

ОБЪ ОДНОМЪ ЧАСТНОМЪ СЛУЧАѢ

ПРИВЕДЕНІЯ УРАВНЕНІЯ 4-Й СТЕПЕНИ
КЪ БИКВАДРАТНОМУ.

А. П. Грузинцева.

Пусть дано уравненіе 4-й степени въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \quad (I)$$

гдѣ A, B, C, D суть нѣкоторые коэффициенты. Употребимъ подстановку вида:

$$x = \frac{a + by_1}{p + qy_1},$$

гдѣ a, b, p, q неопредѣленные коэффициенты, а y_1 новое переменное. Положивъ

$$\frac{a}{p} = \alpha, \quad \frac{b}{q} = \beta \quad \text{и} \quad \frac{qy_1}{p} = y,$$

можемъ дать x -у другой болѣе простой видъ:

$$x = \frac{\alpha + \beta y}{1 + y}. \quad (II)$$

Зададимся вопросомъ — опредѣлить нѣкоторыя изъ тѣхъ соотношеній между коэффициентами A, B, C, D , въ силу которыхъ уравненіе (I) подстановкой (II) можетъ быть превращено въ биквадратное.

Подставляя это значеніе въ (I) и полагая для краткости:

$$\begin{aligned} M &= \beta^4 + A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D, \\ N &= 6\alpha^2\beta^2 + 3A\alpha\beta^2 + 3A\alpha^2\beta + B\alpha^2 + B\beta^2 + 3C\alpha + 3C\beta + 6D, \\ P &= \alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D, \end{aligned}$$

находимъ:

$$My^4 + Ny^2 + P = 0, \quad (I')$$

при допущеніи, что подстановкой (II), т. е. приличнымъ выборомъ α и β при существованіи предполагаемыхъ соотношеній между коэффициентами даннаго уравненія, мы привели данное уравненіе (I) къ биквадратному (I').

Исчезнушіе коэффициенты суть:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 4\alpha\beta^3 + A\beta^3 + 3A\alpha\beta^2 + 2B\alpha\beta + 2B\beta^2 + 3C\beta + \\ & + C\alpha + 4D = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 4\alpha^3\beta + A\alpha^3 + 3A\alpha^2\beta + 2B\alpha\beta + 2B\alpha^2 + 3C\alpha + \\ & + C\beta + 4D = 0. \end{aligned}$$

Опредѣленіе α и β изъ этихъ уравненій приведетъ насъ къ уравненію 6-й степени, что не выгодно; мы же займемся тѣми частными соотношеніями между A, B, C, D , которыя позволятъ намъ опредѣлить α и β изъ уравненій не выше 2-й степени.

Изъ равенствъ (1) и (2) мы можемъ извлечь другія, болѣе удобныя для нашей цѣли. Вычитая (2) изъ (1) и раздѣляя на общій множитель $\beta - \alpha^*$, имѣемъ:

$$\begin{aligned} & 4\alpha\beta(\alpha + \beta) + A(\alpha + \beta)^2 + 2A\alpha\beta + \\ & + 2B(\alpha + \beta) + 2C = 0. \end{aligned} \quad (1')$$

Умноживъ 1-е на α^2 , 2-е на β^2 , по вычитаніи и сокращеніи на $\alpha - \beta$ имѣемъ:

* Этотъ множитель не можетъ быть 0, ибо тогда подстановка (II) обращается въ равенство: $x = \alpha$, т. е., что α есть корень даннаго уравненія, который намъ неизвѣстенъ.

$$2A\alpha^2\beta^2 + 2B\alpha\beta(\alpha + \beta) + 2C\alpha\beta + C(\alpha + \beta)^2 + 4D(\alpha + \beta) = 0. \quad (2')$$

Разсмотримъ теперь тѣ частныя соотношенія между A, B, C, D , которыя значительно упрощаютъ опредѣленіе α и β изъ уравненій (1) и (2) или, лучше, (1') и (2').

А. Положимъ, что между коэффициентами A, B, C и D существуетъ неизвѣстное пока намъ соотношение, въ силу котораго 1) $\beta = 0$, тогда уравненія (1) и (2) даютъ:

$$C\alpha + 4D = 0 \text{ или } \alpha = -\frac{4D}{C};$$

$$A\alpha^3 + 2B\alpha^2 + 3C\alpha + 4D = 0.$$

Подставляя сюда значеніе α , найдемъ по упрощеніи искомое соотношение въ видѣ

$$8AD^2 - 4BCD + C^3 = 0. \quad (A)$$

Это соотношение есть такъ называемый кубическій ретривариантъ^{**}. Такимъ образомъ заключаемъ, что если коэффициенты уравненія (I) удовлетворяютъ соотношенію (A), то постановкой:

$$x = -\frac{4D}{C} \cdot \frac{1}{1+y}$$

уравненіе (I) превращается въ биквадратное.

Коэффициенты M, N, P будутъ:

$$M = D, N = \frac{2D}{C^2}(8DB - 3C^2), P = \frac{D}{C^4}(256D^3 - 32AD^2C + C^4).$$

Уравненіе (I') будетъ:

$$z^4 + 2(8DB - 3C^2)z^2 + (256D^3 - 32AD^2C + C^4) = 0, \quad (I'')$$

гдѣ $z = Cy$.

^{**} См. *Matthiessen's Grundzüge der antiken und modernen Algebra*. S. 240.

2) $\alpha = 0$; тогда соотношение (A) остается то-же самое, но подстановка будетъ:

$$x = -\frac{4D}{C} \cdot \frac{y}{1+y}$$

и уравнение (I') обращается въ слѣдующее:

$$(256D^3 - 32AD^2C + C^4)z^4 + 2(8DB - 3C^2)z^2 + 1 = 0, \quad (I''')$$

гдѣ $z = \frac{y}{C}$.

Это уравнение обратное (I'') и выгоднѣе употреблять (I''').

В. Положимъ, что искомое соотношение между коэффициентами влечетъ за собой:

$$1) \alpha + \beta = 0.$$

Тогда изъ (1') или (2') находимъ:

$$0 = \alpha^2 = \frac{C}{A}.$$

Следывая (1) и (2) и внося въ результатъ $\alpha = -\beta$, найдемъ:

$$\alpha^4 = D,$$

следовательно:

$$A^2D - C^2 = 0 \quad (B)$$

есть искомое соотношение. Итакъ, заключаемъ, что если коэффициенты уравненія (I) удовлетворяютъ соотношенію (B), то это уравненіе подстановкой

$$x = \frac{1-y}{1+y} \sqrt{\frac{C}{A}} \quad \text{или подстановкой:} \quad x = \frac{y-1}{y+1} \sqrt{\frac{C}{A}}.$$

приводится къ биквадратному (I').

Коэффициенты будутъ:

$$M = \frac{C}{A^2} (2C + AB - 2A\sqrt{AC}), \quad P = \frac{C}{A^2} (2C + AB + 2A\sqrt{AC}) \quad \text{и}$$

$$N = \frac{2C}{A^2} (6C + AB).$$

Самое уравнение будетъ:

$$\begin{aligned} & (2C + AB - 2A\sqrt{AC})y^4 + 2(6C + AB)y^2 + \\ & (2C + AB + 2A\sqrt{AC}) = 0. \end{aligned}$$

На этотъ случай мы главнѣйше и обращаемъ вниманіе; онъ кажется намъ простымъ и полезнымъ. Въ немъ заключается, какъ частный, случай обратныхъ уравненій.

2) $\alpha\beta = 1$. Тогда находимъ

$$x = \frac{\alpha^2 + y}{\alpha(1 + y)},$$

гдѣ α будетъ корень квадратнаго уравненія:

$$\alpha^2 - \frac{4(D-1)}{A-C} \alpha + 1 = 0.$$

Подставляя значеніе α и β въ одно изъ условій (1') или (2'), найдемъ нѣкоторую зависимость между коэффициентами нашего уравненія. Эта зависимость нѣсколько сложна, а потому и случай этотъ не представляетъ достаточнаго интереса.

С. Можно, идя тѣмъ-же путемъ, найти еще случаи соотношеній, но сложныхъ и не представляющихъ также особыхъ выгодъ.

Д. Если постановкѣ (II) дать видъ:

$$x = \frac{1+y}{\alpha + \beta y},$$

то вмѣсто соотношенія (A) найдемъ такое:

$$A^3 - 4AB + 8C = 0 \quad (D)$$

при условіи $\alpha = 0$ или $\beta = 0$.

Это есть извѣстное соотношеніе, аналогичное (A), если введемъ вмѣсто x въ уравненіе (I) величину $\frac{1}{x}$.