УДК 519.9

М. В. НОВИЦКИЙ

О ПОЛНОМ ОПИСАНИИ ОСНОВНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЕРИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА

1. *Введение*. Пусть $u(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция с периодом 1, т. е. $u(x+1)=u(x)$. Обозначим через $\{\lambda_i(H)\}_{i=0}^{\infty}$ спектр оператора Хилла $H=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$ в пространстве $L^2[0,\ 1]$ с периодическими граничными условиями.

Определение 1. *Функционал $F(u)$, заданный на бесконечно-дифференцируемых функциях с периодом 1, будем называть спектральным инвариантом оператора H, если он обладает свойством: из того, что операторы $H_i = -\frac{d^2}{dx^2} + u_i(x)$, $i = 1, 2$ имеют одинаковый спектр периодической задачи, следует, что $F(u_1) = F(u_2)$.*

Наиболее известной дискретной серией спектральных инвариантов оператора Хилла является полиномиальная серия $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ первых интегралов уравнения $K_g\Phi\, u_t = 6u \cdot u_x - u_{xxx}$. Величины I_n этой серии задаются равенством

$$I_n = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 P_{n+1}(u,\ u',\ \ldots)\,dx,$$

где $P_n(u,\ u',\ \ldots)$ — универсальные многочлены степени точно n без постоянных слагаемых, определяемые рекуррентной формулой:

$$\left(-\frac{d^3}{dx^3}\right) + 4u\frac{d}{dx} + 2\frac{d}{dx}u\Big)P_n = 4\frac{d}{dx}P_{n+1}$$

с условием $P_0 \equiv 1$. Основные дискретные серии спектральных инвариантов оператора Хилла могут быть запараметризованы индексом $n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots.$ Серии $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ соответствует индекс $n = 0$. Для описания n-серий введем функцию

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\exp(-\lambda_i t),\ \ t > 0.$$

Функция $\theta(t)$ допускает разложение вида $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n(t)$, где $\theta_n(t)$ имеют вид

$$\theta_n(t) = \int_0^1 e(t,\ x,\ x+n)\,dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{n^2}{4t}\right)F_n(t).$$

Здесь $e(t,\ x,\ y)$ — фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial e}{\partial t} = He$ на всей прямой, функции $F_n(t)$ допускают представление

$$F_n(t) = \int_0^1 M\left[\exp\left(-t\int_0^1 u(x + n\tau + \sqrt{t}\,w(\tau)\,d\tau\right)\right]dx, \tag{1}$$

в котором M — это математическое ожидание случайной величины, $w(\tau)$ — «винеровский мост», определяемый как одномерный условный винеровский процесс, задаваемый условиями: $i)$ $w(0) = w(1) = 0$; $ii)$ $w(\tau)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $B(s,\ t) = (s \wedge t)(1 - s \vee t)$.

Определение 2. *n-серией спектральных инвариантов оператора Хилла будем называть набор величин $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, задаваемых асимптотическим разложением:*

$$F_n(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n t^k, \quad t \downarrow 0. \tag{2}$$

Известно [1], что O — серия коэффициентов $\{b_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ совпадает с точностью до универсальных множителей с набором $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ или более точно

$$b_{k+1}^0 = \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{(2k-1)!!} I_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{3}$$

Нами предложены явные формулы, по которым коэффициенты n-серии вычисляются через набор $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ (теорема 1). Кроме того, доказывается (теорема 2), что коэффициенты асимптотического разложения собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ периодической задачи совпадают с величинами $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ с точностью до явно вычисляемых констант. Эти теоремы уточняют результаты работ [2, 3].

2. *n-серии* коэффициентов $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 1. *Коэффициенты n-серии $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ выражаются через коэффициенты O-серии $\{b_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ соотношением*

$$b_k^n = \sum_{l=1}^{k} n^{2(k-l)} b_l^0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{4}$$

и связаны с набором $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ равенством

$$b_k^n = \sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^l 2^{l-1} n^{2(k-l)}}{(2l-3)!!} I_{l-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что (5) является очевидным следствием (3), (4), поэтому будем доказывать только соотношение (4). Известно (см., например [4]), что набор $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ образует базис в линейном пространстве локальных законов сохранения уравнения. Это обозначает, что если задан функционал вида

$$F(u) = \int_0^1 f(u,\ u',\ \ldots,\ u^{(N)})\, dx,$$

где f — бесконечно дифференцируемая функция от конечного числа N переменных и $F(u(t,\ x))$ не меняет значения при $t \geqslant 0$, где

$u(t, x)$ — решение уравнения $K_g\Phi$ с начальным условием $u(0, x) = u(x)$, то существуют константы $\{\rho_k\}_{k=0}^{N}$, не зависящие от $u(x)$ такие, что

$$F(u) = \sum_{k=0}^{N} \rho_k I_k(u). \tag{6}$$

Величины $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ являются спектральными инвариантами оператора H и, следовательно, законами сохранения уравнения $K_g\Phi$. Более того, из (1) следует, что

$$b_k^n = \int_0^1 P_{k,n}(u, u', \ldots)\, dx, \tag{7}$$

где $P_{k,n}$ — многочлены от функции u и ее производных. Производящей функцией многочленов $P_{k,n}$ является функция $e(t, x, x+n) \times \exp\left(\frac{n^2}{4t}\right)$. Поэтому существуют константы $\rho_l(k, n)$ такие, что

$$b_k^n = \sum_{l=1}^{k} \rho_l(k, n)\, b_l^0. \tag{8}$$

Для нахождения коэффициентов $\rho_l(k, n)$ понадобится следующее свойство «квазиоднородности» многочленов $P_{k,n}$. Для этого введем семейство многочленов $P_{k,s}$, $s > 0$ с производящей функцией $e(t, x, x+s)\exp\left(\frac{s^2}{4t}\right)$.

Лемма. *Имеет место следующее соотношение:*

$$P_{k,n}(\lambda u, \ldots, \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)}, \ldots) = \lambda^k P_{k, \frac{n}{\sqrt{\lambda}}}(u, u', \ldots u^{(s)}, \ldots). \tag{9}$$

В частности, при $n = 0$ получаем

$$P_{k,0}(\lambda u, \ldots, \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)}, \ldots) = \lambda_k P_{k,0}(u, u', \ldots, u^{(s)}, \ldots). \tag{10}$$

Доказательство. Для проверки свойства (9) отметим, что производящей функцией многочленов $P_{k,s}$ является функция

$$f_s = M\left[\exp\left(-t\int_0^1 u(x + st + \sqrt{t}\, w(\tau))\, d\tau\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k,s}, \tag{11}$$

где

$$\varphi_{k,s}(t, u, u', \ldots) = \frac{(-t)^k}{k!}\left[\sum_{l=0}^{\infty} u^{(l)}(x) \int_0^1 M\left(st + \sqrt{t}\, w(\tau)\right)^l d\tau\right]^k. \tag{12}$$

Функция $\varphi_{k,s}$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}\varphi_{k,s}\left(t,\ \lambda u,\ \ldots,\ \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)},\ \ldots\right) = \\ = \varphi_{k,\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}\left(\lambda t,\ u,\ u',\ \ldots\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Поэтому свойством (13) обладает и функция f_s, т. е.

$$f_s\left(t,\ \lambda u,\ \ldots,\ \lambda^{1+\frac{s}{2}} u^{(s)},\ \ldots\right) = f_{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}\left(\lambda t,\ u,\ u',\ \ldots\right).$$

Разлагая левую и правую часть этого равенства в ряд Тейлора и приравнивая коэффициенты разложения, получим (9). Отметим также, что равенства (11) и (12) следует понимать как асимптотические равенства при $t \downarrow 0$.

Для доказательства соотношения (4) в равенстве

$$b_k^n(u) = \sum_{l=1}^{k} \rho_l(k,\ n)\, b_l^0(u)$$

подставим вместо $u(x)$ функцию $\lambda u\left(\sqrt{\lambda} x\right)$. Тогда в силу свойства (10) получим

$$b_k^n\left(\lambda u\left(\sqrt{\lambda} x\right)\right) = \sum_{l=1}^{k} \rho_l(k,\ n)\, \lambda^l b_l^0\left(u\left(\sqrt{\lambda} x\right)\right).$$

С другой стороны, согласно (9) имеем

$$b_k^n\left(\lambda u\left(\sqrt{\lambda} x\right)\right) = \lambda^k b_k^{\frac{n}{\sqrt{\lambda}}}\left(u\left(\sqrt{\lambda} x\right)\right).$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^{k} b_l^0 \rho_l(k,\ n)\, \lambda^l = \sum_{l=1}^{k} b_l^0 \lambda^k \rho_l\left(k,\ \frac{n}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Выражение для $\rho_l(k,\ s)$ будем искать в виде $\rho_l(k,\ s) = s^{\nu(k,\ l)}$. Из равенства $\rho_l(k,\ n)\ \lambda^l = \lambda^k \rho_l\left(k,\ \frac{n}{\sqrt{\lambda}}\right)$ получим соотношение $s^\nu \lambda^{l+\frac{\nu}{2}} = \lambda^k s^\nu$. Поэтому $\nu = 2(k-l)$ и, значит, $\rho_l(k,\ s) = s^{2(k-l)}$, что и доказывает (4).

3. Коэффициенты асимптотического разложения собственных значений периодической задачи.

Известно [5], что для бесконечно дифференцируемого потенциала $u(x)$ собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ периодической задачи допускают полное асимптотическое разложение:

$$\sqrt{\lambda_{2n-1}} \sim 2\pi n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(u)}{n^{2k+1}},\ n \to \infty. \tag{14}$$

Те же коэффициенты разложения имеет и величина $\sqrt{\lambda_{2n}}$, $n \to \infty$.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$a_k(u) = d_k I_k(u), \tag{1}$$

где

$$d_k = (-1)^{k+1} 2\pi (4\pi^2)^k. \tag{1}$$

Доказательство. В работе [2] было установлено, что меж конечными наборами $\{I_m\}_{m=0}^{k}$ и $\{a_m\}_{m=0}^{k}$ существует взаимно одн значное соответствие, задаваемое соотношениями

$$a_k = R_k^1(I_0, I_1, \ldots I_k),\ I_k = R_k^2(a_0, \ldots, a_k),$$

где R_k, $i = 1, 2$ — универсальные многочлены, удовлетворяющи условию

$$R_k^i(\lambda\xi_0, \ldots \lambda^{s+1}\xi_s, \ldots, \lambda^{k+1}\xi_k) = \lambda^{k+1} R_k^i(\xi_0, \ldots, \xi_k). \tag{17}$$

Величина a_k является локальным законом сохранения, поэтому существуют константы $\rho_{k,l}$ такие, что

$$a_k(u) = \sum_{l=0}^{k} \rho_{k,l} I_l(u).$$

Поэтому многочлен R_k^1 имеет вид

$$R_k^1(\xi_0, \ldots, \xi_k) = \sum_{l=0}^{k} \rho_{k,l}\xi_l.$$

Из свойства (17) следует что $\rho_{k,l} = 0$ при $l < k$. Это влечет соотношение $a_k(u) = d_k I_k(u)$, где $d_k = \rho_{k,k}$. Для вычисления этой величины подставим в разложение (14) функцию $u(x) \equiv \lambda$.
Имеем

$$\sqrt{\lambda_{2n-1}} \sim 2\pi n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{n^{2k+1}},\ n \to \infty,$$

где

$$a_k(\lambda) = \frac{(-1)^{k+1}\pi(2k-1)!!\,\lambda^{k+1}}{2^k(k+1)!}.$$

Для функции $u(x) \equiv \lambda$ имеем $b_k^0 = \frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}$. Подставляя выражения $a_k(\lambda)$ и $I_k(\lambda)$ в равенство $a_k(\lambda) = d_k I_k(\lambda)$, получим (16).

Замечание. В работе [6] доказано, что в классе $C(m_n)$ по набору величин $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ можно восстановить спектр $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ тогда и только тогда, когда класс $C(m_n)$ является квазианалитическим. Согласно соотношению (5) в этом утверждении набор $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ можно заменить произвольной n-серией величин $\{b_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Список литерратуры: 1. *Mc Kean H. P.*, *Moerbeke van P.* The spectrum of Hill's equation // Inventiones math, 1975. 30. P. 217—274. 2. *Новицкий М. В.* Об эквивалентных системах спектральных инвариантов оператора Хилла // Мат. физика, функцион. анализ: Тр. ФТИНТ АН УССР. 1986. С. 40—47. 3. *Sunada T.* Traceformula for Hill's operators, 1980. 47, № 3. P. 529—546. 4. *Serre D.* Les invariants locaux de l'equation de Korteweg de Vries. 1981, C. R. Acad. Sc. Paris, 293, Ser. I. P. 505—508. 5. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. 1977. С. 68—91. 6. *Новицкий М. В.* Двусторонние оценки полиномиальных законов сохранения для уравнения $K_g\Phi$ и их приложения // Функцион. анализ и его прил. 1989, 23, № 3. С.

Поступила в редколлегию 30.05.89