t \in \boldsymbol{T}) \tag{3}$$

и если такие функции $w(t)$ существуют, то как описать их совокупность?

Можно рассматривать более общий, чем (3), критерий аппроксимации, заменяя функцию, тождественно равную единице, на общую весовую функцию $R(t)$, т. е. рассматривая вместо условия (3) более общее условие:

$$|w(t) + \varphi(t)| \leq R(t) \qquad (t \in \boldsymbol{T}). \tag{4}$$

Здесь $R(t)$, $0 \leq R(t) < \infty$ — заданная на $\boldsymbol{T}$ функция — вес. Наконец, можно рассматривать аналогичные задачи не только для скалярных. но и для матричнозначных, и даже для операторнозначных функций. Условие (4) означает, что при почти каждом $t \in \boldsymbol{T}$ значение $w(t)$ лежит в круге с центром в точке $z = -\varphi(t)$ и с радиусом $R(t)$, Матричный круг, однако, имеет два радиуса — правый R_d и левый R_g. Условие, аналогичное (4), примет вид

$$w(t) + \varphi(t) = R_g(t)^{1/2} u(t) R_d(t)^{1/2} \qquad (t \in T), \tag{5}$$

где $u(t)$ при m — почти каждом $t \in T$ — сжатие: $I - u^*(t)\, u(t) \geqslant 0$. Известно, что оператор u является сжатием тогда и только тогда, когда неотрицательна следующая 2×2 блок-матрица: $\begin{bmatrix} I & u \\ u^* & I \end{bmatrix} \geqslant 0$. Записывая это для*) $u = u(t) = R_g(t)^{-1/2}(w(t) + \varphi(t))\, R_d(t)^{-1/2}$, получим неравенство

$$\begin{bmatrix} I & R_g(t)^{-1/2}(w(t) + \varphi(t))\, R_d(t)^{-1/2} \\ R_d(t)^{-1/2}(w^*(t) + \varphi^*(t))\, R_g(t)^{-1/2} & I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

или равносильно неравенство

$$\begin{bmatrix} R_g(t) & w(t) + \varphi(t) \\ w^*(t) + \varphi^*(t) & R_d(t) \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (t \in T). \tag{6}$$

Задача весовой аппроксимации антианалитической оператор-функции посредством аналитической может быть сформулирована таким образом.

На единичной окружности заданы три оператор-функции: $R_g(t)$, $R_d(t)$, $\varphi(t)$, $R_g: T \to \operatorname{Hom}(H_1)$, $R_d: T \to \operatorname{Hom}(H_2)$, $\varphi: T \to \operatorname{Hom}(H_2, H_1)$. *При этом оператор-функции* $R_g(t)$, $R_d(t)$ *неотрицательны:* $R_g(t) \geqslant 0$, $R_d(t) \geqslant 0$, $(t \in T)$, *а оператор-функция* $\varphi(t)$ *антианалитична. Решением задачи весовой аппроксимации называется любая аналитическая функция* $w(t)$, $w: T \to \operatorname{Hom}(H_2, H_1)$ *такая, что* m — *почти всюду на единичной окружности выполняется неравенство* (6). *Требуется дать критерий разрешимости задачи весовой аппроксимации и описать совокупность ее решений, если эта совокупность непуста.*

Оператор-функция $\varphi(t)$ антианалитична ($w(t)$) аналитична) в том смысле, что для каждого вектора $x \in H_2$ функция $\varphi(t)\, x$ принадлежит векторному классу Харди $H^2_-(H_1)$ ($w(t)\, x \in H^2_+(H_1)$). Неравенство (6) понимается как неотрицательность оператора в гильбертовом пространстве $H_1 \oplus H_2$, задаваемого блок-матрицей в левой части (6).

3⁰. Формулировка задачи взвешенной аппроксимации в виде неравенства (6) является для нас тоже промежуточной — этапом на пути к окончательной для нас формулировке задачи о достройке.

Функции $R_g(t)$ и $R_d(t)$ (по крайней мере, если они не очень плохие) допускают гармоническое продолжение внутрь единичного круга, и, значит, существуют голоморфные в D функции $a_1(z)$ и $a_2(z)$, $a_1: D \to \operatorname{Hom}(H_1)$, $a_2: D \to \operatorname{Hom}(H_2)$, такие, что для их граничных значений выполнены равенства**):

$$R_g(t) = a_1(t) + a_1^*(t), \qquad R_d(t) = a_2(t) + a_2^*(t). \tag{7}$$

*) Матрицы $R_g(t)$ и $R_d(t)$ могут быть и необратимыми, но следующее рассуждение играет лишь роль наводящего соображения при постановке задачи.

**) Нижеследующие рассуждения носят характер мотивировки постановки задачи поэтому мы не уточняем, к каким классам принадлежит оператор-функции R_g, R_d, a_1, a_2, в каком смысле существуют граничные значения $a_1(t)$, $a_2(t)$ и т. п.

Естественно требовать условий нормировки $a_1(0) = a_1^*(0)$, $a_2(0) = a_2^*(0)$, так как в условиях (7) фигурируют лишь вещественные части голоморфных функций a_1 и a_2, а их мнимые части определяются лишь с точностью до аддитивных констант.

Теперь мы готовы переформулировать задачу весовой аппроксимации антианалитической функции посредством аналитической как задачу о достройке, о которой говорится в заглавии этой статьи. Для удобства мы вместо антианалитической функции $\varphi(t)$ будем рассматривать аналитическую функцию $h(t) = \varphi^*(t)$, $h: \boldsymbol{T} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$. Заданная m — почти всюду на окружности $\boldsymbol{T}$ функция $h(t)$ является граничными значениями голоморфной внутри $\boldsymbol{D}$ функции $h(z)$, $h: \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$, удовлетворяющей условию $h(0) = 0$. Неравенство (6) теперь примет вид

$$W(t) + W^*(t) \geqslant 0 \qquad (t \in \boldsymbol{T}), \tag{8}$$

где

$$W(z) = \begin{bmatrix} a_1(z) & w(z) \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix} \tag{9}$$

- оператор-функция, голоморфная внутри $\boldsymbol{D}$, $W: D \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2)$.

Если голоморфная функция $W(z)$ «не слишком плохо» примыкает к своим граничным значениям $W(t)$, то из неравенства (8) на границе $\boldsymbol{T}$ круга $\boldsymbol{D}$ вытекает неравенство внутри круга

$$W(z) + W^*(z) \geqslant 0 \qquad (z \in \boldsymbol{D}). \tag{10}$$

Тем самым мы приходим к следующей формулировке задачи взвешенной аппроксимации антианалитической оператор-функции посредством аналитической.

Задача о достройке. *Задана неполная блок-матрица-функция*

$$\begin{bmatrix} a_1(z) & ? \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

элементы которой $a_1(z)$, $a_2(z)$, $h(z)$ — голоморфные в $\boldsymbol{D}$ оператор-функции, $a_1: D \to \mathrm{Hom}(H_1)$, $a_2: D \to \mathrm{Hom}(H_2)$, $h: D \to \mathrm{Hom}(H_1, H_2)$.

Решением задачи о достройке называется любая голоморфная в $\boldsymbol{D}$ оператор-функция $w(z)$, $w: D \to \mathrm{Hom}(H_2, H_1)$, такая, что «достроенная» блок-матрица-функция $W(z)$ вида (9) имеет внутри $\boldsymbol{D}$ неотрицательную вещественную часть, т. е. всюду внутри $\boldsymbol{D}$ выполняется неравенство (10). Требуется дать критерий разрешимости задачи о достройке и описать совокупность всех ее решений, если эта совокупность непуста.

В исходной задаче весовой аппроксимации, которая породила задачу о достройке, естественно требовать нормировочных условий:

$$a_1(0) = a_1^*(0), \qquad a_2(0) = a_2^*(0), \qquad h(0) = 0, \tag{12}$$

но можно рассматривать (мы так и делаем) задачу о достройке и без этих условий.

Задача о достройке может быть сформулирована для функций в многосвязных областях, функций на римановых поверхностях с краем, функций многих комплексных переменных. В этих ситуациях задача о достройке представляет собой самостоятельную задачу и не трактуется, вообще говоря, как задача весовой аппроксимации.

Отметим, что оператор-функции $a_j(z)$, $j=1, 2$, обязаны иметь неотрицательную вещественную часть в единичном круге, а значит, допускают интегральное представление Рисса—Херглотца:

$$a_j(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{T}}\frac{t+z}{t-z}\Sigma_j(dt)+ic_j,\ (j=1,\ 2),$$

где $\Sigma_j(dt)$ — некоторые операторнозначные сильно счетно аддитивные меры в H_j, $c_j=c_j^*$, $j=1, 2$. Мера Σ_1 играет роль левого радиуса R_g, мера Σ_2 — роль правого радиуса R_d.

Задача о достройке была впервые сформулирована в работе автора [11] как результат продумывания работы Р. Арочены и М. Котляра [12] об интегральном представлении теплицево-ганкелевых ядер, затем эта задача рассматривалась в работе Б. Фрицше и Б. Кирстайна [13].

4°. Обозначим через $K(z)$ следующую операторную блок-матрицу:

$$K(z)=\begin{bmatrix}a_1(z)+a_1^*(z) & h^*(z)\\ h(z) & a_2(z)+a_2^*(z)\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Несложно получить в необходимую сторону следующее

Условие разрешимости задачи о достройке.

Для разрешимости задачи о достройке необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие положительности квадратичной формы:

$$\int\limits_{\mathrm{T}}\left\langle K(rt)\begin{bmatrix}f_1(rt)\\ f_2(rt)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}f_1(rt)\\ f_2(rt)\end{bmatrix}\right\rangle_E m(dt)\geqslant 0\ (\forall r\in(0,\ 1)) \tag{14}$$

для произвольных вектор-столбцов $f=\begin{bmatrix}f_1(z)\\ f_2(z)\end{bmatrix}$, *у которых первая компонента* $f_1(z)$ *является антиголоморфной в* $\mathbf{D}$ H_1*-значной вектор-функцией, и* $f_1(0)=0$, *а вторая компонента* $f_2(z)$ *является голоморфной в* $\mathbf{D}$ H_2*-значной вектор-функцией**).

Замечание. Очевидно, что ничего не изменится, если рассматривать не все голоморфные f_2 и антиголоморфные f_1, а лишь те, которые разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды, т. е. те, для которых $\sum\limits_k\|f_{j,k}\|_{H_j}<\infty$, $j=1, 2$ (см. подстр. примеч.), или любые другие f_1, f_2 из плотных (в очевидном смысле) множеств.

*) Иными словами, функции f_1, f_2 представляются сходящимися внутри $\boldsymbol{D}$ рядами вида $f_1(z)=\sum\limits_{1<k<\infty}f_{1,k}\bar{z}^k$, $f_{1,k}\in\boldsymbol{H}_1$, $f_2(z)=\sum\limits_{0\leqslant k<\infty}f_{2,k}z^k$, $f_{2,k}\in\boldsymbol{H}_2$.

Доказательство необходимости условия разрешимости. Функция $\langle w(z) f_2(z), f_1(z)\rangle_{H_1}$ является голоморфной в $\boldsymbol{D}$ и обращается в ноль в точке $z = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \langle w(rt) f_2(rt), f_1(rt)\rangle_{H_1} m(dt) = 0,$$

а значит, и

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \left\langle \begin{bmatrix} 0 & w(rt) \\ w^*(rt) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix} \right\rangle_{H_1 \oplus H_2} m(dt) = 0.$$

Но ввиду (10) и подавно

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1(rt) \\ f_2(rt) \end{bmatrix} \right\rangle_{H_1 \oplus H_2} m(dt) \geqslant 0,$$

Так как $K(z) = W(z) + W^*(z) - \begin{bmatrix} 0 & w(z) \\ w^*(z) & 0 \end{bmatrix}$, то выполнено (14).

5°. Доказательство достаточности условия разрешимости задачи о достройке — дело гораздо более сложное. Наше доказательство опирается на общую теорию классических интерполяционных задач. Мы показываем, как задача о достройке может быть включена в эту теорию.

Общая теория классических интерполяционных задач представляет собой абстрактную схему рассмотрения некоторого класса задач. (К схемам подобного рода относится и так называемый метод направляющих функционалов М. Г. Крейна, но он мало приспособлен для наших целей).

Объекты, фигурирующие в этой абстрактной схеме, таковы.

1. Некоторое комплексное векторное пространство L (не обязательно наделенное топологией) и полуторалинейный функционал $\boldsymbol{K}$ на L. Пространство L называется *внутренним пространством*, а функционал $\boldsymbol{K}$ — *метризующим ядром*.

2. Линейный оператор A, A: $L \to L$, называемый *внутренним оператором*.

3. Некоторое гильбертово пространство E, называемое *внешним*, или *масштабным пространством*, и линейные отображения u, v, $u: L \to E$, $v: L \to E$, называемые *направляющими отображениями*. Направляющие отображения неравноправны. Одно из них, скажем u, выделено и называется *основным направляющим отображением*, другое, v, называется *сопутствующим направяющим отображением*.

Предполагается, что эти объекты: $\boldsymbol{K}$, A, u, v связаны между собой специальным соотношением. Это соотношение называется *Основное Тождество* (ОТ) и имеет вид ($\forall f, g \in L$):

$$\boldsymbol{K}(f, g) - \boldsymbol{K}(Af, Ag) = \langle u(f), v(g)\rangle_E + \langle v(f), u(g)\rangle_E \text{ (ОТ)}.$$

Основное тождество называют также *уравнением Ляпунова*.

Определение. *Совокупность введенных объектов: внутреннего пространства L, метризующего ядра $\boldsymbol{K}$, внутреннего оператора $\boldsymbol{A}$, внешнего пространства $\boldsymbol{E}$ и направляющих отображений u и v, связанных между собой Основным Тождеством, образует интерполяционный комплекс (Interpolation colligation).*

Мы будем предполагать, что выполнено

Спектральное условие. Для всех z, $z \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{T}$, оператор $(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ обратим в L, и для любого элемента f из внутреннего пространства L E-значные вектор-функции $u((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f)$, $v((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f)$ являются голоморфными в $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{T}$.

Мы намеренно, чтобы упростить формулировки, привели спектральное условие в столь жесткой форме. Для применения к задаче о достройке этого достаточно. В общем же случае можно вообще даже не предполагать обратимости оператора $z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ где-либо.

Фундаментальным объектом, связанным с интерполяционным комплексом, является *Основное Матричное Неравенство* (ОМН) интерполяционного комплекса. Мы записываем это неравенство в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K} & |u^*(z)\rangle W^*(z) - |v^*(z)\rangle \\ \hline W(z)\langle u(z)| - \langle v(z)| & \dfrac{W(z) + W^*(z)}{1 - z\bar{z}} \end{array}\right] \geqslant 0 \quad (\text{ОМН})$$

$W(z)$ в ОМН — это голоморфная в $\boldsymbol{D}$ оператор-функция, $W \colon \boldsymbol{D} \to \to \mathrm{Hom}(E)$.

По определению *ОМН выполняется в точке* $z \in \boldsymbol{D}$, если для любого $f \in L$ и для любого $e \in \boldsymbol{E}$ следующая $2 \otimes 2$ матрица неотрицательна:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K}(f, f) & * \\ \hline \langle W(z)\, u((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f),\ e\rangle_E - \langle v((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1}f),\ e\rangle_E & \dfrac{W(z) + W^*(z)}{1 - |z|^2} \end{array}\right] \geqslant 0 \qquad (15)$$

(12-элемент комплексно сопряжен по отношению к элементу 21).

Решением ОМН называется всякая голоморфная в $\boldsymbol{D}$ оператор-функция $W(z)$, $W \colon \boldsymbol{D} \to \mathrm{Hom}(E)$, такая, что в каждой точке $z \in \boldsymbol{D}$ выполняется ОМН.

Очевидно, необходимым условием разрешимости ОМН является условие неотрицательности метризующего ядра

$$\boldsymbol{K}(f, f) \geqslant 0 \ (\forall f \in L). \qquad (16)$$

При некотором условии невырожденности неотрицательность метризующего ядра достаточна для разрешимости ОМН.

Условие невырожденности:

$$\sup_{e \in u(L),\ \|e\| = 1} \ \inf_{f \in L,\ u(f) = e} (\boldsymbol{K}(f, f) + \|v(f)\|_E^2) < \infty. \qquad (17)$$

Теорема. *Пусть ядро* $\boldsymbol{K}$ *и оператор* $\boldsymbol{A}$ *в векторном пространстве* L *и линейные отображения* u, v *из* L *в некоторое гильбертово пространство* $\boldsymbol{E}$ *образуют интерполяционный комплекс, и пусть выполнены спектральное условие и условие невырожденности.*

Тогда неотрицательность метризующего ядра, т. е. условие (16), *является необходимым и достаточным условием разрешимости ОМН интерполяционного комплекса. Совокупность решений ОМН, если она непуста, т. е. если условие* (16) *выполнено, параметризуется дробно-линейным преобразованием*

$$W(z) = R_{11}(z) - R_{12}(z)\,[\Omega(z) + R_{22}(z)]^{-1} R_{21}(z), \tag{18}$$

где $\Omega(z)$ *— свободный параметр — пробегает класс всех голоморфных позитивных пар в* E, *а*

$$R(z) = \begin{bmatrix} R_{11}(z) & R_{12}(z) \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{bmatrix} \tag{19}$$

— некоторая голоморфная в $\boldsymbol{D}$ *операторная блок-матрица, действующая в гильбертовом пространстве* $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{E}$ *и удовлетворяющая условию*

$$R(z) + R^*(z) \geqslant 0 \quad (z \in \boldsymbol{D}). \tag{20}$$

Возможно, что $R_{12} \equiv 0$ или $R_{21} \equiv 0$: тогда решение ОМН единственно — $W(z) = R_{11}(z)$.

Отметим, что если и не предполагать условие невырожденности выполненным, то решение ОМН все равно существует, однако это решение является, вообще говоря, не оператор-функцией, а некоторым проективным объектом, так называемой позитивной парой (грубо говоря, функцией, значения которой являются отношениями, а не операторами).

Доказательство сформулированной выше теоремы мы приводить не будем. Это — один из результатов общей теории классических интерполяционных задач. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы включить задачу о достройке в общую теорию классических интерполяционных задач и воспользоваться этой теоремой.

Отметим, что доказательство теоремы базируется в конечном счете на теории расширений операторов в гильбертовом пространстве. Однако это — далеко не только «чистая» теорема существования. Отправляясь от нее, можно строить эффективные алгоритмы вычисления матрицы $R(z)$, а следовательно, и нахождения решений задач о достройке. При этом дело сводится к нахождению решений систем сингулярных интегральных уравнений на единичной окружности.

6°. Включим задачу о достройке в изложенную общую схему. Исходными данными задачи о достройке являются неполная блок-матрица-функция (11) — тройка оператор-функций $a_1(z)$, $a_2(z)$, $h(z)$. При этом сразу предполагается, что

$$a_1(z) + a_1^*(z) \geqslant 0, \; a_2(z) + a_2^*(z) \geqslant 0, \; (z \in \boldsymbol{D}) \tag{21}$$

и что функция $h(z)$ такова, что при каждом $x \in \boldsymbol{H}_1$ функция $h(z)x$ принадлежит классу Харди $H_+^2(\boldsymbol{H}_2)$.

Опишем интерполяционный комплекс, адекватный задаче о достройке.

Масштабным, или внешним, пространством $\boldsymbol{E}$ является ортогональная сумма $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2$.

Внутреннее пространство L состоит, по определению, из пар вектор-функций $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, $f_1 : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{H}_1$, $f_2 : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{H}_2$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$f_1(t) = \sum_{-\infty < k < \infty} f_{1,k} t^k, \quad f_2(t) = \sum_{-\infty < k < \infty} f_{2,k} t^k, \tag{22}$$

где

$$\sum_k \| f_{1,k} \|_{H_1} < \infty, \quad \sum_k \| f_{2,k} \|_{H_2} < \infty.$$

При этом

$$f_{j+}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{0 < k < \infty} f_{1,k} t^k, \quad f_{j,-}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{-\infty < k < -1} f_{2,k} t^k, \quad j = 1, 2. \tag{23}$$

При сделанных об a_1 a_2, h предположениях для любых f, g из L существует предел

$$\boldsymbol{K}(f, g) \overset{\text{def}}{=} \lim_{r \to 1-0} \int_T \left\langle K(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_{1,-}(t) \\ g_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt). \tag{24}$$

Этот предел $\boldsymbol{K}(f, g)$ и объявим метризующим ядром внутреннего пространства L. Условие положительности (14), очевидно, равносильно условию положительности этого метризующего ядра.

Внутренний оператор A — это просто оператор умножения на t, если $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \in L$, то $Af \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ tf_2(t) \end{bmatrix}$.

Самое нетривиальное — указать направляющие отображения.

Основное направляющее отображение u, $u : L \to E$, определяется так.

$$\text{Если } f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \in L, \text{ то } u(f) \overset{\text{def}}{=} \int_T \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ -tf_2(t) \end{bmatrix} m(dt). \tag{25}$$

Сопутствующее направляющее отображение v, v: $L \to \boldsymbol{E}$, определяется так. Если $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \in L$, то

$$\boldsymbol{v}(f) \overset{\text{def}}{=} \lim_{r \to 1-0} \int_T \begin{bmatrix} a_1(rt) & h^*(rt) \\ h(rt) & a_2^*(rt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} tf_1(t) \\ tf_2(t) \end{bmatrix} m(dt). \tag{26}$$

Теорема. *Определенные в этом n°. объекты* $\boldsymbol{K}$, A, u, v *образуют при сделанных относительно* a_1, a_2, h *предположениях интерполяционный комплекс: для них справедливо Основное Тождество.*

Кроме того, выполняются сформулированное в n°. 5 спектральное условие и Условие невырожденности.

Доказательство. Основное Тождество проверяется непосредственным вычислением. Пусть $f,\ g \in L$, $f(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, $g(t)=\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$. Тогда $(Af)(t)=\begin{bmatrix} tf_1(t) \\ tf_2(t) \end{bmatrix}$, $(Ag)(t)=\begin{bmatrix} tg_1(t) \\ tg_2(t) \end{bmatrix}$. Для вычисления величины $K(Af,\ Ag)$ нам понадобятся выражения $(tf_1)_-(t)$, $(tf_2)_+(t)$, $(tg_1)_-(t)$, $(tg_2)_+(t)$. Имеем $(tf_1)_-(t)=tf_{1,-}(t)-(tf_1)_0$,

$$(tf_1)_0=\int_T tf_1(t)\,m(dt),\ (tf_2)_+(t)=tf_{2,+}(t)+(tf_2)_0,$$

$$(tf_2)_0=\int_T tf_2(t)\,m(dt)$$

и аналогичные равенства для $(tg_1)_-(t)$, $(tg_2)_+(t)$. Далее, используя выражение (24) для ядра $\boldsymbol{K}$, имеем

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}(f,\ g)-\boldsymbol{K}(Af,\ Ag)=\\ &=\lim_{r\to 1-0}\left\{\int_T\left\langle K(rt)\begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} g_{1,-}(t) \\ g_{2,+}(t) \end{bmatrix}\right\rangle_E m(dt)-\right.\\ &\left.-\int_T\left\langle K(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t)-(tf_1)_0 \\ tf_{2,+}(t)+(tf_2)_0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} tg_{1,-}(t)-(tg_1)_0 \\ tg_{2,+}(t)+(tg_2)_0 \end{bmatrix}\right\rangle_E m(dt)\right\}=\end{aligned}$$

(так как $\bar{t}t=1$ при $t\in\boldsymbol{T}$)

$$\begin{aligned}&=\lim_{r\to 1-0}\left\{\int_T\left\langle K(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} (tg_1)_0 \\ -(tg_2)_0 \end{bmatrix}\right\rangle_E m(dt)+\right.\\ &+\int_T\left\langle\begin{bmatrix} (tf_1)_0 \\ -(tf_2)_0 \end{bmatrix},\ K(rt)\begin{bmatrix} tg_{1,-}(t) \\ tg_{2,+}(t) \end{bmatrix}\right\rangle_E m(dt)-\\ &\left.-\int_T\left\langle K(rt)\begin{bmatrix} (tf_1)_0 \\ -(tf_2)_0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} (tg_1)_0 \\ -(tg_2)_0 \end{bmatrix}\right\rangle_E m(dt)\right\}.\end{aligned}$$

Или, используя определение (25) основного направляющего отображения u,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}(f,\ g)-\boldsymbol{K}(Af,\ Ag)= \qquad (27\\ &=\left\langle\lim_{r\to 1-0}\int_T K(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt),\ u(g)\right\rangle_E+\\ &+\left\langle u(f),\ \lim_{r\to 1-0}\int_T K(rt)\begin{bmatrix} tg_{1,-}(t) \\ tg_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt)\right\rangle_E-\\ &-\left\langle\left(\lim_{r\to 1-0}\int_T K(rt)\,m(dt)\right)u(f),\ u(g)\right\rangle_E.\end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое правой части (27). Обозначим

$$M(z)=\begin{bmatrix} a_1(z) & 0 \\ h(z) & a_2(z) \end{bmatrix},\quad M^*(z)=\begin{bmatrix} a_1^*(z) & h^*(z) \\ 0 & a_2^*(z) \end{bmatrix}.$$

Имеем $K(z)=M(z)+M^*(z)$. Далее

$$\int_T K(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt)= \tag{28}$$

$$=\int_T (M(rt)+M^*(rt))\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt)=$$

(так как $f_{1,-}(t)=f_1(t)-f_{1,+}(t),\ f_{2,+}(t)=f_2(t)-f_{2,-}(t)$)

$$=\int_T M(rt)\begin{bmatrix} tf_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} m(dt)-\int_T M(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,+}(t) \\ -tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt)+$$

$$+\int_T M^*(rt)\begin{bmatrix} 0 \\ tf_2(t) \end{bmatrix} m(dt)+\int_T M^*(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ -tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt).$$

Так как функции $M(z)$, $zf_{1,+}(z)$, $zf_{2,+}(z)$ голоморфны в $\boldsymbol{D}$ и последние две из них обращаются в ноль в точке $z=0$, то

$$\int_T M(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,+}(t) \\ -tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt)=0\quad (0\leqslant r<1). \tag{29}$$

По аналогичным причинам

$$\int_T M^*(t)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ -tf_{2,-}(t) \end{bmatrix} m(dt)=M^*(0)\begin{bmatrix} (tf_1)_0 \\ -(tf_2)_0 \end{bmatrix}=$$

$$=M^*(0)\,u(f). \tag{30}$$

Из (26), (28), (29) и (30) получаем, что

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T K(rt)\begin{bmatrix} tf_{1,-}(t) \\ tf_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt)=v(f)+M^*(0)\,u(f). \tag{31}$$

Далее, очевидно, что

$$\int_T K(rt)\,m(dt)=K(0)=M(0)+M^*(0). \tag{32}$$

Из (27), (31) и (32) получаем, что $\boldsymbol{K}(f,g)-\boldsymbol{K}(Af,Ag)=\langle v(f)+M^*(0)u(f),u(g)\rangle_E+\langle u(f),v(g)+M^*(0)u(g)\rangle_E-\langle (M(0)+M^*(0))u(f),u(g)\rangle_E=\langle u(g),v(g)\rangle_E+\langle v(f),u(g)\rangle_E$.
Основное тождество доказано.

Спектральное условие очевидно:

$$u\left((A - zI)^{-1}f\right) = \int_T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z}\, m(dt), \tag{33}$$

$$v\left((A - zI)^{-1}f\right) = \tag{34}$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \int_T \begin{bmatrix} a_1(rt) & h^*(rt) \\ h(rt) & a_2^*(rt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z}\, m(dt).$$

Проверим, наконец, условие невырожденности. Пусть $e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in E$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, $\|e\|_E^2 = 1$, т. е. $\|h_1\|_{H_1}^2 + \|h_2\|_{H_2}^2 = 1$. Положим $\hat f_1(t) = h_1 t^{-1}$, $\hat f_2(t) = h_2 t^{-1}$, $\hat f = \begin{bmatrix} \hat f_1(t) \\ \hat f_2(t) \end{bmatrix}$, $f \in L$. Для этого $\hat f$ имеем $u(\hat f) = e$, $\hat f_{1,-}(t) = f_1(t)$, $\hat f_{2,+}(t) = 0$. Поэтому $K(\hat f, \hat f) = \lim_{r\to 1-0} \int_T \langle k_{11}(rt)\, h_1, h_1\rangle_{H_1} = \langle k_{11}(0)\, h_1, h_1\rangle \leqslant \|k_{11}(0)\|\, \|h_1\|^2 \leqslant \|k_{11}(0)\|$.

Далее имеем

$$v(\hat f) = \lim_{r\to 1-0} \int_T \begin{bmatrix} a_1(rt) & h^*(rt) \\ h(rt) & a_2^*(rt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ -h_2 \end{bmatrix} m(dt) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1(0) & h^*(0) \\ h(0) & a_2^*(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ -h_2 \end{bmatrix}, \text{ откуда } \|(\hat f)\|^2 \leqslant \left\| \begin{bmatrix} a_1(0) & h^*(0) \\ h(0) & a_2^*(0) \end{bmatrix} \right\|.$$

Тем самым условие невырожденности (17) выполнено.

Теорема доказана.

Определение. *Интерполяционный комплекс, введенный в этом п. °, называется интерполяционным комплексом, ассоциированным с задачей о достройке.*

7°. В этом разделе декларируем, что Основное Матричное Неравенство интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке, является адекватным этой задаче.

Теорема. 1) *Пусть оператор-функция $w(z)$ является решением задачи о достройке частичной матрицы-функции* (11). *Тогда достроенная блок-матрица-функция $W(z)$ вида* (9) *является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке.*

2) *Пусть блок-матрица-функция $W(z) = \begin{bmatrix} w_{11}(z) & w_{12}(z) \\ w_{21}(z) & w_{22}(z) \end{bmatrix}$ является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке частичной матрицы-функции* (11). *Тогда для этой $W(z)$ обязаны выполняться равенства $w_{11}(z) = a_1(z)$, $w_{22}(z) = a_2(z)$, $w_{21}(z) = h(z)$ и, следовательно, оператор-функция $w(z)$, $w(z) \stackrel{\text{def}}{=} w_{12}(z)$, является решением задачи о достройке.*

Доказательство утверждения 1. Пусть $W(z)$ — какая-нибудь «достроенная» блок-матрица-функция вида (9), удовлетворяющая условию (10). Пусть $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$ — произвольный элемент из L и $e = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ — произвольный элемент из $\boldsymbol{E}$. Из (10) и подавно следует, что

$$\int_T \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \left(\begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} + \frac{\bar{t}}{\bar{t} - \bar{z}} e \right), \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} + \frac{\bar{t}}{\bar{t} - \bar{z}} e \right\rangle_E m(dt) \geqslant 0.$$

Так как вместо f здесь можно взять αf, а вместо e — βe, где α, β — произвольные комплексные числа, то из условия неотрицательности скалярной величины — левой части последнего неравенства — вытекает неотрицательность $2 \otimes 2$ матрицы Γ:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{35}$$

где

$$\Gamma_{11} = \lim_{r \to 1-0} \int_T \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt),$$

$$\Gamma_{22} = \lim_{r \to 1-0} \int_T (W(rt) + W^*(rt)) \frac{1}{|t-z|^2} m(dt),$$

$$\Gamma_{21} = \lim_{r \to 1-0} \int_T \left\langle (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, e \right\rangle_E \frac{t}{t-z} m(dt), \tag{36}$$

$\Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*$. Так как $W(z) + W^*(z) = K(z) + \begin{bmatrix} 0 & w(z) \\ w^*(z) & 0 \end{bmatrix}$ и так как

$$\int_T \left\langle \begin{bmatrix} 0 & w(rt) \\ w^*(rt) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \right\rangle_E m(dt) = 0 \text{ (см. п}^\circ\text{. 4)},$$

то

$$\Gamma_{11} = \boldsymbol{K}(f, f), \tag{37}$$

где $\boldsymbol{K}(f, g)$ — ядро, определенное в (24) — метризирующее ядро интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке.

Функция $W(z) + W^*(z)$ — гармоническая в $\boldsymbol{D}$. Поэтому

$$\int_T (W(rt) + W^*(rt)) \frac{1}{|t-z|^2} m(dt) = \frac{W(rz) + W^*(rz)}{1 - |z|^2}$$

и

$$\Gamma_{22} = \left\langle \frac{W(z) + W^*(z)}{1 - |z|^2} e, e \right\rangle. \tag{38}$$

Самое хлопотное — вычислить Γ_{21}. Преобразуем выражение

$$\int_T (W(rt) + W^*(rt)) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) = \tag{39}$$

$$= \int_T W(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) + \int_T W(rt) \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) +$$

$$+ \int_T W^*(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) + \int_T W^*(rt) \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt).$$

Имеем

$$\int_T W(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) = \int_T W(rt) \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) -$$

$$- \int_T \frac{(W(rt) - W(rz))}{t-z} t \begin{bmatrix} f_{1,+}(t) \\ 0 \end{bmatrix} m(dt) - W(rz) \int_T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) +$$

$$+ W(rz) \int_T \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt).$$

орое слагаемое в правой части последнего равенства равно лю, так как подынтегральная функция есть граничное значее функции, голоморфной внутри D, непрерывной вплоть до грацы и обращающейся в нуль в точке $z=0$. Четвертое слагаемое кже равно нулю, так как подынтегральная функция есть граниче значение функции, голоморфной во внешности окружности T, епрерывной вплоть до границы и обращающейся в нуль в точке $=\infty$. Таким образом,

$$\int_T W(rt) \begin{bmatrix} f_{1,-}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) = \tag{40}$$

$$= \int_T W(rt) \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) - W(rz) \int_T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt).$$

Далее, аналогично

$$\int_T W(rt) \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) =$$

$$= \int_T \frac{W(rt) - W(rt)}{t-z} t \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} m(dt) + W(rz) \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt).$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю, так как $\int_T f_{2,-}(t) \frac{t}{t-z} m(dt) = 0$, то второе слагаемое есть

$$\int_T \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2,+}(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt) = \int_T \begin{bmatrix} 0 \\ f_2(t) \end{bmatrix} \frac{t}{t-z} m(dt).$$

Таким образом,

$$\int_T W(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt) = W(rz)\int_T\begin{bmatrix}0\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt). \qquad (41)$$

Третье слагаемое в правой части равенства (39) исчезает

$$\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}f_{1,-}(t)\\ 0\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt) = 0, \qquad (42)$$

так как подынтегральная функция есть граничное значение функции, голоморфной вне окружности T и обращающейся в нуль в точке $z=\infty$. Наконец, так как по тем же причинам

$$\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_{2,-}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt) = 0, \text{ то}$$

$$\int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt) = \int_T W^*(rt)\begin{bmatrix}0\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt). \qquad (43)$$

Объединяя (39), (40), (41), (42) и (43), получим

$$\int_T (W(rt)+W^*(rt))\begin{bmatrix}f_{1,-}(t)\\ f_{2,+}(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt) = \qquad (44)$$

$$= \int_T\begin{bmatrix}w_{11}(rt) & w_{21}^*(rt)\\ w_{21}(rt) & w_{22}^*(rt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt) -$$

$$- W(rz)\int_T\begin{bmatrix}f_1(t)\\ -f_2(t)\end{bmatrix}\frac{t}{t-z}m(dt). \qquad (45)$$

Вспомним, что $w_{11}(z)=a_1(z)$, $w_{22}(z)=a_2(z)$, $w_{21}(z)=h(z)$. Наконец, вспоминая (36), (34) и (35), получим, что

$$\Gamma_{21} = \langle v((A-zI)^{-1}f),\ e\rangle_E - \langle w(z)\,u((A-zI)^{-1}f),\ e\rangle_E. \qquad (46)$$

Из (35), (37), (38) и (46) вытекает, что «достроенная» матрица-функция $W(z)$ вида (9) является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке. Утверждение 1 теоремы этого п^0. доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть некоторая блок-матрица-функция $W(z)$ является решением ОМН интерполяционного комплекса, ассоциированного с задачей о достройке. Фиксируем произвольно точку $z\in D$ и выберем в ОМН (15) элемент f специальным способом. Именно, положим $f=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$, где

$$f_1(t) = \frac{\bar t}{\bar t-\bar z}h_1\left(=\frac{h_1}{1-t\bar z},\ t\in T\right),\ \ f_2(t)\equiv 0,\ h_1\in H_1.$$

Имеем $f_{1,-}(t) \equiv 0$, $f_{2,+} \equiv 0$, и, значит, согласно определению (24) ...ризующего ядра $\boldsymbol{K}$, для этого f имеем $\boldsymbol{K}(f, f) = 0$. Из ОМН ...) теперь следует, что для этого f выполнено

$$\langle W(z)\, u\,((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1} f,\ e\rangle_E - \langle v\,((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1} f,\ e\rangle_E = 0. \tag{47}$$

Подставляя явное выражение для f в (33) и (34), получим

$$u\,((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1} f) = \frac{1}{1 - |z|^2}\begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$v\,((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1} f) = \frac{1}{1 - |z|^2}\begin{bmatrix} a_1(z)\, h_1 \\ h(z)\, h_1 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Так как $e \in \boldsymbol{E}$ и $h_1 \in \boldsymbol{H}_1$ произвольны, то из (47), (48), (49) вытекает, что $w_{11}(z) = a_1(z)$, $w_{21}(z) = h(z)$. Для установления равенства $w_{22}(z) = a_2(z)$ перейдем к «двойственному» ОМН. Из общей теории интерполяционных задач известно, что если ОМН некоторого интерполяционного комплекса выполняется в точке $z \in \boldsymbol{D}$, то это ОМН выполняется и в точке $z^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\bar{z}}$, если понимать $W(z^*) \stackrel{\text{def}}{=} -W^*(z)$. Иными словами, двойственное ОМН имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\boldsymbol{K}(f, f)}{\langle W^*(z)\, u\,((\boldsymbol{A} - z^*\boldsymbol{I})^{-1} f),\ e\rangle_E + \langle v\,((\boldsymbol{A} - z^*\boldsymbol{I})^{-1} f),\ e\rangle_E} & \\ \hline & \dfrac{*}{\left\langle \dfrac{W(z) + W^*(z)}{1 - |z|^2}\, e,\ e \right\rangle_E} \end{array}\right] \geqslant 0. \tag{50}$$

Фиксируем теперь точку $z \in \boldsymbol{D}$ и положим в двойственном ОМН (50) $f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$, где $f_2(t) \equiv 0$, $f_2(t) = \frac{\bar{t}}{\bar{t} - \bar{z}^*}\left(= \frac{z}{z - t}\, h_2 \text{ при } t \in \boldsymbol{T}\right)$, $h_2 \in \boldsymbol{H}_2$. Имеем $f_{1,-}(t) \equiv 0$, $f_{2,+}(t) \equiv 0$, и, значит, (24), $\boldsymbol{K}(f, f) = 0$. Из ОМН (50) теперь следует, что для этого f

$$W^*(z)\, u\,((\boldsymbol{A} - z^*\boldsymbol{I})^{-1} f) + v\,((\boldsymbol{A} - z\boldsymbol{I})^{-1} f) = 0. \tag{51}$$

Подставляя явное выражение для f в (33) и (34), получим

$$u\,((\boldsymbol{A} - z^*\boldsymbol{I})^{-1} f) = \frac{1}{1 - |z^*|^2}\begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}, \tag{52}$$

$$v\,((\boldsymbol{A} - z^*\boldsymbol{I})^{-1} f) = \frac{1}{|z^*|^2 - 1}\begin{bmatrix} h^*(z)\, h_2 \\ a_2^*(z)\, h_2 \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Из (51), (52) и (53) вытекает, что $w_{21}(z) = h(z)$ (это мы уже получили ранее) и $w_{22}(z) = a_2(z)$. Утверждение 2 теоремы доказано.

Отметим, что из этой теоремы и теоремы п°. 5 вытекает в достаточную сторону условие разрешимости задачи о достройке п°. 4.

Этой теоремой описание множества решений задачи о достройке сводится к описанию множества решений ОМН, ассоциированного с этой задачей интерполяционного комплекса. Для ОМН этого комплекса вполне неопределенная ситуация заведомо не может иметь места: у всех решений ОМН этого комплекса элементы $w_{11}(z)$, $w_{22}(z)$, $w_{21}(z)$ одинаковы, а различаться эти решения могут только элементами $w_{12}(z)$.

Это обеспечивается специальной структурой матрицы $R(z)$, (19), фигурирующей в описании множества решений ОМН. Исследованию структуры этой матрицы $R(z)$ мы посвятим отдельную работу.

8°. Обсудим теперь некоторые другие возможные постановки задач о достройке. Во-первых, можно достраивать матрицы-функции (неполные) до матриц-функций (полных) из классов, отличных от классов матриц с положительной вещественной частью, например, до сжимающих. Еще один пример: неполная, или частичная, матрица-функция вида (11) задана в комплексной плоскости, разрезанной по положительной полуоси. Требуется достроить ее до матрицы-функции класса Стилтьеса. Далее, можно налагать еще дополнительные интерполяционные условия, например, требовать, чтобы в заданных точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ достраивающая функция $w(z)$ удовлетворяла еще и условиям вида $w(z_j) = w_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Наконец, можно рассматривать частичные, или неполные, матрицы-функции, у которых множество незаданных элементов имеет более общую структуру, чем у матрицы вида (11). Речь идет, конечно, о блок-матрицах размера не 2×2, а $n\times n$. Отметим, что для постоянных (не зависящих от z) матриц (а не матриц-функций) в этом направлении получен в последние годы ряд результатов. Работы в этом направлении выполнили, в частности, Ch. Davis, Ch. R. Johnson, L. Rodman, I. Gohberg и ряд других математиков.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 2. *Лившиц М. С.* Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов // ДАН СССР. 1944. **44**, № 1. С. 3—7. 3. *Nehari Z.* On bounded bilinear forms // Ann. of Math. 1957. **65**, No. 1. P. 153—162. 4. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных проблемах Каратеодори—Фейера и Ф. Рисса // Функцион. анализ и его прил. 1968. **2**, вып. 1. С. 1—19. 5. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и И. Шура // Функцион. анализ и его прил. 1968. **2**, вып. **4**. С. 1—17. 6. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелевого оператора и обобщенная задача Шура — Такаги // Мат. сб. 1971. **86**, № 1. С. 34—75. 7. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения // Изв. АН Арм. ССР. 1971. **6**, № 2—3 С. 87—112. 8. *Helton J. W.* Operator Theory, Analytic Functions, Matrices, and Electrical Engineering. Providence // Amer. Math. Soc. 134 p. (Reg. Conf. Ser. Math., No. 68). 9. *Francis B. A., Doyle J. C.* Linear control theory with H^∞ optimality criterion // SIAM Journ. Contr. Optim. 1987. **25**, №. 4. P. 815—844. 10. *Francis B. A.* A guide to H^∞-control theory // Modell., Robustness and Sensitivity Reduc. Contr. Syst. (Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Groningen, Dec. 1—5, 1986). Berlin, 1987. P. 1—30. 11. *Кацнельсон В. Э.* Интегральные представления эрмитово-положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари. **1** // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1985. Вып. 43. С. 54—70. 12. *Arocena R., Cotlar M.* Generalized Toeplitz kernels and Adamjan-Arov-Krein moment problems // Toeplitz Centennial. Operator Theory, Advances and Applications. 1982. **4**. P. 37—55. Birkhäuser. 1982. 13. *Fritzsche B., Kirstein B.* On generalized Nehary Problem // Math. Nachr. 1988. **138**. P. 217—237.

Поступила в редколлегию 06.03.90

УДК 517.947

В. А. ЗОЛОТАРЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

I. В работе [1] построены функциональные модели коммутирующей системы операторов. Относительно системы $\{A_k\}$, действующей в гильбертовом пространстве H, предполагается, что

а) $(A_k)_I H \subseteq (A_1)_I H$, $(\forall k)$, $2i\,(A_k)_I = A_k - A_k^*$;

б) $(A_1)_I \geqslant 0$.

Кроме того, будем считать, что $(A_1)_I H$ — конечномерно.

Пусть $z_t = \exp(i \sum t_k A_k)$, а система $\{A_k\}$ является простой. Тогда функциональная модель полугруппы z_t запишется в следующем виде:

$$\tilde{z}_t = P_{P_S}\begin{bmatrix} e^{i(\delta_t y+\gamma_{1,t}^{-})} & 0 \\ 0 & e^{i(\sigma_t y+\gamma_{1,t}^{+})} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_S}, \tag{1}$$

где $t \in K$ — выпуклый острый-конус в R^n, а гильбертово пространство P_S, в котором действует модель, имеет вид

$$P_S = \left\{\begin{bmatrix} f_- \\ f_+ \end{bmatrix} \in L^2\begin{pmatrix} I & \tilde{S}^* \\ \tilde{S} & I \end{pmatrix};\ \begin{matrix} f_- + \tilde{S}^* f_+ \in H_+^2(E) \\ \tilde{S} f_- + f_+ \in H_-^2(E) \end{matrix}\right\}$$

$$(\sigma_t = \sum t_k \sigma_k;\ \gamma_{1,t}^{\pm} = \sum t_k \gamma_{1,k}^{\pm};\ \sigma_k = \sigma_k^*;\ \gamma_{1,k}^{\pm} = (\gamma_{1,k}^{\pm})^*).$$

Через $H_{\pm}^2(E)$ обозначены пространства Харди E-значных функций, отвечающих полуплоскостям $C_{\pm}$, а через $\tilde{S}(y)$ обозначена характеристическая функция оператора A_1.

II. Обозначим через Q алгебраическую кривую в C^n:

$$Q = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in C^n;\ Q_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) = 0,\ 1 < k \leqslant n\}, \tag{2}$$

где

$$Q_{1,k}(\lambda_1, \lambda_k) = \det[\sigma_k \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_k + \gamma_{1,k}^{-}].$$

Характеристическая функция $\tilde{S}(y)$ удовлетворяет условиям сплетаемости:

$$\tilde{S}(y)(\sigma_k y + \gamma_{1,k}^{-}) = (\sigma_k y + \gamma_{1,k}^{+})\,\tilde{S}(y),\ (1 < k \leqslant n).$$

Здесь мы ограничимся случаем $n = 2$. Обозначим через $h^{\pm}(P)$ вектор

$$h^{\pm}(P) \in \ker(\sigma_2 \lambda_1 - \sigma_1 \lambda_2 + \gamma_{1,2}^{\pm}), \tag{3}$$

где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in Q$, т. е. $h^{\pm}(P)$ — собственные вектора линейных пучков,

$$(\sigma_2 \lambda_1 + \gamma_{1,2}^{\pm})\, h^{\pm}(P) = \lambda_2 h^{\pm}(P),$$

которые мы будем нормировать условием $h_r^{\pm}(P)=1$ ($h_r^{\pm}(P)$ — «r-я» компонента $h^{\pm}(P)$).

Нетрудно показать, что число полюсов векторов-функций $h^{\pm}(P)$ равно $N=g+r-1$ (g — род $\boldsymbol{Q}$, $r=\dim E$).

Выделим на римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$ правильные аналоги полуплоскостей $\boldsymbol{C}_{\pm}$ и вещественной оси $\boldsymbol{R}$. В силу функциональной модели (1) классы Харди $H^2_{\mp}(E)$ соответствуют полуплоскостям $\pm\operatorname{Im}\lambda_1>0$, и, значит, естественно определить

$$\boldsymbol{Q}_{\pm}=\{P\in\boldsymbol{Q};\ \pm\operatorname{Im}\lambda_1(P)>0\},\ \boldsymbol{Q}_0=\partial\boldsymbol{Q}_{\pm}.$$

Будем называть $\boldsymbol{Q}_0$ разрезами поверхности $\boldsymbol{Q}$. В силу самосопряженности $\sigma_2\lambda_1+\gamma_{1,2}^{\pm}$, $\lambda_1\in\boldsymbol{R}$ особенности $h^{\pm}(P)$ (3) лежат на $\boldsymbol{Q}_0$.

Каждую из вектор-функций $f(\lambda_1)\in L^2(\boldsymbol{R},\ E)$ ($\lambda_1\in\boldsymbol{R}$) разложим по ортогональному базису собственных векторов $h^+(P_k)$ (3) ($P_k=(\lambda_1,\ \lambda_2^k(\lambda_1))\in\boldsymbol{Q}$), $f(\lambda_1)=\sum h^+(P_k)\cdot\|h^+(P_k)\|_E^{-2}\cdot g(P_k)$, скалярные функции $g(P_k)$ имеют вид $g(P_k)=\langle f(\lambda_1),\ h^+(P_k)\rangle_E$ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$, как и $\|\cdot\|_E$, в смысле евклидового пространства E). Определим гильбертово пространство:

$$L^2(h^+,\ d\lambda_1)=\left\{f(P)=h^+(P)\cdot\|h^+(P)\|_E^{-2}\,g(P);\ \int\limits_{\boldsymbol{Q}_0}\|f(P)\|_E^2\,d\lambda_1<\infty\right\},$$

где $h^+(P)$ — собственный вектор (3) пучка $\sigma_2\lambda_1+\gamma_{1,2}^{+}$, а $g(P)$ — скалярная, измеримая на $\boldsymbol{Q}_0$ функция, имеющая такие же особенности, что и $h^+(P)$ (с учетом кратности), причем

$$\int\limits_{\boldsymbol{Q}_0}|g(P)|^2\,\frac{d\lambda_1}{\|h(P)\|^2}<\infty.$$

Через $H^2_{\boldsymbol{Q}_{\pm}}(h^+,\ d\lambda_1)$ обозначим пространства Харди, образованные функциями из $L^2_{\boldsymbol{Q}_0}(h^+,\ d\lambda_1)$, скалярные компоненты которых $g(P)$ голоморфно продолжаемы в области $\boldsymbol{Q}_{\pm}$. Аналогично определяются пространства $L^2_{\boldsymbol{Q}_0}(h^-,\ d\lambda)$ и $H^2_{\boldsymbol{Q}_{\pm}}(h^-,\ d\lambda_1)$.

Из свойств сплетаемости следует

$$S^*(\lambda_1)\,h^*(P)=\theta(P)\,h^-(P), \tag{4}$$

где $P=(\lambda_1,\ \lambda_2)\in\boldsymbol{Q}_0$, а $\theta(P)$ — скалярная на $\boldsymbol{Q}_0$ функция, которая благодаря нормировке $h^{\pm}(P)$ легко вычисляется. Из (4) следует, что $\theta(P)=\langle S^*(\lambda_1)\,h^+(P),\ h^-(P)\rangle\cdot\|h^-(P)\|_E^{-2}$ и, кроме того, $\theta(P)$ равна «r-й» компоненте вектора $S^*(\lambda_1)\,h^+(P)$.

Теорема. *Пусть* $\dim E=r<\infty$, $\sigma_1=I_E$, $\operatorname{rank}\sigma_2=l$, $n=2$ *и кривая* $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{C}^2$ *неособая. Тогда на* $\boldsymbol{Q}$ *существуют векторные поля* $h^+(P)$ *с неспециальными дивизорами полюсов* $D_{\pm}$, $\deg D_{\pm}=g+r-1$ ($P=(\lambda_1,\ \lambda_2)\in\boldsymbol{Q}$), *что функциональная модель простой коммутативной системы* A_1, A_2 (*для которой имеют место* а), б)) *имеет вид*

$$\mathring{A}_k\,f(P)=P_{\mathring{H}}\,\lambda_k(P)\,f(P),\ (k=1,\ 2), \tag{5}$$

где $\lambda_1(P)$ и $\lambda_2(P)$ имеют на Q_0 r и l полюсов (с учетом кратности) соответственно; $f(P)\in \mathring{H}$. Модельное пространство $\mathring{H}$ имеет вид

$$\mathring{H}=\left\{f(P)=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2\end{bmatrix};\ \begin{array}{l} f_1\in H^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1)\ominus\theta(P)\,H^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1) \\ f_2\in\Delta(P)\,L^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1)\,\theta\Delta(P)\,H^2_{Q_\pm}(h^-,\ d\lambda_1)\end{array}\right\},\quad (6)$$

где $\Delta^2(P)=1-\theta(P)\,\theta^*(P)=1-|\theta(P)|^2,\ P\in Q_0$.

III. **Пример 1.** *Пусть* $\dim E=2$ *и*

$$\sigma_1=I_E,\ \sigma_2=\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & -a\end{bmatrix},\ \gamma=\gamma^{\pm}_{1,2}=\begin{bmatrix} n & m\\ \bar{m} & n\end{bmatrix},$$

$a>0;\ n\in R,\ m\in C$). *Кривая* Q (2) *имеет вид*

$$(n-\lambda_2)^2-a^2\lambda_1^2=|m|^2. \quad (7)$$

Точками ветвления будут $\lambda_2=h\pm|m|$, т. е. кривая (7) является двулистной римановой поверхностью рода $g=0$, полученной из двух λ_2 листов C, склеенных крест-накрест вдоль разрезов $(-\infty,\ n-|m|]\cup[n+|m|,\ \infty)$. Так как $a\,\mathrm{Im}\,\lambda_1=\mathrm{Im}\sqrt{(n-\lambda_2)^2-|m|^2}$ может менять знак лишь на разрезах, то Q_+ и Q_- — первый и второй из листов Q, а Q_0 — упомянутые выше разрезы. Для (7) $l=r=2$. Униформизируем (7) при помощи функций

$$\lambda_1(u)=-\frac{|m|}{a}\operatorname{ctg}u;\ \lambda_2(u)=n-\frac{|m|}{\sin u}, \quad (8)$$

где $u\in\Gamma$; фундаментальная область $\Gamma=\{u\in C;\ \mathrm{Re}\,u\in[0;\ 2\pi]\}$. Группу F порождают сдвиги $u\to u+2\pi$. Так как $\mathrm{Im}\,\lambda_1=\frac{|m|}{2a}\frac{\mathrm{sh}\,(2\,\mathrm{Im}\,u)}{|\sin u|^2}$, то $\Gamma_\pm=\{u\in\Gamma;\ \pm\mathrm{Im}\,u>0\}$, $\Gamma_0=\{u\in\Gamma;\ \mathrm{Im}\,u=0\}$. Собственные вектора пучка $(\sigma_2\lambda_1+\gamma)\,h=\lambda_2 h$ имеют вид

$$h=h^\pm=\begin{bmatrix}\dfrac{m}{\lambda_2-a\lambda_1-h}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^{i\psi}\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2}\\ 1\end{bmatrix};\ (\psi=\arg m), \quad (9)$$

полюс h (он один $N=1$) расположен в точке $u=0$. Так как $d\lambda_1(u)=|m|\,du/a\sin^2 u$, то

$$L^2_{\Gamma_0}(h,\ d\lambda_1)=\left\{f=h(u)\cdot g(u)\cdot\|h(u)\|^{-2};\ \int\limits_0^{2\pi}|g(u)|^2\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}<\infty\right\},$$

где h имеет вид (9); $g(u)$ — скалярная функция на $[0;\ 2\pi]$; $g(u+2\pi)=g(u)$ и имеющая нуль в точке π. Пространства Харди $H^2_{\Gamma\pm}(h,\ d\lambda_1)$ образуют такие $f\in L^2_{\Gamma_0}(h,\ d\lambda_1)$, скалярная компонента которых допускает голоморфное продолжение в полуполосы $\Gamma_\pm$.

Функции $\lambda_k(u)$ (8) имеют по 2 одинаковых простых полюса в точках 0 и π. Функциональную модель (полагая для простоты $\theta(u)$ внутренней) реализуем формулами (5) в пространстве

$$H^2_{\Gamma_+}(h,\ d\lambda_1) \ominus \theta(u)\, H^2_{\Gamma_+}(h,\ d\lambda_1).$$

Отметим, что множители типа Бляшке для скалярной 2π-периодической функции $\theta(u)$ имеют вид

$$\frac{\sin(u-\overline{u_k})}{\sin(u-u_k)}\cdot\frac{\sin u_k}{\sin \overline{u_k}},$$

где $u_k \in \Gamma_-$. Функция $\theta(u)$, наследуя особенности $S(\lambda_1)$, приобретает также простой полюс в точке $u=0$, ибо, если $S_{i,j}(\lambda_1)$ — матричные элементы $S(\lambda_1)$, то $\theta(u)=S_{2,2}(\lambda_1(u))-e^{i\psi}\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\, S_{2,1}\times$ $\times(\lambda_1(u))$.

Пример 2. *Предположим, что* $\dim E = 3$ *и*

$$\sigma_1 = I_E,\ \sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\\ a & 0 & 0\end{bmatrix},\ \gamma=\gamma^{\pm}_{1,2}=\begin{bmatrix} -k^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & b\\ 0 & b & k^{-1}-2\end{bmatrix},$$

где $a>0$; $k\in(0,\ 1)$; $b=\sqrt{2(k^{-1}-1)}$. Кривая третьего порядка $\boldsymbol{Q}$ (2) имеет вид

$$k^2a^2\lambda_1^2(1-\lambda_2)=(1+\lambda_2)(1-k^2\lambda_2^2). \tag{10}$$

Полагая $\zeta = ka\lambda_1(1-\lambda_2)$, приходим к алгебраической кривой Лежандра [2]:

$$\zeta^2=(1-\lambda_2^2)(1-k^2\lambda_2^2). \tag{11}$$

Двулистная риманова поверхность (11) рода $g=1$ образуется при клеивании «крест-накрест» двух λ_2 плоскостей $\boldsymbol{C}$ вдоль разрезов $(-\infty,\ k^{-1}] \cup [-1,\ 1] \cup [k^{-1},\ \infty)$. Так как

$$ka\operatorname{Im}\lambda_1=\operatorname{Im}\sqrt{\frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_2}(1-k^2\lambda_2^2)}$$

меняет знак лишь на разрезах, то областям $\boldsymbol{Q}_+$ и $\boldsymbol{Q}_-$ отвечает один из листов римановой поверхности $\boldsymbol{Q}$, а $\boldsymbol{Q}_0=\partial\boldsymbol{Q}_\pm$ совпадает с разрезами на $\boldsymbol{R}$. Очевидно, что $r=3$, $l=2$, $g=1$. На (11) существует единственный ($g=1$) абелев дифференциал первого рода [2]:

$$\omega=\frac{d\lambda_2}{\sqrt{(1-\lambda_2^2)(1-k^2\lambda_2^2)}}, \tag{12}$$

что позволяет посредством эллиптического интеграла

$$u(P)=\int_{P_0}^{P}\omega,\ (P,\ P_0\in\boldsymbol{Q}), \tag{13}$$

установить конформное отображение между (11) и прямоугольником, $\Gamma=\{u\in C;\ \mathrm{Re}\,u\in[-2K,\ 2K],\ \mathrm{Im}\,u\in[-iK',\ iK']\}$, с надлежащим отождествлением сторон, где $P_0=(0,\ 1)$, а $4K$ и $2iK$ — периоды замкнутого дифференциала ω (12). Обращение эллиптического интеграла (13) приводит к униформизации кривой (11) в терминах функций Якоби [2]: $\zeta=sn'u,\ \ \lambda_2=snu$, а отсюда и кривой (10)

$$\lambda_1(u)=\frac{sn'u}{ka\,(1-snu)};\ \lambda_2(u)=snu. \tag{14}$$

Функция $\lambda_2(u)$ имеет $l=2$ простых полюса в точках $u=iK'$, $2K+iK'$, а $\lambda_1(u)-r=3$ простых полюса $ka\lambda_1(u)=\zeta(u-iK')+$ $+\zeta(u-2K-iK')-2\zeta(u-K)$, где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса [2].

Собственные вектора пучка $(\sigma_2\lambda_1+\gamma)\,h=\lambda_2h$ имеют вид

$$h=\begin{bmatrix}\dfrac{ka\lambda_1}{1+k\lambda_2}\\ \dfrac{b}{\lambda_2-1}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{sn'u}{(1-snu)\,(1+ksnu)}\\ \dfrac{b}{snu-1}\\ 1\end{bmatrix};\ P=(\lambda_1,\ \lambda_2). \tag{15}$$

Вектор h имеет полюс второго порядка в точке $\lambda=1$ и первого порядка — в $\lambda_2=-K^{-1}$, $(N=3)$, что соответствует значениям $u=K$ и $u=-K+iK'$ соответственно. Изоморфизм (13) переводит Q_+ в прямоугольник $\Gamma_+=\{u\in\Gamma;\ \mathrm{Im}\,u\in(0,\ iK')\}$, при этом $\Gamma_0=\partial\Gamma_+=$ $=\{u\in\Gamma;\ \mathrm{Im}\,u=0\}\cup\{u\in\Gamma;\ \mathrm{Im}\,u=iK'\}$. Фундаментальную группу F порождают сдвиги $u\to u+4K,\ \ u\to u+2iK'$. Гильбертово пространство

$$L^2_{\Gamma_0}(h,\ d\lambda_1)=\left\{f=h(u)\cdot\|h(u)\|^{-2}g(u);\ \int\limits_{\Gamma_0}|g(u)|^2\,m(u)\,du<\infty\right\},$$

где $m(u)\,du=d\lambda_1(u)/\|h(u)\|^2$ — абелев дифференциал, —

$$\frac{d\lambda_1}{\|h(P)\|^2}=\frac{k}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}\cdot\frac{1+k\lambda_2}{1-k\lambda_2}}=\frac{ksn'u}{(1+snu)\,(1-ksnu)}\,du.$$

Скалярная функция $g(u)$ обращается в нуль при $u=K+iK'$, $(\lambda_2=-1)$, $u=K\,(\lambda_2=K^{-1})$. Функциональная модель реализуется в (6), где $h(u)$ имеет вид (15), а операторы (5) являются операторами «умножения» на эллиптические функции (14).

Зная матричные элементы $s(\lambda_1)$, получим, что

$$\theta(P)=s_{3,1}(\lambda_1)\,\frac{ka\lambda_1}{1+k\lambda_2}+s_{3,2}(\lambda_1)\,\frac{b}{\lambda_2-1}+s_{3,3}(\lambda_1)$$

и, значит, $\theta(P)$ «будет иметь» особенности в точках $\lambda_1=1,\ -k^{-1}$.

Список литературы: 1. *Золотарев В. А.* Модельные представления коммутативных систем линейных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1988. 22, № 1. С. 66—68. 2. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. 159 с. 3. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов // Тр. седьмой зимн. шк. Дрогобыч. М., 1976. 99 с.

Поступила в редколлегию 12.03.90

УДК 517.54+517.98

А. Я. ХЕЙФЕЦ

ТЕОРЕМА НЕВАНЛИННЫ — АДАМЯНА — АРОВА — КРЕЙНА В ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОМ СЛУЧАЕ

1. Начиная с середины XX в. интенсивно развивается теория несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Одним из основных моментов этой теории является построение канонических реализаций (унитарная эквивалентность) этих операторов в функциональных пространствах. Одной из таких реализаций является функциональная модель в форме де Бранжа-Ровняка. Пусть $w(\zeta)$ — голоморфная в единичном круге D комплексной плоскости оператор-функция, действующая из M_1 в M_2 (сепарабельные гильбертовы пространства). Обозначим через H^w гильбертово пространство, состоящее из вектор-функций $f=\begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}$, таких что

$$f_+\in H^2_+(M_2),\ f_-\in H^2_-(M_1),$$
$$\int_T < \begin{bmatrix} 1_{M_2} & w \\ w^* & 1_{M_1} \end{bmatrix}^{[-1]} f,\ f > dm < \infty,$$

где H^2_+ и H^2_- — пространства Харди; T — единичная окружность; dm — мера Лебега на ней.

Этот интеграл задает в H^w скалярное произведение. Для сокращения записи введем обозначение:

$$K_w \equiv \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим в H^w оператор A^w:

$$A^w f = \bar{t}\left(f - K_w \begin{bmatrix} f_+(0) \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

где $t\in T$ — независимая переменная. При этом сопряженный к A^w оператор равен

$$(A^w)^* f = tf - K_w \begin{bmatrix} 0 \\ (f_-)_{-1} \end{bmatrix},$$

где $(f_-)_{-1}$ — коэффициент f_- при $\bar{t}$. Функция $w(\zeta)$ называется характеристической функцией оператора A^w. Характеристическая функция может быть определена для любого сжатия A, и тогда само это сжатие унитарно эквивалентно A^w, где w — характеристическая функция A, т. е. A^w является функциональной моделью A.

2. В работах [4, 5] рассматривалась абстрактная задача интерполяции. Приведем здесь ее формулировку:

пусть M_1 и M_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, X — линейное пространство, D — неотрицательная квадратичная форма на X, T_1 и T_2 — линейные операторы в X, E_1 и E_2 — линейные операторы из X в M_1 и M_2 соответственно;

пусть перечисленные объекты связаны равенством

$$D(T_2x,\ T_2x) - D(T_1x,\ T_1x) = \langle E_1x,\ E_1x\rangle - \langle E_2x,\ E_2x\rangle. \tag{1}$$

Требуется описать все голоморфные при $|\zeta| < 1$, сжимающие оператор функции $w(\zeta): M_1 \to M_2$ и отображения $F: X \to H^w$ (модельное пространство де Бранжа-Ровняка), обладающие свойствами:

$$i)\ \|Fx\|^2_{H^w} \leqslant D(x,\ x), \tag{2}$$

$$ii)\ FT_1x \overset{\text{п.в.}}{=} tFT_2x - K_w\begin{bmatrix} -E_2x \\ E_1x \end{bmatrix}. \tag{3}$$

3. Обозначим через $\vec{X}$ — множество классов эквивалентности векторов из X относительно квадратичной формы D, т. е. $x_1 \sim x_2 \leftrightarrow D(x_1 - x_2,\ x) = 0,\ \forall x \in X$. Форма D задает в $\vec{X}$ скалярное произведение. Через H обозначим пополнение $\vec{X}$ в этом скалярном произведении. Тождество (1) позволяет построить изометрический узел $V: H \oplus M_1 \to H \oplus M_2$. Положим

$$d_V = \text{замыкание } \{\overrightarrow{T_1x} \oplus E_1x,\ x \in X\}$$

$$\Delta_V = \text{замыкание } \{\overrightarrow{T_2x} \oplus E_2x,\ x \in X\}$$

Тогда V действует по формуле

$$V(\overrightarrow{T_1x} \oplus E_1x) = \overrightarrow{T_2x} \oplus E_2x. \tag{4}$$

Обозначим через N_{d_V} — ортогональное дополнение d_V в $H \oplus M_1$, N_{Δ_V} — ортогональное дополнение Δ_V в $H \oplus M_2$. N_{d_V} и N_{Δ_V} характеризуют степень неопределенности задачи. V может быть естественным образом достроен до унитарного узла α [7]. Пусть N_1 — второй экземпляр N_{d_V}, N_2 — второй экземпляр N_{Δ_V}. Тогда $A^\alpha: H \oplus M_1 \oplus N_2 \to H \oplus M_2 \oplus N_1$, действующий по формуле $A^\alpha | d_V = V$, $A^\alpha | N_{d_V}$ — унитарное отображение N_{d_V} на N_1, $A^\alpha | N_2$ — унитарное отображение N_2 на $N_{\Delta V}$, является унитарным отображением $H \oplus \oplus M_1 \oplus N_2$ на $H \oplus M_2 \oplus N_1$. Пространства $N_1^\alpha = M_1 \oplus N_2$ и $N_2^\alpha = M_2 \oplus N_1$, называются внешними пространствами узла α. Пусть $S(\zeta)\colon N_1^\alpha \to N_2^\alpha$ — матрица рассеяния узла α (см. [7, 4, 5]). Разобъем ее на блоки в соответствии с разбиениями N_1^α и N_2^α:

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_2 \\ s_1 & s \end{bmatrix} \colon N_1^\alpha \equiv \begin{bmatrix} M_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \to N_2^\alpha \equiv \begin{bmatrix} M_2 \\ N_1 \end{bmatrix}.$$

При этом по построению видно, что $s(0) = 0$.

Общее решение задачи выражается по формуле

$$w = s_0 + s_2 \omega (1 - s\omega)^{-1} s_1, \quad Fx = \begin{bmatrix} \psi\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^*\psi^* & 1 \end{bmatrix} G^\alpha \vec{x}, \tag{5}$$

где ω — произвольная голоморфная сжимающая оператор-функция из N_1 в N_2; $\psi = s_2(1 - \omega s)^{-1}$; $\varphi = (1 - s\omega)^{-1} s_1$; G^α — отображение H в H^S, общее для всех F. Т. о. ω является свободным параметром при описании решений.

4. Имеется широкий круг задач (см. [1, 2, 6]), для которых неравенство (2) обращается в равенство

$$\| Fx \|^2_{H^w} = D(x, x). \tag{6}$$

Введем несколько обозначений:

$$\Omega_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ s & 0 \end{bmatrix} \colon N_2 \oplus N_1 \to N_2 \oplus N_1; \tag{7}$$

$$P_\omega = \frac{1 + \Omega_\omega}{1 - \Omega_\omega}. \tag{8}$$

Рассмотрим в единичном круге $\boldsymbol{D}$ гармоническую функцию:

$$u_\omega(\zeta) = \frac{1}{2}(P_\omega(\zeta) + P_\omega(\zeta H)^*) -$$

$$- \int_T \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} K_\omega \begin{bmatrix} \psi^* & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} K_w^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} K_\omega \, dm(t);$$

$$u_\omega(\zeta) \colon N_2 \oplus N_1 \to N_2 \oplus N_1.$$

Как было показано в [5], $u_\omega(\zeta) \geqslant 0$ при всех ω, а условие

$$u_\omega(\zeta) \equiv 0 \tag{10}$$

эквивалентно (6) при F и w, отвечающих этому параметру ω.

Из условия равенства u_ω нулю вытекает более слабое условие равенства нулю ее абсолютно-непрерывной части:

$$\frac{1}{2}(P_\omega + P_\omega^*) \overset{\text{п.в.}}{=} K_\omega \begin{bmatrix} \psi^* & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} K_w^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} K_\omega, \tag{11}$$

которое уже, конечно, не эквивалентно (6). Известны задачи (например, степенная проблема моментов), в которых (11) имеет место при всех ω, а (6) (т. е. (10)) — не при всех ω.

Отметим, что при $\omega=0$ (11) принимает вид

$$K_{s^\bullet} \overset{\text{п.в.}}{=} \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} K_{s_0}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix}. \tag{12}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim M_1<\infty$ и $\dim M_2<\infty$.

Оказывается, что свойство (11), имеющее место при всех ω, есть внутреннее свойство матрицы S. А именно, будет доказана следующая

Теорема 1. *Для того чтобы матрица S обладала свойством*

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

необходимо выполнение (11) при всех ω и достаточно выполнение (11) при $\omega=0$ (т. е. (12)).

Теорема 1, очевидно, допускает две эквивалентные (не симметричные) формулировки

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - s_0 s_0^*) - \dim N_2, \tag{14}$$

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_1^\alpha} - S^*S) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_1} - s_0^* s_0) - \dim N_1. \tag{15}$$

Более того, в процессе доказательства теоремы 1 будет показано, что для любого параметра ω и соответствующего ему решения w имеют место соотношения

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - ww^*) - \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*) \tag{16}$$

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_1^\alpha} - S^*S) \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_1} - w^*w) - \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_1} - \omega^*\omega). \tag{17}$$

Из формул (14) и (15) видно, что $\dim N_1 \leqslant \dim M_1$, $\dim N_2 \leqslant \dim M_2$ и если один из рангов неопределенности задачи максимален, т. е. $\dim N_2 = \dim M_2$ ($\dim N_1 = \dim M_1$), то S — внутренняя в соответствующем порядке:

$$\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^* \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \ (\mathbf{1}_{N_1^\alpha} - S^*S \overset{\text{п.в.}}{=} 0). \tag{18}$$

Пусть, например, $\dim N_2 = \dim M_2$, тогда из (16) и (18) следует, что

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - ww^*) = \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*). \tag{19}$$

Если при этом $\dim N_1 \geqslant \dim N_2$, то из (19) вытекает существование такого решения w, что $\mathbf{1}_{M_2} - ww^* \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Т. о., теорему 1 можно рассматривать как распространение классической теоремы Неванлинны — Адамяна — Арова — Крейна [1 — 3] на полуопределенный случай.

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов.

Теорема 2. *Пусть* $\dim M_2 < \infty$ *и* $\dim M_1 < \infty$ *и пусть (12) выполняется при* $\omega = 0$, *т. е.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2} & s^* \\ s & \mathbf{1}_{N_1} \end{bmatrix} \overset{\text{п.в.}}{=} \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix}, \tag{20}$$

тогда

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \overset{\text{п.в.}}{=} \operatorname{rg} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Доказательство. Напомним, что

$$S = \begin{bmatrix} s & s_1 \\ s_2 & s_0 \end{bmatrix}.$$

Следующая матрица получается из матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} \tag{22}$$

путем перестановки второго и третьего столбцов (и соответствующих строк) и последующей перестановкой первого и второго столбцов (и соответствующих строк)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{N_2} & s^* & s_2^* & 0 \\ s & \mathbf{1}_{N_1} & 0 & s_1 \\ \hline s_2 & 0 & \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ 0 & s_1^* & s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{array}\right]. \tag{23}$$

Следовательно, ранги матриц (22) и (23) совпадают. Более того, ввиду неотрицательности матрицы (22) неотрицательна и матрица (23). Но тогда, как известно, она (как квадратичная форма) может быть приведена невырожденным преобразованием к блочно-диагональному виду:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_2} & s^* \\ s & \mathbf{1}_{N_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{M_2} & s_0 \\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1} \end{bmatrix} \end{array}\right]. \tag{24}$$

По условию верхний блок равен нулю. Откуда вытекает требуемое.

Лемма 3. *Пусть A и B — линейные конечномерные операторы, действующие в одно и тоже пространство. Следующие свойства эквивалентны:*

1) *образы A и B линейно независимы, т. е.*

$$\operatorname{Ran} A \cap \operatorname{Ran} B = \{0\};$$

2) $\operatorname{rg} A^* \mid \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{rg} A^*$;
3) $\operatorname{rg} B^* \mid \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{rg} B^*$;
4) $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) = \operatorname{Ran} A \dotplus \operatorname{Ran} B$;
5) $\operatorname{rg}(AA^* + BB^*) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$,

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть имеет место 1). Рассмотрим оператор $P_{\operatorname{Ker} B^*}A$, где $P_{\operatorname{Ker} B^*}$ — ортогональный проектор на ядро B^*. Поскольку $\operatorname{Ran} A \cap \operatorname{Ran} B = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} B^* = (\operatorname{Ran} B)^\perp$, то $P_{\operatorname{Ker} B^*}$ не обращается в ноль на $\operatorname{Ran} A$ (так как иначе аннулирующий вектор из $\operatorname{Ran} A$ был бы ортогонален $\operatorname{Ker} B^*$, т. е. лежал бы в $\operatorname{Ran} B$, что противоречит условию). Следовательно, $\operatorname{rg} P_{\operatorname{Ker} B^*}A = \operatorname{rg} A$. Но тогда, переходя к сопряженным операторам, получим $\operatorname{rg} A^* P_{\operatorname{Ker} B^*} = \operatorname{rg} A^*$.

Аналогично доказывается импликация 1) $\Rightarrow$ 3). Доказательство импликаций 2) $\Rightarrow$ 1) и 3) $\Rightarrow$ 1) получается обращением рассуждений. Следовательно, имеет место и 2) $\leftrightarrow$ 3).

Т. о., 1), 2), 3) эквивалентны. Теперь из 1) & 2) & 3) выведем 4). Поскольку

$$AA^* + BB^* \mid \operatorname{Ker} B^* = AA^* \mid \operatorname{Ker} B^* \text{ и } \operatorname{rg} A^* \mid \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{rg} A^*, \text{ то}$$
$$\operatorname{Ran} AA^* \mid \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{Ran} A.$$

Т. о., $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \supset \operatorname{Ran} A$. Аналогично $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \supset \operatorname{Ran} B$. Следовательно, $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \supset \operatorname{Ran} A \dotplus \operatorname{Ran} B$, обратное включение очевидно. Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) тривиальна. И, наконец, докажем импликацию 5) $\Rightarrow$ 1). Удобней доказывать эквивалентную ей импликацию не 1) $\Rightarrow$ не 5). В самом деле, пусть $\operatorname{Ran} A$ и $\operatorname{Ran} B$ — линейно зависимы, тогда $\dim(\operatorname{Ran} A + \operatorname{Ran} B) < \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Но $\operatorname{Ran}(AA^* + BB^*) \subseteq \operatorname{Ran} A + \operatorname{Ran} B$. Следовательно, $\operatorname{rg}(AA^* + BB^*) < \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. Что и завершает доказательство леммы.

Утверждение 4. Пусть $\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) = \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - s_0 s_0^*) - \dim N_2$. Тогда

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) = \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2} - ww^*) - \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*), \tag{26}$$

где ω — произвольный параметр, а w — соответствующее ему решение

Доказательство. В силу соотношения (8)

$$[\psi\omega,\ \mathbf{1}_{M_2}]\, S = [\psi,\ w], \text{ где } \psi = s_2(\mathbf{1}_{N_2} - \omega s)^{-1},$$

получаем

$$[\psi\omega,\ \mathbf{1}_{M_2}]\, SS^* \begin{bmatrix} \omega^*\psi^* \\ \mathbf{1}_{M_2} \end{bmatrix} = \psi\psi^* + ww^*,$$

откуда следует

$$[\psi\omega,\ \mathbf{1}_{M_2}]\,(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \begin{bmatrix} \omega^*\psi^* \\ \mathbf{1}_{M_2} \end{bmatrix} + \psi(\mathbf{1}_{N_2} - \omega\omega^*)\psi^* = \mathbf{1}_{M_2} - ww^*. \tag{27}$$

В частности, при $\omega = 0$ получаем

$$[0,\ \mathbf{1}_{M_2}]\,(\mathbf{1}_{N_2^\alpha} - SS^*) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{M_2} \end{bmatrix} + s_2 s_2^* = \mathbf{1}_{M_2} - s_0 s_0^*. \tag{28}$$

Из (28) следует

$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2}-s_0s_0^*)\leqslant \operatorname{rg}[0,\mathbf{1}_{M_2}](\mathbf{1}_{N_2^\alpha}-SS^*)^{1/2}+\operatorname{rg}s_2\leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha}-SS^*)+\dim N_2. \tag{29}$$

Но по условию, правая часть (29) равна $\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2}-s_0s_0^*)$.

Следовательно, в (29) всюду равенства, т. е.

$$\operatorname{rg}[0,\mathbf{1}_{M_2}](\mathbf{1}_{N_2^\alpha}-SS^*)^{1/2}=\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{N_2^\alpha}-SS^*),\ \operatorname{rg}s_2=\dim N_2, \tag{30}$$
$$\operatorname{rg}(\mathbf{1}_{M_2}-s_0s_0^*)=\operatorname{rg}[0,\mathbf{1}_{M_2}](\mathbf{1}_{N_2^\alpha}-SS^*)^{1/2}+\operatorname{rg}s_2.$$

Из первого соотношения (30) следует, что

$$\operatorname{def}[0,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}=\operatorname{def}(1-SS^*),\ \text{т. е.}$$
$$\operatorname{Ker}[0,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}=\operatorname{Ker}(1-SS^*). \tag{31}$$

В силу последнего соотношения (30) и леммы 3 заключаем, что $\operatorname{Ran}[0,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}$ и $\operatorname{Ran}s_2$ — линейно независимы. Поскольку $\psi=s_2(1-\omega s)^{-1}$, то $\operatorname{Ran}\psi=\operatorname{Ran}s_2$. Отсюда следует

а)

$\operatorname{Ran}[\psi\omega,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}$ и $\operatorname{Ran}\psi(1-\omega\omega^*)^{1/2}$ — линейно независимы;

б)

$$\operatorname{rg}[\psi\omega,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}=\operatorname{rg}(1-SS^*), \tag{32}$$

так как $\operatorname{rg}[\psi\omega,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}\geqslant\operatorname{rg}[0,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}=\operatorname{rg}(1-SS^*)$ (здесь также существенна линейная независимость

$$\operatorname{Ran}[0,\mathbf{1}_{M_2}](1-SS^*)^{1/2}\ \text{и}\ \operatorname{Ran}\psi).$$

Поскольку в силу (30) $\operatorname{rg}s_2=\dim N_2$, то s_2 — невырождена, следовательно, ψ — невырождена, следовательно, $\operatorname{rg}\psi(1-\omega\omega^*)^{1/2}=\operatorname{rg}(1-\omega\omega^*)$.

Теперь из (27) получаем $\operatorname{Ran}(1-ww^*)=\operatorname{Ran}[\psi\omega,1](1-SS^*)^{1/2}\dotplus\operatorname{Ran}\psi(1-\omega\omega^*)^{1/2}$ (33) и $\operatorname{rg}(1-ww^*)=\operatorname{rg}(1-SS^*)+\operatorname{rg}(1-\omega\omega^*)$. Что и требовалось. Предыдущее утверждение можно записать в симметричной форме.

Утверждение 5. Пусть

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S\\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha}\end{bmatrix}=\operatorname{rg}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{M_2} & s_0\\ s_0^* & \mathbf{1}_{M_1}\end{bmatrix},$$

тогда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{N_2^\alpha} & S\\ S^* & \mathbf{1}_{N_1^\alpha}\end{bmatrix}-\operatorname{def}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{N_2} & \omega\\ \omega^* & \mathbf{1}_{N_1}\end{bmatrix}=\operatorname{rg}\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{M_2} & w\\ w^* & \mathbf{1}_{M_1}\end{bmatrix}. \tag{34}$$

Утверждение 6. Имеет место следующее соотношение:

$$\begin{bmatrix} \mathring{\varphi} & 0 & \omega^*\mathring{\psi}^* & 0 \\ \psi\omega & 1_{M_2} & 0 & 0 \\ \omega\mathring{\varphi} & 0 & \mathring{\psi}^* & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & 1_{M_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}^* - 1_{N_1} & \omega^*\psi^* & s\mathring{\psi} + \mathring{\varphi}^*\omega^* & \varphi \\ \psi\omega & 1_{M_2} & \psi & w \\ \mathring{\psi}^* s^* + \omega\mathring{\varphi} & \psi^* & \mathring{\psi} + \mathring{\psi}^* - 1_{N_2} & \omega\varphi \\ \varphi^* & w^* & \varphi^*\omega^* & 1_{M_1} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Проверяется непосредственно.

Утверждение 7. Обозначим левый сомножитель в левой части (35) через C:

$$C = \begin{bmatrix} \mathring{\varphi} & 0 & \omega^*\mathring{\psi}^* & 0 \\ \psi\omega & 1_{M_2} & 0 & 0 \\ \omega\mathring{\varphi} & 0 & \mathring{\psi}^* & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & 1_{M_1} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\operatorname{def} C = \operatorname{def} \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Ran} \begin{bmatrix} 1_{N_2^\alpha} & S \\ S^* & 1_{N_1^\alpha} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} C,$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -\varphi^*\omega^*\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\psi\omega\alpha_1 \end{aligned} \tag{36}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \omega^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\psi}^* & \alpha_3 \\ \mathring{\varphi} & \alpha_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathring{\varphi}^{-1}\beta_1 = (1 - s\omega)\,\beta_1, \\ \alpha_3 &= \mathring{\psi}^{*-1}\beta_2 = (1 - s^*\omega^*)\,\beta_2, \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \omega^* & 1 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Т. о., формулы (37) и (36) задают взаимно однозначное отображение $\operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1 & \omega\\ \omega^* & 1\end{bmatrix}$ на $\operatorname{Ker} C$, откуда следует равенство их дефектов. Соотношения (37) и (36), воспользовавшись (38), можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ --\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & S\\ S^* & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\beta_1\\ 0\\ --\\ \beta_2\\ 0\end{vmatrix},$$

откуда следует требуемое вложение. Из этого утверждения непосредственно вытекает следующее:

Следствие 8. *Ранг левой части (35) (а следовательно, и правой) равен*

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}1 & S\\ S^* & 1\end{bmatrix} - \operatorname{def}\begin{bmatrix}1 & \omega\\ \omega^* & 1\end{bmatrix}. \tag{39}$$

Утверждение 9. Ранг правой части (35) равен

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}1 & w\\ w^* & 1\end{bmatrix}.$$

Доказательство. Это получается непосредственно из следствия 8 и утверждения 5.

Доказательство обратной части теоремы 1.

Перестановкой строк и соответствующих столбцов правая часть (35) может быть приведена к виду

$$\begin{bmatrix}\mathring{\psi} + \mathring{\psi}^* - 1_{N_2} & \mathring{\psi}^* s^* + \omega\mathring{\varphi} & \psi^* & \omega\varphi\\ s\mathring{\psi} + \mathring{\varphi}^*\omega^* & \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}^* - 1_{N_1} & \omega^*\psi^* & \varphi\\ \psi & \psi\omega & 1_{M_2} & w\\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* & w^* & 1_{M_1}\end{bmatrix}. \tag{40}$$

В силу (7), разность между левой и правой частью (12) имеет смысл всегда и неотрицательна (так как равна почти всюду $a^\omega + (a^\omega)^*$). Следовательно, матрица (40) невырожденным преобразованием (как квадратичная форма) приводится к блочно-диагональному виду

$$\begin{bmatrix}a^\omega + (a^\omega)^* & 0 & \\ 0 & 1 & w\\ & w^* & 1\end{bmatrix}.$$

Но в силу утверждения 9, ранг этой матрицы равен

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}1 & w\\ w^* & 1\end{bmatrix}.$$

следовательно, $\alpha^\omega + (a^\omega)^* \overset{\text{п. в.}}{=} 0$, т. е. имеет место (12). Что и требовалось.

Список литературы: 1. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Об ограниченных операторах, коммутирующих с сжатиями класса C_{00} единичного ранга неунитарности // Функцион. анализ и его прил. 1969. 3, № 3. С. 86—87. 2. *Аров Д. З.* γ-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции матриц-функций. Одесса, 1986. 49 с. Деп. в Укр НИИНТИ— № 726 УК-Д86. 3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973. 551 с. 4. *Кацнельсон В. Э., Хейфец А. Я., Юдицкий П. М.* Абстрактная задача интерполяции и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. К., 1987. С. 83—96. 5. *Хейфец А. Я.* Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 112—120. 1988. Вып. 50. С. 98—103. 6. *Хейфец А. Я.* Обобщенная бикасательная задача Шура—Неванлинны—Пика и связанное с ней равенство Парсеваля. Х., 1989. 60 с. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 11.05.1989. № 3108 — В 89. 7. *Аров Д. З., Гроссман В. З.* Матрицы рассеяния в теории расширений изометрических операторов // ДАН СССР. Сер. мат. 1983. 270, № 1. С. 17—20.

Поступила в редколлегию 12.08.89

УДК 517.53

А. М. УЛАНОВСКИЙ

РЕГУЛЯРНОСТЬ РОСТА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ МАКСИМУМ МОДУЛЯ НА ЛУЧЕ

Пусть f — аналитическая функция в области U, где U — комплексная плоскость $\boldsymbol{C}$ или угол $U(\alpha, \beta) = \{z \in \boldsymbol{C} : \alpha < \arg z < \beta\}$. Положим

$$M(r) = M(r, f, U) = \sup_{|z|<r,\ z\in U} |f(z)|;$$

$$\rho = \rho(f, U) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r};$$

$$\lambda = \lambda(f, U) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

Числа ρ и λ называются порядком и нижним порядком аналитической функции f. Они являются важными характеристиками роста f. Если $\rho = \lambda$, то говорят, что f имеет регулярный рост.

Хорошо известно, что числа ρ и λ для целой функции f могут быть произвольными неотрицательными: $0 \leqslant \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$. Положение меняется, если потребовать, чтобы f не имела нулей в некоторых углах. Например, если все нули f лежат на луче, то [1, с. 342]: $\rho \leqslant [\lambda] + 1$, где $[\ .\ ]$ — целая часть. Если нули f лежат на трех лучах, то [2]: $[\rho] \leqslant 3[\lambda] + 3$, в то же время разность $\rho - \lambda$ может быть сколь угодно велика. Другого типа условия, влекущие ограничения на ρ и λ, получены в [3], где, в частности, доказано, что если для целой функции f множество $z \in \boldsymbol{C}$, где $|f(z)|\,M(|z|) \leqslant 1$, имеет неограниченную компоненту, то $\rho = \lambda$ (возможно, $= \infty$).

В настоящей работе изучается рост аналитической функции (в частности, связь между ρ и λ), удовлетворяющей одному из условий:

(A) f *аналитична в угле* $U(-2\alpha, 2\alpha)$, $0<\alpha\leqslant\pi/2$; *не обращается в нуль в угле* $U(-\alpha, \alpha)$ *и имеет максимум на положительном луче:* $|f(r)| = M(r)$, $r>0$.

(B) f *аналитична в угле* $U(-\alpha, \alpha)$, $0<\alpha\leqslant\pi$; *непрерывна в его замыкании и* $|f(r)|\,M(r)\leqslant 1$, $r\geqslant 0$.

Условие (B) возникло в связи с работой [3]. Условие (A) — в связи со следующим дополнением к работе [4], сообщенным А. М. Вишняковой: если f удовлетворяет условию (A), то $\rho-\lambda\leqslant$ $\leqslant 3\pi/\lambda$.

Оказывается, что если аналитическая функция f удовлетворяет одному из условий (A), (B) и достаточно быстро растет

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\pi/\alpha}\ln M(r)>0, \tag{1}$$

то f имеет не только регулярный, но и вполне регулярный в смысле Левина — Пфлюгера рост в угле $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$ относительно r^ρ. Отметим, что из (1) следует, что $\rho\geqslant\pi/\alpha$; с другой стороны, если $\rho>\pi/\alpha$, то верно (1).

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условию (A) и условию (1). Тогда $\rho=\lambda$ и при некотором $\sigma\geqslant 0$ асимптотическое равенство*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \sigma r^\rho\cos\rho\varphi + 0(r^\rho),\ r\to\infty \tag{2}$$

выполняется равномерно по $\varphi\in(-\pi/\rho+\varepsilon, \pi/\rho-\varepsilon)$ при любом $0<\varepsilon<\pi/\rho$.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условию (B) и условию (1). Тогда $\rho=\lambda$ и при некотором $\sigma\leqslant 0$ асимптотическое равенство (2) выполняется равномерно по $\varphi\in(-\pi/\rho, \pi/\rho)$ при $r\to\infty$ вне исключительного множества $r\in E$ такого, что* $R^{-1}\int\limits_{(0,R)\cap E} dr\to 0$, $R\to\infty$.

Замечание. Утверждения теорем 1 и 2 потеряют силу, если опустить условие (1). Так, целая функция f, удовлетворяющая условию (A) с $\alpha=\pi/2$, может иметь произвольные ρ и λ, $0\leqslant\lambda\leqslant\rho\leqslant 1$. То же верно и для функции f, удовлетворяющей условию (B) с $\alpha=\pi$. Соответствующие примеры строятся с помощью приемов, развитых в [1, гл. II, § 5; гл. VI, § 1]. Заметим, что если целая функция f имеет только отрицательные нули и $\rho>1$, то функция $f(z^2)$ удовлетворяет условию (A) с $\alpha=\pi/2$ и условию (1), поэтому из теоремы 1 следует, что $\rho=\lambda$.

Для доказательства теорем 1 и 2 понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть f удовлетворяют условию (A). Для любого δ, $0<\delta<\alpha$, найдется постоянная $C=C(\delta)$ такая, что верна оценка* $|\ln f(z)|\leqslant C\ln|f(C|z|)|$, $z\in U(-\alpha+\delta, \alpha-\delta)$.

Доказательство. В силу условия (A) имеем $\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln|f(re^{i\varphi})|_{\varphi=0}=$ $=0$. Поэтому $\frac{\partial}{\partial r}\arg f(r)=0$, $\arg f(r)=\mathrm{const}$, и, не уменьшая общности, можно считать, что $f(r) > 0$ при $r > 0$. Рассмотрим аналитическую в круге $\{\zeta: |\zeta| < 1\}$ функцию $g_R(\zeta) = \ln f(R + \zeta R \sin\alpha)$. В силу неравенства Каратеодори [5, с. 28] имеем

$$|g_R(\zeta)| \leqslant \frac{2}{1-|\zeta|}\{\max_{|\zeta|=1} \operatorname{Re} g_R(\zeta) - \operatorname{Re} g_R(0)\} + |g_R(0)| =$$

$$= \frac{2}{1-|\zeta|}\{\ln f(R(1+\sin\alpha)) - \ln f(R)\} + \ln f(R) \leqslant \frac{2}{1-|\zeta|}\ln f(2R),$$

откуда следует доказываемая оценка.

Лемма 2. *Положим* $u = \ln|f|$, $\gamma = \min\{\pi/\lambda, \alpha\}$. а) *Если f удовлетворяет условию (А), то* $\frac{\partial u}{\partial\varphi}(z) \leqslant 0$, $z \in U(0, \gamma)$. б) *Если f удовлетворяет условию (В), то при всех* $0 \leqslant |\varphi| \leqslant |\theta| \leqslant \gamma$, $\varphi\theta > 0$ *выполняется* $u(re^{i(\theta-\varphi)}) + u(re^{i\varphi}) \leqslant 0$; *кроме того,* $u(re^{i\varphi}) \leqslant 0$ *при* $0 \leqslant |\varphi| \leqslant \gamma/2$.

Доказательство. а) Положим $f_\theta(z) = \overline{f(e^{2i\theta}\bar z)}/f(z)$, где $0 < \theta < \gamma$. Ввиду условия (А), f_θ — аналитична в $U(0, \theta)$, $|f_\theta(re^{i\theta})| = 1$ и $|f_\theta(r)| \leqslant 1$ при $r > 0$. Из леммы 1 видно, что $\lambda(f_\theta, U(0, \theta)) \leqslant \lambda < \pi/\theta$, поэтому из принципа Фрагмена — Линделефа следует, что $|f_\theta(z)| < 1$, $z \in U(0, \theta)$. Отсюда $u(re^{i(2\theta-\varphi)}) \leqslant u(re^{i\varphi})$ при всех $0 < \varphi < \theta$, $0 < \theta < \gamma$. В частности, полагая $\varphi = \theta - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, видим, что $u(re^{i(\theta+\varepsilon)}) - u(re^{i(\theta-\varepsilon)}) \leqslant 0$, откуда вытекает утверждение п. а).

б) Положим $\tilde f_\theta(z) = \overline{f(e^{i\theta}\bar z)}\, f(z)$. Из условия (В) следует, что $|\tilde f_\theta(r)|$, $|\tilde f_\theta(re^{i\theta})| \leqslant 1$, $r > 0$, и $\lambda(\tilde f_\theta, U(0, \theta)) \leqslant \lambda < \pi/\theta$. Из принципа Фрагмена — Линделефа получаем, что $|\tilde f_\theta(z)| < 1$, $z \in U(0, \theta)$, значит, $u(re^{i(\theta-\varphi)}) + u(re^{i\varphi}) \leqslant 0$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$. Аналогично доказывается это неравенство и при $0 \geqslant \varphi \geqslant \theta$, $0 \geqslant \theta \geqslant -\gamma$. Полагая в нем $\varphi = \theta/2$, имеем $u(re^{i\theta/2}) \leqslant 0$, $0 \leqslant |\theta| \leqslant \gamma$, что доказывает п. б).

Доказательство теоремы 1. Из п. а) леммы 2 следует, что функция $v(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial\varphi}(\zeta^{\gamma/\pi})$ гармонична и неположительна в $U(0, \pi)$. Поскольку f имеет максимум на положительном луче, то $v(r) = 0$, $r > 0$. Таким образом [6, с. 191], справедливо представление: $\exists b \geqslant 0$:

$v(\zeta) = -b \operatorname{Im}\zeta + \int_{-\infty}^{0} v(t).\left\{\operatorname{Im}\frac{1}{t-\zeta}\right\}dt$, $\zeta \in U(0, \pi)$, где $\int_{-\infty}^{0}\frac{|v(t)|}{1+t^2}dt < \infty$. Легко видеть, что при любом ε, $0 < \varepsilon < \gamma$, равномерно по φ в угле $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma - \varepsilon$ выполняется $\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{-\infty}^{0} v(t)\{\operatorname{Im}(t - z^{\pi/\gamma})^{-1}\}dt\right| = o(r^{\pi/\gamma})$, $z = re^{i\varphi}$, $r \to \infty$. Учитывая, что $\Delta u = r^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv 0$ в $U(0, \gamma)$, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)(re^{i\varphi}) = \frac{-1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \frac{b\pi}{\gamma}r^{\frac{\pi}{\gamma}-1}\cos\frac{\pi}{\gamma}\varphi + o\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}-1}\right), \quad r \to \infty.$$

Интегрируя, получаем оценку $u(re^{i\varphi}) = (\gamma b/\pi) r^{\pi/\gamma} \cos(\pi\varphi/\gamma) + o(r^{\pi/\gamma})$, $r \to \infty$, которая выполняется равномерно по φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma - \varepsilon$. Аналогично доказывается, что эта оценка выполняется равномерно по φ при $0 \geqslant \varphi \geqslant -\gamma + \varepsilon$. Осталось показать, что $\lambda = \rho = \pi/\gamma$. Действительно, очевидно, что $\rho \leqslant \pi/\gamma = \max\{\lambda, \pi/\alpha\}$. Если $\rho > \pi/\alpha$, то $\pi/\gamma = \lambda$, $\lambda = \rho$. Если $\rho = \pi/\alpha$, то, ввиду (1), $b > 0$ и, значит, $\lambda = \rho$.

Доказательство теоремы 2. Ввиду п. б) леммы 2 функция $\tilde{v}(z) = u(z^{\gamma/\pi})$ субгармонична и неположительна в $U(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому [7] найдется $b \geqslant 0$ и множество $F \subset [1, \infty)$, такие, что $\int\limits_F d\ln r < \infty$ и $\tilde{v}(z) = -b \operatorname{Re} z + o(|z|)$, $r = |z| \to \infty$, $r \notin F$, $z \in U(-\pi/2, \pi/2)$; $\tilde{v}(z) \leqslant -b \operatorname{Re} z + o(|z|)$, $r \to \infty$, $z \in U(-\pi/2, \pi/2)$. Отсюда

$$u(re^{i\varphi}) = -br^{\frac{\pi}{\gamma}} \cos\frac{\pi}{\gamma}\varphi + o\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}}\right), \ r \to \infty, \ r^{\frac{\pi}{\gamma}} \notin F, \ -\frac{\pi}{2\gamma} < \varphi < \frac{\pi}{2\gamma}, \tag{3}$$

$$u(re^{i\varphi}) \leqslant -br^{\frac{\pi}{\gamma}} \cos\frac{\pi}{\gamma}\varphi + o\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}}\right), \ r \to \infty, \ -\frac{\pi}{2\gamma} < \varphi < \frac{\pi}{2\gamma}. \tag{4}$$

Из (3), монотонности $M(r)$ и неравенства $\ln M(r) \leqslant -u(r)$ видно, что $\rho \leqslant \pi/\gamma = \max\{\lambda, \pi/\alpha\}$. Отсюда и из (1), как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что $\lambda = \rho = \pi/\gamma$. Осталось доказать, что представление (3) верно в угле $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$.

Обозначим $h(\varphi) = \limsup\limits_{r\to\infty} r^{-\rho} u(re^{i\varphi})$ — индикатор функции f. Из (4) следует, что $h(\varphi) = -b\cos\rho\varphi$ при $-\pi/2\rho \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\rho$, а из п. б) леммы 2 следует, что $h(\pi/\rho - \varphi) \leqslant -h(\varphi) = b\cos\rho\varphi = -h(-\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\rho$. Отсюда и из основного соотношения для индикаторов [5, гл. 1, § 16] получаем $h(\pi/\rho - \varphi) = -h(-\varphi) = b\cos\rho\varphi$, $h(\varphi) = -b\cos\rho\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/\rho$. Аналогично имеем $h(\varphi) = -b\cos\rho\varphi$, $0 \geqslant \varphi \geqslant -\pi/\rho$. Значит, функция f имеет тригонометрический индикатор в $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$ и, ввиду (3), вполне регулярный рост в $U(-\pi/2\rho, \pi/2\rho)$. Отсюда [5, с. 213] вытекает, что f имеет вполне регулярный рост в $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$, т. е. найдется множество $E \subset (0, \infty)$ такое, что $R^{-1} \int\limits_{E \cap (0, R)} dr \to 0$, $R \to \infty$ и асимптотическое равенство $u(re^{i\varphi}) = -br^{\rho}\cos\rho\varphi + o(r^{\rho})$ выполняется при $r \to \infty$, $r \notin E$ всюду в угле $U(-\pi/\rho, \pi/\rho)$.

В заключение отметим два следствия теоремы 1, сообщенные автору И. В. Островским.

Следствие 1. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, то она имеет вполне регулярный рост (в. р. р.) в смысл Левина — Пфлюгера относительно r^{ρ} в угле $U(-2\pi/\rho, 2\pi/\rho)$ с индикатором $h(\varphi) = \sigma\cos\rho\varphi$, где число σ определяется из (2).*

Следствие 2. *Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что функция f не обращается в нуль в угле $U(-\beta, \beta)$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$, то асимптотическое равенство (2) имеет место равномерно по $\varphi \in [-\beta + \delta, \beta - \delta]$ при любом $0 < \delta < \beta$.*

Для доказательства следствия 1 рассмотрим в угле $U(0, \pi/\rho)$ функцию $\tilde{f}(z) = \overline{f(e^{2\pi i/\rho}\bar{z})}/f(z)$. В силу условия (А) эта функция аналитична и ограничена на сторонах угла. Нетрудно видеть, что она имеет в угле рост не выше нормального типа порядка ρ. Отсюда следует, что она имеет в. р. р. в угле $U(0, \pi/\rho)$ и $\tilde{h}(\varphi) = -b \sin \rho\varphi$, $b \geqslant 0$. Так как, в силу теоремы 1, функция f также имеет в. р. р. в $U(0, \pi/\rho)$ и $h(\varphi) = \sigma \cos \rho\varphi$, то заключаем, что функция $\overline{f(\bar{z}e^{2\pi i/\rho})}$ имеет там в. р. р. с индикатором $h(2\pi i/\rho - \varphi) = \sigma \cos \rho\varphi - b \sin \rho\varphi$. Это означает, что f имеет в. р. р. в $U(\pi/\rho, 2\pi/\rho)$ и $h(\varphi) = \sigma \cos \rho\varphi + b \sin \rho\varphi$, $\varphi \in [\pi/\rho, 2\pi/\rho]$. Учитывая свойство индикатора $h(\varphi) + h(\varphi + \pi/\rho) \geqslant 0$, видим, что $b = 0$, откуда следует доказываемое утверждение.

Для доказательства следствия 2 рассмотрим аналитическую в $U(-\beta, \beta)$ функцию $g(z) = z^{-\rho} \ln f(z)$. В силу леммы 1, в которой вместо α берем β, и теоремы 1 функция g ограничена в угле $U(-\beta + \delta, \beta - \delta)$, $0 < \delta < \beta$. По теореме 1 существует предел $\lim\limits_{r \to \infty} \operatorname{Re} g(r)$, а так как $\arg f(r) = \text{const}$, $r > 0$, то и предел $\lim\limits_{r \to \infty} g(r)$. Отсюда, как известно [8, с. 51], следует, что функция g стремится к тому же пределу при $z \to \infty$, $z \in U(-\beta + \delta, \beta - \delta)$.

Отметим, что анализ доказательств теорем 1, 2 и следствий 1, 2 показывает, что эти утверждения верны для субгармонических функций u, удовлетворяющих одному из условий: (А) u — субгармонична в $U(0, 2\alpha)$ и $U(-2\alpha, 0)$, $0 < \alpha \leqslant \pi$, гармонична в $U(-\alpha, \alpha)$ и $u(z) \leqslant u(|z|)$ при $z \in U(0, 2\alpha) \cup U(-2\alpha, 0)$; (В) u — субгармонична в замыкании $\overline{U(-\alpha, \alpha)}$, $0 < \alpha \leqslant \pi$ и $u(z) + u(|z|) \leqslant 0$, $z \in U(-\alpha, \alpha)$

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 590 с. 2. *Глейзер Е. В.* О росте целых функций с нулями на системе лучей // Укр. мат. журн. 1986. **38**, № 3. С. 297—302. 3. *Hayman W. K., Kjellberg B.* On the minimum of a subharmonis function on a connected set.// Studies in Pure Math. to the Memory of Paul Turan. Budapest, 1983. P. 291—322. 4. *Вишнякова А. М., Островский И. В., Улановский А. М.* Об одной гипотезе Ю. В. Линника // Алгебра и анализ. 1990. **2**, вып. 4. С. 71—78. 5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 630 с. 6. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963. 312 с. 7. *Hayman W. K.* Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelox principle // I. Math. Pures et Appl. 1956. **35**. P. 115—126. 8. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции, М., 1941. 388 с.

Поступила в редколлегию 12.08.89

СОДЕРЖАНИЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫПУСК 56

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. А. Емельянова*

ИБ № 14319

Сдано в набор 12.02.91. Подписано в печать 08.07.91. Формат 60×90/16. Б тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 9,25. Уч.-изд. л. 10. Тираж 400 экз. Изд. № 2057. Зак. 1 Цена 2 р.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете. 31 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики им. М. В. Фрунзе. в Х ковской городской типографии № 16. 310003. Харьков-3. ул. Универ ская, 16. Зак. 832.

р.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4427. Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 56. 1—144

«ОСНОВА»