

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬ- НЫЙ АНАЛИЗ

49



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

В ы п у с к 49

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»

1988

Сборник содержит статьи по спектральной теории дифференциальных операторов, теории целых и мероморфных функций, теории динамических систем.
Для научных работников и специалистов.

Ответственный за выпуск *В. А. Марченко*

Редакционная коллегия: В. А. Марченко (отв. ред.), В. К. Дзядык (зам. отв. ред.), И. В. Островский (отв. секр.), Ю. М. Березанский, М. С. Бродский, Н. А. Давыдов, Л. Е. Дундученко, М. Г. Крейн, А. В. Кузель, Б. Я. Левин, Н. И. Симонов, И. Г. Соколов

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

Л. Б. БИРБРАЙР, Ю. И. САПРОНОВ

**ЛИНЕЙНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ C^3**

1. Задача о линейной классификации квадратичных отображений имеет как самостоятельный интерес, так и прикладной. Последнее связано с тем, что квадратичные дифференциалы Портеуса дают первые нелинейные слагаемые в уравнениях разветвления Ляпунова—Шмидта. В некоторых задачах рассмотрение квадратичных дифференциалов дает полную качественную картину бифуркации стационарных решений нелинейного уравнения, включая информацию об устойчивости и первых асимптотиках по малому приращению параметра.

2. Квадратичным отображением $F: C^n \rightarrow C^n$ называется сужение симметрического билинейного отображения $\tilde{F}: C^n \times C^n \rightarrow C^n$ на диагональ $\Delta = \{(x, x) \in C^n \times C^n\}$.

Множество всех квадратичных отображений обозначим через $\tilde{L}(C^n)$. На $\tilde{L}(C^n)$ действует группа $Gl(n, C) \times Gl(n, C)$ по правилу $[(A, B); F] = A \circ F \circ B^{-1}$. Два отображения, лежащие на одной орбите этого действия, назовем линейно эквивалентными. Квадратичное отображение назовем регулярным, если $F^{-1}(0) = \{0\}$. Подмножество регулярных квадратичных отображений обозначим $L(C^n)$. Очевидно, что $L(C^n)$ открыто и всюду плотно в $\tilde{L}(C^n)$.

В случае $n = 2$ известен следующий результат (см. [1, 2]). Любое регулярное квадратичное отображение линейно эквивалентно следующему $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$. Это равносильно тому, что $L(C^2)$ состоит из одной

(открытой) орбиты отображения $\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$.

В случае $n \geq 3$ орбиты приобретают положительную коразмерность, и ситуация усложняется. Основным результатом этой заметки является следующее утверждение.

Теорема 1. Любое квадратичное отображение $F \in Z(C^3)$ линейно эквивалентно одному из приведенных типов П.

	Π_1	Π_2	Π_3	
	x_1^2	$x_1^2 + x_2 x_3$	$x_1^2 + x_2 x_3$	(1)
Компоненты	x_2^2	x_2^2	$x_2^2 + x_1 x_3$	
	x_3^2	x_3^2	$x_3^2 + a x_1 x_3$	

Приведем основные этапы доказательства.

Лемма 1. Любое квадратичное отображение $F \in L(C^3)$ некоторой левой заменой может быть приведено к виду

$$x_k^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^k x_i x_j; \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (2)$$

Доказательство. Из условия регулярности вытекает условие собственности для F и для декартова произведения $F \times F \times F: C^3 \times C^3 \times C^3 \rightarrow C^3 \times C^3 \times C^3$. Следовательно, базис общего положения $\{e_1, e_2, e_3\}$ преобразованием F переводится в базис $\{F(e_1), F(e_2), F(e_3)\}$. Отсюда получается формула (2).

Лемма 2. Существует базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что выполняются следующие условия:

$$\tilde{F}(e_1, e_2) = 0, \quad (3)$$

$$\tilde{F}(e_1, e_3) \in \text{Lin}\{F(e_2), F(e_3)\}, \quad (4)$$

$$\tilde{F}(e_2, e_3) \in \text{Lin}\{F(e_1), F(e_3)\}. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\tilde{F}: C^3 \times C^3 \rightarrow C^3$. Оно собственнo на диагонали $\Delta = \{(x, x) \in C^3 \times C^3\}$, а значит, собственнo и на сдвинутой диагонали $\Delta_\delta = \{(x, x + \delta) \in C^3 \times C^3\}$. Как известно, собственное алгебраическое отображение $F|_{\Delta_\delta}: \Delta_\delta \rightarrow C^3$ является сюръективным. В силу 8-кратности F существует независимая пара $\{e_1, e_2\}$, удовлетворяющая условию (3).

Для выполнения условий (4) и (5) введем замену вида $\tilde{e}_1 = e_1$, $\tilde{e}_2 = e_2$, $\tilde{e}_3 = e_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, где e_1, e_2 — векторы, удовлетворяющие условию (3), а $e_3 \in C^3$, такой, что $e_3 \notin \text{Lin}\{e_1, e_2\}$. Коэффициенты λ_1 и λ_2 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \beta_3 \lambda_2^2 + 2\alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 (2\beta_2 \alpha_2 - 2\alpha_2 \beta_3) + \lambda_2 + \beta_2 &= 0, \\ \alpha_3 \lambda_1^2 + 2\beta_3 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 (2\alpha_1 \beta_3 - 2\alpha_3 \beta_1) + \alpha_1 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } F(e_1, e_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}; \quad F(e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Разрешимость уравнений (6) следует из собственности квадратичной части.

Леммы 1 и 2 приводят к следующему списку квадратичных отображений, исчерпывающему все классы линейной эквивалентности:

Π_1	Π_2	Π_3	Π_*
x_1^2	$x_1^2 + x_2 x_3$	$x_1^2 + x_2 x_3$	$x_1^2 + x_2 x_3$
x_2^2	x_2^2	$x_2^2 + x_1 x_3$	$x_2^2 + x_1 x_3$
x_3^2	x_3^2	$x_3^2 + a x_1 x_3$	$x_3^2 + a x_1 x_3 + b x_2 x_3$

Лемма 3. Π_* линейно эквивалентно Π_3 .

Доказательство. Коразмерность орбиты типа Π_* равна 1. Плоскость параметров (a, b) расслаивается на кривые, полученные пересечением с орбитами. Оказывается, что каждая из них пересекается с прямой $b = 0$.

Лемма 3 завершает доказательство теоремы 1.

3. Пусть Φ — отображение, которое ставит в соответствие элементу $F \in L(C^3)$ линейную оболочку компонент $F_1, F_2, F_3 \in S^2(C^3)$ отображения F . Из условия регулярности следует, что эта линей-

ная оболочка имеет размерность 3. Таким образом, получается отображение из $L(C^3)$ в грассманово многообразие $Gr(6, 3, C)$. Обозначим через H образ $L(C^3)$ при отображении Φ . Действие группы $Gl(3, C) \times \times Cl(3, C)$ на $L(C^3)$ превращается в каноническое правое действие группы обратимых матриц на H . Нетрудно убедиться, что коразмерности орбит в $L(C^3)$ и их образов в H будут совпадать. Соотношения (2) задают локальные координаты грассманова многообразия. В этих координатах удастся вычислить коразмерность орбит из списка (1).

Пусть μ_i — коразмерности орбит типа Π_i .

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства: $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1$.*

Таким образом, приведенные типы являются нормальными формами в соответствии с [1].

Список литературы: 1. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — М., 1982. — 302 с. 2. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. — М., 1977. — 290 с.

Поступила в редколлегию 18.02.85

УДК 517.9

А. М. БЛОХ, М. Ю. ЛЮБИЧ

О ТИПИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОТРЕЗКА

1. Формулировка результатов. Рассмотрим кусочно-монотонное гладкое преобразование f отрезка $[0, 1]$. Через f^n обозначим его n -ю итерацию. В настоящее время имеется детальная топологическая картина динамики полученной одномерной динамической системы [1, 2]. В частности, описано асимптотическое поведение траекторий $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$ для массивного* множества начальных точек x . Иначе обстоит дело в понимании измеримой динамики, т. е. типичных** свойств траектории по отношению к мере Лебега λ . Здесь достигнута ясность только в случае унимодальных преобразований, т. е. имеющих одну критическую точку (подробная библиография приведена в работе [3]). Настоящая работа содержит продвижения в общей ситуации.

Следуя Милнору [4], аттрактором мы будем называть такой компакт $A \subset [0, 1]$, что подмножество $\rho(A) = \{x : \omega(x) \subset A\}$ имеет положительную λ -меру и, более того, $\lambda(\rho(A) \setminus \rho(A')) > 0$ для любого собственного замкнутого подмножества $A' \subset A$. Аттрактор называется минимальным, если он не содержит меньших аттракторов, и неразложимым, если он не является объединением двух меньших аттракторов.

* Множество называется массивным, если его дополнение имеет первую категорию по Бэру.

** Свойство называется типичным, если оно выполняется почти всюду по мере Лебега.

Пусть Λ — класс преобразований $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f \in C^3[0, 1]$, 2) f имеет конечное число критических точек, 3) f имеет отрицательный шварцман: $Sf \equiv f''' / f' - \frac{3}{2} (f'' / f')^2 < 0$ вне критических точек.

Отрезок $I \subset [0, 1]$ называется *периодическим*, если $f^p I \subset I$; при этом $\bigcup_{k=0}^{p-1} f^k I$ называется *циклом отрезков*. Если дополнительно преобразование $f^p: I \rightarrow I$ топологически транзитивно (т. е. имеет плотную траекторию), то I называется *транзитивным (периодическим) отрезком*. Через $\omega(x)$ обозначим предельное множество траектории $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$. Точка x называется *рекуррентной*, если $x \in \omega(x)$. Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.*

Теорема. Пусть $f \in \Lambda$. Тогда для п. в. $x \in [0, 1]$ имеет место одна из следующих возможностей:

- $\omega(x)$ совпадает с циклом $\{f^k \alpha\}_{k=0}^{p-1}$ периодической точки α ;
- $\omega(x)$ совпадает с циклом $\bigcup_{k=0}^{p-1} f^k I$ транзитивного отрезка I ;
- $\omega(x)$ совпадает с предельным множеством $\omega(c)$ некоторой рекуррентной критической точки c .

Следующий результат дает ответ на некоторые вопросы Милнора [4]:

Следствие 1. а) Преобразование $f \in \Lambda$ с d критическими точками имеет не более $d + 2$ неразложимых аттракторов. б) Пусть f — унимодальное преобразование с экстремумом c , $f(c) = 1$, $f(1) = 0$. Тогда f имеет единственный аттрактор A и $\omega(x) = A$ для п. в. x .

Интервал $J \subset [0, 1]$ называется *гомотервалом*, если 1) итерации f^n не имеют критических точек внутри J ($n = 0, 1, 2, \dots$); 2) $\omega(x)$ бесконечно при $x \in J$ (определение не вполне стандартно — см. [3]).

Следствие 2. Предположим, что любая рекуррентная критическая точка функции $f \in \Lambda$ является периодической. Тогда а) f не имеет гомотервалов; б) каждый минимальный аттрактор является циклом периодической точки или транзитивного отрезка; в) для п. в. x множество $\omega(x)$ совпадает с некоторым минимальным аттрактором.

Отметим, что результаты настоящей работы имеют прототип в теории комплексно-аналитических динамических систем, который послужил для нас отправной точкой [5]. Вообще, отрицательный шварцман в теории преобразований отрезка является адекватным аналогом комплексной аналитичности.

2. Обозначения, терминология и предварительные сведения. Через N мы, как обычно, обозначаем натуральный ряд $\{0, 1, 2, \dots\}$. Интервалами мы будем называть как открытые, так и замкнутые и полуоткрытые интервалы. Через $(\alpha, \beta)_0$ мы будем обозначать (открытый) интервал с концами в точках α, β , не предполагая, что $\alpha < \beta$.

* В конце статьи будет дана более полная формулировка.

Пусть $C = \{c : f'(c) = 0\}$ — множество критических точек функции f . Под *монотонностью* функции f на интервале I будем понимать монотонность по первой производной: $f'(x) \neq 0$ внутри I . *Интервалы монотонности* функции f — это замкнутые интервалы, на которые множество C разбивает отрезок $[0, 1]$. Через $C_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}C$ обозначим множество критических точек функции f^n ; через $H_n(x)$ — интервал монотонности этой функции, содержащий точку x ; $M_n(x) = f^n H(x)$. Концами интервалов $M_n(x)$ являются точки множества $\bigcup_{k=1}^n f^k(C \cup \{0, 1\})$. Центральную роль в дальнейшем играет функция $r_n(x)$ — расстояние от точки $f^n x$ до ближайшего конца интервала $M_n(x)$.

Пусть α — периодическая точка функции f с периодом p , $\alpha = \{f^k \alpha\}_{k=0}^{p-1}$ — ее цикл. Число $s = (f^p)'(\alpha)$ называется *мультипликатором*. Тогда α (цикл α) называется *притягивающей*, если $|s| < 1$; *нейтральной*, если $|s| = 1$; *отталкивающей*, если $|s| > 1$.

Теорема Зингера (см. [3, § II, 4]). Пусть $\alpha = \{f^k \alpha\}_{k=0}^{p-1}$ — притягивающий или нейтральный цикл функции $f \in \Lambda$. Тогда существует такое i и такая точка $c \in C \cup \{0, 1\}$, что $f^n x \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) при $x \in [c, f^i \alpha]$.

Множество X называется *блуждающим*, если $f^n X \cap X = \emptyset$ ($n \geq 1$) и *сильно блуждающим*, если $f^n X \cap f^m X = \emptyset$ ($n > m \geq 0$). Точка x называется *блуждающей*, если у нее есть блуждающая окрестность, и *неблуждающей* — в противном случае. Множество неблуждающих точек преобразования f обозначим через $\Omega = \Omega(f)$. Структура множества Ω для произвольного непрерывного отображения отрезка детально описана в [6]. Нам понадобится следующий факт.

Предложение 1. Пусть $f \in \Lambda$. Тогда а) множество $\overline{\text{int } \Omega(f)}$ является объединением транзитивных отрезков; б) каждый цикл L транзитивных отрезков содержит критическую точку; в) для любого интервала $I \subset L$ существует такое N , что $\bigcup_{k=0}^N f^k I = L$.

Через $H_\infty(x)$ обозначим интервал $\bigcap_{n=0}^\infty H_n(x)$ (возможно, состоящий из одной точки x). Это максимальный интервал, на котором монотонны все функции f^n ($n = 0, 1, \dots$). Очевидно, что $f H_\infty(x) \subset H_\infty(fx)$, и если концы интервала $H_\infty(x)$ не являются прообразами критических точек и отличны от точек $0, 1$, то $f H_\infty(x) = H_\infty(fx)$. Рассмотрим последовательность интервалов $J_n = H_\infty(f^n x)$. Возможны два случая: 1) $J_{n+p} \subset J_n$ при некоторых $n, p > 1$. Тогда все траектории из интервала J_0 сходятся к некоторому притягивающему или нейтральному циклу; 2) $J_n \cap J_m = \emptyset$ ($n > m \geq 0$). В этом случае J_0 является гомтервалом. Такие гомтервалы являются максимальными: любой гомтервал J содержится в максимальном: $J \subset H_\infty(x)$ ($x \in J$). Таким образом, любой гомтервал J сильно блуждает и, значит, $\sum_{n=0}^\infty \lambda(f^n J) < 1$. Поэтому

предельное множество $\omega(x)$ не зависит от $x \in J$; обозначим его через $\omega(J)$. С деталями читатель может познакомиться по [3, § II, 5].

Сформулируем теперь те свойства функций с отрицательным шварцианом, которыми мы будем фактически пользоваться (см. [3, § II, 4]).

1) Если $f \in \Lambda$, то $f^n \in \Lambda$.

2) Пусть $I = [\alpha, \beta]$, $\varphi: I \rightarrow J$, $S\varphi < 0$, $\varphi^{-1}: J \rightarrow I$ — обратная функция. Тогда функция $|(\varphi^{-1})'(y)|$ выпукла на интервале J (см. [3, с. 160]).

Из свойства 2) легко вытекает следующее:

3) Принцип минимума: $|\varphi'(x)| \geq \min(|\varphi'(\alpha)|, |\varphi'(\beta)|)$.

4) Пусть Y_1, Y_2 — измеримые множества в J , $\sup Y_1 < y < \inf Y_2$. Тогда

$$|(\varphi^{-1})'(y)| \leq \max_{i=1,2} \lambda(\varphi^{-1}Y_i)/\lambda(Y_i). \quad (1)$$

5) Пусть интервал J разбит на интервалы J^- и J^+ точкой y ; E — измеримое подмножество в J , $0 < \eta < 1$. Тогда существует такой интервал $K_\eta = [y, z_\eta]_0$, содержащийся в некотором J^γ , $\gamma \in \{+, -\}$, для которого

$$\frac{\lambda(\varphi^{-1}(E \cap K_\eta))}{\lambda(\varphi^{-1}K_\eta)} \geq \eta \frac{\lambda(E \cap J^\gamma)}{\lambda(J^\gamma)}. \quad (2)$$

Поскольку это важное для динамики свойство не отмечено в литературе, мы приведем доказательство.

Лемма 1. Рассмотрим две системы масс m_k и M_k , сосредоточенных в точках y_k и $\tilde{y}_k$ соответственно ($k = 1, \dots, n$). Пусть s — центр масс первой системы, C_l — центр первых l масс второй системы. Предположим, что $\tilde{y}_k \geq y_k$ и $M_{k+1}/M_k \geq m_{k+1}/m_k$. Тогда существует l , для которого $C_l \geq s$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{y_k\}_{k=1}^n$ монотонно убывает. Тогда $y_1 > s$, и можно положить $l = 1$. В противном случае найдется k , для которого $y_{k+1} \geq y_k$. Заменяем пару масс m_k, m_{k+1} на суммарную массу $m = m_k + m_{k+1}$, сосредоточенную в центре масс $y = (m_k y_k + m_{k+1} y_{k+1})/(m_k + m_{k+1})$. Аналогично поступим с массами M_k, M_{k+1} . Мы получим два набора из $(n-1)$ масс, удовлетворяющих условиям леммы. Индукция завершает доказательство.

Доказательство свойства 5). Так как функция $|(\varphi^{-1})'|$ выпукла, то она монотонна на некотором интервале J_l . Заметим теперь, что неравенство (2) инвариантно относительно аффинных преобразований интервалов I, J . Поэтому можно считать, что $y = 0$, $J_l = \varphi^{-1}J_l = [0, 1]$, а множество E содержится в $[0, 1]$. Пусть $q = \lambda(E)$, $\psi = \varphi^{-1}$; $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Тогда функция $|\psi'(x)|$ монотонно возрастает на интервале $[0, 1]$, а неравенство (2) принимает вид

$$\frac{\lambda(\psi(E \cap K_\eta))}{\lambda(\psi(K_\eta))} \geq \eta q. \quad (3)$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на интервалы $J_1, \dots, J_n$, для которых $|\psi'(x)/\psi'(y)| \geq \eta$ при $x, y \in J_k$; положим $E_k = E \cap J_k$. Существует такая точка $\xi_k \in J_k$, для которой $\lambda(\psi(J_k)) = |\psi'(\xi_k)| \lambda(J_k)$. Обозначив $|\psi'(\xi_k)| = M_k$, $\lambda(J_k) = \lambda_k$, запишем

$$\lambda(\psi(\bigcup_{k=1}^l J_k)) = \sum_{k=1}^l M_k \lambda_k. \quad (4)$$

Но $\lambda(\psi(E_k)) = \int_{E_k} |\psi'(z)| dz \geq \eta M_k \lambda(E_k)$. Полагая $\lambda(E_k) = \mu_k \lambda(E) = \mu_k q$, получаем

$$\lambda(\psi(\bigcup_{k=1}^l E_k)) \geq \eta q \sum_{k=1}^l M_k \mu_k. \quad (5)$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 = \sum_{k=1}^n \mu_k. \quad (6)$$

Воспользуемся теперь леммой 1 для систем масс $m_k = 1$ и M_k , сосредоточенных в точках $y_k = \bar{y}_k = \mu_k - \lambda_k$ ($k = 1, \dots, n$). Условия леммы сводятся к возрастанию последовательности $\{M_k\}_{k=1}^n$, которая имеет место в силу возрастания функции $|\psi'(x)|$. В силу (6) центр масс s первой системы находится в нуле. Следовательно, существует такое l , для которого $\sum_{k=1}^l M_k (\mu_k - \lambda_k) > 0$. Воспользовавшись (4) и (5), получаем $\lambda(\psi(\bigcup_{k=1}^l E_k)) \geq \eta q \lambda(\psi(\bigcup_{k=1}^l J_k))$. Интервал $K_\eta = \bigcup_{k=1}^l J_k$ — иско-
мый.

3. Множество λ -неблуждающих точек. В этом параграфе мы будем считать, что f — функция класса Λ . Будем говорить, что точка x является λ -блуждающей, если любая ее окрестность содержит блуждающее множество положительной меры. Множество λ -блуждающих точек обозначим через W_λ , а дополнительное множество λ -неблуждающих точек — через Ω_λ . Как легко видеть, множество W_λ замкнуто и если $x \in W_\lambda \setminus (f(C \cup \{0, 1\}))$, то $f^{-1}x \in W_\lambda$. Преобразование f называется консервативным на инвариантном множестве X , если X не содержит блуждающих множеств положительной меры. Если $f: X \rightarrow X$ консервативно и $Y \subset X$, то траектория почти каждой точки $y \in Y$ возвращается в Y .

Лемма 2. а) Множество Ω_λ является объединением внутренних* нескольких циклов транзитивных отрезков; б) преобразование $f: \bar{\Omega}_\lambda \rightarrow \bar{\Omega}_\lambda$ консервативно; в) для п. в. $x \in \Omega_\lambda$ множество $\omega(x)$ совпадает с циклом транзитивных отрезков, содержащим x .

Доказательство. Ясно, что $\Omega_\lambda \subset \text{int } \Omega$. Пусть I — транзитивный отрезок, $L = \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k I$ — его цикл. Пусть L содержит блуждающее

* «Внутренность» понимается в смысле топологии отрезка $[0, 1]$.

множество X , $\lambda(X) > 0$ и x — точка плотности множества X , не содержащаяся в $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n C \cup \{0, 1\}$. Тогда точка x и все ее прообразы являются λ -блуждающими. Так как множество прообразов плотно в L (предложение 1) $L \subset W_\lambda$. Это влечет а) и б).

Пусть теперь $L = \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k I$ — цикл такого периодического транзитивного отрезка, что $\text{int } I \subset \Omega_\lambda$. Рассмотрим открытый интервал $J \subset L$ и инвариантный компакт $K = L \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n} J$. В силу предложения 1 множество K нигде не плотно. Предположим, что $\lambda(K) > 0$. Рассмотрим любой интервал $R \subset L \setminus K$. Из предложения 1 следует, что $\lambda(f^n R \cap K) > 0$ при некотором n . Взяв первый такой номер n , рассмотрим множество $S = R \cap f^{-n} K$. При $i \geq n$ имеем $f^i S \cap S \subset K \cap \bigcap R = \emptyset$. Пусть $1 < i < n$, $Q_i = f^i S \cap S$. Тогда $Q_i \subset S$ и $f^{n-i} Q_i \subset \subset f^n S \subset K$. В силу определения n , имеем: $\lambda(Q_i) = 0$. Пусть $T = S \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i} S$. Тогда множество T блуждает и $\lambda(T) = \lambda(S \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} f^{-i} Q_i) > 0$, вопреки консервативности преобразования $f: L \rightarrow L$. Следовательно, $\lambda(K) = 0$. Чтобы завершить доказательство, рассмотрим счетную базу интервалов J_s и соответствующие множества K_s . Тогда $\lambda(\bigcup K_s) = 0$ и $\omega(x) = L$ при $x \in [0, 1] \setminus \bigcup K_s$.

Лемма 3. (ср. [5]). Для п. в. $x \in [0, 1]$ выполняется одно из свойств: а) $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$); б) $f^N x \in \Omega_\lambda$ при некотором N .

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $0 < \rho < \varepsilon$. Через $V(\alpha)$ обозначим дополнение к α -окрестности множества Ω_λ . Разобьем множество $V(\varepsilon - \rho)$ на интервалы J_k , длины которых не превышают $\frac{1}{2}\rho$. Каждый интервал J_k содержит некоторое блуждающее множество S_k положительной меры. Положим $\delta = \min \lambda(S_k)$.

Рассмотрим теперь множество $X_n = X_n(\varepsilon, \rho) = \{x: f^n x \in V(\varepsilon), r_n(x) \geq \rho\}$. Его связные компоненты $X_{n,j}$ являются интервалами вида $X_n \cup H_{n,j}$, где $H_{n,j}$ — интервал монотонности функции f^n . Интервал $f^n X_{n,j}$ содержится в интервале $M_{n,j} = f^n H_{n,j}$ и отстоит от его концов на расстояние, не меньше, чем ρ . Следовательно, каждый интервал $I_{n,j}^\gamma$ ($\gamma \in \{+, -\}$) множества $M_{n,j} \setminus f^n X_{n,j}$ содержит некоторый интервал $J_k = J_{n,j}^\gamma$ и соответствующее множество $S_k = S_{n,j}^\gamma$, где $k = k(n, j, \gamma)$. Через f_j^{-n} обозначим функцию, обратную к $f^n: H_{n,j} \rightarrow M_{n,j}$. Свойство 4) функций с отрицательным шварцианом (§ 2) влечет $\lambda(X_{n,j}) \leq \max_\gamma \lambda(f_j^{-n} S_{n,j}^\gamma) / \delta$. Суммируя по j , получаем $\lambda(X_n) \leq$

$\leq \delta^{-1} \sum_k \lambda(f^{-n} S_k)$. Наконец, просуммируем по n : $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(X_n) \leq \delta^{-1} \times \times \sum_k \lambda(f^{-n} S_k)$. Так как множества S_k блуждают, то последняя сумма конечна. По лемме Бореля-Кантелли $\lambda\{x | \exists n_k \rightarrow \infty : x \in X_{n_k}\} = 0$. Таким образом, для п. в. x справедливо

Свойство P . Если $n_k \rightarrow \infty$ и $\inf \text{dist}(f^{n_k}x, \Omega_\lambda) > 0$, то $r(f^{n_k}x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Осталось проверить, что если точка x обладает свойством P и $\text{dist}(f^{l_k}x, \Omega_\lambda) \rightarrow 0$ для некоторой последовательности $l_k \rightarrow 0$, но $f^{n_k}x \notin \Omega_\lambda$ ни при каком n , то $\lim_{k \rightarrow \infty} r(f^{l_k}x) = 0$. Множество $\partial\Omega_\lambda \cap \omega(x) = \bar{\Omega}_\lambda \cap \omega(x)$ конечно и инвариантно. Поэтому задача сводится к случаю, когда $\{f^{l_k}x\}$ сходится к периодической точке $\alpha \in \partial\Omega_\lambda$, которую можно считать неподвижной. Точка α не может быть притягивающей, так как лежит на границе транзитивного отрезка J . Предположим, что α — отталкивающая. Подберем такое β , что $|f'(x)| > 1$ при $|x - \alpha| \leq \beta$. Тогда найдется последовательность n_k , такая что $|f^{n_k}x - \alpha| \leq \beta/2$ ($l_k \leq i \leq n_k - 1$), но $|f^{n_k}x - \alpha| > \frac{\beta}{2}$. Легко видеть, что $r_{n_k}^s(x) \geq \min(r_{l_k}(x), \beta/2)$. Так как x обладает свойством P , то $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{n_k}(x) = 0$, и значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{l_k}(x) = 0$.

Наконец, предположим, что α — нейтральная неподвижная точка. По теореме Зингера найдется интервал $[c, \alpha]$, такой что $c \in C \cup \{0, 1\}$ и $f^n x \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) при $x \in [c, \alpha]$. Этот интервал и транзитивный интервал J имеют лишь одну общую точку α . Так как $f^{l_k}x \rightarrow \alpha$ ($k \rightarrow \infty$), но $f^{l_k}x \notin J$, то $f^{l_k}x \in (c, \alpha)$ при некоторых k . Тогда $r_{l_k+s}(x) \leq |\alpha - f^s c| \rightarrow 0$ ($s \rightarrow \infty$). Лемма полностью доказана.

Пусть L — цикл транзитивного отрезка. Из доказанной леммы следует, что если преобразование $f: L \rightarrow L$ не консервативно, то $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) для почти всех $x \in L$. Докажем аналогичный факт для неэргодических преобразований.

Лемма 4. Пусть L — цикл транзитивного отрезка. Предположим, что преобразование $f: L \rightarrow L$ не эргодично. Тогда $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) для почти всех $x \in L$.

Доказательство. Пусть $L = X_1 \cup X_2$ — разбиение множества на два инвариантных подмножества положительной меры. Тогда $\lambda(X_1 \cap J) > 0$ для любого интервала J . Действительно, в противном случае $\lambda(X_1 \cap f^n J) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) и в силу предложения 1 $\lambda(X_1) = 0$. Следовательно, $\lambda_1(\varepsilon) = \inf \lambda(X_1 \cap J) > 0$, где $\inf$ берется по всем интервалам $J \subset [0, 1]$ длины ε .

Рассмотрим множество $Y = \{x: \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) > 0\}$. Пусть $x \in Y$; тогда $r_{n_k}(x) > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, $n_k \rightarrow \infty$. Применим к отображению $f^{n_k}: H_{n_k}(x) \rightarrow M_{n_k}(x)$ свойство 5) функций с отрицательным шварцианом. Получим, что для некоторого интервала $K_i \subset H_{n_k}(x)$, прилегающего к точке x , выполняется неравенство: $\lambda(K_i \cap X_1)/\lambda(K_i) \geq \frac{1}{2} \lambda_1(\varepsilon)$. Так как транзитивный отрезок не содержит гомтервалов, то $\lambda(K_i) \leq \lambda(H_{n_k}(x)) \rightarrow 0$. Следовательно, верхняя плотность множества X_1 в точке x^* положительна. Отсюда вытекает, что x не

* Т. е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(X_1 \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon])}{2\varepsilon}$.

является точкой плотности множества X_2 . По теореме Лебега о точках плотности $\lambda(Y \cap X_2) = 0$. Поменяв ролями X_1 и X_2 , получим, что $\lambda(Y \cap X_1) = 0$. Следовательно, $\lambda(Y) = 0$, и лемма доказана.

Соберем воедино результаты этого параграфа.

Теорема (предварительный вариант). Пусть $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — преобразование класса Λ . Для типичной точки $x \in [0, 1]$ выполняется одно из свойств: а) $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$); б) существует цикл L транзитивного отрезка, такой что $f^N x \in L$ при некотором N и $\omega(x) = L$; преобразование $f: L \rightarrow L$ консервативно и эргодично. Следствие. Если J — гомтервал, то $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ при $x \in J$.

Замечание. Авторам неизвестно, может ли преобразование $f^p: I \rightarrow I$ транзитивного отрезка I быть неконсервативным или неэргодичным. В комплексно-аналитическом случае такое возможно. Простейшая целая функция $z \rightarrow e^z$ неконсервативна и неэргодична [7, 8].

4. Асимптотическое поведение траекторий, для которых $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Результаты этого параграфа, предшествующие лемме 9, относятся к произвольному гладкому кусочно-монотонному преобразованию $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Для критической точки $c \in C$ через $[c^-, c]$, $[c, c^+]$ обозначаем максимальные интервалы (быть может, вырожденные), на которых монотонны все итерации f^n . Через c^γ , где $\gamma \in \{\pm 1\}$, мы будем обозначать одну из точек c^+ , c^- . Отметим сразу, что $\omega(c) = \omega(c^+) = \omega(c^-)$. Пусть $C(x)$ — множество таких точек $c \in C$, для которых $\forall \varepsilon > 0 \exists n, t \in \mathbb{N}$ ($t \leq n$), что интервал $f^{n-t} H_n(x)$ примыкает к точке c и $|f^n x - f^t c| < \varepsilon$. Если при этом $f^{n-t} H_n(x)$ находится слева от c , то будем считать $c^- \in C^-(x)$. Аналогично определим множество $C^+(x)$.

Введем следующие обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всего параграфа. Пусть $\beta > 0$. Тогда $p(\beta)$ — это наименьшее p , для которого функция f^p имеет критическую точку $d^1(c)$ в каждом интервале $(c^\gamma, c^\gamma + \gamma\beta)_0$; $\delta = \delta(\beta) > 0$ — любое число, для которого интервал $(c^\gamma + \gamma\delta, c^\gamma + \gamma(\beta - \delta))_0 = I^1(c, \beta, \delta)$ также содержит точку $d^1(c)$. Наконец, $\varepsilon(\beta) = \min \{ \lambda(f^k I^1(c, \beta, \delta)) : k = 0, \dots, p(\beta) - 1, c^\gamma \in C^+(x) \cup C^-(x) \}$.

Лемма 5. Пусть $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Тогда имеет место одна из следующих возможностей: а) $x \in \{0, 1\} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n} C$; б) x содержится в гомтервале, концом которого является точка множества $\{0, 1\} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n} C$; в) траектория точки x сходится к притягивающему или нейтральному циклу; г) любая точка $c^\gamma \in C^1(x)$ содержится в $\omega(x)$; если при этом $c \neq c^\gamma$, то $[c, c^\gamma]_0$ — гомтервал.

Доказательство. Пусть $\beta > 0$, $c^\gamma \in C^1(x)$ и для определенности $\gamma = -1$. Найдем такие $n, t \in \mathbb{N}$ ($t \leq n$), что интервал $f^{n-t} H_n(x)$ примыкает слева к точке c и $|f^n x - f^t c| < \varepsilon(\beta)$. Если $f^{n-t} x \geq c^-$, то имеет место один из случаев а)–в). Далее считаем, что $f^{n-t} x < c^-$. Покажем, что $f^{n-t} x > c^- - \beta$. Если $t < p(\beta)$, то это вытекает из неравенства $|f^t(c) - f^t(c^- - \beta)| \geq \varepsilon(\beta)$. Если $t \geq p(\beta)$, то функция f^t монотонна на интервале $[f^{n-t} x, c]$, а на интервале $(c^- -$

— β , c] монотонность нарушается. Таким образом, $f^{n-t}x \in (c^- - \beta, c^-)$. Поскольку $\beta > 0$ произвольно, то $c^- \in \omega(x)$. Осталось заметить, что $[c^-, c]$ может не быть гомтервалом при $c \neq c^-$ только в одном случае: если c^- — нейтральная периодическая точка и траектория сходится к ее циклу. При этом реализуется случай в).

Через X обозначим множество таких точек x , что $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), но x не обладает свойствами а) — в) леммы 5. Для конечного множества $S \subset [0, 1]$ через S_* мы будем обозначать максимальные элементы в S относительно квазипорядка: $x \leq y$, если $\omega(x) \subset \omega(y)$. Кроме того, положим $\omega(S) = \bigcup_{x \in S} \omega(x)$.

Лемма 6. Если $x \in X$, то $\omega(x) = \omega(C_*(x)) = \omega(C_*^+(x) \cup C_*^-(x))$.

Доказательство. Из определений X и $C(x)$ вытекает, что $\omega(x) \subset \omega(C(x) \cup \{0, 1\})$. Если при этом точку $a \in \{0, 1\}$ нельзя отбросить, то интервал $H_n(x)$ примыкает к a при всех n . Тогда либо $x = a$, либо траектория точки x сходится к циклу, либо $[a, x]_0$ — гомтервал. Все три возможности исключены для $x \in X$. Таким образом, $\omega(x) \subset \omega(C(x)) = \omega(C_*(x))$. С другой стороны, по лемме 5 $\omega(C_*^+(x) \cup C_*^-(x)) \subset \omega(x)$. Осталось заметить, что $\omega(C_*(x)) = \omega(C_*^+(x) \cup C_*^-(x))$, ибо $\omega(c) = \omega(c^+) = \omega(c^-)$ для любой точки $c \in C$.

Лемма 7. Пусть $x \in X$. Тогда любая точка $c^i \in C_*^y(x)$ рекуррентна.

Доказательство. Из лемм 5, 6 следует, что $c^i \in \omega(b)$ для некоторой точки $b \in C(x)$. Тогда $\omega(c) = \omega(c^i) \subset \omega(b)$. Так как c — максимальный элемент множества $C(x)$, то $\omega(c^i) = \omega(b)$. Следовательно, $c^i \in \omega(c^i)$.

Определим теперь число $\rho > 0$ и функцию $\sigma(x)$ ($x \in X$) следующими свойствами:

Свойство А. Если $b, c \in C$, $0 < |f^n c - b^n| < \rho$, то $b^n \in \omega(c)$.

Свойство В. Пусть $x \in X$, $c \in C$, $t \leq n$. Пусть интервал $f^{n-t}H_n(x)$ примыкает к точке c слева (справа) и $|f^n x - f^t c| < \sigma(x)$. Тогда $c^- \in C^-(x)$ (соотв. $c^+ \in C^+(x)$).

Лемма 8. Пусть $x \in X$. Тогда $\omega(x) = \omega(c)$ для любой точки $c \in C_*(x)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $c^y \in C_*^y(x)$; пусть для определенности $y = +1$. Пусть $0 < \alpha < \delta(\rho) \equiv \delta$ и $\alpha(\|f^t\| + 1) < \rho^*$. Существует такое $k \in N$, что $f^k x \in (c^+, c^+ + \alpha)$ и $r_n(x) < \min(\alpha, \varepsilon(\rho), \sigma(x))$ при $n \geq k$. Покажем, что тогда $\text{dist}(f^{k+j}x, \omega(c)) < \alpha$ при $j \in N^{**}$. Пусть это не так и j — наименьшее натуральное число, для которого выполнено противоположное неравенство. Отметим сразу, что $j > 0$, ибо $\text{dist}(f^k x, \omega(c)) \leq f^k x - c^+ < \alpha$.

При некотором $t \leq k + j$ интервал $f^{k+i-t}H_{k+j}(x)$ примыкает к некоторой точке $b \in C$ и $|f^{k+i}x - f^t b| = r_{k+j}(x)$. Пусть $\text{sgn}(f^{k+i-t}x - b) = \gamma$. Тогда $b^y \in \omega(c)$. Действительно, в противном случае $\text{dist} \times (f^{k+i}x, \omega(c)) \leq |f^{k+i}x - f^t b^y| \leq r_{k+j}(x) < \alpha$, вопреки выбору j .

Далее, поскольку $|f^{k+i}x - f^t b| = r_{k+j}(x) < \sigma(x)$, то $b^y \in C^y(x)$ (свойство В). Покажем, что $c^\pm \in \omega(b)$. Действительно, в противном

* $\| \varphi \| = \sup$ — норма, ** $\text{dist}(y, Y) = \inf \{ |y - z| : z \in Y \}$.

случае $\omega(c) \subset \omega(b)$. Поскольку $c \in C_*(x)$, то $\omega(c) = \omega(b)$ и $b^y \in C^*(x)$. По лемме 7 точка b^y рекуррентна, и значит, $b^y \in \omega(c)$. Противоречие.

Рассмотрим теперь 3 случая. 1). Пусть $t = 0$. Тогда $\text{dist}(b, \omega(c)) \leq |b - f^{k+i}x| + \text{dist}(f^{k+i}x, \omega(c)) \leq r_{k+i}(x) + \|f'\| \text{dist} \times \times (f^{k+i-1}x, \omega(c)) < \alpha + \|f'\| \alpha < \rho$, вопреки доказанному.

2) Пусть $0 < t < j$. Имеем $\text{dist}(f^{k+i-t}x, \omega(c)) < \alpha < \delta$, а $\text{dist} \times \times (b^y, \omega(c)) \geq \rho$ (свойство А). Следовательно, $K \equiv [f^{k+i-t}x, b]_0 \supset \supset [b^y + \gamma(\rho - \delta), b]_0$. Так как функция f^i монотонна на K , то $t < < \rho(\rho)$, и значит, $\lambda(f^i K) \geq \varepsilon(\rho)$. Это противоречит тому, что $\lambda(f^i K) = = r_{k+i}(x) < \varepsilon(\rho)$.

3) Пусть $t \geq j$. Положим $\kappa = t - j$ и рассмотрим интервал $J = = f^*K = [f^kx, f^*b]_0$. Так как функция f^i монотонна на J и $j > 0$, то $f^*b \geq c$. Если $f^*b \in [c, c^+] \equiv L$, то $c^+ \in \omega(L) = \omega(b)$, вопреки доказанному. Следовательно, $f^*b \geq c^+ + \rho$. При этом $f^*x < c^+ + \delta$ и, значит, $J \supset [c^+ + \delta, c^+ + \rho]$. Снова используя монотонность функции f^i на J , получим, что $j < \rho(\rho)$. Следовательно, $r_{k+j}(x) = \lambda(f^i J) \geq \varepsilon(\rho)$. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 9. Пусть $f \in \Lambda$, $x \in X$. Тогда $\omega(x) = \omega(c)$ для некоторой рекуррентной точки $c \in C$.

Доказательство. Пусть $b^y \in C_*^*(x)$ и для определенности $\gamma = = -1$. В силу лемм 7, 8 $b^- \in \omega(b^-) = \omega(x)$. Если $b^- = b$, то b — искомая критическая точка. Далее мы считаем, что $b^- < b$. Пусть Γ — семейство гомтервалов J , примыкающих к критическим точкам, для которых $\omega(J) = \omega(x)$. Имеем: $[b^-, b] \in \Gamma$.

Существует такое семейство Δ максимальных гомтервалов, что 1) концы гомтервалов $K \in \Delta$ не содержатся в множестве $\{0, 1\} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}C$;

2) если $f^n K = f^m J$ при некоторых $K, J \in \Delta$, $n, m \in \mathbb{N}$, то $K = J$;

3) для любого $J \in \Gamma$ существуют $K \in \Delta$ и $s(J) > 0$, такие что $f^{s(J)} J \subset K$;

4) любой гомтервал $K \in \Delta$ содержит некоторый гомтервал $f^{s(J)} J$, где $J \in \Gamma$.

Положим $s = \max \{s(J) : J \in \Gamma\}$, $\mu = \min \{\lambda(f^i J) : J \in \Gamma, i = 0, 1, \dots, s-1\}$. Для любого гомтервала J корректны обозначения $H_n(J)$, $M_n(J)$, $\sigma(J)$, $C(J)$ и т. д. Положим $\sigma = \min \{\sigma(K) : K \in \Delta\} > > 0$. Через $M_n^\pm(J)$ обозначим соответственно левую и правую компоненты множества $M_n(J) \setminus f^n J$, а через $H_n^\pm(J)$ — соответствующие компоненты множества $H_n(J) \setminus J$ (т. е. $f^n H_n^+(J) = M_n^+(J)$).

Определим последовательность $S \subset \mathbb{N}$ следующим образом: $n \in S$, если для некоторого $K_n \in \Delta$ гомтервал $[u_n, v_n] = f^n K_n$ находится ближе к b^- , чем все гомтервалы $f^i K$ ($K \in \Delta, i = 0, 1, \dots, n-1$). Гомтервал K_n определен однозначно в силу свойства 2) семейства Δ . Так как $b^- \in \omega[b^-, b]$, то гомтервалы $f^n K_n$ сгущаются к точке b^- . При этом они попадают в левую полуокрестность точки b^- (свойство 1) семейства Δ). Пусть $\alpha = \frac{1}{2} \min(\rho, \sigma, \mu, b - b^-)$ и при $n \geq N$ гомтервал $f^n K_n$ находится в левой α -полуокрестности точки b^- .

Пусть $M_n(K_n) = [f^{t_n}a_n, f^{t_n}c_n]$, где $a_n, c_n \in C$, $t_n, \tau_n \leq n$. Рассмотрим два случая: 1) $f^{t_n}c_n < b^- + \alpha$ при некотором $n \geq N$. Тогда $|f^{t_n}c_n - b^-| < \alpha < \frac{\rho}{2}$, и значит, $\omega(c_n) \supset \omega(b^-) = \omega(x)$ (свойство А). Кроме того, $\lambda(M_n^+(K_n)) = f^{t_n}c_n - v_n < 2\alpha < \sigma$ и, значит, $c_n^\gamma \in C^\gamma(K_n)$ при подходящем γ (свойство В). По лемме 5 (с учетом следствия из предварительного варианта теоремы) $c_n^\gamma \in \omega(K_n) = \omega(x)$. Таким образом, $c_n^\gamma \in \omega(c_n) = \omega(x)$. Если $c_n^\gamma = c_n$, то c_n — искомая критическая точка.

Пусть $c_n^\gamma \neq c_n$. Тогда $J_n = [c_n^\gamma, c_n]_0 \in \Gamma$. Если $t_n < s$, то $f^{t_n}c_n \geq v_n + \lambda(f^{t_n}J_n) \geq (b^- - \alpha) + \mu > b^- + \alpha$, вопреки предположению. Значит, $t_n \geq s$. Тогда $f^{t_n}J_n = f^{t_n}L_n$, где $L_n \in \Delta$, $l_n = t_n - s(J_n) < n$. Гомтервал $f^{t_n}L_n$ лежит правее гомтервала $f^n K_n$, левее точки b (ибо $f^{t_n}c_n < b^- + \alpha < b$) и не пересекается с $[b^-, b]$ (свойство 1) семейства Δ). Следовательно, $f^{t_n}L_n$ находится ближе к b^- , чем $f^n K_n$. Противоречие.

2) $f^{t_n}c_n \geq b^- + \alpha$ при всех $n \in S$, $n \geq N$. Тогда $\lambda(M_n^+(K_n)) \geq \alpha$. При этом $\lambda(H_n^\pm(K_n)) \rightarrow 0$, $\lambda(f^n K_n) \rightarrow 0$, а $\min_n \lambda(K_n) > 0$. Следовательно, $\lambda(M_n^+(K_n))/\lambda(f^n K_n) > \lambda(H_n^+(K_n))/\lambda(K_n)$ при больших n . Из свойства 4) функций с отрицательным шварцианом вытекает, что

$$\lambda(M_n^-(K_n))/\lambda(f^n K_n) \leq \lambda(H_n^-(K_n))/\lambda(K_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Следовательно, $u_n - f^{t_n}a_n = \lambda(M_n^-(K_n)) < \alpha < \sigma$ при больших n . Кроме того, $u_n > b^- - \alpha$. Следовательно, $b^- > f^{t_n}a_n > b^- - 2\alpha \geq b^- - \rho$. Из этих свойств вытекает (так же, как и в первом случае), что $a_n^\gamma \in \omega(a_n) = \omega(x)$ при подходящем γ . Если $a_n^\gamma = a_n$ при некотором n , то a_n — искомая критическая точка.

Пусть $a_n^\gamma \neq a_n$ при всех $n \in S$, $n \geq N$. Тогда $[a_n, a_n^\gamma]_0 = I_n \in \Gamma$. Семейство гомтервалов I_n конечно и $f^{t_n}I_n \subset M_n^-(K_n)$. Следовательно, $\lambda(f^{t_n}I_n) \leq r_n(K_n) \rightarrow 0$ и, значит, $\tau_n \rightarrow \infty$.

Положим $U_n = f^{s(I_n)}I_n$, $V_n \in \Delta$ — максимальный гомтервал, содержащий U_n , $r_n = \tau_n - s(I_n)$. Интервалы U_n и V_n имеют общий конец $f^{s(I_n)}a_n^\gamma$ (поскольку эта точка содержится в $\omega(x)$) и, значит, $V_n \subset U_n \cup H_{r_n}^-(U_n)$. Имеем: $M_{r_n}^+(U_n) \supset M_n^+(K_n)$ и, значит, $\lambda(M_{r_n}^+(U_n)) > \alpha$. При этом $\lambda(H_{r_n}^+(U_n)) \rightarrow 0$, поскольку $r_n \geq \tau_n - s \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lambda(M_{r_n}^+(U_n))/\lambda(f^{r_n}U_n) \geq \lambda(H_{r_n}^+(U_n))/\lambda(U_n)$. Из свойства 4) функций с отрицательным шварцианом вытекает $\lambda(M_{r_n}^-(U_n))/\lambda(f^{r_n}U_n) \leq \lambda(H_{r_n}^-(U_n) \times (U_n))/\lambda(U_n) \leq D$. Поскольку $f^{r_n}V_n \subset M_{r_n}^-(U_n) \cup U_n$, то $\lambda(f^{r_n}V_n) \leq (D+1)\lambda(f^{r_n}U_n) \leq (D+1)\lambda(M_n^-(K_n))$. Из последнего неравенства и (7) следует, что

$$\lambda(f^{r_n}V_n)/\lambda(f^n K_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (8)$$

Пусть l — элемент последовательности S , предшествующий n .

Покажем, что $\lambda(f^l K_l) > \lambda(f^n K_n)$. Действительно, если $l = r_n$ и $K_l = V_n$, то это следует из (8). В противном случае гомтервал $f^l K_l$ содержится между гомтервалами $f^n V_n$ и $f^n K_n$, и значит, $f^l K_l \subset M_n^-(K_n)$. Теперь требуемое неравенство следует из (7). Таким образом, последовательность длин $\{\lambda(f^n K_n)\}_{n \in S}$ возрастает, что невозможно. Лемма доказана.

Теперь мы готовы для полной формулировки нашего результата.

Теорема. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ преобразование класса Λ . Для почти каждой точки $x \in [0, 1]$ имеет место одна из следующих возможностей:

а) $\omega(x)$ совпадает с притягивающим или нейтральным циклом $\{f^k \alpha\}_{k=0}^{p-1}$ периодической точки α ;

б) $\omega(x)$ совпадает с циклом $L = \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k I$ периодического транзитивного отрезка; $f^N x \in L$ при некотором N ; преобразование $f: L \rightarrow L$ консервативно и эргодично;

в) $\omega(x)$ совпадает с предельным множеством $\omega(c)$ рекуррентной критической точки c .

Доказательство сразу следует из предварительного варианта теоремы, леммы 5 и леммы 8. Отметим только следующую деталь. Если x содержится в гомтервале J , концом которого является

точка множества $\{0, 1\} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n} C$ (случай б) леммы 5), то $f^N x \in X$ при достаточно большом N . Действительно, $r_n(f^N x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) в силу следствия в конце § 3. Поэтому гомтервал J можно заменить на максимальный гомтервал K , содержащий $f^N J$.

Замечание к следствию 1. Оценка $d + 2$ вместо d получается из-за того, что в теореме Зингера к циклу может сходиться траектория не критической точки, а конца отрезка $[0, 1]$. Условия пункта б) исключают эту возможность (см. [3]).

Список литературы: 1. Шарковский А. Н. Частично упорядоченная система притягивающих множеств // Докл. АН СССР.— 1966.— 170, № 6.— С. 1276—1278. 2. Блох А. М. О разложении динамических систем на отрезке // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, № 5.— С. 179—180. 3. Collet P., Eckman J.-P. Iterated maps on the interval as dynamical systems.— Basel etc.: Birkhäuser, 1980.— 130 S. 4. Milnor J. On the concept of attractor // Comm. Math. Phys.— 1985.— 99.— P. 177—195. 5. Любич М. Ю. О типичном поведении траекторий рационального отображения сферы // Докл. АН СССР.— 1982.— 268, № 1.— С. 29—32. 6. Блох А. М. О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях // Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1986.— Вып. 47.— С. 100—110. 7. Rees M. The exponential map is not recurrent. Preprint, 1982. 8. Любич М. Ю. Измеримая динамика экспоненты // Сиб. мат. журн.— 1987.— 28, № 5.— С. 111—127.

Поступила в редколлегию 03.02.86

О СПЕКТРЕ МНОГОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Введение. Пусть Ω — решетка в n -мерном евклидовом пространстве с приведенным базисом ω_i , $i = \overline{1, n}$, Γ — двойственная к Ω решетка с приведенным базисом γ^i , $i = \overline{1, n}$ ($\langle \gamma^i, \omega_j \rangle = 2\pi\delta_{ij}$), а F и F^* — фундаментальные области соответственно решеток Ω и Γ . Не нарушая общности, будем предполагать, что $\text{mes } F = 1$.

Обозначим через H — оператор Шредингера, порожденный в $L_2(R^n)$ выражением $-\Delta u + q(x)u$ (1), а через H_t — оператор, порожденный в $L_2(F)$ выражением (1) и граничными условиями

$$u(x + \omega_j) = e^{i2\pi t_j} u(x), \quad (2)$$

где $t = \sum_{j=1}^n t_j \gamma^j$, $q(x)$ — периодическая (относительно решетки Ω) достаточно гладкая функция.

Известно, что [1] спектр $S(H)$ оператора H является объединением спектров $S(H_t)$ операторов H_t (при $t \in F^*$), т. е. при изменении t собственные значения $\Lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, (они занумерованы в порядке неубывания, с учетом кратности) оператора H_t замечают спектр оператора H

$$S(H) = \bigcup_{t \in F^*} S(H_t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\Lambda_n(t) : t \in F^*\}. \quad (3)$$

Наша статья посвящена в основном доказательству гипотезы Бете—Зоммерфельда (см. [2, 3]), согласно которой существует такое число $\lambda(q)$, что интервал $(\lambda(q), \infty)$ принадлежит спектру оператора H . Эта гипотеза, высказанная в начале 30-х годов, до последнего времени доказана (см. [1]) только в случае, когда потенциал допускает разделение переменных. Для общих потенциалов справедливость гипотезы впервые доказал М. М. Скragenов [4—9]. В этих работах при $n > 3$ гипотеза доказана для рациональных решеток на основании изучения геометрических и арифметических свойств решетки периодов потенциала $q(x)$ оператора H .

Мы предлагаем другой подход, основанный на получении асимптотических формул для собственных значений операторов H_t . Это дает возможность доказать гипотезу Бете—Зоммерфельда для произвольной размерности n без ограничения на решетку периодов для потенциалов класса $W_2^{(n^2-n)2\pi}(F)$.

Перед тем как перейти к изложению результатов, опишем вкратце план работы. Чтобы не затемнять суть дела техническими деталями,

мы вначале предполагаем, что потенциал $q(x)$ является тригонометрическим многочленом

$$q(x) = \sum_{\gamma \in Q} q_{\gamma} e^{i \langle \gamma, x \rangle}, \quad (4)$$

где $\int_F q(x) dx = 0$, а $Q = \{\gamma : q_{\gamma} \neq 0\}$ содержит конечное число векторов γ из Γ .

В § 1 строится m -кратно резонансное множество V_{α}^m , состоящее из объединения по $\gamma \in Q^m$ множеств

$$V_{\gamma, \alpha} = \{x \in R^n : \|x\|^2 - |x - \gamma|^2| < |x|^{\alpha}\},$$

где $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, $Q^m = \{\gamma : \gamma = \sum_{i=1}^k \dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i \in Q, k \leq m\}$. (5)

Элементу $\dot{\gamma} + t$ ($\gamma \in \Gamma$, $t \in R^n$) множества $R^n \setminus V_{\alpha}^m \equiv \tilde{V}_{\alpha}^m$ ставится в соответствие некоторое собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}(t)$ оператор H_t и доказывается, что оно удовлетворяет асимптотике

$$\Lambda_{k(\gamma+t)}(t) = |\gamma + t|^2 + F_{m-\tilde{n}}(\gamma + t) + O\left(\frac{1}{|\gamma + t|^{m\alpha - \frac{n-1}{2}}}\right) \quad (6)$$

$$\left(\tilde{n} = \left[\frac{n}{2\alpha}\right] - \text{целая часть } \frac{n}{2\alpha}\right),$$

где $F_{m-\tilde{n}}(\gamma + t)$ — рациональная функция, имеющая порядок убывания $O\left(\frac{1}{|\gamma + t|^{\alpha}}\right)$ при $|\gamma + t| \rightarrow \infty$, явно выражающаяся через $q(x)$.

Доказательству гипотезы Бете — Зоммерфельда посвящен § 2. Прежде всего отметим, что спектр оператора H_t при $q(x) \equiv 0$ (т. е. H_t^0) состоит из чисел $|\gamma + t|^2$ ($\gamma \in \Gamma$). Множество векторов $\gamma + t$ ($\gamma \in \Gamma$, $t \in F^*$) для которых собственное число $|\gamma + t|^2$ совпадает с R^2 , образует сферу $S_R = \{x : |x| = R\}$. Мы доказываем, что существуют векторы $\gamma + t$, для которых собственные значения $\Lambda_{k(\gamma+t)}(t)$ совпадают с R^2 при достаточно больших R . Схема рассуждения следующая.

Рассматривается поверхность $\tilde{S}_R$, определенная уравнением

$$\tilde{S}_R = \{x \in \tilde{V}_{\alpha}^m : |x|^2 + F_{m-\tilde{n}}(x) = R^2\}.$$

Каждой точке a поверхности $\tilde{S}_R$ ставится в соответствие отрезок

$$A_a(\delta) = \left\{a + \tau \frac{a}{|a|} ; \tau \in [-\delta, \delta]\right\},$$

лежащий в нерезонансной области $\tilde{V}_{\alpha}^m$. Подбирая δ и m и используя свойства поверхности $\tilde{S}_R$ и асимптотические формулы (6), покажем, что на левом (при $\gamma + t = a - \delta \frac{a}{|a|}$) конце отрезка $A_a(\delta)$ собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ меньше R^2 , а на правом (при $\gamma + t = a + \delta \frac{a}{|a|}$)

больше R^2 . Далее находится такая точка a из $\tilde{S}_R$, что $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ есть функция, непрерывная от аргумента $\gamma + t \in A_\alpha(\delta)$. Поэтому по теореме о промежуточном значении отсюда следует, что R^2 является собственным значением некоторого оператора H_t и, следовательно (см. (3)), лежит в спектре оператора H .

Основные технические трудности возникают при нахождении точки a для которой $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ непрерывна на интервале $A_\alpha(\delta)$.

Нами использованы следующие обозначения: $\mu_k(A)$ — k -мерная лебегова мера множества $A \subset R^n$, $U_\delta(\delta)$ — δ -окрестность множества A ; $|Q|$ — число векторов γ решетки Γ , лежащих в Q ; c_1, c_2 — фиксированные постоянные числа. Если заданы две функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ в окрестности точки $\xi = \infty$, то $f(\xi) = O(g(\xi))$ означает, что существует некоторое постоянное число такое, что $\left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right| < c$ в некоторой окрестности ∞ , $f(\xi) \sim g(\xi)$ означает, что $f(\xi) = O(g(\xi))$, $g(\xi) = O(f(\xi))$.

§ 1. Асимптотические формулы для собственных чисел оператора H_t . Обозначим через $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \dots$, собственные числа оператора H_t , занумерованные в порядке неубывания с учетом кратности. Пусть $\psi_{1,t}(x), \psi_{2,t}(x), \dots$, являются ортонормированными собственными функциями оператора H_t , фиксированные произвольным образом. $\psi_{k,t}(x) = \Lambda_k(t) \psi_{k,t}$. Отметим, что $\Lambda_k(t)$ непрерывно зависит от t (см. [1]). Из этих собственных значений мы выделяем собственные значения $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ с номером $k(\gamma+t)$, который определяется следующим образом:

$$(\psi_{k(\gamma+t),t}(x), e^{i(\gamma+t, x)}) = \max_{S: |\Lambda_S(t) - |\gamma+t||^2 < 2M} |(\psi_{s,t}(x), e^{i(\gamma+t, x)})|, \quad (1.1)$$

где $M = \sup_{x \in F} |q(x)|$.

Если тах достигается на нескольких k , то выбор среди них произволен. Такое определение индекса $k(\gamma+t)$ корректно, поскольку согласно общей теории возмущения в M -окрестности собственных значений $|\gamma+t|^2$ оператора Лапласа имеется, по крайней мере, одно собственное значение оператора H_t .

Асимптотические формулы мы будем получать, используя формулу

$$(\Lambda_k(t) - |\gamma+t|^2)(\psi_{k,t}, e^{i(\gamma+t, x)}) = (\psi_{k,t}, q(x) e^{i(\gamma+t, x)}). \quad (1.2)$$

Эта формула получается из уравнения

$$\Delta \psi_{k,t} + q(x) \psi_{k,t} = \Lambda_k(t) \psi_{k,t}$$

скалярным умножен ем на $e^{i(\gamma+t, x)}$.

Прежде чем доказывать теорему об асимптотической формуле для собственных значений оператора H_t , сделаем некоторые предварительные вычисления. Подставляя в (1.2) разложение (4) функции $q(x)$, получаем

$$(\Lambda_k - |\gamma+t|^2) b_{k,\gamma} = \sum_{\gamma_1: \gamma - \gamma_1 \in Q} q_{\gamma - \gamma_1} b_{k, \gamma_1}, \quad (1.3)$$

где $b_{k,\gamma} = (\psi_{k,t}, e^{i(\gamma+t, x)})$.

Здесь $\gamma_1 \neq \gamma$, так как мы предполагаем, что $q_{\gamma-\gamma} \equiv q_0 = 0$ (см. (4)). Итерируя формулу (1.3) один раз, получаем

$$(\Lambda_k - |\gamma + t|^2) b_{k, \gamma} = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2}}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k, \gamma_2}.$$

В этой формуле выделяем члены с $b_{k, \gamma}$ (т. е. $\gamma_2 = \gamma$) и к остальным членам применяем формулу (1.3), тогда

$$\begin{aligned} (\Lambda_k - |\gamma + t|^2) b_{k, \gamma} &= \sum_{\gamma_1} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma}}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k, \gamma} + \\ &+ \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \neq \gamma} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2}}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k, \gamma_2} = \sum_{\gamma_1} \frac{|q_{\gamma-\gamma_1}|^2}{\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2} b_{k, \gamma} + \\ &+ \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2} q_{\gamma_2-\gamma}}{(\Lambda_k - |\gamma_1 + t|^2) (\Lambda_k - |\gamma_2 + t|^2)} b_{k, \gamma_2}. \end{aligned}$$

Теперь снова выделим члены с $b_{k, \gamma}$ и к остальным еще раз применим формулу (1.3). Продолжая этот процесс m раз, находим

$$(\Lambda_k - |\gamma + t|^2) b_{k, \gamma} = \left(\sum_{p=1}^{m-1} S_p(\Lambda_k, \gamma + t) \right) b_{k, \gamma} + \tilde{S}_m(\Lambda_k, \gamma + t), \quad (1.4)$$

$$\text{где } S_p(\Lambda_k, \gamma + t) = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_p} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2} \dots q_{\gamma_{p-1}-\gamma_p} q_{\gamma_p-\gamma}}{\prod_{i=1}^p (\Lambda_k - |\gamma_i + t|^2)}; \quad (1.5)$$

$$\tilde{S}_m(\Lambda_k, \gamma + t) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m+1}} \frac{q_{\gamma-\gamma_1} q_{\gamma_1-\gamma_2} \dots q_{\gamma_m-\gamma_{m+1}}}{\prod_{i=1}^m (\Lambda_k - |\gamma_i + t|^2)} b_{k, \gamma_{m+1}}. \quad (1.6)$$

Введем обозначения: $A_m(\Lambda, \gamma + t) = \sum_{p=1}^{m-1} S_p(\Lambda, \gamma + t)$, $F_1(\gamma + t) = A_m(|\gamma + t|^2, \gamma + t)$, $F_2(\gamma + t) = A_m(F_1(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t)$, $F_k(\gamma + t) = A_m(F_{k-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t)$.

Теорема 1. а) Пусть собственное значение $\Lambda_k(t)$ оператора H_t удовлетворяет условиям

$$|\Lambda_k(t) - |\gamma + t|^2| \leq 2M \quad (1.7); \quad |b_{k, \gamma}| > |\gamma|^{-m_0 \alpha} \quad (1.8),$$

где m_0 — фиксированное целое положительное число.

Тогда, если $\gamma + t$ принадлежит m -кратно нерезонансной области $\tilde{V}_\alpha^m$, то $\Lambda_k(t)$ удовлетворяет следующей асимптотической формуле:

$$\Lambda_k(t) = |\gamma + t|^2 + F_{m-m_0}(\gamma + t) + O\left(\frac{1}{|\gamma|^{m\alpha - m_0\alpha}}\right). \quad (1.9)$$

б) Если $\gamma + t \in \tilde{V}_\alpha^m$, то собственное значение $\Lambda_k(\gamma + t)$ удовлетворяет асимптотической формуле (1.9) при $m_0 = \left\lfloor \frac{n}{2\alpha} \right\rfloor$.

Доказательство. В формулах (1.5), (1.6) можно считать, что $\gamma - \gamma_1 \in Q$, $\gamma_i - \gamma_{i+1} \in Q$, $i = 1, 2, \dots$, так как в противном случае $q_{\gamma - \gamma_1} = 0$, $q_{\gamma_i - \gamma_{i+1}} = 0$. Поэтому $\gamma - \gamma_p \in Q^m$ для $p \leq m$. По определению V_α^m при $\gamma + t \in \tilde{V}_\alpha^m$ и $\gamma - \gamma_p \in Q^m$ имеет место

$$\|\gamma + t\|^2 - |\gamma_p + t|^2 > |\gamma + t|^\alpha. \quad (1.10)$$

Согласно (1.7) имеем $|\Lambda_k - |\gamma + t|^2| > |\gamma + t|^\alpha - 2M$. Следовательно,

$$\left(\prod_{i=1}^p (\Lambda_k - |\gamma_i + t|^2) \right)^{-1} = O\left(\frac{1}{|\gamma + t|^{\alpha p}}\right) \text{ при } |\gamma + t| \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_p} |(q_{\gamma - \gamma_1} \cdot q_{\gamma_1 - \gamma_2} \cdots q_{\gamma_{p-1} - \gamma_p})| < \left(\sum_{\gamma \in Q} |q_\gamma| \right)^p, \quad (1.12)$$

где $\sum_{\gamma \in Q} |q_\gamma| < c_1$.

Поэтому, применяя (1.11) к формулам (1.5) и (1.6), находим оценки для S_p и $\hat{S}_m$:

$$S_p = O(1/|\gamma|^{p\alpha}), \quad \hat{S}_m = O(1/|\gamma|^{m\alpha}). \quad (1.13)$$

Формула (1.9) из этих оценок вытекает следующим образом.

Разделив обе части (1.4) на $b_{k, \gamma}$ и используя (1.8), получим, что при $\gamma_i + t \in \tilde{V}_\alpha^m$ имеет место

$$\begin{aligned} \Lambda_k(t) &= |\gamma + t|^2 + \sum_{p=1}^{m-m_0-1} S_p(\Lambda_k, \gamma + t) + O(1/|\gamma|^{m\alpha-m_0\alpha}) = \\ &= |\gamma + t|^2 + O(1/|\gamma|^\alpha). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Следовательно, формула (1.9) доказана при $m - m_0 = 1$. При $m - m_0 = 1, 2, \dots$ докажем по индукции. Пусть при $m - m_0 = j$

$$\Lambda_k = |\gamma + t|^2 + F_{j-1}(\gamma + t) + O(1/|\gamma|^{j\alpha}). \quad (1.15)$$

Подставляя значения Λ_k из (1.15) в формулу (1.4), при $\sum_{p=1}^{m-m_0-1} S_p \equiv A_{m-m_0}$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_k(t) &= |\gamma + t|^2 + A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2 + O(1/|\gamma|^{j\alpha}), \gamma + t) + \\ &+ O(1/|\gamma|^{(m-m_0)\alpha}) = |\gamma + t|^2 + A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t) + \\ &+ O(1/|\gamma|^{(m-m_0)\alpha}) + (A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2 + O(1/|\gamma|^{j\alpha})) - \\ &- A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t)). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Производная функция $A_{m-m_0}(h, \gamma + t)$ по любым направлениям h удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial A_{m-m_0}^{(h, \gamma+t)}}{\partial h} \right| < c_2 |\gamma + t|^{-1} \quad (1.16)$$

при достаточно больших $|\gamma + t|$ с постоянной c_2 , не зависящей от h (где $h = |\gamma + t|^2 + O(1)$). Это видно из определения функции $A_{m-m_0}(h, \gamma + t)$. Поэтому разность $A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2 + O(\frac{1}{|\gamma + t|^\alpha}), \gamma + t) - A_{m-m_0}(F_{j-1}(\gamma + t) + |\gamma + t|^2, \gamma + t)$ равна на $O(1/|j|^{(j+1)\alpha})$.

Из (1.16) следует, что формула (1.9) верна и при $m - m_0 = j + 1$. Утверждение а) теоремы 1 доказано.

б) Чтобы доказать, что $\Lambda_k(\gamma + t)$ удовлетворяет асимптотике (1.9), достаточно показать, что

$$|b_k(\gamma + t), \gamma| = \max_{S: |\Lambda_S(t) - |\gamma + t|^2| < 2M} |b_{S, \gamma}| > c_3 |\gamma + t|^{\frac{n-1}{2}}.$$

По формуле (1.2) имеем

$$\sum_{S: |\Lambda_S - |\gamma + t|^2| > 2M} |b_{S, \gamma}|^2 \leq \sum_S \frac{|\langle \psi_S, t, q(x) e^{i\langle \gamma + t, x \rangle} \rangle|^2}{(2M)^2} \leq \frac{1}{4}. \quad (1.17)$$

Поэтому

$$\sum_{S: |\Lambda_S - |\gamma + t|^2| < 2M} |b_{S, \gamma}|^2 > \frac{3}{4}. \quad (1.18)$$

Теперь заметим, что число собственных значений оператора, попадающих в интервал $[|\gamma + t|^2 - 2M, |\gamma + t|^2 + 2M]$, меньше, чем $c_4 |\gamma + t|^{n-1}$. Действительно, по общей теории возмущений число собственных значений оператора H_t , попадающих в $[|\gamma + t|^2 - 2M, |\gamma + t|^2 + 2M]$, меньше, чем число собственных значений $|\gamma + t|^2$ ($\gamma \in \Gamma$) оператора H_t^0 , попадающих в $[|\gamma + t|^2 - 3M, |\gamma + t|^2 + 3M]$. Поскольку число векторов $\gamma + t$, попадающих в кольцо $\{x \in R^n: ||x| - |\gamma + t|| < \frac{3M}{|\gamma + t|}\}$, меньше, чем $c_3 |\gamma + t|^{n-1}$, то число собственных значений $|\gamma + t|^2$ ($\gamma \in \Gamma$), попадающих в $[|\gamma + t|^2 - 3M, |\gamma + t|^2 + 3M]$, меньше, чем $c_4 |\gamma + t|^{n-1}$. Следовательно, $|b_k, \gamma| < \frac{3}{4} c_3 |\gamma + t|^{n-1}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В теореме 1 вместо оператора Лапласа можно взять оператор $f(\Delta)$, где функция $f(\xi)$ вещественная и удовлетворяет условию $|f(|x|) - f(|x + \gamma|)| > |x|^\alpha ||x| - |x + \gamma||$ (1.19) при $\gamma \in Q^m$ и достаточно больших $|x|$ ($x \in R^n$).

Тогда при $\gamma + t \in \tilde{V}_\alpha^m$ для соответствующих собственных значений $\Lambda_k(t)$ оператора $f(\Delta) + q(x)$ верны асимптотические формулы, полученные из (1.9) заменой $|\gamma + t|^2$ на $f(|\gamma + t|)$. Доказательство этих формул отличается от доказательства (1.9) только тем, что вместо (1.10) применяется (1.19).

§ 2. Доказательство гипотезы Бете — Зоммерфельда. Обозначим через $\tilde{S}_R$ поверхность $\{x \in \tilde{V}_\alpha^m: |x|^2 + F_{m-n}(x) = R^2\}$. Положим $A_a(\delta) = \{a + \tau \frac{a}{|a|} : \tau \in [-\delta, \delta]\}$, где $a \in \tilde{S}_R$. Подберем m, m_i и α, α_k из

условия $(2n^2 + 2n + 3)^{-1} - \frac{1}{n^3} < \alpha < (2n^2 + 2n + 3)^{-1}$, $\alpha = k^2 -$
 $-k + 2$, $k = 1, 2, \dots$, $m\alpha > 2n - \left[\frac{n}{2}\right]$, $m_1 > 2m_2$, $m_2\alpha > 4n$.

Лемма 1. Если R достаточно большое число и функция $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ непрерывна от аргумента $\gamma + t$ на отрезке $A_a(\delta)$, то точка R^2 входит в спектр оператора H .

Доказательство. Из определения $F_k(x)$ видно, что функция $f(\tau) = \left| a + \tau \frac{a}{|a|} \right|^2 + F_{m-n} \left(a + \tau \frac{a}{|a|} \right)$ дифференцируема при $\tau \in [-\delta, \delta]$ и

$$2R - 2 < 2 \left| a + \tau \frac{a}{|a|} \right| - 1 < \frac{\partial f}{\partial \tau} < 2 \left| a + \tau \frac{a}{|a|} \right| + 1 < 2R + 2. \quad (2.1)$$

По определению поверхности $\tilde{S}_R$ имеем $f(0) = R^2$. Поэтому из (2.1) получим

$$F \left(a + \delta \frac{a}{|a|} \right) > R^2 + \delta R, \quad F \left(a - \delta \frac{a}{|a|} \right) < R^2 - \delta R,$$

а отсюда и из формулы (1.9) вытекает, что при $\gamma + t = a + \delta \frac{a}{|a|}$

$$\Lambda_{k(\gamma+t)} > R^2 + \frac{\delta R}{2}, \quad \text{а при } \gamma + t = a - \delta \frac{a}{|a|}, \quad \Lambda_{k(\gamma+t)} < R^2 - \frac{\delta R}{2}.$$

Из непрерывности $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ на отрезке $A_a(\delta)$ следует, что функция $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ принимает и значение R^2 , т. е. $R^2 \in S(H)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если при $\gamma + t \in A_a(\delta)$ собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ простое и выполняется следующее неравенство:

$$|(\psi_{k,t}, e^{i\langle \gamma+t, x \rangle})|^2 > \frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

то индекс k на отрезке $A_a(\delta)$ не зависит от $\gamma + t$, т. е. $k(\gamma + t) \equiv \text{const}$ при $\gamma + t \in A_a(\delta)$ и, следовательно, как заметили в начале § 1, $\Lambda_{k(\gamma+t)}(t)$ непрерывна на отрезке $A_a(\delta)$.

Доказательство. Пусть $\gamma + t_0 \in A_a(\delta)$. Из условия простоты собственного значения $\Lambda_{k(\gamma+t_0)}(t_0)$ следует, что в достаточно малой окрестности u_{t_0} точки t_0 собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t_0)}(t)$ простое, функция $(\psi_{k(\gamma+t_0),t}(x), e^{i\langle \gamma+t, x \rangle})$ непрерывна по t , поэтому $|(\psi_{k(\gamma+t_0),t}, e^{i\langle \gamma+t, x \rangle})|^2 > 1/2$ при $t \in u_{t_0}$, т. е. $k(\gamma + t) \equiv k(\gamma + t_0)$ при $t \in U_{t_0}$.

Очевидно, что $k(\gamma + t)$ постоянна на каждом связном компакте $V \subset A_a(\delta)$, так как у любого компакта существует конечное покрытие $\{U_{t_i}\}_{i=1}^n$, в каждом U_{t_i} и в их пересечении функция $k(\gamma + t)$ постоянна. Лемма 2 доказана.

Для выполнения условий леммы 2 достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\sum_{\tilde{\gamma} \neq \gamma} |(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t),t}(x), e^{i\langle \tilde{\gamma}+t, x \rangle})|^2 < 1/2,$$

где $\tilde{\psi}_{k,t}(x)$ — любая нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению $\Lambda_{k(\gamma+t)}$. Действительно, если $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ не

простое собственное значение, то существуют две ортонормированные собственные функции $\psi_{k,t}^1, \psi_{k,t}^2$, такие, что $|\langle \tilde{\psi}_{k,t}^j, e^{i\langle \gamma+t, x \rangle} \rangle|^2 > 1/2$, $j = 1, 2$, т. е. $1 = \|e^{i\langle \gamma+t, x \rangle}\|^2 > \sum_{s=1}^2 |\langle \psi_{k,t}^s, e^{i\langle \gamma+t, x \rangle} \rangle|^2 > 1$.

Итак, доказательство гипотезы Бете — Зоммерфельда мы свели к нахождению отрезка $A_a(\delta)$ ($a \in \tilde{S}_R$, $\delta \sim R^{-n}$ при достаточно больших R , такого, что при $\gamma + t \in A_a(\delta)$ имеет место (2.3). Для оценки суммы в левой части (2.3) множество индексов $\{\tilde{\gamma} + t; \tilde{\gamma} \in \Gamma \setminus \gamma\}$ разделим на следующие части:

$$J_0 = \{\tilde{\gamma} + t; \tilde{\gamma} + t \in K_R(3M/R)\}, \quad J_1 = \{\tilde{\gamma} + t; \tilde{\gamma} + t \in K_R(3M/R) \setminus E_1\},$$

$$J_k = \{\tilde{\gamma}; \tilde{\gamma} + t \in K_R(3M/R) \cap (E_{k-1} \setminus E_k)\},$$

$$E_1 = \bigcup_{\gamma \in Q^{m_1}} V_{\gamma, \alpha_1}, \dots, E_k = \bigcup_{\gamma_1, \dots, \gamma_k \in Q^{m_1}} (V_{\gamma_1, \alpha_k} \cap \dots \cap V_{\gamma_k, \alpha_k}),$$

где $K_R(\lambda) = \{x \in R^n: |x| - R| < \lambda\}$ и векторы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ линейно независимы.

Множество J_0 содержит векторы $\gamma + t$, находящиеся вне кольца $K_R(3M/R)$, а J_0 содержит векторы, находящиеся внутри кольца и не принадлежащие резонансным множествам $V_{\alpha_1}^{m_1}$, J_k содержит векторы, находящиеся внутри кольца $K_R(3M/R)$ и принадлежащие пересечению $k-1$ резонансным множествам $V_{\alpha_{k-1}\gamma}$, но не принадлежащие пересечению k резонансных множеств $V_{\alpha_k, \gamma}$. Проверим, что эти множества действительно дают разбиение множества $\{\tilde{\gamma} + t; \tilde{\gamma} \in \Gamma \setminus \gamma\}$. Для этого достаточно показать, что $E_n \cap K_R^*(3M/R) = \emptyset$. Докажем это утверждение от противного. Пусть существует $x \in K_R(3M/R)$ и $x \in V_{\gamma_1, \alpha_n} \cap \dots \cap V_{\gamma_n, \alpha_n}$ или

$$\begin{cases} |x| \sim R \\ 2(x, \gamma_i) = -|\gamma_i|^2 + O(R^{\alpha_n}). \end{cases} \quad (2.4)$$

Векторы γ_i входят в решетку Γ , поэтому имеют вид

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^n n_{i,j} \gamma^j, \quad (2.5)$$

где $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ — базис решетки Γ ; $n_{i,j} \in \mathbb{Z}$.

По эквивалентности норм в R^n

$$|n_{i,j}| \leq c_6 \text{diam } Q^{m_1} \leq m_1 c_6 \text{diam } Q. \quad (2.6)$$

Подставляя разложение (2.5) вектора γ_i в (2.4), получаем

$$\sum_{j=1}^n n_{i,j}(x, \gamma^j) = O((\text{diam } Q)^2) + O(R^{\alpha_n}). \quad (2.7)$$

Решая систему (2.7) по правилу Крамера, получим

$$|(x, \gamma^j)| = \frac{\det A_j}{\det (n_{i,j})_{i,j=1..n}}, \text{ где } A_j = \begin{pmatrix} n_{1,1} & \dots & 0(1) & \dots & n_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n_{n,1} & \dots & \dots & \dots & n_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что (см. (2.6)) $\det A_j = O(R^{\alpha n} (\text{diam } Q)^{(n-1)2} + O((\text{diam } Q)^{2n})$, а $\det (n_{i,j}) \neq 0$, поскольку векторы $\gamma_1^1, \dots, \gamma_n^1$ линейно независимы. Если учесть, что $\det (n_{i,j})$ — целое число, то $|x| = O(R^{\alpha n} (\text{diam } Q)^{(n-1)} + O((\text{diam } Q)^{n+1})$. Это приводит к противоречию, если $(\text{diam } Q) \leq c_7 R^\alpha$, так как $(n-1)\alpha + \alpha_n = (n^2 - n + 2 - 1 + n)\alpha < 1$ (2.8). Следовательно, равенство $\{\tilde{\gamma} + t; \tilde{\gamma} \in \Gamma \setminus \gamma\} = \bigcup_{k=1}^n J_k$ доказано.

Теперь сумму в правой части (2.3) напомним в виде

$$\sum_{\tilde{\gamma} \neq \gamma} |(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t), t}, e^{i\langle \tilde{\gamma}+t, x \rangle})|^2 = \sum_0 + \sum_1 + \dots + \sum_n, \quad (2.9)$$

где $\sum_k = \sum_{\tilde{\gamma}: \tilde{\gamma}+t \in J_k} |(\tilde{\psi}_{k(\gamma+t), t}, e^{i\langle \tilde{\gamma}+t, x \rangle})|^2$, и оценим каждую сумму в отдельности.

Сначала докажем, что если $\gamma + t \in U_{\tilde{S}_R}(\delta)$, то сумма $\sum_0$ мала (лемма 3). Затем найдем такое подмножество $B_R(\delta)$ множества $U_{\tilde{S}_R}(\delta)$, чтобы при $\gamma + t \in B_R(\delta)$ сумма $\sum_1$ была достаточно мала (леммы 4, 5). Далее, найдем такое подмножество множества $B_R(\delta)$ (его будем обозначать через $\tilde{B}_R(\delta)$), чтобы при $\gamma + t \in \tilde{B}_R(\delta)$ сумма $\sum_k$ ($k = 2 \dots n$) была мала. Наконец, докажем, что в $\tilde{B}_R(\delta)$ содержится отрезок $A_a(\delta)$ ($a \in \tilde{S}_R$, $\delta \sim R^{-n}$). Тогда при $\gamma + t \in A_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta) \subset B_R(\delta) \subset U_{\tilde{S}_R}(\delta)$ все суммы $\sum_0, \dots, \sum_n$ будут малы, т. е. будет выполняться неравенство (1.3), что нам и нужно.

Оценка суммы $\sum_0$. Лемма 3. Если $\gamma + t \in U_{\tilde{S}_R}(\delta)$, то $\sum_0 < \frac{1}{4}$.

Доказательство. Сначала докажем, что при $\gamma + t \in U_{\tilde{S}_R}(\delta)$ (т. е. $\gamma + t \in U_a(\delta)$, $a \in \tilde{S}_R$) и $\tilde{\gamma} + t \in J_0$ имеет место $|\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma} + t|^2| > 2M$ (2.10). По определению J_0 имеем $\tilde{\gamma} + t \notin K_R(3M/R)$. Поэтому $||\tilde{\gamma} + t|^2 - R^2| > 6M$ (2.11). Применяя асимптотические формулы (1.9) для $\Lambda_{k(\gamma+t)}$, получим $\Lambda_{k(\gamma+t)} = F(\gamma + t) + O(1/R^{(m-m_0)\alpha})$ (2.12), а по определению поверхности $\tilde{S}_R$ и по его свойствам (2.1) имеем $F(a) = R^2$, $\Lambda_{k(\gamma+t)} - R^2 = -F(a) + F(\gamma + t) + O(1/R^{(m-m_0)\alpha}) \leq (2R + 1)\delta$ (2.13). Теперь из (2.11) и (2.12) следует (2.10). Поэтому, используя (1.2), получаем

$$\sum_0 = \sum_{\tilde{\gamma}: \tilde{\gamma}+t \in J_0} \frac{|(\tilde{\psi}_{k, t}(x) q(x), e^{i\langle \tilde{\gamma}+t, x \rangle})|^2}{|\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma} + t|^2|^2} < \frac{1}{4}.$$

Лемма 3 доказана.

Определение множества $B_R(\delta)$, его свойства и оценка суммы Σ_1 .
 Обозначим через $\tilde{S}'_R$ ту часть поверхности $\tilde{S}_R$, которая не содержит точек множества $\Omega_R(\varepsilon) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$, где $\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon) = \{x : |F(x) - F(x + \gamma)| < \varepsilon\}$, $\varepsilon = 17\delta R$.

Положим $B_R(\delta) = \bigcup_{a \in \tilde{S}'_R} U_a(\delta)$.

Лемма 4. Существует такое число $R_0(q)$, что при $R > R_0(q)$ множество $B_R(\delta)$ обладает следующими свойствами:

1) если $x \in B_R(\delta)$ и $\gamma \in \Gamma$, то $|F(x) - F(x + \gamma)| > \frac{\varepsilon}{2}$;

2) если $x \in B_R(\delta)$ и $\gamma \in \Gamma$, то $x + \gamma \notin B_R(\delta)$.

Доказательство. Докажем первое свойство. Если $x \in B_R(\delta)$, то существует такая точка $a \in \tilde{S}'_R$, что $x \in U_a(\delta)$. Разность $F(x) - F(x + \gamma)$ напишем в виде суммы трех разностей: $F(x) - F(x + \gamma) = (F(x) - F(a)) + (F(a) - F(\gamma + a)) + (F(\gamma + a) - F(x + \gamma))$.

По определению $\tilde{S}'_R$ точка x не лежит в $\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$, поэтому $|F(\gamma + a) - F(a)| > \varepsilon$ (2.14).

Производная $F(x)$ по любым направлениям h меньше, чем $3|x|$ (см. 1.16)):

$$\left| \frac{\partial F(x)}{\partial h} \right| < 3|x|. \quad (2.15)$$

Кроме того, $|x - a| < \delta$, $|(\gamma + a) - (x + \gamma)| < \delta$. Поэтому $|F(x) - F(a)| < 3\delta R < \frac{\varepsilon}{4}$; $|F(\gamma + a) - F(\gamma + x)| < 3\delta R < \frac{\varepsilon}{4}$. Отсюда и из (2.14) получим, что $|F(x) - F(x + \gamma)| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Второе свойство следует из первого. Действительно, если $x \in U_{a_1} \times (\delta) \in B_R(\delta)$ и $x + \gamma \in U_{a_2}(\delta) \subset B_R(\delta)$ (где $a_1, a_2 \in \tilde{S}'_R$), то по определению $\tilde{S}'_R$ $F(a_1) = R^2$, $F(a_2) = R^2$. Согласно (2.15) имеем $|F(x + \gamma) - F(a_2)| < 3\delta R$, $|F(a_1) - F(x)| < 3\delta R$. Поэтому $|F(x + \gamma) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, что противоречит первому свойству. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если $\gamma + t \in B_R(\delta)$ и $R > R_0(q)$, то $\Sigma_1 = O(1/R)$.

Доказательство. Очевидно, что число векторов, попадающих в J_1 , имеет порядок $O(R^{n-1})$. Поэтому для доказательства леммы 5 достаточно показать, что при $\tilde{\gamma} + t \in J_1$ имеет место неравенство $|\langle \tilde{\psi}_{k(\gamma+t), t}, e^{i\langle \tilde{\gamma}+t, x \rangle} \rangle| < R^{n/2}$.

Докажем от противного. Пусть $|\langle \tilde{\psi}_{k, t}, e^{i\langle \tilde{\gamma}+t, x \rangle} \rangle| > R^{n/2}$. Тогда по теореме 1 $\Lambda_{k(\gamma+t)} = F(\tilde{\gamma} + t) + O(1/|\gamma + t|^{(m-\tilde{n})\alpha})$. Отсюда и из (1.9) получим $|F(\gamma + t) - F(\tilde{\gamma} + t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $(m - \tilde{n})\alpha > n - 1$, что противоречит первому свойству множества $B_R(\delta)$. Лемма 5 доказана.

Построение множества $B_R(\delta)$ и оценка суммы $\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_n$.
 Дадим некоторые комментарии к построению множеств $B_R(\delta)$ и $\tilde{B}_R(\delta)$. Прежде всего отметим, что по первому свойству множества

$B_R(\delta)$, если $\gamma + t \in B_R(\delta)$ и $\tilde{\gamma} \neq \gamma$, то $|F(\gamma + t) - F(\tilde{\gamma} + t)| > \varepsilon/2$. Если $\gamma + t$ входит в m -кратно нерезонансную область, то по асимптотическим формулам (1.9) имеем $|\Lambda_{k(\gamma+t)} - \Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)}| > \varepsilon/3$.

Следовательно, множество $B_R(\delta)$ построено так, что при $\gamma + t \in B_R(\delta)$ все нерезонансные собственные значения $\Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)}$ ($\tilde{\gamma} + t \in V_\alpha^m$) находятся от $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ на расстоянии, большем чем $\varepsilon/2$, т. е. $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ не может быть кратным за счет нерезонансных собственных значений $\Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)}$. Для этого при построении $B_R(\delta)$ мы из $U_{\bar{S}_R}(\delta)$ выбросили те точки $\gamma + t \in V_\alpha^m$, для которых $\Lambda_{k(\gamma+t)} - \Lambda_{k(\tilde{\gamma}+t)} \neq 0$.

Теперь множество $\bar{B}_R(\delta)$ будет построено так, чтобы $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ при $\gamma + t \in \bar{B}_R(\delta)$ не могло быть кратным и за счет резонансных собственных значений $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ ($\gamma + t \in \bar{B}_R(\delta)$). Для этого из $B_R(\delta)$ выбросим так точки, чтобы в остальном множестве $\bar{B}_R(\delta)$ собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ при $\gamma + t \in \bar{B}_R(\delta)$ не было кратным и за счет резонансных собственных значений. Резонансные собственные значения не удовлетворяют асимптотике (1.9), а находятся в окрестностях собственных значений некоторых матриц. Поэтому множество, которое мы будем выбрасывать из $B_R(\delta)$ связано с собственными значениями этих матриц. Перейдем к их определению. Каждой точке x , где $x = \tilde{\gamma} + t$, резонансного множества (при $x \in V_{\gamma_1, \alpha_k} \cap \dots \cap V_{\gamma_k, \alpha_k} \gamma_1, \dots, \gamma_k \in Q^{m_i}$) сопоставляем матрицу $C(x)$ по правилу $C(x) = (C_{i,j}(x))_{i=1, \dots, v}^{j=1, \dots, v}$, $C_{i,j}(x) = |x|^2 - |x - \tilde{\gamma}_i|^2$ (2.16), $C_{i,j} = q_{\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_j}$, $i = \overline{1, v}$, $j = \overline{1, v}$. Здесь

$\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_v$ каким-то образом занумерованные векторы множества $\bar{D}_k - x$, где $\bar{D}_k - x = \{y \in R^n : y = z - x, z \in \bar{D}_k\}$, $\bar{D}_k(x) = D_k(x) + Q^{m_2} = \{x + \gamma : x \in D_k, \gamma \in Q^{m_2}\}$, а $D_k(x)$ состоит из точек $x + \gamma$ ($\gamma \in \Gamma$), находящихся в плоскости $P(x, \gamma_1, \dots, \gamma_k) = \{x + \sum a_i \gamma_i : a_i \in (-\infty, \infty)\}$ размерности p , проходящих через точки x в направлении $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ таких, что $|x + \gamma|^2 - R^2 \sim R^\alpha$ (2.17).

Обозначим через $r_1(x), r_2(x), \dots$, собственные значения матрицы $C(x)$, занумерованные по порядку возрастания с учетом кратности. Положим $A_{k,i} = \{x \in E_k : R^2 - |x|^2 \subset [r_i(x) - \delta_1, r_i(x) + \delta_1]\}$, где $\delta_1 = O(R)\delta$, $A_k = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_{k,i}$, $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

Теперь из $B_R(\delta)$ выбросим множество A' , которое определяется следующим образом: $A' = \{\gamma + x \in B_R(\delta) : \gamma \in \Gamma, x \in A\}$.

Лемма 6. Если $\gamma + t \in B_R(\delta) \setminus A'$ и $R > R_0(q)$, то сумма $\sum_k (k = \overline{2, n})$ достаточно мала.

Доказательство. Написав формулу (1.6) для $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ любого вектора $\tilde{\gamma}_s + t$ из $\bar{D}_k(\tilde{\gamma} + t)$, получим систему уравнений

$$(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma}_s + t|^2) b_{k, \tilde{\gamma}_s} = \sum_{\gamma^{(1)}: \gamma^{(1)} - \tilde{\gamma}_s \in Q} q_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(1)}} b_{k, \gamma^{(1)}}. \quad (2.18)$$

Среди векторов $\gamma^{(1)} + t$, входящих в правую часть (2.18), есть не входящие в $\bar{D}_k(\tilde{\gamma} + t)$. Докажем, что тогда (т. е. при $\gamma^{(1)} + t \notin \bar{D}_k$) имеет

место $|b_{k, \gamma^{(1)}}| < R^{-4n}$ (2.19). Для этого, применяя m_2 раз формулу (1.3), получим

$$b_{k, \gamma^{(1)}} = \sum_{\gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \dots, \gamma^{(m_2)}} \frac{q_{\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)}} q_{\gamma^{(2)}-\gamma^{(3)}} \dots q_{\gamma^{(m_2)}-\gamma^{(m_2+1)}}}{\prod_{p=1}^{m_2} (\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\gamma^{(p)} + t|^2)}$$

и докажем, что для любого p $(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\gamma^{(p)} + t|^2)^{-1} = O(R^{-\alpha})$ (2.20).

Возможны два варианта:

1) $\gamma^{(p)} + t$ принадлежит плоскости $P(\tilde{\gamma} + t, \gamma_1, \dots, \gamma_p)$. Тогда по определению D_k : $(|\gamma^{(p)} + t|^2 - R^2)^{-1} = O(R^{-\alpha})$, так как $\gamma^{(p)} + t \in D_k$, (см. 2.17). Если учесть, что $\Lambda_{k(\gamma+t)} - R^2 = O(R^{-\alpha})$ (2.21), то получим $(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\gamma^{(p)} + t|^2)^{-1} = O(R^{-\alpha})$ (2.22).

2) Пусть теперь $\gamma^{(p)} + t \notin P(\tilde{\gamma} + t, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$. В силу того, что $\gamma^{(1)} \in \tilde{D}_k + Q$, $\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)} \in Q$, ... (так как в противном случае $q_{\gamma_1 - \gamma_2} = 0, \dots$), имеем $\gamma^{(p)} + t \in \tilde{D}_k + Q^p = D_k + Q^{m_2+p}$, $(p \leq m_2)$. Отсюда следует, что существует $\tilde{\gamma}_s + t$ из D_k , такая, что $\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)} \in Q^{m_1}$, так как $2m_2 < m_1$. По формулам (2.21) и (2.22) $|\tilde{\gamma}_s + t|^2 - \Lambda_{k(\gamma+t)} \sim R^\alpha$. Поэтому, чтобы доказать (2.20), достаточно показать, что

$$||\tilde{\gamma}_s + t|^2 - |\gamma^{(p)} + t|^2| \geq \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}}. \quad (2.23)$$

Докажем от противного. Пусть

$$1) ||\tilde{\gamma}_s + t|^2 - |\gamma^{(p)} + t|^2| < \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}}, \text{ или, что то же самое: } |(\tilde{\gamma}_s + t, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) - |\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|^2| < \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}}.$$

Тогда $||\tilde{\gamma} + t|^2 - |\tilde{\gamma} + t + \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|| = |-(\tilde{\gamma} + t, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) - |\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|^2| = |-(\gamma_s + t, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) + (\tilde{\gamma}_s - \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}) - (\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)})^2| < < \frac{1}{2} R^{\alpha_{k+1}} + |(\tilde{\gamma}_s - \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)})|$ (2.24). Нетрудно вычислить, что $\text{diam } D_k = O((R^{\alpha_k} + (\text{diam } Q)^2 (\text{diam } Q)^{k-1}) (d(Q) \stackrel{\text{det}}{=} \text{diam } Q))$, т. е. $|(\tilde{\gamma}_s - \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)})| = O(R^{\alpha_k} + d^2(Q)) d^{2k-1}(Q)$.

Поэтому из (2.24) следует $||\tilde{\gamma} + t|^2 - |\tilde{\gamma} + t + \tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}|^2| < R^{\alpha_{k+1}}$, $R^{\alpha_{k+1}} > O((R^{\alpha_k} + d^2(Q)) d^{2k-1}(Q))$ при $d(Q) < C_7 R^{\alpha}$ (2.25). Другими словами, $\tilde{\gamma} + t \in V_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}, \alpha_{k+1}}$, где $\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}$ линейно не зависит от векторов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$.

Следовательно, $\tilde{\gamma} + t \in V_{\gamma_1, \alpha_{k+1}} \cap \dots \cap V_{\gamma_{k-1}, \alpha_{k+1}} \cap V_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(p)}, \alpha_{k+1}} \subset E_{k+1}$, что противоречит нашему предположению о том, что $\tilde{\gamma} + t \in E_k \setminus E_{k+1}$. Соотношения (2.23) и тем самым (2.19) доказаны. Теперь, если в системе уравнений (2.18) вместо $b_{k(\gamma+t), \gamma^{(1)}}$ (где $\gamma^{(1)} \in \tilde{D}_k$) написать $O(R^{-4n})$, то получим следующую систему уравнений:

$$(\Lambda_{k(\gamma+t)} - |\tilde{\gamma}_s + t|^2) b_{k, \tilde{\gamma}_s} = \sum_{\gamma^{(1)} \in \tilde{D}_k} q_{\tilde{\gamma}_s - \gamma^{(1)}} b_{k, \gamma^{(1)}} + O(R^{-4n})$$

при $s = 1, 2 \dots$

Полученную систему уравнений можно записать в таком матричном виде: $(C(x) - rI)b_{k, \tilde{\gamma}_s} = O(R^{-4n})$ (2.27), где $r = |\tilde{\gamma} + t|^2 - \Lambda_{k(\gamma+t)}$, $x = \tilde{\gamma} + t$. Как нетрудно видеть, диагональные элементы c_{ss} имеют вид, $|\tilde{\gamma} + t|^2 - |\tilde{\gamma} + t - \tilde{\gamma}_s|^2 = 2(\tilde{\gamma} + t, \tilde{\gamma}_s) - |\tilde{\gamma}_s|^2$, а недиагональные элементы $C_{i, j}$ есть коэффициенты Фурье $q_{\tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_j}$. Кроме того, $C_{i, j} = \bar{C}_{j, i}$, т. е. матрица $C(x)$ симметрична. Итак, из (2.27) получим

$$|b_{k(\gamma+t), \tilde{\gamma}}| < \|(C(\tilde{\gamma} + t) - rI)^{-1}\| O(1/R^{3n}) = \max_i \frac{1}{|r - r_i|} O(R^{-3n}), \quad (2.28)$$

где $r_i(\tilde{\gamma} + t)$ — собственные значения матрицы $C(\tilde{\gamma} + t)$.

По определению A' и A_k , если $\gamma + t \in B_R(\delta) \setminus A'$ (отсюда следует, что $\tilde{\gamma} + t \notin A_k$), то $|R^2 - |\tilde{\gamma} + t|^2 - r_i(\tilde{\gamma} + t)| > \delta_1$ и по (2.13) $|r - r_i| > \delta_1/2$.

Следовательно, из (2.22) получим (при $\gamma + t \in \tilde{J}_k$)

$$|b_{k, \tilde{\gamma}}| < \frac{1}{\delta_1} O(R^{-3n}) = O(R^{-(2n+1)}), \text{ так как } \delta_1 \sim R^{-(n-1)}.$$

Если учесть, что число векторов в J_k ($J_k \in K_R(3M/R)$) меньше $O(R^{n-1})$, то $\sum_k < c_8 R^{n-1} O(R^{-1-2n}) = O(R^{-n-2})$.

Лемма 6 доказана.

Остается доказать, что множество $B_R(\delta) \setminus A'$ непустое и содержит отрезок $A_a(\delta)$. Для этого нам будет нужно следующее неравенство: $\mu_n(U_A(\delta)) < \mu_n(B_R(\delta))$, где $U_A(\delta) = \{x + \gamma \in B_R(\delta) : x \in V_A(\delta), \gamma \in \Gamma\}$.

Лемма 7. Если R — достаточно большое число и $\varepsilon \sim R^{1-n}$, то

$$\mu(\tilde{S}'_R) = (1 - \beta) \mu(S_R) \text{ и } \mu_n(B_R(\delta)) \sim 1, \quad (2.29)$$

где β — достаточно малое положительное число.

Доказательство. Прежде всего легко видеть, что $\mu_{n-1}(\tilde{S}_R \cap \bigcap V_\alpha^m) = O(R^\alpha |Q|)$. Поэтому вычислим площадь гиперповерхности $\tilde{S}_R \cap (\bigcup_\gamma \tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon))$. Поверхность $\tilde{S}_R \cap \tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$ асимптотически близка к сферическому поясу с шириной $\varepsilon/|\gamma|^2$ и нетрудно проверить, что $\mu_{n-1}(\tilde{S}_R \cap \tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)) < c_9 |\gamma|^{-2} \varepsilon R^{n-2}$.

Если учесть, что число слоев $\tilde{\Pi}_\gamma(\varepsilon)$, которые пересекаются с $\tilde{S}_R$ (для этого, очевидно, должно выполняться условие $|\gamma| < 2R + 1$), меньше, чем $c_{10} R^n$, то получим $\mu_{n-1}(\Omega_R(\varepsilon) \cap \tilde{S}_R) < \beta \cdot \varepsilon \cdot R^{2n-2}$ (2.30). Теперь из $\mu_{n-1}(\tilde{S}_R) \sim R^{n-1}$ и $\varepsilon \sim R^{1-n}$ следует $\mu_{n-1}(\tilde{S}'_R) = (1 - \beta) \mu \times \times (S_R)$, $\mu_n(B_R(\delta)) \sim \mu_{n-1}(S'_R) \delta \sim 1$.

Лемма 7 доказана.

Отметим, что если X есть n -мерное подмножество в R^n , то для вычисления объема будем пользоваться формулой $\mu_n(X) = \int_{\omega(X)} \mu_1 \times$

$$\times (X(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n) < \bar{\mu}_k \times \\ \times (X) \mu_{n-1}(X(k)) \quad (2.31),$$

где

$$X(x_1, \dots, x_{k-1}x_{k+1}, \dots, x_n) = \{x_k : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\}, \\ X(k) = \bigcup_{x_k} \{(x_1, \dots, x_{k-1}x_{k+1}, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\}, \\ \mu_k(X) = \max_{x_1, \dots, x_{k-1}x_{k+1}, \dots, x_n} \mu_1(X(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)). \quad (2.32)$$

Лемма 8. Для лебеговой меры множества $U_A(2\delta)$ верна следующая оценка: $\mu_n(U_A(2\delta)) < \beta_1 \mu_n(B_R(\delta))$ (2.33), где β_1 — достаточно малое число.

Доказательство. По определению A_k состоит из множеств $\bar{A}_k = \bar{A}_k(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = A_k \cap (V_{\gamma_1, \alpha_k} \cap V_{\gamma_2, \alpha_k} \cap \dots \cap V_{\gamma_k, \alpha_k})$, а множество $\bar{A}_k$ состоит из множеств $\bar{A}_{k,i}$, где $\bar{A}_{k,i} = \bar{A}_k \cap A_{k,i}$.

Оценим меру $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$. Будем пользоваться формулой (2.31), где в данный момент вместо X возьмем $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$, а вместо $X(k)$ $X(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ возьмем $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$, $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$, $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Не нарушая общности, можно предполагать, что для координат x_n любой точки x из $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$ выполняется неравенство

$|x_n| > \frac{R}{2n}$, так как для каждой точки x из множества $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$ одна из координат x_j ($j > k$) удовлетворяет этому условию. Множество $U_{\bar{A}_{k,i}}$ состоит из множеств $U_{A_{k,i}}(2\delta)$.

Докажем, что $\mu_1(U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta))(x_1, \dots, x_{n-1}) \sim \delta$. Для этого достаточно доказать, что если точки $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x'_1, x'_n)$ входят в $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)(x_1, \dots, x_{n-1})$ и $x_j = x'_j$ при $j \neq n$, $|x_n - x'_n| = \delta_2$, $\delta_2 > 100n\delta$, $x_n x'_n > 0$ (2.35), то одна из этих точек не принадлежит множеству $U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$.

Докажем от противного. Пусть выполняется (2.35) и $x, x' \in U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$. Тогда существуют точки $\bar{x} \in \bar{A}_{k,i}$ и $x' \in \bar{A}_{k,i}$, такие, что $|x - \bar{x}| < 2\delta$, $|x' - \bar{x}'| < 2\delta$ (2.36). По определению $\bar{A}_{k,i}$ должно выполняться следующее неравенство: $||\bar{x}|^2 - r_i(\bar{x}) - |\bar{x}'|^2 - r_i(\bar{x}')| < 2\delta_1$ (2.37).

Чтобы доказать, что последнее неравенство не выполняется, оценим разности $|\bar{x}|^2 - |\bar{x}'|^2$ и $r_i(\bar{x}) - r_i(\bar{x}')$ в отдельности. Разность $|\bar{x}|^2 - |\bar{x}'|^2$ запишем в виде суммы трех слагаемых $|\bar{x}|^2 - |\bar{x}'|^2 = (|\bar{x}|^2 - |x|^2) + (|x'|^2 - |\bar{x}'|^2) + (|x|^2 - |x'|^2)$. Из (2.36) и из того, что $\bar{x}, \bar{x}' \in \bar{A}_{k,i}$ следует $||\bar{x}|^2 - |x|^2| < 2R \cdot 2\delta$, $|x'|^2 - |\bar{x}'|^2 < 4R\delta$. С другой стороны, из (2.35) и из предположения, что при $x \in U_{\bar{A}_{k,i}}(2\delta)$

выполняется неравенство $|x_n| > \frac{R}{2n}$ следует $||x|^2 - |x'|^2| = |x_n^2 -$

$-(x'_n)^2 = (|x_n| + |x'_n|)(|x_n| - |x'_n|) > \frac{R}{2n} \delta_2$, так как $||x_n| - |x'_n|| = |x_n - x'_n|$ при $x_n x'_n > 0$. Следовательно,

$$||\tilde{x}|^2 - |x'|^2| > \frac{R}{2n} \delta_2 - 4R2\delta > \frac{R}{4n} \delta_2, \quad (2.38)$$

так как $8R\delta < \frac{R}{4n} \delta_2$ при $\delta_2 > 100n\delta$.

По определению $r_i(\tilde{x})$, $r_i(\tilde{x}')$ есть i -е собственное значение матрицы $C(\tilde{x})(C(\tilde{x}'))$. Можно считать (в силу того, что $|\tilde{x}' - \tilde{x}| = O(R^{-1})$), что только диагональные элементы матрицы $C(\tilde{x})(C(\tilde{x}'))$ зависят от $\tilde{x}(\tilde{x}')$ и имеют вид $|\tilde{x}|^2 - |\tilde{x} - \gamma_s|^2$, $(|\tilde{x}'|^2 - |\tilde{x}' - \gamma_s|^2)$. Тогда получим, что $C(\tilde{x}) - C(\tilde{x}') = (a_{i,j})$, где $a_{i,j} = 0$ при $i \neq j$, а $a_{i,i} = \langle \tilde{x} - \tilde{x}', \gamma_i \rangle$, где $|\gamma_i| \leq d(D_k)$. Поэтому $|r_i(\tilde{x}) - r_i(\tilde{x}')| \leq |C(\tilde{x}) - C(\tilde{x}')| < d(D_k)$, а $|\tilde{x} - \tilde{x}'| < |\tilde{x}' - \tilde{x}'| + |\tilde{x} - \tilde{x}'| + |\tilde{x} - \tilde{x}'| < < \delta_2 + 2\delta$. Следовательно, $|r_i(\tilde{x}) - r_i(\tilde{x}')| < d(D_k)(\delta_2 + 2\delta)$. Итак, из (2.38) и из того, что полученных неравенств видим, что неравенства (2.37) не выполняются в силу того, что $d(D_k) = O(R^{\alpha(k^2+k+1)}) = O(R)$, так как $(k^2 + k + 1)\alpha < 1$ при $k = \overline{1, (n-1)}$. Следовательно, $\mu_1(U_{A_{ki}}(2\delta)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \sim \delta$.

Учитывая, что $U_{A_{ki}}(2\delta)$ входит в пересечение k слоев толщиной порядка $O(R^{\alpha k})$ и $U_{A_{ki}}(2\delta) \in R\left(\frac{4M}{R}\right)$ нетрудно вычислить

$$\mu_n(U_{A_{ki}}(2\delta)) = O(R^{n-2-kd}(D_k)^k \delta). \quad (2.39)$$

Число собственных значений $r_i(x)$ ($i = \overline{1, \delta}$) матрицы $C(x)$ меньше, чем $c_{11}d(D_k)|Q|$. Поэтому

$$\mu_n(U_A(2\delta)) = d^{2k-1}(D_k) \cdot |Q| O(R^{n-1-k}) \delta; \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mu_n(U_{A_k}(2\delta)) &= |Q|^{k+1} d^{2k-1}(D_k) \cdot O(R^{n-1-k}) \delta = \\ &= O(R^{(k+1)n+2k^2+k-1}) O(R^{n-1-k}) \delta = O(R^{n-1}) \delta, \end{aligned} \quad (2.41)$$

так как $|\alpha|^{-1} > 2n^2 - 2n + 3$. Остается учесть, что $\mu_n(B_R - (\delta)) \sim \sim R^{n-1} \cdot \delta$ (см. лемму 7). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Существует отрезок $A_a(\delta)$, такой, что $a \in \tilde{S}_R^1$, $\delta \sim R^{-n}$ и $A_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta)$.*

Доказательство. Доказательство леммы состоит из двух частей. В первой части докажем, что

$$\mu_n(U'_A(2\delta)) \leq \mu_n(U_A(2\delta)), \quad (2.42)$$

где $U'_A(2\delta) = \{\gamma + x \in B_R(\delta) : x \in U_A(2\delta), \gamma \in \Gamma\}$, т. е. по лемме 8 $\mu(U'_A(2\delta)) < \beta_1 \mu(B_R(\delta))$ (2.41), а во второй части докажем, что из (2.40) следует утверждение леммы 9.

По определению множество $U'_A(2\delta)$ есть подмножество множества $B_R(\delta)$: элементы множества $U'_A(2\delta)$ получаются из множества $U_A(2\delta)$ сдвигом на векторы $\gamma (\gamma \in \Gamma)$. Очевидно, что число таких векторов γ конечно, т. е. существует конечное число $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$, для которых $U'_{\gamma_k} = (U_A(2\delta) + \gamma_k) \cap B_R(\delta) = \emptyset$.

Следовательно, $U'_A(2\delta)$ можно определить и так: $U'_A(2\delta) = \bigcup_{k=1, \dots, s} U'_{\gamma_k}$. Обозначим $U_{\gamma_k} = U'_{\gamma_k} - \gamma_k$. Очевидно, что $\mu(U_{\gamma_k}) = \mu(U'_{\gamma_k})$ и $U_{\gamma_k} \subset U_A(2\delta)$ (2.42), так как U_{γ_k} есть просто сдвиг множества U'_{γ_k} на вектор γ_k .

С другой стороны, $U_{\gamma_k} \cap U_{\gamma_j} = \emptyset$ при $\gamma_k \neq \gamma_j$. Действительно, в противном случае существует x , такое, что $x \in U_{\gamma_k}$ и $x \in U_{\gamma_j}$. Тогда по определению U'_{γ_k} и U'_{γ_j} : $x + \gamma_k \in U'_{\gamma_k} \subset B_R(\delta)$ и $x + \gamma_j \in U'_{\gamma_j} \subset B_R(\delta)$. Это противоречит третьему свойству множества.

Итак, множества U_{γ_k} , $k = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются и входят в $U_A(2\delta)$. Поэтому

$$\mu_n(U_A(2\delta)) \geq \sum_{k=1}^s \mu_n(U_{\gamma_k}).$$

а из (2.42) получим, что (по $U'_A(2\delta) = \bigcup_k U'_{\gamma_k}$),

$$\mu_n(U'_A(2\delta)) \leq \sum_{k=1}^s \mu_n(U'_{\gamma_k}) = \sum_{k=1}^s \mu_n(U_{\gamma_k}) \leq \mu_n(U_A(2\delta)),$$

т. е. верно (2.42) и тем самым верно (2.41).

Из (2.41) получим, что существует $\tilde{x}$ из $B_R(\delta)$. Тем самым по определению $B_R(\delta)$ существует такое $U_a(\delta)$, что $\tilde{x} \in U_a(\delta)$, такое, что $\tilde{x} \in U'_A(2\delta)$.

Докажем, что шар $U_a(\delta)$ (значит, и отрезок $A_a(\delta)$) удовлетворяет требованию этой леммы, т. е. $A_a(\delta) \cap A' \neq \emptyset$.

Докажем от противного. Пусть существует x_0 , такое, что $x_0 \in A_a(\delta) \cap A'$. Если $x_0 \in A'$, то по определению A' существует $x_1 \in A$, такое, что $x_0 = x_1 + \gamma_{x_1}$, где $\gamma_{x_1} \in \Gamma$.

Тогда 2δ — окрестность $U_{x_1}(2\delta)$ точки x_1 входит в $U_A(2\delta)$, а шар $U_{x_1}(2\delta) + \gamma_{x_1}$ имеет радиус 2δ и центр x_0 (где $x_0 \in U_a(\delta)$), поэтому $U_a(\delta) \subset U_{x_1}(2\delta) + \gamma_{x_1}$.

Следовательно, $\tilde{x} \in U_{x_1}(2\delta) + \gamma_{x_1}$ (так как $\tilde{x} \in U_a(\delta)$), другими словами, существует точка $x_2 \in U_{x_1}(2\delta) \subset U_A(2\delta)$, такая, что $\tilde{x} = x_2 + \gamma_{x_2}$. Отсюда следует, что $\tilde{x} \in U_A(2\delta)$. Это противоречит определению точки $\tilde{x}$. Лемма 9 доказана.

Теорема 2. Если потенциал $q(x)$ входит в $W_2^{(n^2-n)2n}(F)$, то число лагун в спектре оператора H конечно.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $q(x)$ является тригонометрическим многочленом (см. [4]). Пусть $R > R_0(q)$. По лемме 9 существует отрезок $A_a(\delta)$, такой, что $A_a(\delta) \subset B_R(\delta)$, $a \in \tilde{S}'_R$, $\delta \sim R^{-n}$. Поэтому по леммам 3, 5, 6 при $\gamma + t \in A_a(\delta) \subset \subset \tilde{B}_R(\delta) \subset U_{\tilde{S}'_R}(\delta)$ суммы $\sum_0 \sum_1, \dots, \sum_n$ достаточно малы, т. е. выполняется условие (1.3). Тем самым при $\gamma + t \in A_a(\delta)$ выполняются условия леммы 2. Следовательно, существует индекс k_0 , не зависящий от $\gamma + t$ на отрезке $A_a(\delta)$, такой, что $k(\gamma + t) \equiv k_0$, т. е. по лемме 1

точка R^2 входит в спектр оператора H . Более того (см. лемму 1), k_0 -я зона $\{\Lambda_k(t) : t \in F^*\}$ спектра содержит отрезки $\left[R^2 - \frac{\delta}{2}, R^2 + \frac{\delta}{2}\right]$, т. е. существуют точки t_1 и t_2 такие, что

$$\Lambda_k(t_1) < R^2 - \frac{\delta}{2}, \quad \Lambda_k(t_2) > R^2 + \frac{\delta}{2}. \quad (2.43)$$

Причем это верно для любого многочлена, удовлетворяющего условиям (см. (2.8)):

$$d(Q) \leq c_7 R^\alpha, \quad \alpha < \frac{1}{2n^2 - 2n + 3}. \quad (2.44)$$

Теперь пусть $q(x)$ — гладкая функция из $W_2^{(n^2-n)2n}$. Нетрудно проверить, что многочлен

$$\bar{q}(x) = \sum_{|v| < \frac{1}{2} c_1 R^\alpha} q_\gamma e^{i\langle \gamma, x \rangle}$$

тоже удовлетворяет условию (2.44). Поэтому (2.43) имеет место и для этого многочлена. Обозначим через $\bar{\Lambda}_1(t)$, $\bar{\Lambda}_2(t)$ собственные значения оператора T_t с потенциалом $q(x)$ из $W_2^{(n^2-n)2n}$. Согласно общей теории возмущения

$$|\bar{\Lambda}_k(t) - \Lambda_k(t)| \leq \sup_x |q(x) - \bar{q}(x)|, \quad (2.45)$$

где $\Lambda_k(t)$ — собственные значения оператора T_t с потенциалом $\bar{q}(x)$, а $|q(x) - \bar{q}(x)| = O(R^{1-n})$. Из (2.43), (2.45) и $\delta \sim R^{1-n}$ следует, что $\bar{\Lambda}_k(t_1) < R^2$, $\bar{\Lambda}_k(t_2) > R^2$, т. е. k -я зона $\{\bar{\Lambda}_k(t) : t \in F^*\}$ спектра оператора T содержит точку R^2 . Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 2 верно и для оператора $f(\Delta) + q(x)$ в $L_2(R^n)$ (см. замечание 1). При этом в доказательстве при определении функции $F_k(\gamma + t)$ вместо $|\gamma + t|^2$ нужно брать $f(|\gamma + t|)$.

Замечание 3. Из доказательства леммы 9 видно, что число отрезков $A_a(\delta)$, $a \in \tilde{S}'_R$, $\delta \sim R^{-n}$, входящих в множество $\tilde{B}_R(\delta)$, достаточно велико. Действительно, так мы предположили, что $x_0 \in A'$, а получили, что шар $U_a(\delta)$, содержащий точку x_0 , целиком входит в множество $U'_A(2\delta)$.

Поэтому объединение всех шаров $U_a(\delta)$, имеющих общие точки с множеством A' , входит в множество $U'_A(2\delta)$. Отсюда следует, что объединение всех шаров, не имеющих общих точек с множеством A' , т. е. множество

$$\tilde{B}_R(\delta) = \bigcup_{a: U_a(\delta) \subset \tilde{B}_R(\delta)} (U_a(\delta))$$

составляет большую часть множества.

Следовательно, множество центров (середин) отрезков $A_a(\delta)$, входящих в $\bar{B}_R(\delta)$, составляет большую часть множества S'_R и тем самым большую часть $\bar{S}_R$.

А среди собственных значений $\Lambda_{k(\gamma+t)}$, где $\gamma+t \in A_a(\delta)$ по лемме 1 существует хотя бы одно собственное значение, совпадающее с точкой R^2 . Таким образом, множество $\gamma+t$, для которого $\Lambda_{k(\gamma+t)} = R^2$ образует большую часть поверхности $\bar{S}_R$.

Итак, мы получили, что множество собственных значений $\Lambda_n(t)$, совпадающих с R^2 , не только непусто (т. е. не только доказали гипотезы Бете—Зоммерфельда), а даже верно следующее более сильное утверждение.

Теорема 3. Если $q(x) \in W_2^{(n^2-n)2n}(F)$ и R — достаточно большое число, то

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n-1} \{t \in F^* : \Lambda_k(t) = R^2\} > \mu_{n-1} \{t \in F^* : (\exists_k), \Lambda_k(t) = R^2\} > (1 - \beta_2) \mu(S_R)$, где β_2 — достаточно малое положительное число.

2) Множество векторов $\gamma+t$, для которых собственное значение $\Lambda_{k(\gamma+t)}$ совпадает с точкой R^2 , образует $n-1$ -мерное многообразие в R^n , лебегова мера которого асимптотически близка (при $R \rightarrow \infty$) мере сферы S_R .

Замечание 4. Предложенным методом нетрудно доказать, что если $q(x) \in W_2^{(n^2-n)2n}$ и $\sup_x |q(x)|$ достаточно малы, то в спектре оператора H не имеется лакун.

Автор выражает благодарность В. А. Марченко и М. В. Новицкому за очень полезные обсуждения.

Список литературы: 1. Eastham M. S. P. The spectral theory of periodic differential equations. Scottish Acad. Press, 1973. 2. Бете Г., Зоммерфельд А. Электронная теория металлов. — М.; Л., 1938. — 316 с. 3. Зейтц Ф. Физика металлов. — М.; Л., 1947. — 364 с. 4. Скриганов М. М. Конечность числа лакун в спектре многомерного полигармонического оператора с периодическим потенциалом // Мат. сб. — 1980. — 113 (155), № 1. — С. 133—146. 5. Попов В. Н., Скриганов М. М. Замечание о строении спектра двумерного оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Записки науч. семинаров ЛОМИ. — 1981. — 109. — С. 131—133. 6. Скриганов М. М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1985. — 171. — С. 13—18. 7. Скриганов М. М. Многомерный оператор Шредингера с периодическим потенциалом // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — 47, № 3. — С. 659—687. 8. Скриганов М. М. Доказательство гипотезы Бете—Зоммерфельда в размерности три. Препринт ЛОМИ Р-6-84. Л., 1984. 9. Яковлев Н. Н. Асимптотические оценки плотностей решетчатых k -упаковок и k -покрытий и строение спектра оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Докл. АН СССР. — 1984. — 276, № 1. — С. 54—57. 10. Велиев О. А. О спектре оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Докл. АН СССР. — 1983. — 286, № 6. — С. 1289—1293.

Поступила в редколлегию 11.11.8

**ТЕОРИЯ ПЕРРОНА — ФРОБЕНИУСА ДЛЯ ПОЧТИ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП
В ПРОСТРАНСТВАХ L_p**

1. В работах [1—3] введен и изучен важный класс элементарных почти периодических (п. п.) банаховых представлений топологических полугрупп, для которых соответствующее ядро Сушкевича (наименьший двусторонний идеал) является группой. Для неотрицательных элементарных п. п. представлений в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте была построена теория [4], обобщающая классическую теорию Перрона—Фробениуса для неотрицательных матриц. В настоящей статье мы распространим эту теорию в той мере, в какой это возможно, на неотрицательные п. п. представления в пространствах $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $1 \leq p < \infty$, (Ω, Σ, μ) -пространство с σ -конечной мерой. Напомним, прежде всего, некоторые основные понятия и факты общей теории п. п. представлений (подробности см. [3]).

Пусть S — топологическая полугруппа, B — комплексное банахово пространство, $T: S \rightarrow L(B)$ — представление полугруппы S в B . Представление T называется п. п., если орбита $O(x) = \{T(s)x, s \in S\}$ каждого вектора $x \in B$ сильно предкомпактна, или, что эквивалентно, сильное замыкание $\beta_T = \overline{\{T(s) : s \in S\}}$ сильно компактно. Ядро Сушкевича K компактной полугруппы β_T называется также ядром Сушкевича представления T . Если представление T элементарное, т. е. его ядро Сушкевича K -группа, то единица P группы K является проектором в B (граничный проектор). Для элементарных п. п. представлений справедлива следующая теорема об отщеплении граничного спектра: $B = B_0 + B_1$, где $B_0 = \text{Ker } P = \{x : 0 \in \overline{O(x)}\}$, $B_1 = \text{Im } P = \overline{\sum \lambda V_\lambda}$, V_λ пробегает конечномерные инвариантные подпространства, на которых $T|_{V_\lambda}$ неприводимы и с точностью до эквивалентности унитарны. Если T — сжимающее (что всегда можно обеспечить с помощью перехода к эквивалентной норме, так как T ограничено), то $T|_{B_1}$ — представление обратимыми изометриями. Замыкание его образа есть группа изометрий. Граничный проектор в этом случае ортогонален ($\|P\| = 1$, если $P \neq 0$). Подпространства B_0 и B_1 называются внутренним и граничным соответственно.

Если полугруппа S абелева, то любое ее п. п. представление элементарно. Более того, вводя на S направление: $s \leq t \leftrightarrow \exists u : t = s + u$, можно определить более широкий класс так называемых асимптотически почти периодических (а. п. п.) представлений. Представление T называется а. п. п., если $\sup \|T(s)\| < \infty$ и направленность $\{T(s)\}$ асимптотически сильно предкомпактна (т. е. любая ее поднаправленность содержит сильно сходящуюся поднаправленность). Для а. п. п. представлений абелевой полугруппы теорема об отщеплении граничного спектра справедлива со следующим уточнением:

$B_0 = \{x : \lim T(s)x = 0\}$, B_1 — замыкание линейной оболочки весовых векторов, отвечающих унитарным весам.

Далее в этой статье рассмотрение проводится одновременно для элементарных п. п. представлений произвольных полугрупп и для а. п. п. представлений абелевых полугрупп. Любое такое представление относим к классу N , если его граничное подпространство $B_1 \neq 0$.

Пусть T — неотрицательное представление класса N в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $1 \leq p < \infty$, (Ω, Σ, μ) — пространство с полной σ -конечной мерой. Считаем, что $\|T(s)\| \leq 1$ ($s \in S$). Рассмотрим сначала случай, когда мера μ конечна, и $T(s)1 = 1$ ($s \in S$). Такие представления будем называть марковскими в соответствии с терминологией, принятой для операторов. Очевидно, марковское представление принадлежит классу N .

Лемма 1. Пусть A — неотрицательное сжатие в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда множество $F = \{x : Ax = x\}$ — подрешетка.

Доказательство. Нужно показать, что, если $x \in F$, то $y = |x| \in F$. Имеем $y = |Ax| \leq Ay$. Если вдобавок $Ay \neq y$, то $\|y\| < \|Ay\|$, что невозможно, так как $\|A\| \leq 1$.

Следствие. Пусть T — марковское п. п. представление. Тогда 1) его граничное подпространство B_1 — подрешетка, содержащая константы, 2) множество F_T инвариантных функций — подрешетка, содержащая константы.

Утверждение 2) очевидно, а 1) следует из того, что B_1 есть множество неподвижных точек граничного проектора P ($P \geq 0$ в силу неотрицательности представления).

Из этого следствия и предложения III.11.2 [5] вытекает, что в Σ существует σ -подалгебра Σ_1 (полная), такая, что B_1 состоит в точности из функций, измеримых относительно Σ_1 . Аналогичное утверждение справедливо для F_T (соответствующую σ -подалгебру обозначим через Σ_F). В силу теоремы об отщеплении граничного спектра операторы $T(s)|_{B_1}$ изометричны, неотрицательны, и имеют неотрицательные обратные. Замыкание этого семейства операторов в сильной операторной норме топологии является компактной группой — ядром Сушкевича K -представления T .

Пусть φ — некоторый регулярный изоморфизм σ -алгебры Σ_1 на себя. Тогда φ индуцирует некоторый линейный оператор Φ в $L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$, который определяется условием $\Phi \xi_A = \xi_{\varphi(A)}$, где ξ_A — характеристическая функция множества A . По известной теореме Банаха — Ламперти [6] каждый изометрический оператор V в $L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$, $p \neq 2$ порождается некоторым регулярным изоморфизмом φ σ -алгебры Σ_1 по формуле

$$(Vx)\omega = h(\omega)(\Phi x)\omega, \quad (1)$$

где $|h(\omega)|^p$ есть производная Радона — Никодима изоморфизма φ . Более того, формула (1) также дает (при $h(\omega) \geq 0$) общий вид неотрицательных изометрических операторов в $L_2(\Omega, \Sigma_1, \mu)$ [7]. В интересующем нас случае, когда $\mu(\Omega) < \infty$ и $V_1 1 = 1$, изоморфизм φ сохраняет меру, и формула (1) принимает вид

$$(Vx)(\omega) = (\Phi x)(\omega). \quad (2)$$

Особенный интерес представляет случай, когда исходное пространство с мерой (Ω, Σ, μ) является пространством Лебега (определения и основные свойства пространств Лебега см. в [8]), поскольку в этом случае мы можем использовать аппарат измеримых разбиений. В самом деле, σ -подалгебра Σ_1 порождает некоторое измеримое разбиение ξ пространства Ω . Факторпространством Ω/ξ пространства Ω по разбиению ξ называется пространство с мерой, точками которого служат элементы разбиения ξ и мера μ_ξ определяется следующим образом: пусть p — отображение, относящее каждой точке $\omega \in \Omega$ тот элемент разбиения ξ , к которому она принадлежит. Подмножество $Z \subseteq \Omega/\xi$ считается измеримым, если $p^{-1}(Z) \in \Sigma$. Положим $\mu_\xi(Z) = \mu(p^{-1}(Z))$. Известно, что факторпространство пространства Лебега по любому измеримому разбиению есть пространство Лебега. Поскольку Σ_1 состоит из множеств, измеримых относительно ξ , указанный выше изоморфизм ϕ σ -алгебры Σ_1 индуцирует (точечный) автоморфизм пространства Лебега Ω/ξ , который обозначим через $\tilde{\phi}$. Допуская некоторую вольность, можно считать (Ω, Σ_1, μ) пространством Лебега, а ϕ — его автоморфизмом, что мы далее и предполагаем. Итак, формулу (2) можно переписать следующим образом: $(Vx)(\omega) = x(\phi(\omega))$ (3).

Применяя эту формулу к операторам $T(s)$, действующим в $L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$, получаем семейство автоморфизмов ϕ_s пространства (Ω, Σ_1, μ) , таких, что $(T(s)x)(\omega) = x(\phi_s(\omega))$ ($s \in S, \omega \in \Omega$). Очевидно, ϕ_s является действием полугруппы S на (Ω, Σ_1, μ) , непрерывным в том смысле, что, если $\hat{\phi}_s$ — класс совпадающих (mod 0) автоморфизмов, то для любых $A, B \in \Sigma_1$ функция $s \rightarrow \mu(\hat{\phi}_s(A) \cap B)$ непрерывна на S .

Предположим теперь, что G — любая компактная группа и $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } \Omega$ — непрерывное действие группы G на (Ω, Σ_1, μ) автоморфизмами. Тогда α индуцирует некоторое представление α^* в $L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu): (\alpha^*(g)x)(\omega) = x(\alpha_g(\omega))$ ($g \in G, \omega \in \Omega$) (сильная непрерывность α^* следует из слабой непрерывности и теоремы Миркила (см. [3]). Легко видеть, что α^* — марковское п. п. представление. Эта ситуация является моделью для любого представления полугруппы S класса N , рассматриваемого на граничном подпространстве. Ядро Сушкевича K можно рассматривать как компактную группу неотрицательных операторов в $B_1 = L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$ ($K \approx K|B_1, K|B_0 = 0$). Если $V \in K$, то, поскольку V — изометрия и одновременно порядковый изоморфизм, $(Vx)(\omega) = x(\phi_V(\omega))$ ($\omega \in \Omega, x \in L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$). Следовательно, мы имеем непрерывное действие компактной группы K на (Ω, Σ_1, μ) автоморфизмами, порожденное представлением T , при этом $(\phi^*(V)x)(\omega) = (Vx)(\omega)$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $S \xrightarrow{\tau} \beta_T \xrightarrow{\pi} K$, где π — умножение слева на P . Очевидно, поднятие представления ϕ^* с K на полугруппу S при помощи указанного гомоморфизма есть подпредставление $T|B_1$.

Пусть теперь мера μ σ -конечна. Существование инвариантных функций (и их общую конструкцию) обеспечивает следующая.

Лемма 2 (ср. [1, 3]). Для каждой функции $x \in B_1$, такой, что $x \geq 0, x \neq 0$, формула $h_x = \int Vx dV$ (dV — мера Хаара на K) определяет

инвариантную функцию представления T , такую, что $\text{supp } h_x \supset \text{supp } x \pmod{0}$ (4).

Доказательство. Инвариантность функции h_x следует из инвариантности меры Хаара. Для доказательства включения (4) предположим, что существует подмножество $A \in \Sigma$, такое, что $A \subset \text{supp } x$, $\mu(A) > 0$ и A не пересекается с $\text{supp } h_x$. Обозначим через ξ_A функционал на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, порожденный характеристической функцией множества A . Тогда $\xi_A(x) > 0$, следовательно $\xi_A(h_x) > 0$, поскольку подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и отлична от нуля в точке P . Это противоречит тому, что $\text{supp } h_x \cap A = \emptyset$.

Следствие. Существует такая инвариантная функция $h \geq 0$, что для всех $x \in B_1$ имеет место включение $\text{supp } x \subset \text{supp } h$ (5).

Доказательство. Возьмем счетную последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных инвариантных функций, плотную в конусе подрешетки F_T , и положим $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|h_n\|^{-1} h_n$.

Тогда для каждой функции $g \in F_T$, $g \geq 0$ имеем $\text{supp } g \subset \text{supp } h$. Следовательно, в силу (4) $\text{supp } x \subset \text{supp } h$ для $x \in B_1$, $x \geq 0$, а потому для всех $x \in B_1$, так как конус в B_1 — воспроизводящий.

Очевидно, множество $\text{supp } h$ определяется формулой (5) однозначно $\pmod{0}$. Назовем его носителем представления T и обозначим через $\text{supp } T$. Зафиксируем раз и навсегда инвариантную функцию $h \geq 0$, такую, что $\text{supp } h = \text{supp } T$. Введем в Ω конечную меру $\hat{\mu}(A) = \int_A h^p d\mu$.

Рассмотрим оператор $\hat{h}: L_p(\text{supp } T, \Sigma, \hat{\mu}) \rightarrow L_p(\text{supp } T, \Sigma, \mu)$, действующий по формуле $\hat{h}x = hx$. Очевидно, $\hat{h}$ — неотрицательный изометрический оператор, имеющий неотрицательный обратный. Обозначим через Q естественный проектор из $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ на $L_p(\text{supp } T, \Sigma, \mu)$ и рассмотрим семейство операторов $\hat{T}(s) = h^{-1}QT(s)\hat{h}$ ($s \in S$), действующих в $L_p(\text{supp } T, \Sigma, \hat{\mu})$. Заметим, что если $V \in K$, то $QV = V$. Поэтому в $L_p(\text{supp } T, \Sigma, \hat{\mu})$ действуют операторы $\tilde{V} = h^{-1}Vh$ ($V \in K$), и они образуют компактную группу, для которой оператор $\tilde{P} = \hat{h}^{-1}P\hat{h}$ служит единицей. Сужение $\hat{T}(s)|\text{Im } \tilde{P}$ является представлением, изометрически неотрицательно эквивалентным $T(s)|\text{Im } P = T(s)|B_1$. Положим $\tilde{B}_1 = \text{Im } \tilde{P}$. В силу следствия леммы 2 оператор $\hat{h}$ осуществляет биекцию подпространства $\tilde{B}_1$ на B_1 .

Теорема 1. Для того чтобы представление T класса N в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ было неотрицательно изометрически эквивалентно марковскому, необходимо и достаточно, чтобы его носитель совпал с Ω .

Такие представления будем называть слабо положительными.

Доказательство. Достаточность вытекает из предыдущей конструкции, поскольку если $\text{supp } T = \Omega$, то $Q = E$, $\hat{h}$ — неотрицательный изометрический оператор, осуществляющий требуемую эквивалентность. Докажем необходимость. Пусть существует марковское

представление T_1 в некотором $L_p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ и неотрицательный изометрический оператор с неотрицательным обратным $H: L_p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu}) \rightarrow L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ такой, что $T(s) = HT_1(s)H^{-1}$ ($s \in S$). Тогда $(Hx)(\omega) = x(\psi(\omega))\sqrt[p]{\psi'(\omega)}$, $\omega \in \Omega$ (6), где $\psi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ — изоморфизм, такой, что $\mu(A) = 0 \iff \tilde{\mu}(\psi(A)) = 0$, ψ' — производная Радона — Никодима. Положим $h(\omega) = \sqrt[p]{\psi'(\omega)} \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Так как в силу (6) $h = H1$, то h — инвариантная функция представления T . Кроме того, $\text{supp } h = \Omega$, так как если $h|_A = 0$, то $\tilde{\mu}(\psi(A)) = 0$, откуда $\mu(A) = 0$.

Теорема 2. Каждому представлению T класса N соответствует некоторое действие α_T ядра Сушкевича на $\text{supp } T$, такое, что подпредставление $T|_{B_1}$ неотрицательно изометрически эквивалентно поднятию представления α_T^* на исходную пологруппу.

Доказательство. Ядро Сушкевича K можно рассматривать как компактную группу неотрицательных операторов в B_1 . Положим $\hat{V} = h^{-1}Vh$ ($V \in K$). Соответствие $V \rightarrow \hat{V}$ задает представление R группы K в $\hat{B}_1 = L_p(\text{supp } T, \Sigma_1, \hat{\mu})$, где Σ_1 — соответствующая булева σ -подалгебра. Представление R неотрицательно изометрически эквивалентно тривиальному представлению ядра Сушкевича K в B_1 . Так как $\hat{V}$ — изометрический порядковый изоморфизм, то существует автоморфизм $\alpha_T(V)$ пространства $(\text{supp } T, \Sigma_1, \hat{\mu})$ такой, что $(\hat{V}x)(\omega) = x(\alpha_T(V)(\omega))$. Легко видеть, что α_T — непрерывное действие компактной группы K на $(\text{supp } T, \Sigma_1, \hat{\mu})$, причем $R\pi = \alpha_T^*$, где π — умножение слева на граничный проектор P . Искомое поднятие представления α_T^* на S индуцируется сквозным гомоморфизмом $S \xrightarrow{\uparrow} \beta_T \xrightarrow{\pi} K$. Теорема 2 доказана.

Следствие. Любое представление класса N на своем граничном подпространстве неотрицательно изометрически эквивалентно марковскому представлению.

2. Представление T класса N называется эргодическим, если порожденное им действие α_T ядра Сушкевича на $\text{supp } T$ является эргодическим действием, т. е. каждое инвариантное (по модулю меры 0) относительно $\alpha_T(V)$ ($V \in K$) подмножество либо имеет меру 0, либо имеет полную меру. Поскольку сужение $T(s)$ на B_1 эквивалентно α_T^* , то представление T будет эргодическим тогда и только тогда, когда подпространство его инвариантных функций одномерно. Это вытекает из приводимой ниже леммы, которая хорошо известна [9] для случая действий коммутативных групп, а в общем случае доказывается точно так же.

Лемма 3. Пусть α — непрерывное действие локально компактной группы G на пространстве с конечной мерой (Ω, Σ, μ) . Пусть α^* — порожденное им представление G в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $(\alpha^*(g)x)(\omega) = x(\alpha_g(\omega))$. Действие α эргодично тогда и только тогда, когда подпространство инвариантных функций представления одномерно. Если α эргодично, то 1) множество унитарных весов представления α^* образуют группу, 2) каждый унитарный вес имеет кратность 1, 3) модуль каждой весовой функции постоянен п. в.

Применяя лемму 3 в сочетании с теоремой 2 к эргодическому представлению класса N , получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть T — эргодическое представление класса N , h — его каноническая инвариантная функция. Тогда 1) модули весовых функций, отвечающих унитарным весам, пропорциональны h , 2) весовые подпространства, отвечающие унитарным весам, одномерны, 3) унитарные веса образуют подгруппу группы K одномерных характеров ядра Сушкевича. Если S коммутативна, то группа унитарных весов представления T совпадает с K .

Неотрицательные представления T в банаховом пространстве B с тотальным конусом называется неразложимым, если для каждого вектора $x \geq 0$, $x \neq 0$ и каждого линейного функционала $x^* \geq 0$, $x^* \neq 0$ существует $s \in S$, такой, что $x^*(T(s)x) > 0$. Для неотрицательных представлений в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ неразложимость характеризуется следующим свойством.

Лемма 4. Неотрицательное представление T в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ неразложимо тогда и только тогда, когда для каждой функции $x(\omega) \geq 0$, $x \neq 0$ и каждого подмножества $A \in \Sigma$, такого, что $\mu(A) > 0$, существует элемент $s \in S$, такой, что подмножество $\{\omega \in A : (T(s)x)(\omega) > 0\}$ имеет положительную меру.

Доказательство. Пусть T неразложимо и ξ_A — функционал на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, порожденный характеристической функцией множества A . Тогда существует элемент $s \in S$, такой, что $\xi_A(T(s)x) > 0$, откуда $\mu(\{\omega \in A : (T(s)x)(\omega) > 0\}) > 0$. Обратно, пусть

$$x^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_{A_i}, \quad (7)$$

где A_i попарно не пересекаются, $\lambda_i > 0$. Для каждого A_i существует s_i , такой, что $\xi_{A_i}(T(s_i)x) > 0$. Следовательно, $x^*(T(s_i)x) > 0$ ($i = 1, \dots, N$). Остается заметить, что функционалы вида (7) плотны в конусе неотрицательных функционалов.

Нам понадобится еще следующая

Лемма 5. Если P — граничный проектор, $x \geq 0$ и $Px = 0$, то $x|_{\text{supp } h} = 0$ для всех $h \in \text{Im } P$, $h \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что $x|_{\text{supp } h} \neq 0$, т. е. существует подмножество $A \subset \text{supp } h$, такое, что $\mu(A) > 0$ и $x(\omega) > 0$ ($\omega \in A$). Положим $A_1 = \{\omega \in A : x(\omega) \geq h(\omega)\}$, $A_2 = \{\omega \in A : x(\omega) < h(\omega)\}$. Поскольку $A_1 \cup A_2 = A$, то по крайней мере одно из этих подмножеств имеет положительную меру. Пусть $\mu(A_2) > 0$.

Положим

$$\hat{x}(\omega) = \begin{cases} x(\omega), & \omega \in A_2, \\ 0, & \omega \in A_1. \end{cases}$$

Тогда $0 \leq \hat{x}(\omega) \leq x(\omega)$, поэтому $P\hat{x} = 0$. Следовательно, $P(h - \hat{x}) = h$. Поскольку $\|P\| = 1$, то $\int_{\Omega} h(\omega)^p d\mu \leq \int_{\Omega} (h(\omega) - \hat{x}(\omega))^p d\mu = \int_{A_1} (h(\omega) - \hat{x}(\omega))^p d\mu + \int_{A_2} h(\omega)^p d\mu$.

Отсюда $\int_{A_2} h(\omega)^p d\mu < \int_{A_2} (h(\omega) - \hat{x}(\omega))^p d\mu$, что невозможно. Если теперь $\mu(A_1) > 0$, то достаточно рассмотреть функцию

$$\bar{x}(\omega) = \begin{cases} h(\omega), & \omega \in A_1, \\ 0, & \omega \notin A_1 \end{cases}$$

и повторить предыдущее рассуждение. Лемма 5 доказана.

С л е д с т в и е. Если T — слабо положительное представление, $x \geq 0$ и $Px = 0$, то $x = 0$.

Теорема 4. Для того чтобы представление T класса N было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было эргодическим и слабо положительным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T неразложимо, но не слабо положительно. Это означает, что существует подмножество $A \subset \Omega \setminus \text{supp } T$ такое, что $\mu(A) > 0$. Если $x \in B_1$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, то $x|_A = 0$ в силу (5). Тем самым $T(s)x|_A = 0$ ($s \in S$). Это противоречит лемме 4.

Пусть T неэргодично. Тогда в силу теоремы 3 подпространство инвариантных функций имеет размерность, большую чем 1. Поскольку сужения $T(s)|_{B_1}$ — порядковые изоморфизмы, существуют две неотрицательные инвариантные функции h_1, h_2 с непересекающимися носителями. Рассмотрим подмножество $I = \{x : x \in B, \exists N : |x| \leq Nh_1\}$ и возьмем неотрицательный функционал $x^* \neq 0$, такой, что $x^*|_I = 0$. Так как множество I инвариантно относительно T , то для всех $s \in S$ $x^*(T(s)h_1) = 0$. Это противоречит неразложимости T .

Пусть теперь представление T слабо положительно и эргодично. Тогда, если $x \geq 0$ и $Px = 0$, то в силу следствия леммы 5 $x = 0$. Если T не неразложимо, то существуют по лемме 4 функция $x \geq 0$ и подмножество $A \in \Sigma$, такое, что $\mu(A) > 0$ и $\xi_A(T(s)x) = 0$ ($s \in S$) (8).

Отсюда $\xi_A(T(s)Px) = 0$, $Px \neq 0$. Итак, мы можем в равенстве (8) предположить, что $x \in B_1$. Пусть α — соответствующее действие ядра Сушкевича K автоморфизмами на $(\Omega, \Sigma_1, \hat{\mu})$. Тогда из (8) следует, что $\int_A x(\alpha_g(\omega)) d\mu = 0$ ($g \in K$), т. е. $x|_A = 0$ п. в. Так как α — эргодическое действие, то отсюда $x = 0$, вопреки условию. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть χ — унитарный вес неразложимого представления T класса N . Тогда представления $s \rightarrow T(s)$ и $s \rightarrow \chi(s)T(s)$ изометрически эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на теоремах 3, 4. Поскольку T неразложимо, то $\text{supp } T = \Omega$. Пусть $x(\omega)$ — весовая функция, соответствующая χ . По теореме 3 $|x(\omega)|$ пропорциональна неотрицательной канонической инвариантной функции h . По теореме 1 можно считать, что $|x(\omega)| \equiv 1$. Оператор умножения на функцию x является обратимой изометрией и сплетает представления $s \rightarrow T(s)$ и $s \rightarrow \chi(s)T(s)$, что и требовалось доказать.

* Аналогично [3, 4] это утверждение можно назвать «теоремой о повороте».

3. Пусть T — неотрицательное представление класса N , K — его ядро Сушкевича, α — действие группы K^* на $(\text{supp } T, \Sigma_1, \hat{\mu})$, порожденное T . Пусть A — эргодическая компонента действия α , т. е. A инвариантно, $\hat{\mu}(A) > 0$ и сужение α на A эргодично. Эргодическая компонента действия α будет называться эргодическим классом представления T . С каждым эргодическим классом A связано подпредставление $(\alpha_A^*(V)x)(\omega) = x(\alpha_V(\omega))$, ($V \in K$, $\omega \in A$) в пространстве $L_p(A, \Sigma_1, \mu)$. Его естественное поднятие на полугруппу S называется субэргодической компонентой представления T , отвечающей эргодическому классу A . Для каждой функции $x \in L_p(A, \Sigma, \mu)$ функция $\hat{h}^{-1}Px = \hat{P}\hat{h}^{-1}x$ принадлежит $L_p(A, \Sigma_1, \hat{\mu})$. Определим теперь представление T^A , действующее в $L_p(A, \Sigma, \mu)$, следующим образом: $(T^A(V)x)(\omega) = \hat{h}(\alpha_A^*(V)\hat{h}^{-1}Px)(\omega)$.

Его поднятие на S , которое обозначается также, называется эргодической компонентой представления T , отвечающей эргодическому классу A . Из теорем 3, 4 непосредственно следует

Теорема 6. Для каждого эргодического класса A представление T_A — неразложимое.

Следствие. Для каждого представления T класса N его граничный спектр представляет собой объединение подгрупп группы одномерных унитарных характеров ядра Сушкевича.

Выражаю благодарность профессору Ю. И. Любичу за ценные обсуждения работы.

Список литературы: 1. Любич М. Ю., Любич Ю. И. Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп // Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 5.— С. 632—636. 2. Любич М. Ю., Любич Ю. И. Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 45.— С. 63—80. 3. Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп.— Х., 1985.— 144 с. 4. Любич М. Ю., Любич Ю. И. Теория Перрона-Фробениуса для почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 46.— С. 60—80. 5. Schaefer H. H. Banach lattices and positive operator.— Berlin — New York: Springer-Verlag.— 1974.— 500 P. 6. Lamperti J. On the isometries of certain functional spaces // Pacific J. Math.— 1958.— 8, N 3.— P. 459—466. 7. Ionescu Tulcea A. Ergodic properties of isometries in L^p spaces, $1 < p < \infty$ // Bull. Amer. Math. Soc.— 1964.— 70, N 3. P. 366—371. 8. Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры // Мат. сб.— 1949.— 25, № 1.— С. 107—150. 9. Корнфельд И. П. и др. Эргодическая теория / И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин.— М., 1980.— 384 с.

Поступила в редколлегию 16.03.86

* Мы опускаем индекс T для краткости записи.

БАЗИСЫ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ СКОБКАМИ И БАЗИСЫ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ ПЕРЕСТАНОВКАМИ

Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называется M -базисом (базисом Маркушевича) в X , если существует такая последовательность функционалов $\{x_n^*\}_1^{\infty} \subset X^*$, что

1. $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная система, т. е. $x_m^*(x_k) = 0$ при $m \neq k$, а $x_m^*(x_m) = 1$ при всех m ;
2. система $\{x_k\}_1^{\infty}$ полна в X , т. е. $\overline{\text{Lin}}\{x_k\}_1^{\infty} = X$;
3. система $\{x_n^*\}_1^{\infty}$ тотальна на X , т. е. если $x \in X$ и $x_n^*(x) = 0$ при всех n , то $x = 0$.

Нетрудно показать, что если $\{x_n\}_1^{\infty}$ — M -базис, то сопряженная система $\{x_n^*\}_1^{\infty}$ однозначно определяется векторами $\{x_n\}$.

Примером базиса Маркушевича может служить тригонометрическая система в любом из пространств $L_p[-\pi; \pi]$ при $1 \leq p < \infty$ или в пространстве $C[-\pi; \pi]$.

Для каждого элемента $x \in X$ его формальным разложением по M -базису называют ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x) \cdot x_k$. Для тригонометрической системы формальным разложением элемента является его ряд Фурье. В дальнейшем для упрощения терминологии слово «формальное» мы будем опускать.

Если разложение каждого элемента $x \in X$ по M -базису $\{x_n\}_1^{\infty}$ есть сходящийся ряд, то M -базис называют базисом, или шаудеровым базисом. Для примера отметим, что тригонометрическая система будет базисом в пространствах $L_p[-\pi, \pi]$ при $1 < p < \infty$ и не будет базисом в пространствах $L_1[-\pi, \pi]$ и $C[-\pi, \pi]$.

M -базис $\{x_k\}_1^{\infty}$ называют базисом со скобками, если найдется такая последовательность индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, что для любого $x \in X$ существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_j^*(x) x_j.$$

Понятно, что в этом случае

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_j^*(x) x_j$$

(ввиду тотальности системы $\{x_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ это соотношение достаточно проверить на функционалах x_j^*).

M -базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ будем называть переставленным базисом, если для некоторой перестановки π система $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ образует шаудеров базис.

Наконец, введем два основных определения. M -базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ — это базис с индивидуальными скобками, если для каждого элемента $x \in X$ найдется своя последовательность индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, для которой

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_j^*(x) x_j.$$

M -базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ будем называть базисом с индивидуальными перестановками, если для каждого элемента $x \in X$ найдется своя перестановка π , для которой

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_{\pi(k)}^*(x) x_{\pi(k)}.$$

Покажем, что даже в гильбертовом пространстве базис с индивидуальными скобками может не быть базисом со скобками, а базис с индивидуальными перестановками может не быть переставленным базисом.

Отметим, что вопрос о том, должен ли базис с индивидуальными перестановками в банаховом пространстве быть переставленным базисом, был поставлен Ч. Бессагой и И. Зингером [1, с. 575] в связи с исследованием свойств базисов Энфлю—Розенталя. Ответ на этот вопрос дал А. Н. Пличко [2], построив соответствующий пример в пространстве $C(\omega^2)$ непрерывных функций на $\omega \times \omega$. Похожие вопросы рассматривались также в работе П. Теренци [3], где был построен пример квазибазиса со скобками в пространстве l_1 , не являющегося базисом со скобками. (Квазибазисом со скобками П. Теренци называет такой M -базис $\{x_n\}_1^{\infty}$, что каждый элемент x представим в виде

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_{\pi(j)}^*(x) \cdot x_{\pi(j)},$$

где и перестановка π , и последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ зависят от x). Вопрос о связи понятий «базис с индивидуальными скобками» и «базис со скобками», насколько нам известно, никем не рассматривался.

Пример 1. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H . Сопряженная система — это функционалы e_k^* , порожденные скалярным умножением на элементы e_k : $e_k^*(x) = \langle e_k, x \rangle$. Введем в рассмотрение систему $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по следующе-

му правилу: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{\sqrt{k}}$, $n = 1, 2, \dots$. Понятно, что $\overline{\text{Lin}}\{x_n\}_1^{\infty} = \overline{\text{Lin}}\{e_n\}_1^{\infty} = H$. Непосредственно проверяется, что если функционалы x_n^* определить формулой $x_n^* = \sqrt{n}e_n^* - \sqrt{n+1}e_{n+1}^*$, то последова-

тельность $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^\infty$ образует биортогональную систему. Проверим тотальность системы $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$. Пусть $x \in H$ — произвольный элемент.

Тогда x можно представить в виде ряда $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i$, где $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 < \infty$.

Пусть $x_n^*(x) = 0$ при всех n . Тогда $a_1 - \sqrt{2}a_2 = 0$; $\sqrt{2}a_2 - \sqrt{3}a_3 = 0$; $\dots$; $\sqrt{n}a_n - \sqrt{n+1}a_{n+1} = 0$. Иными словами, $a_2 = a_1/\sqrt{2}$; $a_3 = a_1/\sqrt{3}$; $a_4 = a_1/\sqrt{4}$; $\dots$; $a_n = a_1/\sqrt{n}$; $\dots$. Если $a_1 \neq 0$, то из этих соотношений получаем $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 = \infty$, что противоречит условию.

Поэтому $a_1 = 0$, и следовательно, все a_n равны 0 и $x = 0$. Итак, система $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ — M -базис.

Теорема 1. Построенный в примере 1 M -базис $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ является базисом с индивидуальными скобками, но не является базисом со скобками.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ — произвольный элемент гильбертова пространства. Тогда разложение элемента x по M -базису $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ будет иметь вид $\sum_{i=1}^\infty x_i^*(x) x_i$. Распишем, чему равна n -я частная

сумма $S_n(x)$ ряда $\sum_{i=1}^\infty x_i^*(x) \cdot x_i$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x_i = \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\sum_{k=1}^\infty a_k e_k \right) x_i = \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k \right) x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i - a_{n+1} \sqrt{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| S_n(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 = a_{n+1}^2 (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx a_{n+1}^2 n \ln n.$$

Из соотношений

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n} = \infty; \quad \sum_{n=1}^\infty a_{n+1}^2 = \|x\|^2 < \infty$$

получаем, что для некоторой последовательности $n_i \uparrow +\infty$ выполняется соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1}^2 n_k \ln n_k = 0$, и следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = x$.

Итак, мы доказали, что $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — базис с индивидуальными скобками пространства H . Из анализа доказательства понятно, что выбор последовательности $n_1 < n_2 < \dots$ должен зависеть от x . Более того,

$\|S_n\|^2 \geq \|S_n(e_{n+1})\|^2 = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| = \infty$, чего не бывает у базисов со скобками (там в соответствии с принципом равномерной ограниченности $\sup_k \|S_{n_k}\| < \infty$). Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичная конструкция позволяет получать примеры базисов с индивидуальными скобками, не являющихся базисами со скобками во всех пространствах l_p при $1 \leq p < \infty$.

Замечание 2. Понятно, что базис со скобками может существовать только в пространствах с аппроксимационным свойством. Нам не известно, может ли в пространстве без аппроксимационного свойства существовать базис с индивидуальными скобками.

Замечание 3. Построенный пример базиса с индивидуальными скобками обладает следующим свойством: существует такой фильтр F на множестве натуральных чисел, что разложение каждого элемента $x \in H$ по M -базису $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ сходится к x по фильтру $F: \lim_F S_n(x) = x$.

Доказательство. Обозначим через $g(n)$ величину $(n+1) \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Введем фильтр F следующим образом: будем считать, что множество $A \subset N$ принадлежит фильтру F , если сходится ряд $\sum_{n \in N \setminus A} [g(n)]^{-1}$.

Нетрудно показать корректность этого определения. Действительно, $\emptyset \notin F$; если $A \in F$ и $B \supset A$, то и $B \in F$; если $A \in F$, $B \in F$, то $A \cap B$ также принадлежит фильтру F . Пусть $x \in H$ — произвольный элемент пространства, a_n , $S_n(x)$ — те же, что в доказательстве теоремы 1.

Как было показано выше, $\|S_n(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i\|^2 = a_{n+1}^2 g(n)$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Обозначим через A_ε множество тех индексов m , для которых $a_{m+1}^2 g(m) \leq \varepsilon$. Пусть $n \in N \setminus A_\varepsilon$. Тогда $a_{n+1}^2 g(n) > \varepsilon$;

$[g(n)]^{-1} < \frac{\varepsilon}{a_{n+1}^2}$. Поэтому $\sum_{n \in N \setminus A_\varepsilon} [g(n)]^{-1} < \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{a_{n+1}^2} < \infty$. Следова-

тельно, $A_\varepsilon \in F$. Ввиду производительности ε это означает, что

$\lim_F \|S_n(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i\|^2 = \lim_F a_{n+1}^2 g(n) = 0$. То есть $\lim_F S_n(x) = \lim_F \sum_{i=1}^n a_i e_i = x$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Определим пространство E_n как пространство строк $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ с нормой, задаваемой равенством $\|a\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|^2$. Естественный базис пространства E_n обозначим $\{e_k\}_{k=1}^n$, координатные функционалы — $\{(e_k^n)^*\}$. Так как норма на про-

пространстве E_n определяется с помощью положительно определенной квадратичной формы, то E_n — евклидово пространство (т. е. конечно-мерное пространство со скалярным произведением). Образует гильбертово пространство $\tilde{H}$ как прямую сумму пространств E_n :

$$\tilde{H} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_n \right)_{l_2}.$$

Тогда $\tilde{H}$ — это пространство последовательностей вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, где $x_n \in E_n$; $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

Объединим базисы пространств E_n в единую последовательность $e_1^1, e_1^2, e_2^2, e_1^3, e_2^3, \dots$. Получившаяся система $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует M -базис (и даже базис со скобками) в пространстве $\tilde{H}$. Сопряженная система — это координатные функционалы $(e_1^1)^*, (e_1^2)^*, (e_2^2)^*, \dots$.

Теорема 2. Построенная в примере 2 система $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис с индивидуальными перестановками в $\tilde{H}$, но не является переставленным базисом.

Доказательство. Вначале докажем вторую часть утверждения теоремы. Предположим, что для какой-то перестановки π система $\{g_{\pi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в $\tilde{H}$. Обозначим через C базисную константу базиса $\{g_{\pi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. такое число, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k g_{\pi(k)} \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n+m} a_k g_{\pi(k)} \right\| \quad (1)$$

выполняется при всех n, m и $\{a_k\}_{k=1}^{n+m}$ (см. [4, с. 81]). Выберем число $N > 4C^2$. Обозначим через $k_1 < k_2 < \dots < k_{2N}$ такие числа, что $g_{\pi(k_j)} \in \{e_i^{2N}\}_{i=1}^{2N}$. Положим $a_i = 0$ при $i \notin \{k_j\}_{j=1}^{2N}$; $a_{k_i} = 1$ при $1 \leq i \leq N$; $a_{k_i} = -1$ при $N < i \leq 2N$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{2N} a_{k_j} g_{\pi(k_j)} \right\|^2 &= \sum_{k=1}^{2N} |a_{k_j}|^2 + \left| \sum_{k=1}^{2N} a_{k_j} \right|^2 = 2N; \\ \left\| \sum_{j=1}^N a_{k_j} g_{\pi(k_j)} \right\|^2 &= \sum_{k=1}^N |1|^2 + \left| \sum_{k=1}^N 1 \right|^2 = N + N^2. \end{aligned}$$

Из неравенства (1) получаем, что $C^2 \cdot 2N \geq N + N^2 > N^2$; $N < 2C^2$. По построению же $N > 4C^2$. Противоречие.

Теперь докажем первую часть утверждения теоремы. Пусть $x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k^n e_k^n$ — произвольный элемент из $\tilde{H}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n |a_k^n|^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|^2 \right) = \|x\|^2 < \infty. \quad (2)$$

Запишем формальное разложение элемента x по M -базису $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k, \text{ где } b_1 = a_1^1; b_2 = a_1^2; b_3 = a_2^2; \dots; b_{\frac{n(n-1)}{2}+j} = a_j^n; \dots$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ построим перестановку π для k из интервала $]n(n-1)/2; n(n+1)/2]$ так, чтобы выполнялись соотношения $\pi(k) \in]\frac{n(n-1)}{2}; \frac{n(n+1)}{2}]$;

$$\max_{k \leftarrow \frac{n(n+1)}{2}} \left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^k b_{\pi(i)} \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k^n| + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|. \quad (3)$$

Для этого $\pi(i)$ будем выбирать по индукции. Положим $\pi(n(n-1)/2+1) = n(n-1)/2+1$. Для остальных k , если

$$\left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{k-1} b_{\pi(i)} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|,$$

то $\pi(k) \in]n(n-1)/2; n(n+1)/2]$ выберем произвольно. Если же

$$\left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{k-1} b_{\pi(i)} \right| > \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|,$$

то $\pi(k)$ выберем так, что

$$\text{sign } b_{\pi(k)} = -\text{sign} \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{k-1} b_{\pi(i)}.$$

При таком выборе неравенство (3) будет выполняться на каждом шаге. Докажем, что для построенной таким образом перестановки π последовательность $S_j = \sum_{k=1}^j b_{\pi(k)} g_{\pi(k)}$ стремится к x . Когда j имеет вид $n(n+1)/2$, получаем

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_k^n e_k^n \text{ и } \lim S_{\frac{n(n+1)}{2}} = x.$$

Пусть $j \in]n(n-1)/2; n(n+1)/2[$. Тогда

$$\begin{aligned} \|S_j - S_{\frac{n(n-1)}{2}}\|^2 &= \left\| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^j b_{\pi(i)} g_{\pi(i)} \right\|^2 = \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^j |b_{\pi(i)}|^2 + \\ &+ \left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^j b_{\pi(i)} \right|^2 \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |a_k^n| + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right| \right)^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^n |a_k^n|^2 \leq 5 \left(\sum_{k=1}^n |a_k^n|^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду неравенства (2), $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = x$. Теорема доказана.

Заметим, что построенный пример базиса с индивидуальными перестановками удовлетворяет следующему условию: $\sup_{1 \leq n < \infty} \|g_n\| \cdot \|g_n^*\| < \infty$.

Такие системы называются ограниченными M -базисами. Если на пространствах E_n ввести эквивалентную евклидову норму

$$\|a\|_\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|^2,$$

то в этой норме будет выполняться неравенство

$$\sup_{1 \leq n < \infty} \|g_n\| \cdot \|g_n^*\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Такие M -базисы будем называть $1 + \varepsilon$ -ограниченными. Теперь утверждение теоремы 2 можно усилить следующим образом:

Теорема 3. Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить $1 + \varepsilon$ -ограниченный M -базис в гильбертовом пространстве, который является базисом с индивидуальными перестановками, но не является переставленным базисом.

Отметим, что 1 -ограниченный M -базис $\{x_k\}_1^\infty$ в гильбертовом пространстве всегда оказывается ортонормированным базисом, и поэтому в теореме 3 нельзя положить ε равным 0.

В связи с изложенными выше фактами возникает вопрос (нам его задал Ю. И. Петунин): можно ли построить такой ограниченный базис с индивидуальными скобками, который бы не являлся базисом со скобками? Построенный в примере 1 M -базис не дает ответа на этот вопрос: для этой системы

$$\|x_n\| = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^{1/2} \approx (\ln n)^{1/2}; \quad \|x_n^*\| = \sqrt{2n+1}.$$

Поэтому мы вынуждены усложнить конструкцию из примера 1, хотя и сохранив основную идею рассуждения.

Пример 3. Выберем натуральные числа $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ так, что $n_{k+1} - n_k \approx k \ln(k+1)$. Введем пространство последовательностей A таким образом: последовательность $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ принадлежит A , если сходятся два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_i \right|^2 < \infty. \quad (4)$$

Норму на пространстве A введем формулой

$$\|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_i \right|^2,$$

где ε — фиксированное положительное число. Ясно, что A — гиль-

бертово пространство, так как норму на A можно задать с помощью скалярного произведения:

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_i \right) \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} b_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} b_i \right).$$

В дальнейшем для сокращения выкладок будем обозначать сумму

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i \text{ через } f_k(a).$$

В качестве требуемого примера возьмем естественный базис $\{e_k\}$ пространства A . Тогда сопряженной системой будут координатные функционалы $\{e_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, $e_k^*(a) = a_k$. Согласно определению имеем $\|e_k\| = \sqrt{1 + \varepsilon}$; $\|e_k\| \leq 1$. Следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ограниченный M -базис.

Теорема 4. Построенная в примере 3 система является ограниченным базисом с индивидуальными скобками в A , но не образует базиса со скобками.

Доказательство. Вначале докажем, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис с индивидуальными скобками. Пусть a — произвольный элемент из A . Так

$$\text{как } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \text{ то}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln k \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} |a_i|^2 \right) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим частные суммы $S_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} a_i e_i$ и остатки $R_{n_k} = a - S_{n_k}$.

Оценим норму остатка. $\|R_{n_k}\|^2 = \sum_{i=n_k+1}^{\infty} |a_k|^2 + \varepsilon |f_k(a)|^2 + \varepsilon \sum_{i=k}^{\infty} |f_i \times$

$\times (a) - f_{i+1}(a)|^2$. Так как $|f_j(a)|^2 \leq \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j+1} |a_i|^2 \right) (n_{j+1} - n_j) \approx j \ln j \times$

$\times \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j+1} |a_i|^2 \right)$, то из соотношений (4) и (5) получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_{n_k}\| =$

$= 0$. Иными словами, на некоторой подпоследовательности $\{m_j\}$ последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ остаток R_{m_j} стремится к нулю, и частные суммы S_{m_j} стремятся к a в нормированной топологии. Теперь докажем, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является базисом со скобками. Для этого нужно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| = \infty$, где S_n — оператор частной суммы

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^n e_k^*(a) e_k = \sum_{k=1}^n a_k e_k.$$

Пусть n лежит между n_k и n_{k+1} . Рассмотрим элемент $a = \sum_{i=1}^{n_{2k}} a_i e_i$, где a_i определены следующим образом: при $i \leq n_1$ положим $a_i = 0$;

при $j \leq k$ и $n_j < i \leq n_{j+1}$ положим $a_i = j/[k(n_{j+1} - n_j)]$; при $j > k$ и $n_j < i \leq n_{j+1}$ положим $a_i = (2k - j)/[k(n_{j+1} - n_j)]$.

При таком определении $f_j(a) = j/k$ при $j \leq k$, и $f_j(a) = (2k - j)/k$ при $j > k$. Норма a оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \sum_{i=1}^{n_{2k}} |a_i|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{2k-1} |f_i(a) - f_{i+1}(a)|^2 + \varepsilon |f_{2k}(a)|^2 = \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{n_{j+1} - n_j} + \frac{1}{k^2} \sum_{j=k+1}^{2k} \frac{(2k-j)^2}{n_{j+1} - n_j} + \frac{2k-1}{k^2} \varepsilon \leq \frac{5}{\ln(k+1)}. \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \|S_n(a)\|^2 &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{k-1} |f_i(a) - f_{i+1}(a)|^2 + \\ &+ \varepsilon |f_k(a) - f_{k+1}(S_n(a))|^2 + \varepsilon |f_{k+1}(S_n(a))|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} |f_k(a)|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|S^n\|^2 \geq \|S_n(a)\|^2 / \|a\|^2 \geq \varepsilon \ln(k+1)/10$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \times$

$\times \|S_n\| = \infty$. Теорема доказана.

В заключение пользуюсь возможностью выразить благодарность В. П. Фонфу и другим участникам Харьковского семинара по геометрии нормированных пространств за внимание к настоящей работе.

Список литературы: 1. *Singer I.* Bases in Banach spaces. II.— Berlin—Heidelberg—New York, 1981.—880 p. 2. *Пличко А. Н.* О базисах и дополнениях в несеппарабельных банаховых пространствах // Сиб. мат. журн.— 1984.— 25.— С. 155—162. 3. *Terenzy P.* Representation of the space spanned by a sequence in a Banach space // Arc. Math.— 1984.— 43.— P. 448—459. 4. *Beauzamy B.* Introduction to Banach Spaces and their Geometry.— Amsterdam, 1982.— 308 p.

Поступила в редколлегию 29.05.86

УДК 517.547.2

О. М. КАТКОВА

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С АСИМПТОТИЧЕСКИ КРАТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Введение. В связи с проблемой определения числа корней полинома на отрезке по коэффициентам полинома Фекете [1] ввел понятие, обобщающее понятие положительной последовательности. Позднее оно было расширено Шенбергом [2] и приобрело вид:

О п р е д е л е н и е 1. Пусть t — натуральное число. Последовательность $\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \in \mathbb{R}^1$ называется t -кратно положительной, если все миноры порядков $v = 1, 2, \dots, t+1$ матрицы

$$A = \|a_{i-j}\|, i, j \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

(считаем $a_k = 0$ при $k < 0$ неотрицательны). Последовательность, m -кратно положительная при любом $m \in \mathbb{N}$, называется вполне положительной.

Известно [1, 3], что m -кратно положительные последовательности обладают следующим свойством. Пусть последовательность $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет $s \leq m$ знакоперемен, а $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ m -кратно положительная последовательность. Тогда их свертка имеет не более s знакоперемен. Для вполне положительных последовательностей это верно без ограничения на s .

Производящие функции вполне положительных последовательностей полностью описаны в работе Эйсена, Уитни, Шенберга, Эдрея [4]. Возникает вопрос об описании производящих функций для m -кратно положительных последовательностей. Шенберг [2] исследовал случай конечных последовательностей. Ему принадлежит следующая теорема.

Теорема А [2]. Полином $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ с m -кратно положительной последовательностью коэффициентов не имеет корней в секторе

$$|\arg z| \leq \frac{m\pi}{m+n-1}. \quad (2)$$

Оценку (2) улучшить нельзя.

В настоящей работе рассматривается вопрос о расположении корней целых трансцендентных функций с m -кратно положительными последовательностями коэффициентов. Решить его в полном объеме не удалось. Для формулировки нашего результата введем следующее определение.

Определение 2. Пусть m — натуральное число. Последовательность $\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \in l^1$ назовем асимптотически m -кратно положительной, если существует такое N , что все миноры матрицы

$$A_N = \|a_{N+i-j}\|, \quad (3)$$

где $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m+1$ ($a_k = 0$ при $k < 0$) неотрицательны.

Теорема 1. Пусть m — натуральное число. A — не более, чем счетное множество в $\mathbb{C}$ (среди точек A могут быть кратные), не имеющее конечной предельной точки, симметричное относительно вещественной оси $\mathbb{R}$ и не пересекающееся с полусью $\mathbb{R}_+$. Существует целая функция G с положительной и асимптотически m -кратно положительной последовательностью коэффициентов, нулевое множество которой совпадает с A .

Теорема 1 является непосредственным следствием такого результата, представляющего, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Теорема 2. Пусть g — целая трансцендентная функция, положительная на полуси $\mathbb{R}_+$. Существует целая функция g_1 , не имеющая нулей и такая, что функции g_1 и gg_1 обладают положительными и асимптотически m -кратно положительными последовательностями коэффициентов при любом $m \in \mathbb{N}$.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает также такой факт.

Следствие. Пусть m — натуральное число. Любая целая функция f , положительная на полуоси R_+ , допускает представление $f = G/g$, где G и g — целые функции с положительными и асимптотически m -кратно положительными последовательностями коэффициентов, причем функция g не имеет нулей.

Работа состоит из 4 параграфов, 1—3 посвящены доказательству теоремы 2. Оно основано на методе, примененном И. В. Островским [5]. Сначала (п. 1) берем целую функцию g , положительную на полуоси R_+ , нулевое множество которой совпадает с A , и по ней с помощью приема работы [5] строим «домножающую» функцию g_1 . Далее получаем выражение для диагональных миноров матрицы (1), составленной из коэффициентов произведения $G = gg_1$, в виде кратных интегралов по кубу $Q^m = \{(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) \in R^m : -\pi \leq \zeta_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, m\}$. Для исследования асимптотики интегралов разбиваем область интегрирования на две:

$$q_\varepsilon^m = \{(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) \in R^m : -\varepsilon \leq \zeta_j \leq \varepsilon, j = 1, 2, \dots, m\}$$

и $Q^m \setminus q_\varepsilon^m$, где ε подбирается специально. П.2 посвящен оценке снизу интеграла по q_ε^m , а п.3 — оценке сверху интеграла по $Q^m \setminus q_\varepsilon^m$. Итогом п. 2, 3 является строгая положительность диагональных миноров матрицы (3) при достаточно большом N . В п. 4 с помощью одной теоремы Шенберга [2] показываем, что положительность диагональных миноров влечет положительность всех миноров, и завершаем доказательство теоремы.

§ 1. Пусть A — множество, фигурирующее в условиях теоремы 1. Обозначим $A_1 = A \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $A_2 = A \cap \{z < 0\}$. Пусть π_1, π_2, π_3 — канонические произведения Вейерштрасса, составленные по $A_1, A_2, \bar{A}_A$ соответственно, где $\bar{A}_A$ — множество, симметричное относительно вещественной оси. Тогда функция $g = \pi_1 \pi_2 \pi_3$ положительна на полуоси R^+ , и ее нулевое множество совпадает с A .

Если мы покажем, что существует целая функция g_1 , не имеющая нулей и такая, что g_1 и $G = gg_1$ — целые функции с положительными и асимптотически m -кратно положительными последовательностями коэффициентов, то теоремы 1, 2 будут доказаны.

Обозначим через B класс целых функций вида

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad t \in C, \quad (4)$$

удовлетворяющих условию $f(i\eta) > 0, \eta \in R$ (5). Заметим, что из (5) следует, что все коэффициенты в (4) вещественны. Пусть B_+ — подкласс в B , состоящий из функций вида (4) с положительными коэффициентами a_k , а B_+^m — подкласс в B_+ , состоящий из функций (4) с асимптотически m -кратно положительными последовательностями коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$. Замена переменной $z \rightarrow e^{it}$ переводит класс F целых функций $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, удовлетворяющих условию $g(x) > 0, x \in$

$\in R_+$ в класс B . Обозначим через F^+ и F^m подклассы в F , переходящие при этой замене в B_+ и B_+^m . Наша задача сводится к тому, чтобы доказать, что для любой функции $f \in B$ существует функция $f_1 \in B_+$, не имеющая нулей и такая, что f_1 и $ff_1 \in B_+^m$. Именно этим мы будем далее заниматься.

Пусть f — функция класса B . В силу (5) существует непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция $\delta(r)$ такая, что в круге $\{t: |t - i\eta| < \delta(|\eta|), \eta \in R\}$ имеем $f(t) \neq 0$.

Введем непрерывную на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$$G(r) = \max_{\zeta \in R, 0 > \eta > -r} \{ \ln^+ |f(\zeta + i\eta)| + |\ln f(i\eta)| + 2 |(\ln f(i\eta))''| + 1 \}. \quad (6)$$

Далее нам понадобится следующая лемма из [5].

Лемма 1. Пусть $q(r) > 1$ — непрерывная функция на полуоси $[0, \infty)$, а β — положительное число. Существует целая функция h вида

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ke^z), \quad a_k \geq 0, \quad (7)$$

удовлетворяющая условиям: $h(r) \geq q(r)$, $r \geq 0$ (8), $h(r + h^{-\beta}(r)) \leq Ch(r)$, $r \geq 0$ (9), где $C > 1$ не зависит от r .

Согласно этой лемме существует целая функция h вида (7), удовлетворяющая условиям: $h(r) \geq \max \{ \delta^{-7}(r), 2G^{22}(r) \}$, $r \geq 0$ (10), $h(r + h^{-1/8}(r)) \leq Ch(r)$, $r \geq 0$ (11), где $C > 1$ не зависит от r .

Положим

$$\psi(t) = \exp h(it), \quad \varphi(t) = f(t) \psi(t). \quad (12)$$

Очевидно, $\psi \in B_+$ и не имеет нулей, а $\varphi \in B$ и $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$, где коэффициенты c_k действительны. Так как функция φ — целая, 2π -периодическая, то при любом $\eta \in R$ имеем

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < \pi} e^{-ik\zeta} e^{k\eta} \varphi(\zeta + i\eta) d\zeta. \quad (13)$$

Так как $c_k \in R$, $\varphi(i\eta) > 0$, то вещественны интегралы

$$b_k = \int_{|\zeta| < \pi} e^{-ik\zeta} \varphi(\zeta + i\eta) / \varphi(i\eta) d\zeta = \frac{2\pi c_k}{e^{k\eta} \varphi(i\eta)}. \quad (14)$$

Чтобы доказать, что последовательность $\{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ асимптотически m -кратно положительна, сначала покажем, что для любого $v = 1, 2, \dots$ существует натуральное k_v^0 такое, что при любом $k \geq k_v^0$ определители $C_k^v = \det \|c_{k+j-i}\|_{0 \leq i, j \leq v-1}$ положительны.

Заметим, что $\text{sign } C_k^v = \text{sign } B_k^v$ (15), где $B_k^v = \det \|b_{k+t-j}\|_{0 \leq t, j \leq v-1}$, так как в силу (14) $B_k^v = \frac{2\pi}{\varphi(i\eta)} \frac{1}{e^{kv\eta}} C_k^v$, $\varphi(i\eta) > 0$ ($\eta \in R$). Таким образом, достаточно исследовать определители B_k^v .

Введем обозначение

$$\Delta_{a,b}^v(f(x_1, x_2, \dots, x_v)) = \int_{a \leq x_1 \leq \dots \leq x_v \leq b} f(x_1, \dots, x_v) dx_1 \dots dx_v,$$

где f — произвольная интегрируемая функция. Воспользуемся следующим известным фактом.

Лемма 2 [6, с. 72]. Пусть $2v$ функций: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_v(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x)$ интегрируемы по Риману в интервале $a \leq x \leq b$. Тогда

$$\det \left\| \int_a^b f_\alpha(x) \varphi_\beta(x) dx \right\|_{1 \leq \alpha, \beta \leq v} = \Delta_{a,b}^v(\det \|f_\alpha(x_\beta)\|_{1 \leq \alpha, \beta \leq v} \times \\ \times \det \|\varphi_\alpha(x_\beta)\|_{1 \leq \alpha, \beta \leq v}).$$

Из (14) следует, что

$$B_k^v = \det \left\| \int_{|\zeta| \leq \pi} e^{-i(k+t-j)\zeta} \varphi(\zeta + i\eta) / \varphi(i\eta) d\zeta \right\|_{0 \leq t, j \leq v-1}.$$

Применим к B_k^v лемму 2, взяв

$$f_1 = e^{-ik\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)}, \quad f_2 = e^{-i(k-1)\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)}, \dots, \\ f_v = e^{-i(k-v+1)\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)}, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = e^{-i\zeta}, \dots, \quad \varphi_v = e^{-i(v-1)\zeta}.$$

Получим

$$B_k^v = \Delta_{-\pi, \pi}^v \left(\det \left\| e^{-i(k-j)\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right\|_{1 \leq t, j \leq v} \times \right. \\ \times \det \|e^{i\zeta t}\|_{1 \leq t, j+1 \leq v} = \Delta_{-\pi, \pi}^v \left(\left| \prod_{1 \leq p < j \leq v} (e^{i\zeta_j} - e^{i\zeta_p}) \right|^2 \times \right. \\ \times \prod_{j=1}^v \left(e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \Big) = \Delta_{-\pi, \pi}^v \left(\prod_{1 \leq p < j \leq v} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \times \right. \\ \times \prod_{j=1}^v \left(e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \Big).$$

Так как все элементы B_k^v вещественны, то

$$B_k^v = \Delta_{-\pi, \pi}^v \left(\prod_{1 \leq p < j \leq v} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \text{Re} \left(\prod_{j=1}^v e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \right).$$

Вводя обозначение $\|\zeta\| = \max_{1 \leq j \leq v} |\zeta_j|$ и замечая, что подынтегральная функция в интеграле $\Delta_{-\pi, \pi}^v$ не меняется при любой перестановке переменных, получаем

$$B_k^v = \frac{1}{v!} \int \prod_{\|\zeta\| < \pi, 1 \leq p < j \leq v} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \operatorname{Re} \left(\prod_{j=1}^v e^{-ik\zeta_j} \varphi(\zeta_j + i\eta) / \varphi(i\eta) \right) d\zeta_1 \dots d\zeta_v = \frac{1}{v!} \left(\int_{\|\zeta\| < \varepsilon} + \int_{\varepsilon < \|\zeta\| < \pi} \right) \times \\ \times \left(\left(\prod_{1 \leq p < j \leq v} 4 \sin^2 \frac{\zeta_p - \zeta_j}{2} \right) \operatorname{Re} \left(\prod_{j=1}^v e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j - i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) d\zeta_1 \dots d\zeta_v \right) = \\ = \Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^v + I^v. \quad (16)$$

Здесь величина $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ будет выбрана позднее.

§ 2. Оценим снизу интеграл $\Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^v$. Для этого нам понадобятся некоторые свойства функции $b(\eta) = \ln \varphi(i\eta)$, $\eta \in R$. Положим $\kappa(\eta) = \min \{ \delta(|\eta|), h^{-1/8}(-\eta) \}$ (17). Будем пользоваться следующим результатом из [5].

Лемма 3 [5, с. 110]. Справедливы неравенства:

$$b(\eta) \geq \frac{1}{2} h(-\eta), \quad \eta < 0, \quad (18)$$

$b''(\eta) > \frac{1}{2} h(-\eta)$, $\eta < 0$ (19), $|b^{(k)}(\eta)| \leq Ak!h(-\eta)(\kappa(\eta))^{-k}$ (20), где $k = 1, 2, \dots$; $\eta < 0$; $A > 0$ не зависит от k и η .

Изучим подынтегральную функцию в интеграле $\Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^v$. Функция φ не обращается в нуль в круге $\{t: |t - i\eta| \leq \kappa(\eta)\}$, поэтому при $|\zeta| \leq \kappa(\eta)$ имеем разложение

$$\ln \left(e^{-ik\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) = -ik\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^{-j}\zeta^j}{j!} b^{(j)}(\eta). \quad (21)$$

В силу (19) функция $b'(\eta)$ строго монотонна при $\eta < 0$, причем $b'(\eta) \rightarrow -\infty$ при $\eta \rightarrow -\infty$. Поэтому при всех достаточно больших $k > 0$ уравнение $b'(\eta) = -k$ (22) имеет единственное решение $\eta = \eta(k)$. Такой выбор η позволяет записать равенство (21) в виде

$$\ln \left(e^{-ik\zeta} \frac{\varphi(\zeta + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) = -\frac{1}{2} \zeta^2 b''(\eta) + \tau(\zeta, \eta), \quad (23)$$

где $\tau(\zeta, \eta) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{i^{-j}\zeta^j}{j!} b^{(j)}(\eta)$. Используя оценку (20), получим

$$|\tau(\zeta, \eta)| \leq \sum_{j=3}^{\infty} Ah(-\eta)(|\zeta|/\kappa(\eta))^j = \\ = Ah(-\eta)(|\zeta|/\kappa(\eta))^3 (1 - |\zeta|/\kappa(\eta)),$$

откуда при $|\zeta| \leq \frac{1}{2} \kappa(\eta)$ следует $|\tau(\zeta, \eta)| \leq 2Ah(-\eta)(|\zeta|/\kappa(\eta))^3$.

Выберем величину $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ следующим образом:

$$\varepsilon(\eta) = \frac{1}{2} \kappa(\eta) (A \nu h(-\eta))^{-1/3}. \quad (24)$$

Тогда при $|\zeta| \leq \varepsilon(\eta)$ будем иметь $|\tau(\zeta, \eta)| \leq \frac{1}{4\nu}$ (25). Учитывая (23), получим

$$\ln \left(\prod_{j=1}^{\nu} e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) = - \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2} \zeta_j^2 b''(\eta) + \sum_{j=1}^{\nu} \tau(\zeta_j, \eta).$$

В силу (25) при $|\zeta| \leq \varepsilon(\eta)$ имеем $\left| \sum_{j=1}^{\nu} \tau(\zeta_j, \eta) \right| \leq \frac{1}{4}$, поэтому $\operatorname{Re} \times$

$\times \left\{ \exp \left(\sum_{j=1}^{\nu} \tau(\zeta_j, \eta) \right) \right\} > L$, где $L > 0$ — абсолютная постоянная. Учитывая (20) с $k=2$, при $|\zeta| \leq \varepsilon(\eta)$ имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \prod_{j=1}^{\nu} \left(e^{-ik\zeta_j} \frac{\varphi(\zeta_j + i\eta)}{\varphi(i\eta)} \right) \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(- \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2} b''(\eta) \zeta_j^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{\nu} \tau(\zeta_j, \eta) \right) \right\} > L \exp \left(- \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{2} b''(\eta) \zeta_j^2 \right) > \\ &> L \prod_{j=1}^{\nu} \{ \exp(-Ah(-\eta) (\zeta_j/\kappa(\eta))^2) \}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^{\nu} &\geq L^0(\nu) \Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^{\nu} \left(\prod_{1 \leq t < j \leq \nu} (\zeta_t - \zeta_j)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^{\nu} \exp \{ -Ah(-\eta) (\zeta_j/\kappa(\eta))^2 \} \right). \end{aligned}$$

Полагая $\mu = \mu(\eta) = \sqrt{2Ah(-\eta)/\kappa(\eta)}$ и делая замену переменных $u_j = \mu \zeta_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, в интеграле, стоящем в правой части, получаем оценку

$$\Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^{\nu} \geq L^0(\nu) (\mu(\eta))^{-\nu^2} \Delta_{-\varepsilon\mu, \varepsilon\mu}^{\nu} \left(\prod_{1 \leq t < j \leq \nu} (u_t - u_j)^2 \prod_{j=1}^{\nu} \exp(-u_j^2/2) \right).$$

Заметим, что в силу (24) при $\eta \rightarrow -\infty$ $\varepsilon(\eta) \mu(\eta) = (Ah(-\eta))^{1/6} \nu^{-1/3} / \sqrt{2} \rightarrow +\infty$, и поэтому интеграл $\Delta_{-\varepsilon\mu, \varepsilon\mu}^{\nu}$ ограничен снизу положительной постоянной, зависящей лишь от ν . Учитывая (10), (17), видим, что при достаточно больших $|\eta|$, $\eta < 0$

$$\Delta_{-\varepsilon, \varepsilon}^{\nu} \geq L(\nu) (\kappa(\eta)/\sqrt{h(-\eta)})^{\nu^2} \geq L(\nu) (h(-\eta))^{-9\nu^2/14}, \quad (27)$$

где $L(\nu)$ не зависит от η .

§ 3. Оценим сверху интеграл $I^{(v)}$. Нам понадобится неравенство $|h(x + iy)| \leq h(x) \exp(-2y^2/\pi^2)$, $|y| \leq \pi$, $x > 0$ (28). Для доказательства достаточно точно заметить, что при $x > 0$, $y \in [-\pi, \pi]$ имеем

$$|h(x + iy)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ke^x \cos y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ke^x) \exp(ke^x (\cos y - 1)) \leq \leq \exp\{e^x (\cos y - 1)\} h(x) \leq \exp(-2y^2/\pi^2) h(x).$$

Заметим, что существует постоянная $b > 0$, такая, что неравенство $1 - e^{-2\zeta^2/\pi^2} \geq b\zeta^2$ (29) выполняется для любого ζ из отрезка $[-\pi, \pi]$. Из (12), (29), (28) следует

$$\begin{aligned} |\psi(\zeta + i\eta)/\psi(i\eta)| &= \exp\{\operatorname{Re} h(-\eta + i\zeta) - h(-\eta)\} \leq \\ &\leq \exp\{|h(-\eta + i\zeta) - h(-\eta)|\} \leq \exp\{-h(-\eta) \times \\ &\times (1 - \exp(-2\zeta^2/\pi^2))\} \leq \exp\{-bh(-\eta)\zeta^2\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (12), (30) вытекает, что

$$\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta) \leq \begin{cases} |b(\zeta + i\eta)/f(i\eta)|, & |\zeta| \leq \pi, \\ \exp\{-bh(-\eta)\varepsilon^2\} |f(\zeta + i\eta)/f(i\eta)|, & \varepsilon < |\zeta| \leq \pi. \end{cases}$$

Но из (6), (10) видно, что

$$\begin{aligned} |f(\zeta + i\eta)| &\leq \exp\{G(-\eta)\} \leq \exp\left\{\left(\frac{1}{2} h(-\eta)\right)^{1/22}\right\}, \\ |f(i\eta)| &\geq \exp\{-G(-\eta)\} \geq \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} h(-\eta)\right)^{1/22}\right\}, \end{aligned}$$

а значит,

$$|\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)| \leq \begin{cases} \exp\{2(h(-\eta))^{1/22}\}, & |\zeta| \leq \pi, \\ \exp\{-bh(-\eta)\varepsilon^2 + 2(h(-\eta))^{1/22}\}, & \varepsilon < |\zeta| \leq \pi. \end{cases} \quad (31)$$

Так как $\{\zeta \in R^v : \varepsilon < \|\zeta\| \leq \pi\} = \bigcup_{j=1}^v \{\zeta \in R^v : \varepsilon < |\zeta_j| \leq \pi, \|\zeta^j\| \leq \pi\}$, где $\zeta^j = (\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_v)$, то учитывая (31), получаем

$$\begin{aligned} |I^v| &\leq K(v) \sum_{j=1}^v \left(\int_{\varepsilon < |\zeta_j| \leq \pi} |\varphi(\zeta_j + i\eta)/\varphi(i\eta)| d\zeta_j \times \right. \\ &\quad \left. \int_{\|\zeta^j\| \leq \pi} \prod_{t \neq j} |\varphi(\zeta_t + i\eta)/\varphi(i\eta)| d\zeta_1 \dots d\zeta_{j-1} d\zeta_{j+1} \dots d\zeta_v = \right. \\ &= vK(v) \int_{\varepsilon < |\zeta| \leq \pi} |\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)| d\zeta \left(\int_{|\zeta| \leq \pi} |\varphi(\zeta + i\eta)/\varphi(i\eta)| d\zeta \right)^{v-1} \leq \\ &\leq K_1(v) \exp\{-bh(-\eta)\varepsilon^2 + 2(h(-\eta))^{1/22}v\}. \end{aligned}$$

Так как в силу (24), (17) и (10) $\varepsilon \geq \frac{1}{2} (h(-\eta))^{-1/7} (Avh(-\eta))^{-1/3} > > \frac{1}{2} (Av)^{-1/3} (h(-\eta))^{-10/21}$, то получаем оценку

$$|I^v| \leq K_1(v) \exp\{-C(h(-\eta))^{1/21}\}, \quad (32)$$

где $C > 0$ не зависит от η .

§ 4. Из оценок (27), (32) и соотношения (16) получаем, что для любого $v = 1, 2, \dots$ существует натуральное k_v^0 такое, что при любом $k \geq k_v^0$ определители $C_k^v = \det \|c_{k+i-j}\|$, где $0 \leq i, j \leq v-1$ положительны. Отсюда следует, что для заданного натурального числа m можно подобрать такое $N = N(m)$, что все миноры порядков $v = 1, 2, \dots, m+1$, составленные из соседних строк и соседних столбцов матрицы $C_N = \|c_{N+i-j}\|$, где $0 \leq i < \infty$, $0 \leq j \leq m$, положительны. Асимптотическая m -кратная положительность последовательности коэффициентов функции φ означает неотрицательность всех миноров матрицы C_N . Что эти миноры даже положительны, непосредственно вытекает из следующей теоремы Шенберга [2].

Теорема В. Если все миноры порядков $v = 1, 2, \dots, m$, составленные из соседних строк и соседних столбцов некоторой матрицы положительны, то и все ее миноры порядков $v = 1, 2, \dots, m$ положительны.

Тем самым доказано, что $\varphi \in B_+^m$. Чтобы завершить доказательство теоремы 2, остается показать, что $\psi \in B_+^m$.

Положим $f_0 \equiv 1$, тогда функция $G_0(r)$, определенная равенством (6), где роль f играет f_0 , будет тождественно равна 1. Очевидно, функция f , которую мы ранее построили по $G(r)$ и $\delta(r)$, будет удовлетворять неравенству (10), если в правой его части заменить G на G_0 , а δ на $\delta_0(r) \equiv 1$. Проведем дальнейшие рассуждения, заменяя f , G , δ на f_0 , G_0 , δ_0 , но сохраняя h и ψ такими же, как раньше. При этом функция ψ , определяемая равенством (12) с заменой f на f_0 , совпадает с ψ , и мы приходим к заключению, что $\psi \in B_+^m$.

Список литературы: 1. Fekete M., Polya G. *Überein problem von Laguerre* // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.— 1912.— 34.— P. 89—120. 2. Schoenberg I. J. On the zeroes of the generating functions of multiply positive sequences and functions // Annals of Mathematics.— 1955.— 62, N 3.— P. 447—471. 3. Хиршман И. И., Уиддер Д. В. Преобразования типа свертки.— М., 1985.— 312 с. 4. On the generating functions of totally positive sequences I, II // J. d'Analyse Math.— 1953.— 2.— P. 93—109. 5. Островский И. В. О нулевых множествах целых периодических эрмитово-положительных функций // Теория функций, функций. анализ и их прил.— 1982.— Вып. 37.— С. 102—110. 6. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа.— Т. I.— М., 1978.— 432 с.

Поступила в редколлегию 05. 08. 86

УДК 517.9

Д. Ш. ЛУНДИНА

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
КОРТЕВЕГА ДЕ-ФРИЗА

Известные методы нахождения решений нелинейных эволюционных уравнений не всегда позволяют установить, к какому классу принадлежат получающиеся решения.

Нами рассмотрен один частный случай реализации метода, принадлежащего В. А. Марченко [1]. Показано, что получающиеся в этом случае решения ограничены, но отличны от быстроубывающих и конечнозонных.

Введем следующие обозначения: Ω — компакт вещественной оси; Ω^* — зеркальное отражение компакта Ω относительно начала координат; $d\rho(\lambda)$ — борелевская мера на R^1 , сосредоточенная на компакте Ω ; $L_2(\rho)$ — гильбертово пространство функций $f(\lambda)$ со скалярным произведением $(f, g)_\rho = \int f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\rho(\lambda)$.

Везде в дальнейшем предполагается, что компакты Ω , Ω^* не пересекаются, откуда следует, что $\text{dist}(\Omega, \Omega^*) = d > 0$ и при всех $\lambda, \mu \in \Omega$ выполняется неравенство $|\lambda + \mu| \geq d > 0$ (1). Рассмотрим действующий в пространстве $L^2(\rho)$ интегральный оператор

$$Af = \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x} \varphi(\mu)}{\lambda + \mu} f(\mu) d\rho(\mu), \quad (2)$$

где $\varphi(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}$. Из неравенства (1) следует, что ядро этого оператора

$$A(\lambda, \mu) = \frac{e^{(\lambda+\mu)x} \varphi(\mu)}{\lambda + \mu}$$

ограничено и непрерывно на множестве $\Omega \times \Omega$. Поэтому оператор A ограничен, его вещественная и мнимая части

$$A_1 = \frac{1}{2} (A + A^*), \quad A_2 = \frac{1}{2i} (A - A^*), \quad A = A_1 + iA_2 \quad (3)$$

являются ограниченными самосопряженными операторами со следующими ядрами:

$$A_1(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\lambda) + \varphi(\mu)}{2(\lambda + \mu)} e^{(\lambda+\mu)x}, \quad A_2(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{2i(\lambda + \mu)} e^{(\lambda+\mu)x}.$$

Лемма 1. Оператор A_1 положительный.

Так как

$$\frac{1}{2} [\varphi(\mu) + \varphi(\lambda)] = \begin{cases} 1 & \lambda > 0, \mu > 0; \\ 0 & \lambda\mu < 0; \\ -1 & \lambda < 0, \mu < 0, \end{cases}$$

то согласно (3)

$$\begin{aligned} (A_1 f, f)_\rho &= \iint A_1(\lambda, \mu) f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda + \mu} f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda + \mu} f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda). \end{aligned}$$

Далее, из равенств

$$\frac{1}{\lambda + \mu} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} dt & \lambda > 0, \mu > 0; \\ -\int_0^\infty e^{(\lambda+\mu)t} dt & \lambda < 0, \mu < 0 \end{cases}$$

следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty dt \left(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{(\lambda+\mu)(x-t)} f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda) \right) - \\ & \quad - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{\lambda+\mu} f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty dt \left(\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+\mu)(x+t)} f(\mu) \overline{f(\lambda)} d\rho(\mu) d\rho(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(A_1 f, f)_\rho = \int_0^\infty g^+(x-t) \overline{g^+(x-t)} dt + \int_0^\infty g^-(x+t) \overline{g^-(x+t)} dt \geq 0,$$

где $g^+(y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} f(\lambda) d\rho(\lambda)$, $g^-(y) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} f(\lambda) d\rho(\lambda)$.

Лемма 2. *Оператор $I + A$ обратим, причем $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$. Так как $I + A = I + A_1 + iA_2$ и по лемме 1 оператор $I + A_1$ положителен, и следовательно, $I + A_1 = C^2$, где $C \geq I$ — положительный обратимый оператор, $\|C^{-1}\| \leq 1$, то $I + A = C^2 + iA_2 = C(I + iC^{-1} \times \times A_2 C^{-1})C$, где $C^{-1}A_2 C^{-1}$ — ограниченный самосопряженный оператор. Оператор $I + iC^{-1}A_2 C^{-1}$ тем самым обратим и $\|(I + iC^{-1}A_2 C^{-1})^{-1}\| \leq 1$. Отсюда следует обратимость оператора $I + A: (I + A)^{-1} = C^{-1}(I + iC^{-1}A_2 C^{-1})^{-1}C^{-1}$ и неравенство $\|(I + A)^{-1}\| \leq \|C^{-1}\| \cdot \|(I + iC^{-1}A_2 C^{-1})^{-1}\| \times \times \|C^{-1}\| \leq 1$.*

Лемма 3. *Интегральное уравнение*

$$y(\lambda, x) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x} \varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y(\mu, x) d\rho(\mu) = e^{\lambda x} \quad (4)$$

однозначно разрешимо в пространстве $L_2(\rho)$ при всех $x \in (-\infty, \infty)$, его решение $y(\lambda, x)$ бесконечно дифференцируемо по x и

$$\|y(\lambda, x)\|_\rho \leq \|e^{\lambda x}\|_\rho, \quad (5)$$

$$\|y_x(\lambda, x)\|_\rho \leq \|e^{\lambda x}\|_\rho (|\Omega| + \|e^{\lambda x}\|_\rho^2), \quad (6)$$

где $\|e^{\lambda x}\|_\rho = \left[\int e^{2\lambda x} d\rho(\lambda) \right]^{\frac{1}{2}} \leq e^{|\Omega| x} \rho(\Omega)^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$

Действительно, уравнение (4) можно записать в виде $(I + A)y(\lambda, x) = e^{\lambda x}$, откуда по лемме 3 следует его однозначная разрешимость и неравенство $\|y(\lambda, x)\|_\rho \leq \|(I + A)^{-1}\| \cdot \|e^{\lambda x}\|_\rho \leq \|e^{\lambda x}\|_\rho$. Дифференцируя это уравнение по x , находим, что

$$\begin{aligned} & y_x(\lambda, x) + e^{\lambda x} \int e^{\mu x} \varphi(\mu) y(\mu, x) d\rho(\mu) + \\ & + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x} \varphi(\mu)}{\lambda+\mu} y_x(\mu, x) d\rho(\mu) = \lambda e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

т. е. $(I + A) y_x(\mu, x) = e^{\lambda x}(\lambda + Q(x))$, где $Q(x) = - \int e^{\mu x} \varphi(\mu) y(\mu, x) d\rho(\mu)$. Следовательно, $\|y_x(\lambda, x)\|_\rho \leq \|e^{\lambda x}\|_\rho (\|\Omega\| + |Q(x)|)$, и так как согласно (5) и неравенству Коши — Буняковского справедливо неравенство

$$|Q(x)| \leq \int e^{\mu x} |y(\mu, x)| d\rho(\mu) \leq \|e^{\mu x}\|_\rho \cdot \|y(\mu, x)\|_\rho \leq \|e^{\mu x}\|_\rho^2,$$

то $\|y_x(\mu, x)\|_\rho \leq \|e^{\mu x}\|_\rho (\|\Omega\| + \|e^{\mu x}\|_\rho^2)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z, x) = e^{zx} \left[1 - \int \frac{e^{\mu x} \varphi(\mu)}{z + \mu} y(\mu, x) d\rho(\mu) \right], \quad (8)$$

определенную этим равенством при всех комплексных $z \notin \Omega^*$. Функция $\psi(z, x)$ голоморфна в области $C \setminus \Omega^*$ и совпадает с решением уравнения (4) на множестве Ω .

Лемма 4. При всех $z \in C \setminus \Omega^*$ и $x \in (-\infty, \infty)$ функция удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля $-\psi_{xx}(z, x) + q(x)\psi(z, x) + z^2\psi(z, x) = 0$ с потенциалом

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} Q(x) = -2 \frac{d}{dx} \int e^{\mu x} \varphi(\mu) y(\mu, x) d\rho(\mu).$$

Для доказательства продифференцируем (8) два раза по x :

$$\begin{aligned} \psi_{xx}(z, x) &= z^2\psi(z, x) - e^{zx} \int \frac{\varphi(\mu) e^{\mu x}}{z + \mu} \{2z(\mu y(\mu, x) + \\ &+ y_x(\mu, x)) + \mu^2 y(\mu, x) + 2\mu y_x(\mu, x) + y_{xx}(\mu, x)\} d\rho(\mu). \end{aligned}$$

Замечая, что $2z(\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x)) + \mu^2 y(\mu, x) + 2\mu y_x(\mu, x) + y_{xx}(\mu, x) \equiv y_{xx}(\mu, x) - \mu^2 y(\mu, x) + 2(z + \mu)(\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x))$, перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} \psi_{xx}(z, x) - z^2\psi(z, x) &+ \int \frac{e^{(z+\mu)x} \varphi(\mu)}{z + \mu} [y_{xx}(\mu, x) - \mu^2 y(\mu, x)] d\rho(\mu) = \\ &= -2e^{zx} \int e^{\mu x} \varphi(\mu) [\mu y(\mu, x) + y_x(\mu, x)] d\rho(\mu) = \\ &= e^{zx} \left(-2 \frac{d}{dx} \int e^{\mu x} \varphi(\mu) y(\mu, x) d\rho(\mu) \right) = e^{zx} q(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Так как на множестве Ω функции $\psi(z, x)$ и $y(z, x)$ совпадают, то из равенства (9) при $z = \lambda \in \Omega$ вытекает такое уравнение для функции $y_{xx}(\lambda, x) - \lambda^2 y(\lambda, x)$: $(I + A)(y_{xx}(\lambda, x) - \lambda^2 y(\lambda, x)) = e^{\lambda x} q(x)$, так что $y_{xx}(\lambda, x) - \lambda^2 y(\lambda, x) = q(\lambda)(I + A)^{-1} e^{\lambda x} = q(x)y(\lambda, x)$. Отсюда согласно (9)

$$\psi_{xx}(z, x) - z^2\psi(z, x) + e^{zx} \left[\int \frac{e^{\mu x} \varphi(\mu)}{z + \mu} y(\mu, x) d\rho(\mu) - 1 \right] q(x) = 0$$

и в силу определения (8) функции $\psi(z, x)$ имеем $\psi_{xx}(z, x) - z^2\psi(z, x) - q(x)\psi(z, x) = 0$.

Рассмотрим функцию $u(z, x) = e^{-zx}\psi(z, x)$, бесконечно дифференцируемую по x и голоморфную по z в области $C \setminus \Omega^*$.

Лемма 5. При всех $x \in (-\infty, \infty)$ и $z \in C \setminus \Omega^*$ выполняются неравенства

$$|u(z, x)| \leq 1 + d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2, \quad (10)$$

$$|u_x(z, x)| \leq d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2 (2|\Omega| + \|e^{\mu x}\|_\rho^2), \quad (11)$$

$$\left| \frac{d}{dz} u(z, x) \right| \leq 2d(z)^{-1} [1 + 2d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2], \quad (12)$$

$$\left| \frac{d}{dz} u_x(z, x) \right| \leq 4d(z)^{-2} \|e^{\mu x}\|_\rho^2 (2|\Omega| + \|e^{\mu x}\|_\rho^2), \quad (13)$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до множества Ω^* : $d(z) = \inf_{\lambda \in \Omega^*} |z + \lambda|$.

Из формулы (8) оценок (5), (6) и неравенства Коши — Буняковского следует, что верны неравенства (10), (11): $|u(z, x)| \leq 1 + d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2$; $|u_x(z, x)| \leq d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho (\|u_y(\mu, x)\|_\rho + \|y_x(\mu, x)\|_\rho) \leq d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2 (2|\Omega| + \|e^{\mu x}\|_\rho^2)$.

Далее, так как функции $u(z, x)$, $u_x(z, x)$ голоморфны в области $C \setminus \Omega^*$, то по формуле Коши

$$u(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u(\xi, x)}{\xi - z} d\xi, \quad u_x(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u_x(\xi, x)}{\xi - z} d\xi,$$

$$\frac{d}{dz} u(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u(\xi, x)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad \frac{d}{dz} u_x(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u_x(\xi, x)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

где C — окружность радиуса $\frac{1}{2} d(z)$ с центром в точке z .

Поэтому

$$\left| \frac{d}{dz} u(z, x) \right| \leq 2d(z)^{-1} \max_{\xi \in C} |u(\xi, x)|,$$

$$\left| \frac{d}{dz} u_x(z, x) \right| \leq 2d(z)^{-1} \max_{\xi \in C} |u_x(\xi, x)|,$$

и согласно уже доказанным неравенствам (10), (11) и неравенству $d(\xi) \geq \frac{1}{2} d(z)$

$$\max_{\xi \in C} |u(\xi, x)| \leq 1 + 2d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2,$$

$$\max_{\xi \in C} |u_x(\xi, x)| \leq 2d(z)^{-1} \|e^{\mu x}\|_\rho^2 (2|\Omega| + \|e^{\mu x}\|_\rho^2),$$

откуда следует справедливость оценок (12), (13).

Рассмотрим множество всевозможных мер $d\rho_\alpha(\lambda)$ с носителями Ω_α , удовлетворяющих условиям $\Omega_\alpha \subset \Omega$, $\rho_\alpha(\Omega_\alpha) \leq \rho(\Omega)$, и обозначим $u^\alpha(z, x)$ соответствующие этим мерам функции $u^\alpha(z, x) = e^{-zx} y^\alpha(z, x)$, а через D — множество всех точек комплексной плоскости, отстоящих от множества Ω^* на расстояние, превосходящее $\frac{d}{2}$. Из оценок, полученных в лемме 5, вытекает

Следствие 1. Существует такая константа C , что при всех $x \in (-\infty, \infty)$, $z \in D$ равномерно по всем мерам $d\rho_\alpha(\lambda)$ выполняются неравенства

$$|u^\alpha(z, x)|, \left| \frac{d}{dz} u^\alpha(z, x) \right|, |u_x^\alpha(z, x)|, \left| \frac{d}{dz} u_x^\alpha(z, x) \right| \leq C e^{C|x|}.$$

Разобьем вещественную ось λ на полуоткрытые сегменты $\Delta_k(N) = \left[\frac{d}{4N} k, \frac{d}{4N} (k+1) \right)$, где N — произвольное целое число, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $d = \text{dist}(\Omega, \Omega^*)$, и обозначим через $k(N)$ множество тех значений k , при которых сегменты $\Delta_k(N)$ имеют непустое пересечение с носителем Ω меры $d\rho(\lambda)$.

Так как множество $k(N)$, очевидно, конечно, то множество $\Delta(N) = \bigcup_{k \in k(N)} \Delta_k(N)$ является объединением конечного числа непересекающихся сегментов. Выберем в каждом множестве $\Delta_k(N) \cap \Omega$ произвольную точку λ_k и построим дискретную меру $d\rho_N(\lambda)$, сосредоточенную в этих точках, полагая $\rho_N(\lambda_k) = \rho(\Delta_k(N))$, ($k \in k(N)$). Ясно, что носитель Ω_N этой меры состоит из конечного числа точек, причем

$$\Delta(N) \supset \Omega \supset \Omega_N, \rho_N(\Omega_N) = \rho(\Omega), \text{dist}(\Omega_N, \Omega_N^*) \geq d. \quad (14)$$

Обозначим через $y^N(\lambda, x)$ решения уравнений

$$y^N(\lambda, x) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x} \varphi(\mu)}{\lambda + \mu} y^N(\mu, x) d\rho_N(\mu) = e^{\lambda x} \quad (15)$$

и через $\psi^N(z, x)$ ($z \in C \setminus \Omega^*$) функции

$$\psi^N(z, x) = e^{zx} \left[1 - \int \frac{e^{\mu x} \varphi(\mu)}{z + \mu} y^N(\mu, x) d\rho_N(\mu) \right],$$

которые согласно лемме 4 удовлетворяют уравнениям Штурма — Лиувилля $-\psi_{xx}^N(z, x) + q_N(x) \psi^N(z, x) + z^2 \psi^N(z, x) = 0$ с потенциалами

$$q_N(x) = -2 \frac{d}{dx} \int e^{\mu x} \varphi(\mu) y^N(\mu, x) d\rho_N(\mu).$$

Мы покажем, что при $N \rightarrow \infty$ потенциалы $q_N(x)$ сходятся к потенциалу $q(x)$ равномерно на каждом конечном множестве оси x .

Заметим прежде всего, что все точки множества $\Delta(N)$ отстоят от множества Ω на расстояние, не превышающее $\frac{d}{4N}$. Поэтому $\text{dist}(\Delta(N), \Omega^*) \geq d - \frac{1}{2N} d \geq \frac{d}{2}$, и в силу следствия 1 существует такая константа C , не зависящая от N , что модули всех функций $u^N(\lambda, x) = e^{-\lambda x} y^N(\lambda, x)$, $u_x^N(\lambda, x)$ и их производных по λ на множестве $\Delta(N)$ мажорируются функцией $C e^{C|x|}$.

Лемма 6. Если вещественная функция $f(\lambda)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\Delta(N)$ и $\sup |f'(\lambda)| \leq C$, то

$$\left| \int f(\lambda) d\rho(\lambda) - \int f(\lambda) d\rho_N(\lambda) \right| \leq \frac{Cd}{4N} \rho(\Omega) = \frac{C_1}{N}, \quad (16)$$

где константа C_1 не зависит от N .

Действительно, по теореме о среднем значении

$$\int f(\lambda) d\rho(\lambda) = \sum_{k \in k(N)} \int_{\Delta_k(N)} f(\lambda) d\rho(\lambda) = \sum_{k \in k(N)} f(v_k) \rho(\Delta_k(N)),$$

где $v_k \in \Delta_k(N)$, и из определения меры $d\rho_N(\lambda)$ следует, что $\int f(\lambda) \times \times d\rho_N(\lambda) = \sum f(\lambda_k) \rho(\Delta_k(N))$. Поэтому

$$\left| \int f(\lambda) d\rho(\lambda) - \int f(\lambda) d\rho_N(\lambda) \right| \leq \sum_{k \in k(N)} |f(v_k) - f(\lambda_k)| \rho(\Delta_k(N)),$$

а так как $v_k, \lambda_k \in \Delta_k(N)$, то $|v_k - \lambda_k| \leq \frac{d}{4N}$ и по теореме о конечных приращениях $|f(v_k) - f(\lambda_k)| \leq |f'(\mu_k)| \cdot |v_k - \lambda_k| \leq \frac{Cd}{4N}$, откуда следует неравенство (16).

Лемма 7. Существует не зависящая от N константа C такая, то

$$\|y(\lambda, x) - y^N(\lambda, x)\|_0 \leq \frac{Ce^{C|x|}}{N}, \quad \|y_x(\lambda, x) - y_x^N(\lambda, x)\|_0 \leq \frac{Ce^{C|x|}}{N}.$$

Из определения функций $y(\lambda, x)$, $y^N(\lambda, x)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} y(\lambda, x) - y^N(\lambda, x) &= e^{\lambda x} \left[- \int \frac{e^{\mu x} \Phi(\mu)}{\lambda + \mu} y(\mu, x) d\rho(\mu) + \right. \\ &+ \left. \int \frac{e^{\mu x} \Phi(\mu)}{\lambda + \mu} y^N(\mu, x) d\rho_N(\mu) - e^{\lambda x} \int \frac{e^{\mu x} \Phi(\mu)}{\lambda + \mu} \times \right. \\ &\times [y(\mu, x) - y^N(\mu, x)] d\rho(\mu) + g(\lambda, x) e^{\lambda x}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $g(\lambda, x) = \frac{e^{\mu x} \Phi(\mu)}{\lambda + \mu} y^N(\mu, x) d[\rho_N(\mu) - \rho(\lambda)] = \int \frac{e^{2\mu x} \Phi(\mu)}{\lambda + \mu} u^N(\mu, x) d[\rho_N(\mu) - \rho(\mu)]$. Согласно сделанному выше замечанию, $\sup_{\mu \in \Delta(N)} |u^N(\mu, x)| \leq Ce^{C|x|}$, $\sup_{\mu \in \Delta(N)} |u_x^N(\mu, x)| \leq Ce^{C|x|}$, откуда следует, что равномерно по $\mu \in \Delta(N)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{d}{d\mu} \frac{e^{2\mu x} \Phi(\mu) u^N(\mu, x)}{\lambda + \mu} \right| \leq C_1 e^{C_1|x|}$$

с константой C_1 , не зависящей от N . Поэтому согласно лемме 6 $\sup_{\lambda \in \Delta(N)} |g(\lambda, x)| \leq C_2 e^{C_2|x|}/N$, а, значит, и $\|e^{\lambda x} g(\lambda, x)\|_0 \leq C_3 e^{C_3|x|}/N$.

Отсюда, замечая, что в силу (17) $(I + A)[y(\lambda, x) - y^N(\lambda, x)] = g(\lambda, x)e^{\lambda x}$, будем иметь $\|y(\lambda, x) - y^N(\lambda, x)\|_\rho \leq C_3 e^{C_3|x|}/N$, где константа C_3 не зависит от N .

Второе неравенство доказывается аналогично.

Лемма 8. *Существует такая не зависящая от N константа C , что*

$$|q(x) - q_N(x)| \leq C e^{C|x|}/N, \quad (18)$$

т. е. в каждом конечном интервале последовательность $q_N(x)$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно сходится к $q(x)$.

Из равенств, определяющих $q(x)$, $q_N(x)$, следует, что

$$\begin{aligned} q(x) - q_N(x) &= 2 \int e^{\mu x} \Phi(\mu) \{ \mu (y^N(\mu, x) - y(\mu, x)) + \\ &+ y_x^N(\mu, x) - y_x(\mu, x) \} d\rho(\mu) + 2 \int e^{2\mu x} \Phi(\mu) [2\mu u^N(\mu, x) + \\ &+ u_x^N(\mu, x)] d(\rho_N(\mu) - \rho(\mu)). \end{aligned}$$

Лемма 7 позволяет заключить, что

$$\begin{aligned} &\left| 2 \int e^{\mu x} \Phi(\mu) \{ \mu (y^N(\mu, x) - y(\mu, x)) + y_x^N(\mu, x) - \right. \\ &- y_x(\mu, x) \} d\rho(\mu) \leq 2 \|e^{\mu x}\|_\rho \|\Omega\| \cdot \|y^N(\mu, x) - y(\mu, x)\|_\rho + \\ &+ \|y_x^N(\mu, x) - y_x(\mu, x)\|_\rho \leq C_1 e^{C_1|x|}/N, \end{aligned}$$

где константа C_1 не зависит от N .

Далее, из полученных ранее оценок для $|u^N(\mu, x)|$, $|u_x^N(\mu, x)|$, $\left| \frac{d}{d\mu} u^N(\mu, x) \right|$, $\left| \frac{d}{d\mu} u_x^N(\mu, x) \right|$ вытекает, что модуль производной по μ от подынтегральной функции во втором слагаемом правой части последнего равенства мажорируется функцией $C_2 e^{C_2|x|}$, откуда по лемме 6 следует, что модуль второго слагаемого мажорируется функцией $C_3 e^{C_3|x|}/N$ с константой C_3 , не зависящей от N .

Таким образом, показано, что

$$|q(x) - q_N(x)| \leq C e^{C|x|}/N,$$

где постоянная C не зависит от N .

Остается выяснить, что представляют собой потенциалы, аппроксимирующие $q^N(x)$.

Поскольку мера $d\rho_N(\lambda)$ сосредоточена в конечном числе точек $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_N}$, то уравнение (15) сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений

$$y^N(\lambda_k, x) + \sum_{j=1}^{m_N} \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_j)x} \Phi(\lambda_j)}{\lambda_k + \lambda_j} y^N(\lambda_j, x) \rho_N(\lambda_j) = e^{\lambda_k x}.$$

функции $\psi^N(z, x)$, $u^N(z, x)$ имеют вид

$$\psi^N(z, x) = e^{zx} \left\{ 1 - \sum_1^{m_N} \frac{e^{\lambda_j x} \Phi(\lambda_j)}{z + \lambda_j} y^N(\lambda_j, x) \rho_N(\lambda_j) \right\},$$

$$u^N(z, x) = 1 - \sum_1^{m_N} \frac{e^{2\lambda_j x} \Phi(\lambda_j)}{z + \lambda_j} u^N(\lambda_j, x) \rho_N(\lambda_j).$$

Числа λ_j могут быть как положительными, так и отрицательными. Обозначим их модули через $\kappa_j: \kappa_j = |\lambda_j|$, а множество j , при которых $\lambda_j > 0$ ($\lambda_j < 0$), через Λ^+ (Λ^-). В этих обозначениях последняя формула запишется так:

$$u^N(z, x) = 1 - \sum_{j \in \Lambda^+} \frac{e^{2\kappa_j x}}{z + \kappa_j} u^N(\kappa_j, x) \rho_N(\lambda_j) +$$

$$+ \sum_{j \in \Lambda^-} \frac{e^{-2\kappa_j x}}{z - \kappa_j} u^N(-\kappa_j, x) \rho_N(\lambda_j), \quad (19)$$

откуда следует, что функция

$$v^N(z, x) = u^N(z, x) \prod_{s \in \Lambda^-} \frac{z - \kappa_s}{z + \kappa_s} \quad (20)$$

мероморфна по z , имеет простые полюсы в точках $-\kappa_j$ и стремится к 1 при $z \rightarrow \infty$. Поэтому ее разложение на простые дроби имеет вид

$$v^N(z, x) = 1 + \sum_1^{m_N} \frac{C_k(x)}{z + \kappa_k}, \quad (21)$$

где $C_k(x) = \lim_{z \rightarrow -\kappa_k} (z + \kappa_k) v^N(z, x)$. Если $k \in \Lambda^+$, то из формул (19), (20) следует, что

$$C_k(x) = \prod_{s \in \Lambda^-} \frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} \lim_{z \rightarrow -\kappa_k} (z + \kappa_k) u^N(z, x) =$$

$$= - \prod_{s \in \Lambda^-} \frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} e^{2\kappa_k x} u^N(\kappa_k, x) \rho_N(\lambda_k) = -e^{2\kappa_k x} v^N(\kappa_k, x) \times$$

$$\times \rho_N(\lambda_k) \prod_{s \in \Lambda^-} \left(\frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} \right)^2 \quad (k \in \Lambda^+).$$

Если же $k \in \Lambda^-$, то согласно (20) имеем

$$C_k(x) = u^N(-\kappa_k, x) (-2\kappa_k) \prod_{\substack{s \in \Lambda^- \\ s \neq k}} \frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s}.$$

В то же время из (19) заключаем, что

$$\lim_{z \rightarrow \kappa_k} (z - \kappa_k) u^N(z, x) = e^{-2\kappa_k x} u^N(-\kappa_k, x) \rho_N(\lambda_k),$$

и так как в силу (20) $\lim_{z \rightarrow \kappa_k} (z - \kappa_k) u^N(z, x) = \lim_{z \rightarrow \kappa_k} \left\{ v^N(z, x) (z + \kappa_k) \times \right.$

$$\times \prod_{\substack{s \in \Lambda^- \\ s \neq k}} \frac{z + \kappa_s}{z - \kappa_s} \Big\} = v^N(\kappa_k, x) \cdot 2\kappa_k \prod_{\substack{s \in \Lambda^- \\ s \neq k}} \frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s}, \text{ то } u^N(-\kappa_k, x) = e^{2\kappa_k x} \times$$

$$\times v^N(\kappa_k, x) \cdot 2\kappa_k \prod_{\substack{s \in \Lambda^- \\ s \neq k}} \frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} \rho_N(\lambda_k)^{-1} \text{ и}$$

$$C_k(x) = -e^{2\kappa_k x} v^N(\kappa_k, x) \left[2\kappa_k \prod_{\substack{s \in \Lambda^- \\ s \neq k}} \frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} \right]^2 \rho_N(\lambda_k)^{-1} \quad (k \in \Lambda^-).$$

Следовательно, при всех $1 \leq k \leq m_N$

$$C_k(x) = -e^{2\kappa_k x} v^N(\kappa_k, x) m_k^{-2}, \quad (22)$$

где положительные числа m_k^{-2} вычисляются по формулам

$$m_k^{-2} = \begin{cases} \rho_N(\lambda_k) \prod_{s \in \Lambda^-} \left(\frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} \right)^2 & (k \in \Lambda^+), \\ \rho_N(\lambda_k)^{-1} \cdot 4\kappa_k^2 \prod_{\substack{s \in \Lambda^- \\ s \neq k}} \left(\frac{\kappa_k + \kappa_s}{\kappa_k - \kappa_s} \right)^2 & (k \in \Lambda^-). \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя найденные значения для $C_k(x)$ в формулу (21), получим

$$v^N(z, x) = 1 - \sum_1^{m_N} \frac{e^{2\kappa_k x} v^N(\kappa_k, x)}{z + \kappa_k} m_k^{-2},$$

откуда следует система линейных уравнений для функций

$$e^N(z, x) = e^{zx} v^N(z, x) = \psi^N(z, x) \prod_{s \in \Lambda^-} \frac{z - \kappa_s}{z + \kappa_s};$$

$$e^N(\kappa_j, x) + \sum_{k=1}^{m_N} \frac{e^{(\kappa_j + \kappa_k)x}}{\kappa_j + \kappa_k} e^N(\kappa_k, x) m_k^{-2} = e^{\kappa_j x}.$$

Полученная система уравнений в точности совпадает с основным уравнением обратной задачи рассеяния для безотражательного потенциала с такими левыми данными рассеяния:

$$\{\kappa_1, \dots, \kappa_{m_N}; m_1^{-2}, \dots, m_{m_N}^{-2}; r^-(\lambda) = 0\}. \quad (22')$$

Так как функции $e^N(z, x)$, $\psi^N(z, x)$ отличаются не зависящим от x множителем, то они удовлетворяют одному и тому же уравнению Штурма — Лиувилля с потенциалом $q_N(x)$, данные рассеяния которого (22).

Наконец, так как при всех $N \max_{1 \leq j \leq m_N} \kappa_j \leq |\Omega|$, то согласно результатам работы [2] $0 \geq q_N(x) \geq -2|\Omega|^2$, $|q_N^{(k)}(x)| \leq C_k |\Omega|^{2+k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Итак, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть борелевская мера $d\rho(\lambda)$ сосредоточена на компакте Ω вещественной оси, причем

$$\inf_{\lambda, \mu \in \Omega} |\lambda + \mu| = d > 0, \quad \max_{\lambda \in \Omega} |\lambda| = |\Omega|.$$

Тогда интегральное уравнение

$$y(\lambda, x) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x} \varphi(\mu)}{\lambda + \mu} y(\mu, x) d\rho(\mu) = e^{\lambda x} \left(\varphi(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|} \right)$$

однозначно разрешимо в пространстве $L^2(\rho)$ при всех $x \in (-\infty, \infty)$, функции

$$\psi(z, x) = e^{zx} \left[1 - \int \frac{e^{\mu x} \varphi(\mu)}{z + \mu} y(\mu, x) d\rho(\mu) \right]$$

удовлетворяют уравнению Штурма — Лиувилля $-\psi_{xx}(z, x) + q(x)\psi(z, x) + z^2\psi(z, x) = 0$ с вещественным бесконечно дифференцируемым потенциалом

$q(x) = -2 \frac{d}{dx} \int e^{\mu x} \varphi(\mu) y(\mu, x) d\rho(\mu)$, который оценивается неравенствами $0 \geq q(x) \geq -2|\Omega|^2$, $|q^{(k)}(x)| \leq C_k |\Omega|^{2+k}$ ($k = 1, 2, \dots$), где C_k — абсолютные константы.

Хорошо известно [3], что если начальные данные задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза $\dot{u} = buu_x - u_{xxx}$, $u|_{t=0} = q(x)$ задаются безотражательным потенциалом $q(x)$ с левыми данными рассеяния $\{\kappa_i, m_i^{-2}, r^-(\lambda) = 0\}$; то решение задачи Коши находится по формуле $u(x, t) = q(x, t)$, где $q(x, t)$ — потенциал, восстанавливаемый по левым данным рассеяния $\{\kappa_i, m_i^{-2} e^{-8\kappa_i^3 t}; r^-(\lambda) = 0\}$. Поэтому если в (23) положить $m_i^{-2}(t) = m_i^{-2} e^{-8\kappa_i^3 t}$, то, как легко видеть, мера $\rho_N(\lambda_i)$ в уравнении (15) переходит в меру $\rho_N(\lambda_i, t) = e^{-8\lambda_i^3 t} \rho_N(\lambda_i)$, а в уравнении (4) следует ввести меру $d\rho(\mu, t) = e^{-8\mu^3 t} d\rho(\mu)$.

Из всего сказанного выше следует

Теорема 2. Пусть борелевская мера $d\rho(\lambda)$ сосредоточена на компакте Ω вещественной оси и $\text{dist}(\Omega, \Omega^*) = d > 0$, $|\Omega| = \max_{\lambda \in \Omega} |\lambda|$.

Тогда интегральное уравнение

$$y(\lambda, x, t) + \int \frac{e^{(\lambda+\mu)x - 8\mu^3 t} \varphi(\mu)}{\lambda + \mu} y(\mu, x, t) d\rho(\mu) = e^{\lambda x} \left(\varphi(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|} \right)$$

однозначно разрешимо в $L^2(\rho)$ при всех $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$, а функция

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \int e^{i\mu x - 8\mu^2 t} \varphi(\mu) u(\mu, x, t) d\rho(\mu) \quad (24)$$

является решением уравнения Кортевега-де Фриза, ограниченным вместе со всеми своими производными: $|u^{(k)}(x, t)| \leq C_k |\Omega|^{2+k}$ ($k = 1, 2, \dots$), $0 \geq u(x, t) \geq -2|\Omega|^2$. Это решение есть равномерный предел в каждой конечной области изменения переменных x, t N -солитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза.

С л е д с т в и е. Если компакт Ω имеет хотя бы одну предельную точку на положительной (отрицательной) полуоси, то решение $u(x, t)$ уравнения Кортевега-де Фриза, определяемое формулой (24), не может быть убывающим на $+\infty$ ($-\infty$).

Список литературы: 1. Марченко В. А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. — К., 1986. — 180 с. 2. Лундина Д. Ш. Компактность множества безотражательных потенциалов // Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1985. — Вып. 44. — С. 57—67. 3. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М., 1980. — 230 с.

Поступила в редколлегию 21.05.86

УДК 517.9

М. Г. ЛЮБАРСКИЙ

О ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ И ЛОКАЛЬНО ОТДЕЛЕННЫХ ОТ НУЛЯ ДВИЖЕНИЯХ В ВЕКТОРНЫХ G -РАССЛОЕНИЯХ (ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЯХ)

Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа и G/H — однородное пространство левых классов смежности. Один хорошо известный результат Атья [1] состоит в том, что векторное G -расслоение над G/H обладает структурой расслоенного пространства $(G \times V) / H \rightarrow G/H$ со слоем V , ассоциированного с главным H -расслоением $G \rightarrow G/H$. Причем действие группы G сохраняет V -проекцию, т. е. $g(s, v)H = (gs, v)H$ для всех $g, s \in G$ и $v \in V$.

В настоящей работе аналогичное утверждение доказывается для векторного G -расслоения над произвольным минимальным G -пространством в предположении, что движение каждой точки расслоения ограничено и отделено от нуля над достаточно малой окрестностью любой точки базы. Этот результат позволяет перенести на векторные G -расслоения, или в другой терминологии (см. [2]) — на линейные расширения топологических групп преобразований ряд известных теорем о представлениях бикомпактных групп. В этом смысле в работе обобщены теорема об унитарности представления бикомпактной группы и теорема о приводимости представления бикомпактной коммутативной группы. Доказанные утверждения в качестве частных случаев содержат результаты, анонсированные в [3, 4].

1. Пусть X — векторное G -расслоение над G -пространством Y и $p: X \rightarrow Y$ — проекция расслоения.

В случае, когда X — метризованное расслоение, движение точки $x \in X$ называют ограниченным (отделенным от нуля) на множестве $S \subset G$, если $\sup \{\|sx\| : s \in S\} < +\infty$ ($\inf \{\|sx\| : s \in S\} > 0$).

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что движение точки $x \in X$ локально ограничено (локально отделено от нуля), если для каждой точки $y \in Y$ найдется такая ее окрестность $U \subset Y$, что движение x ограничено (отделено от нуля) на множестве $\{g \in G : p(gx) \in U\}$.

Замечание. Так как это определение носит локальный характер, оно не зависит от выбора метрики на X и более того сохраняет свой смысл, если метрик на X не существует. В последнем случае можно использовать локальную метрику, т. е. естественную метрику расслоения-произведения на ограничении $X|U$, где U — такая окрестность точки y , что $X|U$ тривиально. Если база Y бикомпактна, то на X существует (см. [5]) единственная с точностью до эквивалентности метрика. При этом локальные ограниченность и отделенность от нуля означают соответственно ограниченность и отделенность от нуля на G .

Обозначим через LB (LD) множество всех точек из X , движения которых локально ограничены (локально отделены от нуля). Для удобства к множеству LD причислим все точки, являющиеся нуль-векторами в векторной структуре своего слоя. Следующее утверждение очевидно.

2. **Лемма.** Каждая точка множества LB (LD) входит в него вместе с замыканием своей орбиты.

3. Пусть V — слой над некоторой точкой $y_V \in Y$ или векторное подпространство этого слоя и пусть X^V — множество всех отображений $V \rightarrow X$, наделенное топологией поточечной сходимости. Рассмотрим множество $G_V \subset X^V$, состоящее из ограничений на V всех преобразований из G , и пусть $\bar{G}_V$ — замыкание этого множества в X^V . Зафиксируем на G_V индуцированную топологию. Ясно, что sV — образ V при $s \in G_V$, целиком лежит в некотором слое расслоения X и s — линейное отображение. Проекцию на Y слоя, содержащего sV , обозначим через sy_V .

Пусть H_V — совокупность всех преобразований из $\bar{G}_V$, отображающих V в себя. Тогда для любых $s \in \bar{G}_V$ и $h \in H_V$ определена композиция sh отображений h и s . С помощью теоремы «о повторном пределе» (см. [6]) легко проверяется, что $sh \in \bar{G}_V$. Таким образом, композиция определяет непрерывное отображение $\bar{G}_V \times H_V \rightarrow \bar{G}_V$. В частности, H_V — полугруппа. Если H_V — группа, то $\bar{G}_V$ — правое H_V -пространство, и определено расслоение $\bar{G}_V \rightarrow \bar{G}_V/H_V$ пространства $\bar{G}_V$ над пространством его H_V -орбит.

4. **Лемма.** Если выполнено включение $V \subset LB \cap LD$, то H_V — бикомпактная подгруппа главной линейной группы $GL(V)$, и расслоение $\bar{G}_V \rightarrow G_V/H_V$ является главным и локально тривиальным.

Доказательство. Заметим, что подгруппа H_V замкнута в пространстве $L(V)$ линейных отображений V в себя, так как по определению совпадает с пересечением $G_V \cap L(V)$. Из условия $V \subset LB$ вытекает, что полугруппа H_V ограничена в $L(V)$ и, следовательно, бикомпактна. При выполнении условия $V \subset LD$ все преобразования из H_V невырождены. Поэтому $H_V \subset GL(V)$ и для доказательства первого утверждения леммы остается проверить, что H_V вместе с любым своим элементом содержит ему обратный.

Пусть $h \in H_V$. Так как H_V — бикомпактная полугруппа, последовательность $\{h^n : n \in \mathbb{N}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Это означает, что найдется стремящаяся в бесконечность последовательность натуральных чисел $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\lim \{h^{m_n} : n \rightarrow \infty\} = 1_V$. Тогда $h^{-1} = \lim \{h^{m_n-1} : n \rightarrow \infty\}$ и, поскольку множество H_V замкнуто, $h^{-1} \in H_V$.

При доказательстве второго утверждения леммы X можно считать расслоением-произведением. Действительно, отображение $q: \bar{G}_V/H_V \rightarrow Y$, задаваемое формулой $q(sH_V) = sy_V$, непрерывно, поскольку индуцировано непрерывным отображением $Q: \bar{G}_V \rightarrow Y$ таким, что $Q(s) = sy_V$. Поэтому если sH_V — орбита произвольной точки $s \in \bar{G}_V$, и U — такая окрестность точки sy_V , что ограничение $X|U$ тривиально, то найдется окрестность $W \subset \bar{G}_V/H_V$ этой орбиты такая, что $q[W] \subset U$.

Итак, можно положить $X = Y \times F$, где F — векторное пространство. Обозначим через L пространство невырожденных линейных отображений $V \rightarrow F$. Тогда H_V — пространство $\bar{G}_V$, состоящее благодаря условию $V \subset LD$ из невырожденных преобразований, можно рассматривать как инвариантное подпространство прямого произведения $L \times Y$, на котором действие группы H_V определено формулой $(A, y)h = (Ah, y)$, где $y \in Y$, Ah — композиция отображений $h \in H_V$ и $A \in L$. Поэтому достаточно проверить, что главным и локально тривиальным является расслоение $L \times Y \rightarrow (L \times Y)/H_V$. Так как группа H_V действует только на первом сомножителе, то задача еще упрощается: нужно проверить, что расслоение $L \rightarrow L/H_V$ — главное и локально тривиальное. Первое из этих свойств очевидно. Второе следует (см. [5]) из того, что пространство L имеет структуру многообразия, а группа H_V является группой Ли.

5. Будем предполагать далее, что база Y векторного G -расслоения X минимальна, т. е. совпадает с замыканием орбиты любой своей точки.

Пусть, как и выше, $Q: \bar{G}_V \rightarrow Y$ — отображение, определенное формулой $Q(s) = sy_V$, и $q: \bar{G}_V/H_V \rightarrow Y$ — индуцированное отображение, т. е. такое, что $q(sH_V) = sy_V$.

6. Лемма. Пусть выполнено включение $V \subset LB \cap LD$, и для любых преобразований $s_1, s_2 \in \bar{G}_V$ таких, что $s_1y_V = s_2y_V$, имеет место равенство $s_1V = s_2V$. Тогда $Q: \bar{G}_V \rightarrow Y$ — главное, локально тривиальное H_V -расслоение.

Доказательство. Учитывая предыдущую лемму достаточно доказать, что q — гомеоморфизм.

Из минимальности базы Y следует, что для любой точки $y \in Y$ найдется направленность $\{g_n : n \in N\} \subset G$ такая, что $\lim \{g_n y_V : n \in N\} = y$, а из условия $V \subset LB$ — что эта направленность содержит сходящуюся в пространстве $\bar{G}_V$ поднаправленность. Таким образом, в $\bar{G}_V$ существует преобразование s такое, что $sy_V = y$. Это означает, что q — надъективное отображение.

Пусть $s_1 \in \bar{G}_V$. Векторное подпространство $s_1 V$ слоя над $s_1 y_V$ по лемме 2 лежит в LB . Поэтому к нему применимо проведенное выше рассуждение, показывающее, что найдется преобразование $t \in \bar{G}_{s_1 V}$ такое, что $t(s_1 y_V) = y$. Из теоремы «о повторном пределе» (см. [6]) следует, что $ts_1 \in H_V$. Если $s_2 y_V = s_1 y_V$ для некоторого преобразования $s_2 \in \bar{G}_V$, то по условию $s_2 V = s_1 V$, и тогда аналогично предыдущему $ts_2 \in H_V$. Поэтому $s_1^{-1}s_2 = (ts_1)^{-1}(ts_2) \in H_V$ и, значит, $s_1 H_V = s_2 H_V$. Таким образом, отображение q инъективно.

Непрерывность q уже установлена — она следует из того, что это отображение индуцировано непрерывным отображением Q . Для доказательства непрерывности обратного отображения q^{-1} достаточно установить (см. [6]), что отображение Q замкнуто. Но это свойство Q в случае $V \subset LB$ очевидно.

7. Доказанная лемма позволяет ввести в рассмотрение расслоенное пространство $(\bar{G}_V \times V) / H_V \rightarrow Y$ со слоем V , ассоциированное с главным H_V -расслоением $Q : G_V \rightarrow Y$. Так как последнее локально тривиально, то это расслоенное пространство с естественным строением векторного пространства V на каждом слое является векторным расслоением. Чтобы установить связь с исходным расслоением X , определим отображение $r : (\bar{G}_V \times V) / H_V \rightarrow X$, положив $r((s, v)H_V) = sv$. Ясно, что это отображение индуцировано непрерывным отображением $R : \bar{G}_V \times V \rightarrow X$ таким, что $R(s, v) = sv$. Поэтому r непрерывно и для любого $y \in Y$ линейно отображает слой над y расслоенного пространства в слой над y векторного расслоения. Таким образом, r — Y -морфизм векторных расслоений. В условиях последней леммы, когда все преобразования из $\bar{G}_V$ невырождены, Y -морфизм r инъективен. В этом случае (см. [5]) множество значений r , т. е. множество $X_V = \{sv : s \in \bar{G}_V, v \in V\}$, является подрасслоением векторного расслоения X . Ясно, что это подрасслоение G -инвариантно и присущая ему структура расслоенного пространства обладает свойством $g(s, v)H_V = (gs, v)H_V$, $g \in G, s \in \bar{G}_V, v \in V$, где gs — композиция преобразований s и g . Заметим, что определяемое композицией отображение $G \times \bar{G}_V \rightarrow \bar{G}_V$ превращает $\bar{G}_V$ в G -пространство, и это G -пространство является минимальным.

О п р е д е л е н и е. Пусть $(Z \times V) / H \rightarrow Y$ — расслоенное пространство со слоем V , ассоциированное с главным H -расслоением $Z \rightarrow Y$, и пусть на пространстве $(Z \times V) / H$ задано действие топологической группы G . Будем говорить, что действие группы G сохраняет

V -проекцию, если пространство Z является G -пространством, и $g(z, v) \times \times H = (gz, v)H$, $g \in G$, $z \in Z$, $v \in V$. (Отметим, что в этом случае действия групп G и H на Z коммутируют: $g(zh) = (gz)h$, $g \in G$, $z \in Z$, $h \in H$). Если дополнительно G -пространство Z минимально, будем говорить, что действие группы G минимально сохраняет V -проекцию.

Итак, доказано следующее утверждение.

8. Лемма. В условиях предыдущей леммы множество X_V является G -инвариантным подрасслоением векторного G -расслоения X , обладающим структурой локально тривиального расслоенного пространства со слоем V и бикompактной структурной группой $H \subset GL(V)$. Индуцированное на X_V действие группы G минимально сохраняет V -проекцию.

9. Теорема. Пусть $E \subset X$ — такое множество, что (I) для любого $y \in Y$ пересечение $V_y = E \cap X_y$ является векторным подпространством слоя X_y , (II) для каждого $x \in E$ замыкание орбиты x лежит в E , (III) выполнено включение $E \subset LB \cap LD$. Тогда E — G -инвариантное подрасслоение векторного G -расслоения X , обладающее такой структурой локально тривиального расслоенного пространства со слоем $V \cong V_y$, $y \in Y$, что его структурная группа $H \subset GL(V)$ бикompактна, и индуцированное действие группы G минимально сохраняет V -проекцию.

Доказательство. Из условия (II) следует, что для любых $y \in Y$ и $s \in \bar{G}_V$ выполнено включение $sV_y \subset E$, и тогда $sV_y \subset V_{sy}$. Благодаря условию (III) преобразование s невырождено. Значит, $\dim V_y \leq \leq \dim V_{sy}$. Заметим теперь, что поскольку пространство Y предполагается минимальным и выполнено условие (III), множество $\{sy : s \in \bar{G}_V\}$ совпадает с Y . Поэтому из последнего неравенства вытекает, что $\dim V_y$ не зависит от y , а из последнего включения тогда следует, что $sV_y = V_{sy}$. Таким образом пространство $V = V_y$ удовлетворяет условиям лемм 6 и 8, а множество X_V , фигурирующее в последней из них, совпадает с множеством E . Доказываемое утверждение вытекает теперь из леммы 8.

Следствие 1. Пусть $LB \subset LD$. Тогда LB — G -инвариантное подрасслоение векторного G -расслоения X , и на LB существует G -инвариантная метрика.

Доказательство. Условия (I) и (III) теоремы 9 очевидным образом выполнены при $E = LB$. Условие (II) выполнено в силу леммы 2. Поэтому LB — G -инвариантное подрасслоение, которое при доказательстве второго утверждения можно рассматривать как расслоенное пространство $(Z \times V) / H \rightarrow Y$, обладающее указанными в теореме 9 свойствами.

Согласно теореме об унитарности представления бикompактной группы на векторном H -пространстве V существует H -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$. Легко проверяется, что формула $\beta((z, v)H, (z, w)H) = (v, w)$, $z \in Z$, $v, w \in V$, определяет в этом случае метрику на LB . Инвариантность этой метрики относительно сохраняющего V -проекцию действия группы G очевидна.

10. Будем говорить, что векторное G -расслоение неприводимо, если оно не имеет собственное G -инвариантное подрасслоение.

Следствие II. В условиях следствия I векторное G -расслоение LB распадается в прямую сумму неприводимых G -инвариантных подрасслоений.

Доказательство. Требуется проверить, что если $X_1 \subset LB$ — G -инвариантное подрасслоение, то существует G -инвариантное подрасслоение $X_2 \subset LB$ такое, что $LB = X_1 \oplus X_2$. Но это так, поскольку в качестве X_2 можно выбрать ортогональное дополнение к X_1 в LB относительно G -инвариантной метрики, существующей в силу предыдущего следствия.

11. Доказательству еще одного следствия теоремы 9 предпослшем лемму. Пусть Z — G -пространство, и $z \in Z$. Будем предполагать, что пространство Z регулярно и хаусдорфово. Обозначим через T_z топологию на G поточечной сходимости на множестве, состоящем из одной точки z . Если (G, T_z) — группа G , наделенная топологией T_z , является предкомпактной топологической группой, то точку z называют почти периодической Левитана (п. п. Л.).

Пусть $z \in Z$ — п. п. Л. точка и E_z — совокупность всех $g \in G$ таких, что $gz = z$. Тогда E_z — нормальный делитель группы G , и определена фактор-группа $G_z = (G, T_z) / E_z$. Благодаря проведенной факторизации группа G_z отделяема, и тогда ее пополнение G_z^* представляет собой бикompактную топологическую группу. Отметим, что орбита п. п. Л. точки состоит из п. п. Л. точек, а ее замыкание является минимальным множеством.

12. **Лемма.** Пусть G -пространство Z состоит из п. п. Л. точек и является минимальным множеством. Тогда Z как G -пространство изоморфно некоторому множеству $Z^* \subset G_z^*$, на котором действие группы G определено как умножение слева. Если для некоторой топологической группы H множество Z является главным правым H -пространством таким, что действия групп G и H коммутируют, то существует изоморфная группе H подгруппа $H^* \subset G_z^*$ такая, что с точностью до изоморфизмов $Z \cong Z^*$ и $H \cong H^*$ действие H на Z совпадает с умножением справа.

Доказательство. Пусть $z \in Z$. Рассмотрим группу G_z как подпространство пространства всех отображений $z \rightarrow Z$, снабженного топологией поточечной сходимости. Замыкание G_z в этом пространстве обозначим через $\bar{G}_z$ и определим действие группы G на $\bar{G}_z$, положив, что gs означает композицию преобразований $s \in G_z$ и $g \in G$. Ясно, что отображение $\bar{G}_z \rightarrow Z : s \rightarrow sz$, где пространство Z благодаря минимальности совпадает с замыканием орбиты точки z , является изоморфизмом G -пространств. С другой стороны, в случае регулярного пространства Z каноническое вложение $G_z \rightarrow G_z^*$ по непрерывности продолжается до вложения $\bar{G}_z \rightarrow G_z^*$. При этом определенное на $\bar{G}_z$ действие группы G , очевидно, совпадает с умножением слева.

Первое утверждение леммы доказано. При доказательстве второго можно считать, что Z — подмножество группы $\bar{G}_z^*$, на котором действие группы G определено как умножение слева.

Пусть $s \in Z$ и $h \in H$. Выберем направленность $\{g_n : n \in N\} \subset G_z$, сходящуюся в G_z^* к s . Тогда по условию $g_n^{-1}(sh) = (g_n^{-1}s)h$ для всех $n \in N$. Переходя к пределу, получим $s^{-1}(sh) = (s^{-1}s)h = eh$ или $sh = s(eh)$. Последнее соотношение показывает, что применение преобразования $h \in H$ к $s \in Z$ эквивалентно умножению s на eh справа. Поэтому соответствие $h \rightarrow eh$ является морфизмом группы H в группу G_z^* . Благодаря тому, что H -пространство Z — главное, это соответствие инъективно и непрерывно в обе стороны. Таким образом, совокупность $H^* = \{eh : h \in H\}$ является требуемой подгруппой группы G_z^* .

13. Пусть база Y векторного G -расслоения X является регулярным хаусдорфовым пространством. Как и ранее, предполагается, что Y — минимальное G -пространство. Расслоение будем считать комплексным. Обозначим через APL совокупность всех п. п. Л. точек из X .

С л е д с т в и е III. Пусть для любой точки $x \in APL$ замыкание ее орбиты содержится в APL . Тогда APL — G -инвариантное подрасслоение векторного G -расслоения X . Если группа G коммутативна, то APL распадается в прямую сумму одномерных, тривиальных, G -инвариантных подрасслоений. Для каждого из них можно указать сечение s и характер χ группы G такие, что $gs(y) = \chi(g)s(gy)$, $g \in G$, $y \in Y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверяется, что множество APL удовлетворяет условиям (I) и (III) теоремы 9. Условие (II) этой теоремы входит в условия доказываемого утверждения. Поэтому из теоремы 9 следует, что APL — G -инвариантное подрасслоение X , которое при доказательстве второй части следствия можно рассматривать как расслоенное пространство $(Z \times V) / H \rightarrow Y$, свойства которого указаны в теореме 9. Из этих свойств, в частности, следует, что G -пространство Z удовлетворяет условиям леммы 12. Действительно, пространство Z минимально и благодаря локальной тривиальности над Y регулярно и хаусдорфово. Кроме того оно состоит из п. п. Л. точек, поскольку из сохранения V -проекции следует, что топология поточечной сходимости на точке $z \in Z$ совпадает с топологией поточечной сходимости на слое $\{(z, v)H : v \in V, \}$ состоящем из п. п. Л. точек. В силу леммы 12 множество Z можно считать подмножеством бикомпактной топологической группы G_z^* ($z \in Z$), а группу H — подгруппой G_z^* . Причем действие групп G и H на Z заключается в умножении на элементы этих групп. Порядок сомножителей в данном случае не важен, так как группа G , а значит, и G_z^* коммутативны. Таким образом, если действия групп G и H на G_z^* определить как умножение, то G -пространство APL окажется ограничением на $Y \cong Z/H$ расслоенного пространства $(G_z^* \times V) / H \rightarrow G_z^*/H$, на котором действие группы G сохраняет V -проекцию. Поэтому второе утверждение следствия достаточно доказать для введенного расслоенного пространства.

По теореме о приводимости представления бикомпактной коммутативной группы векторное H -пространство V содержит одномерное, H -инвариантное подпространство, и если v — вектор из этого подпространства, то $hv = \chi(h)v$ для всех $h \in H$ и некоторого характера χ группы H . По теореме о продолжении характеров χ можно считать

характером группы G_z^* , а тогда и группы G . Определим функцию $u: G_z^* \rightarrow V$ формулой $u(t) = \chi^{-1}(t)v$. Тогда $u(th) = h^{-1}u(t)$ для всех $t \in G_z^*$ и $h \in H$. Это означает (см. [5]), что формула $s(y) = (t, u(t))H$, где $y = tH \in G_z^*/H$, определяет сечение расслоенного пространства $(G_z^* \times V)/H \rightarrow G_z^*/H$. Так как $gs(y) = g(t, u(t))H = (gt, u(t))H = (gt, \chi(g)u(gt))H = \chi(g)s(gy)$ для всех $y \in G_z^*/H$ и $g \in G$, то определяемое сечением s тривиальное одномерное подрасслоение является G -инвариантным. Согласно предыдущему следствию это означает, что рассматриваемое расслоение распадается в прямую сумму таких подрасслоений. Существование в каждом из них сечения с требуемыми свойствами уже установлено.

Список литературы: 1. Атья М. Лекции по К-теории.— М., 1967.— 264 с. 2. Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований.— Кишинев, 1975.— 312 с. 3. Любарский М. Г. О решениях линейных однородных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— 11, № 4.— С. 90—91. 4. Любарский М. Г. О существовании обобщенного базиса Флоке // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— 18, № 3.— С. 88—89. 5. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М., 1970.— 444 с. 6. Келли Дж. Л. Общая топология.— М., 1968.— 384 с.

Поступила в редколлегию 08.08.86

УДК 517.555

Ю. И. ЛЮБАРСКИЙ

ПОЛНОТА И МИНИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ВИДА

$$\{a(t)\varphi^n(t) - b(t)\psi^n(t)\}_N^\infty$$

а. Введение. В настоящей работе рассматриваются вопросы полноты и минимальности в пространстве функций $L^2(I)$ на отрезке, $I = [0, \pi]$ системы функций $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_N(a, b; \varphi, \psi) = \{d_n(t)\}_{n=N}^\infty$, $d_n(t) = a(t)\varphi^n(t) - b(t)\psi^n(t)$, где $a, b, \varphi, \psi \in C(I)$ — заданные функции, $N \in \mathbb{Z}$ — заданное число. Часть результатов работы аннотирована в [1] и доказана в [2]. В [1, 2] содержится также изложение истории вопроса, которое поэтому здесь не приводится. Укажем лишь, что система $\mathcal{K}_N$ не только представляет самостоятельный интерес, но и является модельной в вопросах полноты и минимальности части собственных и присоединенных функций дифференциальных операторных пучков.

В работе устанавливается (независимо и несколько иным способом это было сделано В. А. Ткаченко, см. [2, §2]), что вопросы полноты и минимальности редуцируются к краевым задачам с карлемановским сдвигом на границе соответствующей области. При этой редукции оказывается, что тривиальная разрешимость однородной задачи эквивалентна полноте, а существование решения неоднородной задачи — минимальности. Получающиеся при этом краевые задачи со сдвигом имеют ряд особенностей по сравнению с известными в лите-

ратуре и требуют специального изучения. Мы проводим это изучение и показываем, как в широком круге задач выбрать по функциям a, b, φ, ψ число N таким образом, чтобы система $\mathcal{K}_N(a, b, \varphi, \psi)$ была полной и минимальной в пространстве $L^2(I)$. Полученные результаты применяются затем к модельной системе $\{e^{\alpha n} \sin nt\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Автору приятно выразить благодарность Б. Я. Левину и В. А. Ткаченко за полезные обсуждения и поддержку работы.

6. Обозначения. Формулировка результата. Пусть функции $\varphi, \psi \in C^2(I)$; $a, b \in C(I)$. Положим $\Gamma_{\varphi} = \{z \in \mathbb{C}, z = \varphi(t), t \in I\}$, $\Gamma_{\psi} = \{z \in \mathbb{C}, z = \psi(t), t \in I\}$, $\Gamma = \Gamma_{\varphi} \cup \Gamma_{\psi}$. Положительным направлением на Γ_{φ} будем считать направление от $\varphi(0)$ к $\varphi(1)$, а на Γ_{ψ} — от $\psi(1)$ к $\psi(0)$. В дальнейшем будем считать, что $\Gamma_{\varphi}, \Gamma_{\psi}$ — простые кривые и $\varphi'(t)\psi'(t) \neq 0, \forall t \in I$ (1), $a(t) \cdot b(t) \neq 0, \forall t \in I$ (2). Отображение $f \mapsto f \circ \varphi^{-1}$ (соответственно $f \mapsto f \circ \psi^{-1}$) является изоморфизмом пространств $L^2(I)$ и $L^2(\Gamma_{\varphi})$ ($L^2(\Gamma_{\psi})$).

Лемма 1. Пусть выполнены (1), (2) и, кроме того, множество $\Gamma_{\varphi} \cap \Gamma_{\psi}$ не более чем счетно. Тогда следующие утверждения эквивалентны: а) система $\mathcal{K}_N$ полна в $L^2(I)$; б) не существует ненулевой функции $h \in L^2(\Gamma)$, такой что $\int_{\Gamma} h(\xi) \xi^n d\xi = 0, n \geq N$ (3)

и $\frac{\varphi'(t)}{a(t)} h(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{b(t)} h(\psi(t))$ при почти всех $t \in I$ (4).

Лемма 2. В условиях леммы 1 следующие утверждения эквивалентны: в) система $\mathcal{K}_N$ минимальна в $L^2(I)$; г) $\forall k \geq N$ найдется функция $h = \hat{h}_k \in L^2(\Gamma)$, удовлетворяющая (4) и такая, что

$$\int_{\Gamma} \hat{h}_k(\xi) \xi^n d\xi = \delta_{k,n}, k, n \geq N. \quad (5)$$

Леммы 1 и 2 доказываются аналогично. Ограничимся доказательством первой из них.

Доказательство леммы 1. Неполнота $\mathcal{K}_N$ в $L^2(I)$ эквивалентна существованию функции $g \in L^2(I)$ такой, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I g(t) d_n(t) dt = \int_I \frac{a(t)}{\varphi'(t)} g(t) \varphi^n(t) d\varphi(t) - \\ &- \int_I \frac{b(t)}{\psi'(t)} g(t) \psi^n(t) d\psi(t), n \geq N. \end{aligned} \quad (6)$$

Функция h , определенная на Γ соотношениями

$$h(\varphi(t)) = \frac{a(t)}{\varphi'(t)} g(t), h(\psi(t)) = \frac{b(t)}{\psi'(t)} g(t),$$

очевидно, принадлежит $L^2(\Gamma)$ и удовлетворяет (4). При выполнении этих условий соотношения (3) и (6) получаются одно из другого заменой переменных $\xi = \varphi(t)$, $\xi \in \Gamma_{\varphi}$ и $\xi = \psi(t)$, $\xi \in \Gamma_{\psi}$.

Следствие. Пусть в условиях леммы 1 множество $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ связно. Тогда при любом $N \in \mathbb{Z}$ система $\mathcal{K}_N$ полна в $L^2(I)$.

В самом деле, в этом случае $\forall N \in \mathbb{Z}$, не существует ненулевой функции, удовлетворяющей (3).

В дальнейшем рассматривается простейший случай, когда $C \setminus \Gamma$ несвязно. Именно, предполагается, что Γ — простая кривая и $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi(1) = \varphi(1)$ (7). При этом Γ — кусочно-гладкий контур, его изломы возможны в точках $\xi_0 = \varphi(0)$, $\xi_1 = \varphi(1)$. Пусть $\pi\theta_0$, $\pi\theta_1$ — внутренние углы в этих точках. Обозначим через D_Γ^+ и D_Γ^- соответственно ограниченную и неограниченную компоненты множества $C \setminus \Gamma$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 \in D_\Gamma^+$ и $\theta_0 > 0$, $\theta_1 > 0$ (8).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (8). Выберем непрерывную на I ветвь функции $L(t) \stackrel{\text{def}}{=} (2i\pi)^{-1} \log \{a(t)\varphi'(t)(b(t) \times \times \varphi'(t))^{-1}\}$ и положим $a_+ = b_+ + ic_+ = L(\pi)$, $a_- = b_- + ic_- = L(0)$ и, кроме того*, $\mu_+ = (\pi\theta_1)^{-1} \log |\varphi'(\pi - 0)/\varphi'(\pi + 0)|$; $\mu_- = (\pi\theta_0)^{-1} \times \times \log |\varphi'(+0)/\varphi'(-0)|$; $\alpha_+ = \frac{\theta_1}{2}(\mu_+^2 + 1) - 1$; $\alpha_- = \frac{\theta_0}{2}(\mu_-^2 + 1) - 1$; $\beta_\pm = \alpha_\pm \pm 2(b_\pm - c_\pm\mu_\pm)$; (9) $N_\pm = [(1 - \beta_\pm)/2]$; $N = N_+ + N_- - 1$ (10). Тогда система $\mathcal{K}_N$ полна и минимальна в $L^2(I)$.

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько шагов. в. Сведем исследование вопросов полноты и минимальности системы $\mathcal{K}_N$ к исследованию краевой задачи со сдвигом в подходящем пространстве аналитических функций. Пусть для определенности принятое ранее направление обхода индуцирует положительное направление на контуре Γ . Отображение $\omega: \xi \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(\xi))$, $\xi \in \Gamma_\alpha$, $\omega: \xi \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(\xi))$, $\xi \in \Gamma_\psi$ (11) является изменяющим ориентацию гомеоморфизмом контура Γ , который: *i*) удовлетворяет условию Карлемана $\omega(\omega(\xi)) \equiv \xi$; *ii*) переводит Γ_φ и Γ_ψ друг на друга; *iii*) всюду, кроме точек ξ_0 и ξ_1 , имеет производную $\omega'(\xi) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\xi = \varphi(t) \in \Gamma_\varphi$; $\omega'(\xi) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\xi = \psi(t) \in \Gamma_\psi$, непрерывно дифференцируемую (это следует из (1)) на Γ_φ и Γ_ψ . В точках ξ_0 и ξ_1 существуют односторонние производные функции $\omega(\xi)$. Положим далее

$$G(\xi) = \frac{b(t)\varphi'(t)}{a(t)\varphi'(t)}, \quad \xi = \varphi(t) \in \Gamma_\varphi; \quad G(\xi) = \frac{a(t)\psi'(t)}{b(t)\varphi'(t)}, \quad \xi = \psi(t) \in \Gamma_\psi, \quad (12)$$

$$g_k(\xi) = (2i\pi)^{-1} [G(\xi)\xi^{-k-1} - \omega(\xi)^{-k-1}], \quad \xi \in \Gamma. \quad (13)$$

Пусть $E^2 = E^2(D_\Gamma^+)$ — пространство В. И. Смирнова (см., например [3]) в D_Γ^+ , $E_N^2 = \xi^{-N}E^2$. Из теоремы Ф. и М. Риссов следует, что функции h и $\hat{h}_k$, удовлетворяющие на Γ соотношениям (3), (5) продолжаются в область D_Γ^+ до соответственно функций $h \in E_N^2$ и $\hat{h}_k(\xi) = h_k(\xi) + (2i\pi)^{-1}\xi^{-k-1}$, $h_k \in E_N^2$. Условие (4) приводит теперь к однородной и неоднородной задачам для функций h , h_k , что позволяет переформулировать леммы 1, 2 следующим образом.

* Квадратные скобки в соотношении (10) — знак целой части.

Лемма 3. При выполнении условий (1), (2), (7), (8) верно

а) для полноты системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно, чтобы однородная задача со сдвигом $h(\omega(\xi)) = G(\xi)h(\xi)$, $\xi \in \Gamma$ (14) не имела нетривиального решения в пространстве $E_N^2(D_\Gamma^+)$;

б) для минимальности системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно, чтобы неоднородная краевая задача со сдвигом $h_k(\omega(\xi)) = G(\xi)h_k(\xi) + g_k(\xi)$, $\xi \in \Gamma$ (15) при любом $k \geq N$ была разрешима в пространстве $E^2(D_\Gamma^+)$.

Здесь ω , G , и g_k определены равенствами (11), (12), (13).

Краевые задачи со сдвигом (14) и (15) подробно рассмотрены в монографии [4], где изложена история вопроса и приведена подробная библиография. В частности, в [4, гл. IV] изложен метод конформной склейки для решения задач (14), (15) для случая, когда Γ — ляпуновский контур и при некотором $\gamma > 0$ выполнено условие $\omega' \in \text{Lip}_\gamma(\Gamma)$. В нашем случае оба эти условия, вообще говоря, нарушаются в точках ξ_0 и ξ_1 . Поэтому мы переводим задачу в единичный круг, а затем используем результаты [5], позволяющие применить метод конформного склеивания в случае, когда производная сдвига терпит разрыв в неподвижных точках.

Зафиксируем конформное отображение $Z: \xi \mapsto z = Z(\xi)$ области D_Γ^+ на единичный круг D с центром в нуле, такое, что $Z(\xi_0) = -1$, $Z(\xi_1) = 1$. Положим $z_0 = Z(0)$. Продолжим Z по непрерывности на Γ . При этом $Z(\Gamma_\varphi) = T_-$, $Z(\Gamma_\psi) = T_+$, где $T_\pm$ — соответственно верхняя и нижняя полуокружности. Обозначим через H^2 пространство Харди в единичном круге и положим

$$H_N^2 = (z - z_0)^{-N} (z + 1)^{(1-\theta_0)/2} (z - 1)^{(1-\theta_1)/2} H^2; \quad (16)$$

$$\tilde{G}(z) = G(Z^{-1}(z)); \quad \tilde{g}_k(z) = g_k(Z^{-1}(z)), \quad z \in T \stackrel{\text{def}}{=} \partial D; \quad (17)$$

$$\tilde{\omega} = Z^{-1} \circ \omega \circ Z, \quad \tilde{\omega}: T \rightarrow T. \quad (18)$$

Стандартные оценки поведения отображения Z в окрестностях угловых точек ξ_0 , ξ_1 позволяют переформулировать лемму 3 следующим образом.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (8). Тогда

а) для полноты системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача со сдвигом $\tilde{h}(\tilde{\omega}(z)) = \tilde{G}(z)\tilde{h}(z)$, $z \in T$ имела лишь тривиальное решение в $\tilde{H}^2$; б) для минимальности системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно, чтобы неоднородная краевая задача $\tilde{h}_k(\tilde{\omega}(z)) = \tilde{G}(z)\tilde{h}_k(z) + \tilde{g}_k(z)$, $z \in T$ имела решения $\tilde{h}_k \in \tilde{H}_N^2$ при каждом $k \geq N$.

Здесь $\tilde{H}_N^2$, $\tilde{G}$, $\tilde{g}_k$ и $\tilde{\omega}$ определены соотношениями (16) — (18).

Для дальнейшего потребуются значения односторонних производных гомеоморфизма $\tilde{\omega}$ в точках ± 1 . Прямое вычисление дает

$$\left. \begin{aligned} \lambda_+^{\text{def}} &= -\tilde{\omega}'(1+i0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow 1, z \in T_+} -\tilde{\omega}'(z) = \left| \frac{\varphi'(\pi-0)}{\psi'(\pi-0)} \right|^{1/\theta_1}, \\ \tilde{\omega}'(1-i0) &= \lim_{z \rightarrow 1, z \in T_-} \tilde{\omega}'(z) = -\lambda_+^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\lambda_- \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{\omega}'(-1+i0) \stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{z \rightarrow -1, z \in \Gamma_+} \tilde{\omega}'(z) = \left| \frac{\varphi'(0)}{\psi'(0)} \right|^{1/\theta_0}, \left. \begin{aligned} \tilde{\omega}'(-1-i0) &= -\lambda_-^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Положим также

$$\mu_+ = \frac{1}{\pi\theta_1} \log \lambda_+, \quad \mu_- = \frac{-1}{\pi\theta_0} \log \lambda_-, \quad \varphi_{\pm} = \arctg \mu_{\pm} \quad (21)$$

г. Переход к задаче Римана на спирали. Приведем относящиеся к нашему случаю определения и результаты [5].

Определение 1. *Логарифмической спиралью с параметрами $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ сужающейся к точке $\omega_0 \in \mathbb{C}$, назовем кривую*

$$S(a, \varphi; \omega_0) = \{z \in \mathbb{C}; z = \omega_0 + a \exp[-t(\cos \varphi + i \sin \varphi)], t \geq 0\}.$$

Определение 2. *Кривая K асимптотически стремится к логарифмической спирали $S(a, \varphi, \omega_0)$, если она допускает такую параметризацию $K = \{F(t), t \geq 0\}$, что*

$$F(t) - \omega_0 - ae^{-t(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = O(e^{-2t \cos \varphi}), \quad t \rightarrow +\infty;$$

$$F'(t) + ae^{i\varphi} e^{-t(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = O(e^{-2t \cos \varphi}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Введем вспомогательное отображение

$$S: z \mapsto s = S(z) = \log \frac{1+z}{1-z}, \quad (22)$$

которое при подходящем выборе аргумента переводит круг D в полосу $\Pi = \{s: |\operatorname{Im} s| < \pi/2\}$.

Теорема А (о конформной склейке [5]). *В введенных выше обозначениях существуют простая гладкая кривая K и конформное отображение $W: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$, обладающие следующими свойствами:*

1) *кривая K является объединением двух кривых $K_{\pm}$, асимптотически стремящихся к логарифмическим спиральям $S(a_{\pm}, \varphi_{\pm}, \pm 1)$ при некоторых значениях $a_{\pm} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;*

2) *выполнены асимптотические соотношения*

$$\begin{aligned} W(z) - \{\pm 1 + a_{\pm} \exp[\mp 2S(z) \cos \varphi_{\pm} \cdot e^{i\varphi_{\pm}}]\} = \\ = O(\exp[\pm 4S(z) \cos^2 \varphi_{\pm}]), \quad z \rightarrow \pm 1, \quad z \in D; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} W'(z) \pm 2a_{\pm} S'(z) \cos \varphi_{\pm} e^{i\varphi_{\pm}} \exp[\mp 2S(z) \cos \varphi_{\pm} e^{i\varphi_{\pm}}] = \\ = O(\exp[\mp 4S(z) \cos^2 \varphi_{\pm}]) S'(z), \quad z \rightarrow \pm 1, \quad z \in D; \end{aligned} \quad (24)$$

$$3) \quad W(z_0) = \infty. \quad (25)$$

Замечание. В [5] рассматривалось конформное отображение на внешность спирали, сходящейся к нулю и к бесконечности. Это с точностью до конформного отображения то же самое.

С помощью отображения W краевые задачи со сдвигом, сформулированные в лемме 4, сводятся к задаче Римана на кривой K (при

этом очевидно выполняются соотношения $\tilde{G}(z)\tilde{G}(\bar{w}(z))=1$; $G(\bar{w}(z))\times \times \tilde{g}_k(z)+\tilde{g}_k(\bar{w}(z))=0$, $z\in T$, без которых такое сведение невозможно). Пространство функций, в котором нужно решать задачу Римана, имеет вид

$$\mathcal{H}_N^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \hat{f}, f \text{ голоморфно в } C \setminus K, f(W(z)) \in H_N^2 \}.$$

Пусть $l_r = W\{z: |z|=r\}$, $r \in (0, 1)$ и W_- — отображение, обратное к W . Голоморфная в $C \setminus K$ функция $\hat{f}$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_N^2$ если: а) $\hat{f}$ имеет в бесконечности полюс порядка не выше N ; б) $\sup_{1/2 < r < 1} \left\{ \int_{l_r} |\hat{f}(w)|^2 |W_-(w) + 1|^{\theta_0-1} |W_-(w) - 1|^{\theta_1-1} |W'_-(w)| |dw| \right\} < \infty$. Положим $\alpha_+ = \frac{\theta_1}{2}(\mu_+^2 + 1) - 1$; $\alpha_- = \frac{\theta_0}{2}(\mu_-^2 + 1) - 1$, здесь числа $\mu_{\pm}$ определены соотношениями (19) — (21). Прямое вычисление с учетом (21) — (24) показывает, что $|W_-(w) + 1|^{\theta_0-1} |W_-(w) - 1|^{\theta_1-1} \times \times |W'_-(w)| \asymp |w \mp 1|^{\alpha_{\pm}}$, $w \rightarrow \pm 1$. Поэтому условие б) можно переписать следующим образом:

$$\text{б')} \sup_{1/2 < r < 1} \left\{ \int_{l_r} |\hat{f}(w)|^2 |w + 1|^{\alpha_-} |w - 1|^{\alpha_+} |dw| \right\} < \infty.$$

Будем считать положительным на кривой K направление от -1 к 1 . Если U — некоторая окрестность K и функция F задана в $U \setminus K$ то через $F^{\pm}(v)$ при $v \in K$ обозначим соответственно левое и правое предельные значения функции F , если они существуют. В частности, через $W^{\pm}(v)$ при $v \in K$ обозначим значения обратной функции, являющиеся предельными при приближении к K соответственно слева и справа. Положим $\hat{G}(v) = \tilde{G}(W_-(v))$, $\hat{g}_k(v) = \tilde{g}_k(W_-(v))$, $v \in K$. Лемма 4 может теперь быть переформулирована так.

Лемма 5. Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (8). Тогда а) для полноты системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно, чтобы однородная задача Римана

$$\hat{f}^+(v) = \hat{G}(v) \hat{f}^-(v), \quad v \in K \quad (26)$$

имела лишь тривиальное решение в пространстве $\mathcal{H}_N^2$;

б) для минимальности системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно, чтобы неоднородная задача Римана

$$\hat{f}_k^+(v) = G(v) \hat{f}_k^-(v) + \hat{g}_k(v), \quad v \in K \quad (27)$$

имела решения $\hat{f}_k \in \mathcal{H}_N^2$ при каждом $k \geq N$.

д. Решение задачи Римана проводится по стандартной схеме, изложенной, например, в [6, гл. 2] с учетом специфики, вносимой структурой контура K . Заметим, прежде всего, что длина контура K конечна. Выберем какую-нибудь непрерывную на K ветвь функции $\log \hat{G}(v)$ и определим голоморфную в $C \setminus K$ функцию

$$X(w) = \exp \left(\frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{\log \hat{G}(v)}{v-w} dv \right), \quad w \in C \setminus K.$$

Имеем $X^+(v) = \hat{G}(v) X^-(v)$, $v \in K$. Пусть, кроме того, $a_{\pm} = b_{\pm} + ic_{\pm} = (2i\pi)^{-1} \log \hat{G}(\pm 1)$. Выберем ограниченные окрестности $U_{\pm}$ точек ± 1 такие, что $U_{\pm} \setminus K$ односвязно и зафиксируем в $U_{\pm} \setminus K$ какие-нибудь однозначные ветви функций $\arg(w \mp 1)$. Легко видеть, что $|X(w)| \asymp |(\omega \mp 1)^{\pm \alpha_{\pm}}|$, $\omega \rightarrow \pm 1$, $\omega \in U_{\pm} \setminus K$ (28). Отсюда и из соотношений $\arg(\omega \mp 1) \asymp (\log |\omega \mp 1|) \operatorname{tg} \varphi_{\pm}$, $\omega \rightarrow \pm 1$, $\omega \in U_{\pm} \setminus K$ (29) вытекает

$$|X(w)| \asymp |\omega \mp 1|^{\pm(b_{\pm} - c_{\pm} \operatorname{tg} \varphi_{\pm})}, \quad \omega \rightarrow \pm 1. \quad (30)$$

Поэтому задачи (26), (27) сводятся к задачам со скачком для функций $f = \hat{f} X^{-1}$, $f_k = \hat{f}_k X^{-1}$ соответственно $f^+(v) = f^-(v)$, $v \in K$ (31), $f_k^+(v) = f_k^-(v) + \gamma_k(v)$, $v \in K$, $k \geq N$ (32), где $\gamma_k(v) = \hat{g}_k(v) (X^+(v))^{-1}$ (33). Опишем пространство $\mathcal{H}_N^2$, в котором нужно исследовать задачи (31), (32). Голоморфная в $\mathbb{C} \setminus K$ функция f принадлежит пространству $\mathcal{H}_N^2$, если в) f имеет в бесконечности полюс порядка не выше N ;

$$\text{г) } \sup_{1/2 < r < 1} \left\{ \int_{\Gamma_r} |f(w)|^2 |\omega + 1|^{\beta_-} |\omega - 1|^{\beta_+} |dw| \right\} < \infty, \quad (34)$$

где

$$\beta_{\pm} = \alpha_{\pm} \pm 2(b_{\pm} - c_{\pm} \operatorname{tg} \varphi_{\pm}). \quad (35)$$

С каждым двумя числами γ_+ , $\gamma_- \in \mathbb{R}$ свяжем пространство $L^2(K; \gamma_+, \gamma_-)$, состоящее из измеримых на K функций Φ таких, что

$$\|\Phi\|_{\gamma_+, \gamma_-}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_K |\Phi(v)|^2 |v + 1|^{\gamma_-} |v - 1|^{\gamma_+} |dv| < \infty.$$

Легко доказать (для этого нужно вернуться в круг с помощью отображения W_-), что предельные значения $f^{\pm}$ каждой функции из $\mathcal{H}_N^2$ принадлежат пространству $L^2(K; \beta_+, \beta_-)$.

Рассмотрим задачу (31). Если f удовлетворяет соотношению (31), то f голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. Из определения (16) пространства $\mathcal{H}_N^2$, оценок (22), (23), конформного отображения W и оценки (28) вытекает, что при некотором достаточно большом m выполнены соотношения $\int_{U_{\pm}} |f(w)|^2 |\omega \mp 1|^m d\sigma_{\omega} < \infty$, где $d\sigma_{\omega}$ — элемент евклидовой площади.

Отсюда следует, что точки ± 1 являются регулярными точками или полюсами функции f и с учетом возможного полюса в бесконечности f является рациональной функцией. Выберем числа $n_{\pm} \in \mathbb{Z}$ таким образом, чтобы $|f(w)| \asymp |\omega \mp 1|^{n_{\pm}}$, $\omega \rightarrow \pm 1$. Из включения $f|_K \in L^2(K; \beta_+, \beta_-)$ следует, что $n_{\pm} > -(1 + \beta_{\pm})/2$ (36). Так как суммарное число нулей и полюсов рациональной функции равно нулю, то должно быть выполнено соотношение $n_+ + n_- - N \leq 0$ (37). Положим $N_{\pm} = [(1 - \beta_{\pm})/2]$ (38). Соотношение (37) может иметь место лишь при $N_+ + N_- - N \leq 0$. Наоборот, если $N_+ + N_- - N \leq 0$, то функция $f(w) = (w + 1)^{N_+} (w - 1)^{N_-}$ дает пример ненулевой функции из $\mathcal{H}_N^2$, решающей задачу (31). Таким образом доказана

Лемма 6. При выполнении условий (1), (2), (7), (8) для полноты системы $\mathcal{H}_N$ в $L^2(I)$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $N_+ + N_- - N > 0$, где числа $N_{\pm}$ определены соотношением (38).

Для исследования неоднородной задачи (32) рассмотрим преобразование Гильберта на кривой K

$$T: \Phi \mapsto (T\Phi)(v) = \frac{1}{\pi} \oint_K \frac{\Phi(v')}{v' - v} dv'.$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема Б (об ограниченности преобразования Гильберта). Для ограниченности оператора T в $L^2(K; \gamma_+, \gamma_-)$ необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_{\pm} \in (-1, 1)$.

Это утверждение прямо следует из общей теоремы Давида (см., например [7, теорему 5.1.11]), но допускает и значительно более простое прямое доказательство, аналогичное доказательству теоремы 4.1 [8, гл. 1]. Для функции $\Phi \in L^1(K)$ положим

$$\hat{\Phi}(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{\Phi(v)}{v - w} dv, \quad w \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Следующее утверждение получается с помощью теоремы Б.

Лемма 7. Для любых $\gamma_+, \gamma_- \in (-1, 1)$ существует $C = C(\gamma_+, \gamma_-)$, такая что для любой функции $\Phi \in L^2(K, \gamma_+, \gamma_-)$

$$\sup_{1/2 < r < 1} \left\{ \int_r \left| \hat{\Phi}(w) \right|^2 |w + 1|^{\gamma_-} |w - 1|^{\gamma_+} dw \right\} \leq C \|\Phi\|_{L^2(K; \gamma_+, \gamma_-)}^2.$$

Лемма 8. При выполнении условий (1), (2), (7), (8) для минимальности системы $\mathcal{H}_N$ в пространстве $L^2(I)$ достаточно выполнения неравенства $N_+ + N_- - N \leq 1$, где числа $N_{\pm}$ определены в (38).

Доказательство. Достаточно установить, что при $N_+ + N_- - N \leq 1$ неоднородная краевая задача (32) разрешима в пространстве $\mathcal{H}_N^2$. Заметим прежде всего, что из соотношений (33), (35) и определения функций $\tilde{g}_k$ следует, что найдется $\delta \in (0, 1/4)$, такое, что $\gamma_k(v) \in L^2(K; \tilde{\beta}_+, \tilde{\beta}_-)$ при всех $\tilde{\beta}_{\pm} \in [\beta_{\pm} - \delta, \beta_{\pm}]$. Положим $\beta'_{\pm} = \beta_{\pm}$ при $\beta_{\pm} \notin 2\mathbb{Z} + 1$; $\beta'_{\pm} = \beta_{\pm} - \delta$ при $\beta_{\pm} \in 2\mathbb{Z} + 1$ (39). Достаточно найти решение задачи (32) в пространстве $\mathcal{H}_N^2$, состоящем из функций, удовлетворяющих условиям в), г) с заменой $\beta_{\pm}$ на $\beta'_{\pm}$. Положим $F_k(w) = f_k(w)(w + 1)^{-N_-}(w - 1)^{-N_+}$; $\Gamma_k(v) = \gamma_k(v)(v + 1)^{-N_-}(v - 1)^{-N_+}$, $\gamma_{\pm} = \beta'_{\pm} + 2N_{\pm}$. В силу выбора чисел $\beta'_{\pm}$ имеем $\gamma_{\pm} \in (-1, 1)$, $\Gamma_k \in L^2(K; \gamma_+, \gamma_-)$. Задача (32) сводится теперь к задаче $F'_k(v) = F'_-(v) + \Gamma_k(v)$, $v \in K$, $k \geq N$, решение которой дается интегралом типа Коши. С помощью леммы 6 заключаем теперь, что функция

$$\begin{aligned} f_k(w) &= (w + 1)^{N_-} (w - 1)^{N_+} F_k(w) = \\ &= \frac{(w + 1)^{N_-} (w - 1)^{N_+}}{2i\pi} \int_K \frac{\gamma_k(v)}{(v + 1)^{N_-} (v - 1)^{N_+} v - w} dv \end{aligned}$$

при каждом $k > N$ является решением задачи (32), удовлетворяющей условию (34) с заменой $\beta_{\pm}$ на $\beta'_{\pm}$ и имеющим на бесконечности полюс порядка не выше $N_+ + N_- - 1$. При $N_+ + N_- - 1 \leq N$ эта функция принадлежит пространству $\mathcal{H}_N^*$ и тем самым порождает функцию $\beta_k \in L^2(\Gamma)$ удовлетворяющую соотношению (5) и, следовательно, функционал, аннулирующий все элементы системы $\mathcal{H}_N$, кроме имеющего номер k . Лемма 8 доказана.

Теорема 1 является теперь прямым следствием лемм 6, 8.

Замечание. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно исследовать полноту и минимальность системы $\mathcal{H}_N$ в $L^p(I)$ при $p \in (1, \infty)$.

е. В качестве приложения теоремы 1 исследуем полноту и минимальность в $L^2(I)$ системы функций $\mathcal{H}_{\alpha, N} = \{e^{\alpha n t} \sin n t\}_N^{\infty}$ при $\alpha \in \mathbb{C}$. При $\alpha \in \mathbb{R}$ и $N = 1$ эта система исследовалась многими авторами (историю вопроса см. в [1, 2]). В частности, в работах [9, 10] показано, что при $\alpha \in \mathbb{R}$ система $\mathcal{H}_{\alpha, 1}$ полна и минимальна в $L^2(I)$. Точностью до несущественного множителя $2i$ система $\mathcal{H}_{\alpha, N}$ является частным случаем системы $\mathcal{H}_N(a, b, \varphi, \psi)$ при $a \equiv 1, b \equiv 1, \varphi(t) = \exp((\alpha + i)t); \psi(t) = \exp((\alpha - i)t)$. При $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{(-i\infty, -i] \cup [i, \infty)\}$ эти функции удовлетворяют соотношениям (1), (2), (7), (8) к системе $\mathcal{H}_{\alpha, N}$ применима теорема 1. В дальнейшем, если противное не будет оговорено особо, будем считать $\operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Im} \alpha \geq 0, \alpha \in [i, i\infty)$ (Остальные случаи, когда $\alpha \notin (-i\infty, -i] \cup [i, i\infty)$, легко сводятся к этому). Из теоремы 1.2 [2] вытекает полнота системы $\mathcal{H}_{\alpha, 1}$ в $L^2(I)$. Для исследования минимальности воспользуемся теоремой 1. Положим $(\alpha + i)(\alpha - i)^{-1} = \exp(r + i\omega\pi), \omega \in (0, 1], r \geq 0$. Прямое вычисление дает значение чисел $\beta_{\pm}$, участвующих в равенствах

$$(9) \quad \beta_+ = \beta_+(r, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{\pi^2 \omega} - \frac{\omega}{2} - 3;$$

$$\beta_- = \beta_-(r, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{r^2}{\pi^2 (2 - \omega)} + \frac{\omega}{2}.$$

Числа N_+, N_- и N , определяющие полноту и минимальность системы $\mathcal{H}_{\alpha, N}$, получаются отсюда по формуле (10). В частности, значениям $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствует $r = 0$, откуда $N_+ = 2, N_- = 0$ и $N = 1$ — система $\mathcal{H}_{\alpha, 1}$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ полна и минимальна в пространстве $L^2(I)$. В общем случае $N_+ \geq 2, N_- \geq 0$ и система $\mathcal{H}_{\alpha, 1}$, вообще говоря, переполнена в пространстве $L^2(I)$. Избыток системы $\mathcal{H}_{\alpha, 1}$, оставаясь конечным при каждом $\alpha \in \mathbb{C} \setminus [i, i\infty)$ неограниченно возрастает при приближении α к запрещенному лучу $[i, i\infty)$.

Список литературы: 1. Любарский Ю. И., Ткаченко В. А. О системе $\{e^{\alpha n t} \sin n t\}_1^{\infty}$ // Функцион. анализ и его прил. — 1984. — 18, Вып. 2. — С. 69—70. 2. Любарский Ю. И., Ткаченко В. А. Полнота и минимальность специальных систем

функций на множествах в комплексной плоскости.— Х., 1985.— 29 с. (Препринт Физико-технического института низких температур АН СССР № 33—85).
 3. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций.— М.; Л., 1950.— 336 с. 4. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М., 1977.— 448 с. 5. Любарский Ю. И. Конформная склейка для сдвига Карлемана, имеющего разрывную производную // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 130.— С. 28—32. 6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.— 640 с. 7. Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. Мат. анализ.— 1983.— 21.— С. 42—129. 8. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов.— Кишинев, 1973.— 426 с. 9. Левин Б. Я. Целые функции.— М., 1971.— 124 с. 10. Шкалик А. А. Об одной системе функций // Мат. заметки.— 1975.— 18, вып. 6.— С. 885—860.

Поступила в редколлегию 08.08.86

УДК 517.555/983

С. Т. НОРВИДАС

ВАРИАЦИИ НОРМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть K — компакт в R^n и B_K — совокупность всех ограниченных непрерывных функций на R^n , преобразование Фурье которых в смысле распределений сосредоточено на K . Функции из B_K прес-должаются в C^n до целых функций с оценкой $|f(z)| \leq M \exp H_K(\operatorname{Im} z)$ (1), где M — неотрицательная константа, зависящая лишь от функции f ; $H_K(t)$ — опорная функция компакта K . Отметим, что совокупность всех целых функций, удовлетворяющих оценке (1), совпадает с B_K лишь тогда, когда K является выпуклым компактом. Относительно поточечных операций и $\sup$ -нормы на R^n класс B_K образует банахово пространство.

Пусть $D = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ где $\frac{\partial}{\partial x_m}$ — оператор частной производной. Максимальным классом функций, который можно «применять» к коммутирующему набору D во всех пространствах B_K , оказывается класс функций F локально принадлежащих алгебре $B(R^n)$ преобразований Фурье—Стилтьеса регулярных комплексных борелевских мер $\nu \in M(R^n)$ ограниченной вариации $\|\nu\|$ [1]. В частности, такой вид имеют все дифференциальные операторы в B_K с постоянными коэффициентами. Если в окрестности компакта $K \subset R^n$ имеет место равенство $F = \nu$, где ν — преобразование Фурье—Стилтьеса, то в пространстве B_K оператор $F(D)$ отождествляется с оператором типа свертки $T_\nu: u \rightarrow u \times \nu$. Спектр $F(D)$ совпадает с множеством $\{\lambda \in C: \lambda = \nu(x), x \in K\}$, а для нормы очевидна оценка $\|F(D)\|_K \leq \|\nu\|$. Фактически $\|F(D)\|_K = \|\nu\|_{M(R^n)/J(K)}$, где $J(K)$ — наименьший замкнутый идеал в $M(R^n)$,

содержащий все меры ν , для которых $\hat{\nu} = 0$ в окрестности K [1]. Если K — множество спектрального синтеза относительно алгебры $M(\mathbb{R}^n)$ [2, с. 579], то $\|F(D)\|_K = \|\nu\|_{M(\mathbb{R}^n)/I(K)}$, где $I(K)$ — идеал тех $\nu \in M(\mathbb{R}^n)$, для которых $\hat{\nu} = 0$ на K .

2. Мере μ среди мер, задающих на B_K один и тот же оператор $F(D)$, будем называть *экстремальной*, если $\|F(D)\|_K = \|\mu\|$. Экстремальная мера существует не всегда (даже для конечного K), а если существует, то является, вообще говоря, не единственной. Например, если K — шар в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ и $F(D)$ — оператор Лапласа. При $n = 1$, согласно теореме М. Г. Крейна [3], единственность имеет место каждый раз, когда $\|F(D)\|_K > |F(D)|_K$, где $|F(D)|_K$ — спектральный радиус $F(D)$ на B_K . Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *нормальной звездой*, если $tx \in \text{int } M$, где $x \in M$, $t \in [0, 1)$, и — *звездой*, если $M = a + M_1$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а M_1 — нормальная звезда.

Если K — компактная нормальная звезда, то следующая теорема отмечалась в [4].

Теорема 1. Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) K — конечное объединение непересекающихся компактных звезд в $\mathbb{R}^n$; б) K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждого оператора $F(D)$, действующего на классе B_K , существует экстремальная мера.

Доказательство. Пусть B_K^0 — подпространство (возможно, тривиальное) в B_K , состоящее из тех функций $f \in B_K$, для которых $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Известно (Е. А. Голдин), что если подпространство B_K^0 плотно в B_K относительно $M(\mathbb{R}^n)$ — слабой топологии, т. е. топологии, порожденной семейством всех функционалов интегрирования по мерам $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, то для каждого оператора $F(D)$ на B_K существует экстремальная мера. Например, это имеет место, если K — компактная нормальная звезда в $\mathbb{R}^n$.

Пусть K_p , $p = 1, \dots, m$ — непересекающиеся компактные звезды в $\mathbb{R}^n$ и $K = \bigcup_{p=1}^m K_p$. Если $m = 1$, то $K = a + L$, где $a \in \mathbb{R}^n$, а L — нормальная звезда в $\mathbb{R}^n$. Поскольку оператор $S_a: f(x) \rightarrow e^{-i\langle x, a \rangle} f(x)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, является изоморфизмом пространств B_K и B_L , отображающим B_K^0 на B_L^0 , то B_K^0 будет $M(\mathbb{R}^n)$ — слабо плотным в B_K . Пусть $m > 1$. Если $f \in B_K$, то, согласно определению класса B_K , существует такая обобщенная функция S с компактным носителем в K , для которой $f(z) = S(e_z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, где $e_z(\lambda) = e^{i\langle z, \lambda \rangle}$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$. С другой стороны, существуют такие финитные гладкие функции φ_p , $p = 1, \dots, m$, для которых $\varphi_p(x) = 1$, если $x \in K_p$, и $\varphi_p(x) = 0$, если $x \in K \setminus K_p$. Тогда

$$f(z) = S(e_z) = S\left(\left(\sum_{p=1}^m \varphi_p\right)e_z\right) = \sum_{p=1}^m f_p(z),$$

где $f_p \in B_{K_p}$. Отсюда следует, что B_K^0 будет $M(\mathbb{R}^n)$ — слабо плотным в B_K тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждая

пары B_{Kp}^0 и B_{Kp} , $p = 1, \dots, m$, что, в свою очередь, нами уже установлено.

Пусть K — выпуклый компакт, не являющийся звездой в R^n , и в некоторой окрестности K имеет место равенство $F = \hat{v}$, где $v \in M(R)$. Если K состоит из одной точки, то пространство B_K отождествляется с C и, следовательно, теорема 1 — тривиальна. Пусть K состоит более чем из одной точки. Теперь воспользуемся тем, что для каждого оператора $F(D)$, действующего в B_K , экстремальная мера существует лишь тогда, когда это имеет место одновременно во всех пространствах вида $B_{a+A(K)}$, где $a \in R^n$, а $A \in GL(n, R)$, т. е. A — невырожденное линейное преобразование в R^n . Поэтому можно считать, что K содержится в подпространстве $R^m = \{x \in R^n : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$, где $0 < m < n$, и является компактной нормальной звездой в R^m . Тогда пространства $B_K(R^n)$ и $B_K(R^m)$ естественным образом отождествляются. Следовательно, оператор $F(D) = \hat{v}(D)$ совпадает на классе $B_K(R^m)$ с каждым из операторов $\hat{\mu}(D)$, где $\mu \in M(R^m)$ и $\hat{\mu} = \hat{v}$ в некоторой m -мерной окрестности K . Поскольку K — компактная звезда в R^m , то для оператора $v(D)$ на $B_K(R^m)$ существует экстремальная мера $v_0 \in M(R^m)$. Тогда мера $v_0 \otimes \delta^{n-m} \in M(R^n)$, где δ^{n-m} — дельта-мера на ортогональном дополнении в R^n к подпространству R^m , будет экстремальной для $F(D)$ в $B_K(R^n)$. Действительно, $\|F(D)\|_K = \|v(D)\|_K = \|v_0(D)\|_K = \|v_0\| = \|v_0 \otimes \delta^{n-m}\|$. Теорема 1 доказана.

2. Вычисление норм операторов $F(D)$ в пространствах типа B_K берет свое начало от исследований С. Н. Бернштейна. В частности, классический результат (неравенство Бернштейна) заключается в том, что при $n = 1$, $K = [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, будет $\|D\|_K = \sigma$. Отсюда следует, что для произвольного компакта $K \subset R^n$ имеет место равенство

$$\left\| \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_m} \right\|_K = \max_{t \in K} |t_m|,$$

где $t = (t_1, \dots, t_m, \dots, t_n)$, $m = 1, \dots, n$. Явное вычисление величины $\|F(D)\|_K$ является нетривиальной задачей даже тогда, когда F — многочлен. Оказалось, однако, что в терминах положительной определенности легко описать все случаи совпадения нормы и спектрального радиуса [1].

Пусть f — непрерывная функция на компакте K . Будем говорить, что f продолжается характеристически с K (с окрестности K), если либо $f \equiv 0$ на K (в окрестности K), либо функция $g(x)$, где $g(x)f(x_1) = f(x + x_1)$, а x_1 — произвольная точка максимума функции $|f(x)|$ на K , продолжается с множества $-x_1 + K$ (с некоторой окрестности множества $-x_1 + K$) до положительно определенной, вообще говоря, разрывной, функции на R^n . Однако, если для любой окрестности V точки x_1 множество $(K \cap V) - (K \cap V)$ содержит окрестность нуля в R^n , то, согласно неравенству М. Г. Крейна [2, с. 302] $|\varphi(a) - \varphi(b)|^2 \leq 2\varphi(0)|\varphi(0) - \operatorname{Re} \varphi(a - b)|$ (2), где $a, b \in R^n$, а φ — произвольная положительно определенная функция на R^n , непрерывность продолжения возникает автоматически.

Напомним, что оператор T банахова пространства называется эрмитовым, если $\| \exp itT \| = 1$ при всех $t \in \mathbf{R}$. Операторы $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_m}$ эрмитовы во всех B_K и это лежит в основе следующего частного случая теоремы Е. А. Горина [1]: если функция F продолжается непрерывно и характеристически с окрестности K (если K — множество спектрального синтеза), то $\| F(D) \|_K = |F(D)|_K$ (3); обратно: если выполнено (3), то F продолжается характеристически с K . Отметим, что непрерывность продолжения равенством (3) не гарантируется и, вообще говоря, не имеет места [1]. В частности, равенство (3) имеет место для любого K , если $F(D)$ — эрмитов оператор во всех B_K (см., например, [1, с. 88]). Таковым будет каждый оператор вида $F(D) = \langle D, a \rangle$, где $a \in \mathbf{R}^n$.

Нас будет интересовать вопрос о поведении $\| F(D) \|_K$ при вариациях компакта K и фиксированной функции F , локально принадлежащей алгебре $B(\mathbf{R}^n)$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(n)$ — множество всех компактов в $\mathbf{R}^n$ и ρ_n — метрика Хаусдорфа на $\mathcal{K}(n)$.

Теорема 2. *Функция $K \rightarrow \| F(D) \|_K$ является полунепрерывной сверху на $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть в некоторой открытой окрестности U фиксированного компакта K имеет место равенство $\hat{F} = \hat{v}$, где $v \in M(\mathbf{R}^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая мера $\mu \in M(\mathbf{R}^n)$, для которой функция $\hat{\mu}$ обращается в нуль в некоторой открытой окрестности компакта K и

$$\| F(D) \|_K = \| \hat{v}(D) \|_K \geq \| v + \mu \| - \varepsilon. \quad (4)$$

Теперь найдется такое $\delta > 0$, для которого из условий $M \in \mathcal{K}$ и $\rho_n(K, M) < \delta$ следует, что $M \subset U \cap V$. Тогда $\hat{v}(D)$ совпадает на классе B_M с оператором $(v + \mu)^{\wedge}(D)$ и, следовательно, верно $\| F(D) \|_M \leq \| v + \mu \|$. Отсюда и из (4) следует, что функция $K \rightarrow \| F(D) \|_K$ полунепрерывна сверху в точке K . Так как это верно для каждого $K \in \mathcal{K}$, то теорема 1 доказана.

Оператор $\hat{F}(D)$ будем называть $\mathcal{K}$ -устойчивым на классе B_{K_1} , если функция $K \rightarrow \| F(D) \|_K$ непрерывна в точке K_1 относительно семейства $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}$ -устойчивым, если он $\mathcal{K}$ -устойчив на каждом B_{K_1} , $K_1 \in \mathcal{K}$. Теорема 2 позволяет оценить снизу величину $\| F(D) \|_K$ через норму оператора $F(D)$ в пространстве B_M , когда компакт M (например, многогранник) достаточно близок в метрике Хаусдорфа к K . Если оператор $F(D)$ является $\mathcal{K}$ -устойчивым на B_K , то таким путем можно получить сколько угодно точную оценку.

Теорема 3. *Оператор $F(D)$ является $\mathcal{K}$ -устойчивым на B_K тогда и только тогда, когда выполнено условие (3).*

Доказательство. Необходимость. Для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ существуют такие конечные множества Кронекера K_m , $m = 1, \dots$, для которых $\rho_n(K, K_m) < \frac{1}{m}$ [2]. Поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \| F(D) \|_{K_m} = \| F(D) \|_K, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |F(D)|_{K_m} = |F(D)|_K. \quad (5)$$

Однако для любого множества Кронекера M верно $\|F(D)\|_M = \|F(L)\|_M [1]$. Теперь из (5) следует равенство (3).

Достаточность. Предположим, что выполняется равенство (3), а функция $M \rightarrow \|F(D)\|_M$ разрывна в точке K . Тогда, согласно теореме 2, существуют такие последовательность компактов $\{K_m\}_1^\infty$ в R^n и число $\varepsilon > 0$, для которых $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_n(K, K_m) = 0$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|F(D)\|_{K_m} = \|F(D)\|_K - \varepsilon. \quad (6)$$

Теперь найдется такое $m_1 \in N$, для которого при $m > m_1$ верно $\|F(D)\|_{K_m} < \|F(D)\|_K - \frac{\varepsilon}{2}$, $|F(D)|_{K_m} > |F(D)|_K - \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из (6) следует, что $\|F(D)\|_{K_m} < |F(D)|_{K_m}$. Это противоречие доказывает достаточность. Теорема 3 доказана.

В оставшейся части этой работы мы исследуем более подробно свойства тех функций F , для которых оператор $F(D)$ является $\mathcal{H}$ -устойчивым. Согласно теореме Горина, эти функции содержатся в классе тех функций $f \in C(R^n)$, где $C(R^n)$ — множество всех непрерывных комплекснозначных функций на R^n , которые продолжаются характеристически с любого $K \in \mathcal{K}$. Отметим, что этот класс достаточно широк. Так, в случае одного переменного ему принадлежит, в частности, любая неотрицательная монотонная выпуклая книзу функция. В этом легко убедиться, пользуясь, например, критерием Пойа [5, с. 108].

Ниже мы будем ссылаться на следующую лемму [2, с. 303].

Лемма 1. Пусть φ — положительно определенная функция на группе G . Если $\varphi(0) = 1$, то множество $G(\varphi) = \{g \in G : |\varphi(g)| = 1\}$ является подгруппой в G и для любых $g \in G$, $h \in G(\varphi)$ имеет место равенство $\varphi(g+h) = \varphi(g)\varphi(h)$.

Лемма 2. Пусть функция $f \in C(R)$ продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{K}(1)$. Тогда функция $|f|$ постоянна в окрестности каждой точки своего локального максимума.

Доказательство. Поскольку класс положительно определенных функций замкнут относительно умножения и перехода к сопряженному, то достаточно доказать утверждение леммы 2 для функции $g(x) = |f(x)|^2$, $x \in R$. Пусть x_0 — точка нестрогого локального максимума g . Так как случай $g(x_0) = 0$ — тривиален, то можно считать, что $g(x_0) = 1$. Тогда существуют такие отрезок $[a, b]$, $a < x_0 < b$, и последовательность его точек $\{x_m\}_1^\infty$, для которых $x_m \rightarrow x_0$, $g(x_m) = 1$, $m = 1, \dots$ и $g(x) \leq 1$, если $x \in [a, b]$. Поэтому функция $h(x) = g(x + x_0)$ продолжается с множества $-x_0 + [a, b]$ до непрерывной положительно определенной функции, для которой, согласно лемме 1, множество $G(h) = R(h)$ является всюду плотным на R . Отсюда получаем, что функция g постоянна на отрезке $[a, b]$.

Докажем, что функция g не имеет строгих локальных максимумов. Предположим противное. Пусть, например, в точке 0 функция g имеет строгий локальный максимум. Тогда существует такое $\sigma > 0$, для

второго $g(x) < 1$, если $x \in [-\sigma, \sigma]$ и $x \neq 0$. Напомним, что точка $t \in [-\sigma, \sigma]$ называется видимой справа для функции g , если $g(t) \geq g(y)$, для всех $y \in [t, \sigma]$. Пусть Ω — множество точек в $[-\sigma, \sigma]$, видимых справа для g . Согласно лемме Ф. Рисса [6, с. 325], множество Ω замкнуто в $[-\sigma, \sigma]$, а функция g монотонно не возрастает на Ω . Очевидно, что $0, \sigma \in \Omega$ и $\Omega \subset [0, \sigma]$. Поэтому достаточно рассмотреть два случая, когда: а) существует такое $\sigma_1 > 0$, что $[0, \sigma_1] \subset \Omega$; б) существует такая последовательность интервалов $[a_m, b_m] \subset \Omega$, $m = 1, \dots$ для которой $0 < a_{m+1} < b_{m+1} < a_m < b_m \leq \sigma$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$.

а) В этом случае существуют такие $\alpha \in [-\sigma, 0)$ и $\beta \in (0, \sigma_1]$, $0 < 2\beta - \alpha < \sigma_1$, для которых $g(\alpha) = g(\beta) > 0$. Тогда функция $h(x) = g(x + \beta) / g(\beta)$ продолжается с множества $-\beta + (\{\alpha\} \cup [\beta, \sigma_1])$ до положительно определенной функции на $\mathbf{R}$. Поэтому, согласно лемме 1, имеют место равенства $h(\alpha - \beta) = h(\beta - \alpha) = h(0)$ или $g(\alpha) = g(2\beta - \alpha) = g(\beta)$. Так как функция g монотонно убывает на $[0, \sigma_1]$, то отсюда следует, что она является постоянной на $[\beta, 2\beta - \alpha]$. Поскольку, согласно лемме 1, функция h продолжается с множества $-\beta + [\beta, \sigma_1]$ до положительно определенной функции на $\mathbf{R}$ лишь константой, то g постоянна и на $[\beta, \sigma_1]$. Так как β можно брать сколь угодно близко к 0, то 0 не является точкой строгого локального максимума g , что противоречит нашему предположению.

б) Из определения множества Ω следует, что $g(x) < g(a_m)$, если $x \in (b_{m+1}, a_m)$. Рассмотрим теперь функцию g на $[b_{m+1}, b_m]$. Тогда, как и в случае а), убеждаемся в том, что g постоянна на $[a_m, b_m]$. Поскольку $g(a_m) = g(b_{m+1})$, то функция g постоянна и на множестве $[a_m, b_m]$, и так как $b_m \rightarrow 0$, когда $m \rightarrow \infty$, то 0 не является точкой

строгого локального максимума g . Однако это противоречит нашему предположению. Лемма 2 доказана.

Если $f \in C(\mathbf{R})$, то обозначим через M_f и m_f — соответственно множества (возможно, пустые) точек нестрогих глобального и локального минимумов функции $|f|$ на $\mathbf{R}$.

Лемма 3. Пусть функция $f \in C(\mathbf{R})$ продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{K}(1)$. Тогда $M_f = m_f$ и является связным множеством. Функция $|f|$ строго монотонна и неограниченна на каждой компоненте связности множества $\mathbf{R} \setminus M_f$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = |f(x)|^2$, которая, как это уже отмечалось в доказательстве леммы 2, тоже удовлетворяет условию леммы. Докажем монотонность g . Первым рассмотрим тот случай, когда g имеет в точке x_0 локальный максимум. Согласно лемме 2, существует U — такая окрестность x_0 , на которой функция g постоянна. Пусть, кроме того, U — наибольшая замкнутая связная окрестность x_0 , где g — постоянна. Случай $U = \mathbf{R}$ — тривиален. Пусть U — ограничено, например, справа и a — его правая крайняя точка. Сперва докажем, что $g(t) > g(a)$, если $t > a$. Предположим противное. Пусть существует такая точка $\lambda \in (a, \infty)$, для которой $g(\lambda) \leq g(a)$. Если $g(a) = 0$, то из леммы 2 следует, что g постоянна на $[a, \lambda]$. Однако это противоречит выбору a . Если $g(a) > 0$,

то можно считать, что $g(a) = 1$. Тогда функция $h(x) = g(x+a)$ продолжается с множества $-a + (x_0, a] \cup \{\lambda\}$ до положительно определенной функции на R лишь константой. Поэтому $g(\lambda) = g(a) = 1$. Отсюда и из леммы 2 следует, что g постоянна на $[a, \lambda]$, а это противоречит выбору a . Предположим теперь, что функция g не является строго монотонно возрастающей на $[a, \infty]$. Тогда существуют такие $b, c \in (a, \infty)$, $b < c$, для которых $g(a) < g(c) \leq g(b)$. Поэтому найдется такое $d \in (a, c)$, для которого величина $g(d)$ равна максимуму функции g на $[a, c]$. Согласно лемме 2, функция g постоянна в окрестности d . Поэтому функция $h(x) = g(x+d)/g(d)$ продолжается с множества $-d + [a, c]$ до положительно определенной функции на R лишь константой. Однако это противоречит тому, что $g(a) < g(c)$. Поэтому g строго монотонно возрастает на $[a, \infty)$. Если U — ограничено слева, а b — левая крайняя точка U , то аналогично доказываем, что g строго монотонно убывает на $(-\infty, b]$.

Пусть функция g не имеет локальных максимумов. Если для любого отрезка $[a, b]$ имеет место равенство

$$\min_{x \in [a, b]} g(x) = \min \{g(a), g(b)\},$$

то функция g строго монотонна на R и $M_f = m_f = \emptyset$. В противном случае, если существуют такие отрезок $[a, b]$ и точка $c \in (a, b)$, для которых $g(c) < g(a)$, $g(c) < g(b)$, то аналогично тому, как делали выше, доказываем, что функция g строго монотонно убывает на $(-\infty, c]$ и строго монотонно возрастает на $[c, \infty)$. Следовательно, монотонность g на $R \setminus M_f$ полностью доказана. Кроме того, $M_f = m_f$ и является связным множеством.

Пусть M_f — непустое ограниченное справа множество и a — его правая крайняя точка. Предположим, что $\sup_{x \in [a, \infty]} g(x) = \alpha < \infty$. Тогда

фиксируем точку $b \in (a, \infty)$ и рассмотрим g на отрезке $[a, \sigma]$, где $\sigma > b$. Поскольку g монотонно возрастает на $[a, \infty)$, функция $h(x) = g(x + \sigma)/g(\sigma)$ продолжается с множества $-\sigma + [a, \sigma]$ до положительно определенной функции на R . Поэтому согласно неравенству Крейна (2) верно $|g(a) - g(b)|^2 \leq 2\alpha |g(\sigma) - g(\sigma + a - b)|$ (7). Так как непрерывная функция g монотонна и согласно предположению ограничена на $[a, \infty)$, правая часть неравенства (7) стремится к нулю, когда $\sigma \rightarrow \infty$. Однако это противоречит тому, что $g(a) < g(b)$. Если множество M_f ограничено слева, то доказательство аналогично. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что если функция, удовлетворяющая ее условию, принадлежит алгебре $B(R)$, то она имеет постоянный модуль. Оказывается, что верно даже более общее утверждение.

Теорема 4. Ограниченная функция $f \in C(R^n)$ продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{K}(n)$ тогда и только тогда, когда $f = c\chi$, где $c \in C$, а χ — непрерывный характер группы R^n .

Доказательство. Так как ограничение функции $|f|^2$ на произвольную прямую в R^n удовлетворяет условию леммы 3, то $|f|^2$ постоянна на прямых в R^n , а значит, — на всем R^n . Если $f \neq 0$,

то можно считать, что $f(0) = 1$. Тогда f продолжается с любого замкнутого шара до положительно определенной функции в R^n , равной согласно лемме 1 и неравенству Крейна (2) непрерывному характеру в R^n . Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Оператор $F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right)$ является $\mathcal{H}$ -устойчивым тогда и только тогда, когда функция F продолжается характеристически с любого $K \in \mathcal{H}(1)$.

Доказательство. Согласно теореме Горина требуется показать лишь достаточность. Если a и b — такие точки компакта K , для которых $K \subset [a, b]$, то из леммы 3 следует

$$\left| F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right|_K = \max \{ |F(a)|, |F(b)| \} = \left| F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right|_{[a, b]}. \quad (8)$$

Поскольку отрезок $[a, b]$ является множеством спектрального синтеза относительно алгебры $M(R)$, а функция F продолжается характеристически и согласно неравенству Крейна (2) непрерывно с $[a, b]$, то из теоремы Горина следует, что

$$\left\| F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right\|_{[a, b]} = \left| F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right|_{[a, b]}. \quad (9)$$

с другой стороны, поскольку $\left\| F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right\|_K \leq \left\| F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right\|_{[a, b]}$, то из соотношений (8) и (9) следует равенство (3). Так как это верно для любого $K \in \mathcal{H}(1)$, согласно теореме 3 оператор $F\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right)$ является $\mathcal{H}$ -устойчивым. Теорема 5 доказана.

Замечание. Если функция f удовлетворяет условию леммы 3, то, как видно из доказательства теоремы 5, для f существует хотя бы одно непрерывное характеристическое ее продолжение с любого $K \in \mathcal{H}(1)$.

Среди нетривиальных функций от одного переменного, порождающих $\mathcal{H}$ -устойчивый оператор, оказывается, как легко проверить, четные полиномы с неотрицательными коэффициентами и полиномы, все нули которых лежат на некоторой прямой, параллельной мнимой оси. С другой стороны, было бы интересно найти полный набор инвариантов (например, в терминах нулей полиномов), характеризующий класс всех полиномов, порождающих $\mathcal{H}$ -устойчивый оператор.

Список литературы: 1. Горин Е. А. Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов // Вестн. Харьк. ун-та. Прикл. математика и механика. — 1980. — Вып. 45. — С. 77—105. 2. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. — Т. 2. — М., 1975. — 901 с. 3. Крейн М. Г. О представлении функций интегралами Фурье—Стилтьеса // Учен. зап. Куйбышевск. пед. ин-та им. В. В. Куйбышева. — 1943. — 7. — С. 123—147. 4. Горин Е. А., Норвидас С. Т. Экстремали некоторых дифференциальных операторов // Тез. докл. 7-й школы по теории операторов в функц. пространствах. — Минск, 1982. — С. 48—49. 5. Лукач Е. Характеристические функции. — М., 1979. — 424 с. 6. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М., 1979. — 589 с.

Поступила в редколлегию 25.09.85

**ОДИН ПРИМЕР МНОГОМЕРНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ОПЕРАТОРОВ, ТОЧЕЧНЫЙ И НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР
КОТОРЫХ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ**

§ 1. Введение. В настоящей работе рассматриваются операторы H в $L_2(\mathbb{R}^d)$ вида

$$H = -(2\pi)^{-2} \Delta + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} t_n |v(x+n)\rangle \langle v(x+n)|, \quad (1.1)$$

$$(|v(\cdot)\rangle \langle v(\cdot)| \psi)(x) = (v, \psi) v(x), \quad t_n = \operatorname{tg} [\pi(\alpha, n) + \omega], \quad \omega \in [0, \pi), \\ \omega \neq \frac{\pi}{2} - \pi(\alpha, n) \pmod{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad (1.2)$$

где вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ удовлетворяет диафантовому условию

$$|(\alpha, n) - m| \geq C |n|^{-\beta}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^d \setminus 0 \quad (1.3)$$

с положительными константами C и β .

Условия $V \cdot v(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ — вещественнозначная функция с преобразованием Фурье

$$\hat{v}(p) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i2\pi(p, x)} v(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^d,$$

причем $v(p) = a(|p|^2)$, где вещественнозначная функция $a(\mu)$, $\mu \geq 0$, бесконечно дифференцируема на $[0, \infty)$ и для некоторого $\rho > 0$: $a(\mu) > 0$, $0 \leq \mu < \rho$; $a(\mu) = 0$, $\mu \geq \rho$ (1.4). Если $\rho = \infty$, будем предполагать, что функция a вместе со своими производными убывает быстрее любой степени μ при $\mu \rightarrow \infty$.

Дискретный аналог оператора H изучался в работе*, которой мы здесь будем следовать. Введем обозначения: $E(d\lambda)$ и $E_0(d\lambda)$ — разложения единицы соответственно операторов H и $-(2\pi)^{-2} \Delta$; $\mathcal{H}_{<\rho} = E_0((-\infty, \rho)) L_2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{H}_{>\rho} = E_0((\rho, \infty)) L_2(\mathbb{R}^d)$; $S = S(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца.

Теорема 1.1. Оператор H существенно самосопряжен на S . Подпространства $\mathcal{H}_{<\rho}$ и $\mathcal{H}_{>\rho}$ приводят оператор H , причем сужение оператора H на $\mathcal{H}_{>\rho}$ совпадает с сужением оператора $-(2\pi)^{-2} \Delta$ на это подпространство и для $d\lambda \in (\rho, \infty)$: $E(d\lambda) \mathcal{H}_{>\rho} = E_0(d\lambda) \times \mathcal{H}_{>\rho}$ (1.5). Соответственно на отрезке (ρ, ∞) оператор H имеет абсолютно непрерывную компоненту.

Теорема 1.2. Пусть $\rho > 1/4$. Тогда имеют место все утверждения теоремы 1.1 и, кроме того, можно указать достаточно малое положительное ρ_1 , что спектр оператора H на отрезке $(-\infty, \rho_1)$ чисто точечный, однократный и плотный и собственные функции принадлежат S .

Figotin A. L., Pastur L. A. An Exactly Solvable Model of Multidimensional incommensurate Structure // Commun. Math. Phys. — 1984. — 95. — P. 401—425.

Теорема 1.3. Пусть $\rho < 1/4$. Тогда имеют место все утверждения теоремы 1.1 и, кроме того, спектр H исчерпывается чисто точечной и абсолютно непрерывной компонентой. При этом чисто точечный спектр однократный и плотный в R , а собственные функции принадлежат S . Ортогональные проекторы на чисто точечную и абсолютно непрерывную компоненту совпадают соответственно с проекторами на подпространства $\mathcal{H} > \rho$ и $\mathcal{H} < \rho$.

В этом параграфе мы изложим основные моменты доказательства сформулированных утверждений, по существу его алгебраическую часть. Полное обоснование приведено в § 2, 3.

Исследование свойств оператора H будет проводиться посредством рассмотрения его резольвенты $R_z = (H - zI)^{-1}$, при этом удобно перейти от функций $\psi \in L_2(R^d)$ к их преобразованиям Фурье

$$\hat{\psi}(p) = \int_{R^d} e^{-i2\pi(p, x)} \psi(x) dx$$

и к соответствующим представлениям $\hat{H}$, $\hat{R}_z$ операторов H и R_z . Введем в $l_2(Z^d)$ оператор $(\hat{T}\psi)_n = t_n \psi_n$, $n \in Z^d$. Здесь также удобно перейти к преобразованию Фурье

$$\hat{\psi}(p) = \sum_{n \in Z^d} e^{i2\pi(p, n)} \psi_n, \quad p \in T,$$

где тор $T = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$. Часто функции $\psi \in L_2(T)$ будут рассматриваться как периодические функции, $\psi(\cdot) = \psi(\cdot + n)$, $n \in Z^d$, во всем R^d . Введем линейный оператор $(\cdot)_T$, ставящий в соответствие функции $\psi(p)$ периодическую функцию $\psi_T(p)$

$$(\psi)_T(p) = \sum_{n \in Z^d} \psi(p + n), \quad p \in R^d. \quad (1.6)$$

Отсюда имеем следующее представление для $\hat{H}$:

$$(\hat{H}\psi)(p) = p^2 \psi(p) + v(p) \hat{T}(v^* \psi)_T. \quad (1.7)$$

После несложных преобразований из (1.7) получим

$$(\hat{R}_z \varphi)(p) = \frac{\varphi(p)}{p^2 - z} - \frac{v(p)}{p^2 - z} (\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1} \left(\frac{v^* \varphi}{p^2 - z} \right)_T(p), \quad (1.8)$$

$$W_z(p) = \left(\frac{\hat{v}^*(p) \hat{v}(p)}{p^2 - z} \right)_T. \quad (1.9)$$

Отметим, что из равенства (1.8) следует, что пространства $\mathcal{H}_{<\rho}$, $\mathcal{H}_{>\rho}$ приводят $\hat{H}$ и сужение H на $\mathcal{H}_{>\rho}$ совпадают с сужением на это подпространство оператора $-(2\pi)^{-2} \Delta$ и, следовательно, имеет место соотношение (1.5).

Чтобы определить собственные функции $u_\lambda(p)$ и соответствующие собственные значения λ , воспользуемся (1.7), откуда получим $(p^2 - \lambda) u_\lambda + v \hat{T}(v^* u_\lambda)_T = 0$.

Отсюда ясно, что собственные функции имеют вид

$$u_{\lambda}(p) = \frac{v(p)}{p^2 - \lambda} g_{\lambda}(p), \quad g_{\lambda}(p+n) = g_{\lambda}(p), \quad (1.10)$$

где периодическая функция g_{λ} как элемент $L_2(T)$ удовлетворяет уравнению $(\hat{T}^{-1} + W_{\lambda}) g_{\lambda} = 0$ (1.11).

Как следует из равенства (1.11), λ будет собственным значением тогда и только тогда, когда уравнение (1.11) имеет нетривиальное решение. Для исследования этого вопроса дадим удобное представление оператору $\hat{T}^{-1} + W_{\lambda}$, для чего введем унитарный в $l_2(\mathbb{Z}^d)$ оператор U умножения на $\exp\{-2\pi i(\alpha, n)\}$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\hat{T}^{-1} = i(I + \kappa \hat{U})(I - \kappa \hat{U})^{-1}, \quad \kappa = e^{-2i\omega}, \quad (\hat{U}\psi)(p) = \psi(p - \alpha). \quad (1.12)$$

Отсюда после элементарных преобразований получим

$$\hat{T}^{-1} + W_{\lambda} = (W_{\lambda} + iI)[I - C_{\lambda}\kappa\hat{U}](I - \kappa\hat{U})^{-1}, \quad C_{\lambda}(p) = \frac{W_{\lambda}(p) - i}{W_{\lambda}(p) + i}. \quad (1.13)$$

Введем в рассмотрение функции $f(\lambda, p) = \ln C_{\lambda}(p)$ (1.14),

$$f_0(\lambda) = \int_T f(\lambda, p) dp = im(\lambda), \quad m(\lambda) \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

$$t(\lambda, p) = (I - \hat{U})^{-1}[f(\lambda, p) - f_0(\lambda)]. \quad (1.16)$$

Если функция $f(\lambda, p)$ бесконечно дифференцируема по p , то и $t(\lambda, p)$ такая же. Это нетрудно проверить, рассматривая f и t как элементы пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$ и пользуясь важным здесь условием (1.3). Из (1.14), (1.16) следует

$$C_{\lambda}\hat{U} = e^{f_0(\lambda)} e^{t(\lambda)} \hat{U} e^{-t(\lambda)}. \quad (1.17)$$

Отсюда и равенства (1.13) имеем

$$\hat{T}^{-1} + W_{\lambda} = (W_{\lambda} + iI) e^{t(\lambda)} [I - e^{f_0(\lambda)} \kappa \hat{U}] e^{-t(\lambda)} (I - \kappa \hat{U})^{-1}. \quad (1.18)$$

Пусть теперь

$$e_{\lambda} = e^{-t(\lambda)} (I - \kappa \hat{U})^{-1} g_{\lambda}. \quad (1.19)$$

Тогда из (1.18) следует, что уравнение (1.11) эквивалентно уравнению $(I - e^{f_0(\lambda)} \kappa \hat{U}) e_{\lambda} = 0$ (1.20), откуда нетрудно усмотреть, что собственные значения λ являются решениями уравнения $m(\lambda) - 2\omega - 2\pi(\alpha, n) = 0 \pmod{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^d$ (1.21), при получении которого учтено соотношение (1.15). При каждом n уравнение (1.21) имеет не более одного решения λ_n (что означает однократность спектра), которому отвечает $e_{\lambda_n} = \exp\{i 2\pi(\alpha, n)\}$. Отсюда ввиду (1.19) и (1.16) имеем

$$g_{\lambda_n}(p) = (I - \kappa \hat{U}) e^{t(\lambda_n, p)} e^{i 2\pi(n, p)}, \quad (1.22)$$

$$g_{\lambda_n}(p) = -2i(W_{\lambda_n}(p) - i)^{-1} e^{t(\lambda_n, p)} e^{i 2\pi(n, p)}. \quad (1.23)$$

Подставляя в равенство (1.10) найденные g_{λ_n} , получим искомые собственные функции.

В заключение отметим, что самым важным с аналитической точки зрения местом в приведенных выше рассуждениях является предположение о гладкости функции $f(\lambda, p)$, являющееся определяющим при анализе точечного спектра H .

§ 2. Аналитические свойства вспомогательных функций. Настоящий параграф посвящен изучению аналитических свойств функций $W_z(p)$, $f(z, p)$, $f_0(z)$ и $t(z, p)$. Все важные для дальнейшего свойства этих функций будут здесь подробно сформулированы и собраны в леммы. Практически все эти свойства почти непосредственно вытекают из имеющихся аналитических представлений изучаемых функций. Поэтому мы опустим подробные доказательства, а ограничимся лишь необходимыми пояснениями. Всюду ниже $z \in C$, $\lambda \in R$.

Лемма 2.1. Пусть $\rho > 1/4$. Тогда (a) $\text{Im } z \text{ Im } W_z(p) \geq 0$; (b) существует достаточно малое $\rho_1 > 0$, что при $\lambda \leq \rho_1$: $W_\lambda(p) \in [-\infty, -1] \cup [0, \infty]$, $p \in T$; (c) можно выбрать непрерывную ветвь $\ln(\cdot)$ так, что равенство (1.14) корректно определяет функцию $f(\lambda, p)$, $\lambda \leq \rho_1$, $p \in T$, причем $f(\lambda, p) = -2i \text{Arcctg } W_\lambda(p)$, где $\text{Arcctg } w = \{\pm \pi/2, \pm \infty\}$; (d) функция $f(\lambda, p)$, с заменой в формуле (1.14) λ на z , расширяется в полосу $L_{\rho_1, \varepsilon_1} = \{z: \text{Re } z \leq \rho_1, |\text{Im } z| \leq \varepsilon_1\}$, причем при достаточно малом ε_1 $f(z, p)$ — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов $\text{Re } z$, $\text{Im } z$ и p в области $L_{\rho_1, \varepsilon_1} \times T$; (e) $f_0(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция аргументов $\text{Re } z$, $\text{Im } z$ в области $L_{\rho_1, \varepsilon_1}$; при $\text{Im } z > 0$: $\text{Re } f_0(z) < 0$; $f_0(\lambda) = im(\lambda)$, $m(\lambda) = -\int_T 2 \text{Arcctg } W_\lambda(p) dp$; $m(\lambda)$ — монотонно возрастающая, гладкая функция $\lambda \leq \rho_1$, со значениями в интервале $(-\pi, \pi)$, $m(-\infty) = -\pi$; (f) существует положительное $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ такое, что для $\lambda \leq \rho_1$ и $|\varepsilon| \leq \varepsilon_2$: $\forall \xi \in C, |\xi| = 1$

$$|e^{f_0(\lambda + i\varepsilon)} \xi - 1| \geq \frac{1}{2} |e^{f_0(\lambda)} \xi - 1|; \quad (2.1)$$

(g) функция $t(z, p)$, определенная как решение гомологического уравнения $t(z, p) - t(z, p - \alpha) = f(z, p) - f_0(z)$, $p \in T$, (2.2), бесконечно дифференцируема по своим аргументам $\text{Re } z$, $\text{Im } z$ и p в области $L_{\rho_1, \varepsilon_1} \times T$.

Лемма 2.2. Пусть $\rho < 1/4$. Тогда

(a) $\text{Im } z \text{ Im } W_z \geq 0$; функция $W_z(p)$ отлична от нуля в области поро T , определяемой неравенством $p^2 < \rho$, и равна нулю в остальной части тора; (b) при $\lambda < \rho$: $W_\lambda(p) \in [-\infty, -\tau_1] \cup [0, \infty]$; при $\lambda > \rho$: $W_\lambda(p) \in [-\tau_2, 0]$, где τ_1, τ_2 — положительные, зависящие от λ числа; (c) для функции $f(\lambda, p)$ справедливо утверждение (c) леммы 2.1, при этом для каждого фиксированного λ $f(\lambda, p)$ бесконечно дифференцируема по $p \in T$; $f(\lambda, p)$ бесконечно дифференцируема по совокупности переменных λ, p в областях $\{\lambda < \rho\} \times T$; $\{\lambda > \rho\} \times T$; $R \times \{p^2 < \rho\}$; при $\lambda < \rho$ и $p^2 > \rho$ $f(\lambda, p) = -\pi$; а при $\lambda > \rho$ и $p^2 > \rho$: $f(\lambda, p) = \pi$, т. е. при $p^2 \geq \rho$ $f(\lambda, p)$ испытывает скачок от $-\pi$ до π при $\lambda = \rho \mp 0$; (d) для любого замкнутого интервала $\Delta \subset R$ такого, что $\rho \notin \Delta$ можно указать такое $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta) > 0$,

что функция $f(\lambda, \rho)$ после замены λ на z будет бесконечно дифференцируемой по своим аргументам $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ и ρ , когда z принадлежит прямоугольнику $L_{\Delta, \varepsilon_1} = \{z: \operatorname{Re} z \in \Delta, |\operatorname{Im} z| \leq \varepsilon_1\}$; (e) $f_0(z) = \int_T f(z, \rho) d\rho$ — бесконечно дифференцируема в области $L_{\Delta, \varepsilon_1}$; при $\operatorname{Im} z > 0$: $\operatorname{Re} f_0(z) < 0$; $f_0(\lambda) = im(\lambda)$, где $m(\lambda)$ — вещественнозначная, монотонно возрастающая функция λ , причем $m(\pm\infty) = \pm\pi$; $m(\lambda)$ является гладкой функцией при $\lambda \neq \rho$, в точке $\lambda = \rho$ она непрерывна справа и имеет скачок, равный $2\pi(1 - V_\rho)$, где V_ρ — объем d -мерного шара радиуса ρ ; (i) в прямоугольнике $L_{\Delta, \varepsilon_2}$ при достаточно малом ε_2 справедливо неравенство (2.1); (g) функция $t(z, \rho)$, определенная так же, как и в лемме 2.1, является бесконечно дифференцируемой в области $L_{\Delta, \varepsilon_1} \times T$.

Доказательство пунктов (a) — (i) лемм 2.1, 2.2 опирается в существенном на то обстоятельство, что множество значений функции $W_\lambda(\rho)$, $\rho \in T$, имеет «окно» на вещественной прямой, благодаря чему функция $f(\lambda, \rho)$, определенная равенством (1.14), может за счет подходящего выбора ветви $\ln(\cdot)$ сделана гладкой функцией ρ . Последнее обстоятельство является существенным для разрешимости в гладких функциях гомологического уравнения (2.2). Действительно, если $t_n(\lambda)$ и $f_n(\lambda)$ — коэффициенты Фурье функции $t(\lambda, \rho)$ и $f(\lambda, \rho)$, то из уравнения (2.2) получим $t_n(\lambda) = (1 - e^{-i2\pi(\alpha, n)})^{-1} f_n(\lambda)$, $n \neq 0$; $t_0(\lambda) = 0$ (2.3). В силу условия (1.3) первый множитель в (2.3) растет быстрее чем $|n|^p$, тогда как ввиду гладкости f , $f_n(\lambda)$ убывают быстрее любой степени $|n|$, т. е. $t(\lambda, \rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция $\rho \in T$.

§ 3. Самосопряженность и структура спектра. Доказательство существенной самосопряженности H и структуры спектра будет проводиться в следующей последовательности: доказательство ограниченности оператора $\hat{R}_z$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, определенного равенством (1.8), и соотношения $R_z S \subseteq S$, откуда уже почти непосредственно вытекает справедливость теоремы 1.1; нахождение всех собственных значений и собственных функций оператора H ; доказательство при $\rho < 1/4$ полноты системы собственных функций в подпространстве $H_{<\rho}$, т. е. утверждения теоремы 1.3; доказательство теоремы 1.2 аналогично обоснованию теоремы 1.3 и поэтому опускается.

Лемма 3.1. (a) если $\varphi(\rho)$ — периодическая функция, то $(\varphi\psi)_T = \varphi(\psi)_T$;

$$\int_T |(g\psi)_T|^2 d\rho \leq \sup_{\rho \in T} (\|g\|^2)_T(\rho) \int_{R_d} |\psi|^2 d\rho; \quad (3.1)$$

(b) соотношение (1.17) с заменой λ на z справедливо при $\rho < 1/4$ и $z \in L_{\Delta, \varepsilon_1}$; $\rho > 1/4$ и $z \in L_{\rho_1, \varepsilon_1}$; соотношение (1.18) имеет место для тех же z при условии $\operatorname{Im} z > 0$; (c) для z из предыдущего пункта при условии $\operatorname{Im} z > 0$ справедливо неравенство

$$\|(\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1}\| \leq 2(1 - e^{\operatorname{Re} l_0(z)})^{-1}; \quad (3.2)$$

(d) оператор $\hat{R}_z$, определенный равенством (1.8), при z из предыдущего пункта является ограниченным и $R_z S \subseteq S$.

Доказательство. Утверждение (a) вытекает из (1.6) и неравенства Коши. Утверждения (b) и (c) вытекают из лемм 2.1, 2.2 (d) — (g). Справедливость (d) следует из (1.8) и пункта (c) настоящей леммы.

Из леммы 3.1 вытекает справедливость теоремы 1.1, так как непосредственная проверка показывает, что $(\hat{H} - zI) \hat{R}_z \psi = \psi$, $\psi \in S$ (3.3).

Лемма 3.2. Пусть $\rho < 1/4$ и $O_\rho = (-\pi, m(\rho - 0)) \cup [m(\rho), \pi]$, где функция $m(\lambda)$ определена в лемме 2.2 e. Тогда

(a) множество собственных значений оператора H совпадает с множеством решений уравнения (1.20), при этом при каждом n имеется не более одного решения, а в точности одно решение имеется тогда и только тогда, когда $2\pi(\alpha, n) + \omega \in O_\rho \pmod{2\pi}$ (3.4); (b) каждому n , удовлетворяющему равенству (3.4), отвечает единственная собственная функция u_λ с собственным значением λ_n таким, что $m(\lambda_n) = 2\pi(\alpha, n) + \omega \pmod{2\pi}$; для функции u_λ справедливо представление (1.10), (1.22), (1.23) и $u_\lambda \in S$.

Доказательство. Пусть $\hat{H}u_\lambda = \lambda u_\lambda$, где $u_\lambda \in L_2$. Тогда $\hat{R}_z u_\lambda = (\lambda - z)^{-1} u_\lambda$, откуда ввиду (1.8) легко получим

$$u_\lambda(\rho) = \hat{v}(\rho)(\rho^2 - \lambda)^{-1} g_\lambda(\rho); \quad (3.5)$$

$$g_\lambda = -(\lambda - z)(\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1}(\hat{v}^*(\rho)(\rho^2 - z)^{-1} u_\lambda)_T. \quad (3.6)$$

Если теперь выражение (3.5) подставить в (3.6) и к обеим частям получившегося равенства применить оператор $\hat{T}^{-1} + W_z$, то в силу леммы 3.1 а—с получим равенство (1.11) и $\hat{T}^{-1} g_\lambda$, $W_\lambda g_\lambda \in L_2(T)$ (3.7). Введем вектор $\tilde{e}_\lambda = (I - \kappa \hat{U})^{-1} g_\lambda$, который в силу (3.7) принадлежит $L_2(T)$. Подействовав на обе части равенства (1.11) ограниченным оператором $(W_\lambda + iI)^{-1}$, получим $(I - (W_\lambda - iI)(W_\lambda + iI)^{-1} \kappa \hat{U}) \tilde{e}_\lambda = 0$ (3.8). Отсюда из равенств (1.14), (2.2) вытекает справедливость равенства (1.20), из которого, рассуждая, как в § 1, получим, что λ_n и u_{λ_n} с необходимостью удовлетворяют утверждениям леммы 3.2 а, b. В том, что соответствующие λ_n и u_{λ_n} действительно являются собственными значениями и функциями, нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Лемма 3.3. Пусть $\rho < 1/4$. Собственные функции u_{λ_n} из предыдущей леммы образуют базис пространства $\mathcal{H}_{<\rho}$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого конечного интервала Δ , не содержащего точку ρ , с концами не совпадающими с множеством собственных значений $\Lambda = \{\lambda_n\}$, существует семейство вложенных друг в друга множеств Δ_δ , $\delta > 0$, такое, что каждое Δ_δ является объединением счетного числа интервалов в R и

$$\Delta \supset \Delta_\delta \supset \Delta \cap \Lambda; \quad \Delta_\delta \downarrow \Delta \cap \Lambda, \quad \delta \downarrow 0; \quad (3.9)$$

$$E(\Delta_\delta) \mathcal{H}_{<\rho} = E(\Delta) \mathcal{H}_{<\rho}. \quad (3.10)$$

Чтобы проверить равенство (3.10), мы воспользуемся следующим общим фактом: если A — самосопряженный оператор, $R(z)$ — его резольвента, а Γ — счетное объединение интервалов, концы которых не являются собственными значениями A , то для любого вектора φ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \pi^{-1} \varepsilon \int_{\Gamma} \|R(\lambda + i\varepsilon) \varphi\|^2 d\lambda = (E(\Gamma) \varphi, \varphi). \quad (3.11)$$

Построим семейство множеств Δ_δ , удовлетворяющих соотношениям (3.9). Задав $\delta > 0$ и обозначив $S^1 = \{\xi \in \mathbb{C}: |\xi| = 1\}$, введем

$$S_\delta^1 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^d} \{\xi \in S^1: |\operatorname{Arg} \xi - \operatorname{Arg} e^{i2\pi(\alpha, n)}| \leq \delta(1 + |n|)^{-d-\gamma}\}, \quad \tilde{S}_\delta^1 = S^1 \setminus S_\delta^1, \quad (3.12)$$

где γ — фиксированное положительное число. Очевидно, что

$$\operatorname{mes} S_\delta^1 \rightarrow 0, \quad \operatorname{mes} \tilde{S}_\delta^1 \rightarrow 2\pi \text{ при } \delta \rightarrow 0; \quad (3.13)$$

$$|1 - e^{-i2\pi(\alpha, \tilde{n})\xi}| \geq \delta(1 + |\tilde{n}|)^{-d-\gamma}, \quad \omega \in \mathbb{Z}^d, \quad \xi \in \tilde{S}_\delta^1. \quad (3.14)$$

Рассмотрим образ интервала Δ при отображении $h: \lambda \rightarrow \kappa \exp\{f_0(\lambda)\} = \kappa \exp\{im(\lambda)\}$. В силу леммы 2.2е, h является взаимнооднозначным, непрерывным отображением Δ на $h\Delta \subset S^1$, причем $h(\lambda_n) = \kappa \exp\{i2\pi(\alpha, n)\}$, $\lambda_n \in \Delta$. Введем $\Delta_\delta = \Delta \cap h^{-1}S_\delta^1$ и $\tilde{\Delta}_\delta = \Delta \cap h^{-1}\tilde{S}_\delta^1$. Очевидно, что

$$\Delta = \Delta_\delta \cup \tilde{\Delta}_\delta, \quad \Delta_\delta \cap \tilde{\Delta}_\delta = \emptyset; \quad \Delta_\delta \downarrow \Delta \cap \Lambda, \quad \delta \downarrow 0. \quad (3.15)$$

Ввиду (3.11) доказательство (3.10) сводится к лемме

Лемма 3.4. $\forall \varphi \in \mathcal{H}_{<0} \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in \tilde{\Delta}_\delta$ и $z = \lambda + i\varepsilon$

$$\varepsilon \|\hat{R}_z \varphi\|^2 \leq 2 \|\varphi\|^2 \quad (3.16); \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \|\hat{R}_z \varphi\|^2 = 0 \quad (3.17).$$

При этом неравенство (3.16) справедливо, так как $\hat{R}_z$ — резольвента самосопряженного оператора, а доказательство (3.17) ввиду (1.8) в свою очередь сводится к доказательству такой леммы. Введем при $z = \lambda + i\varepsilon$ обозначения

$$\varphi_\varepsilon(p) = \varphi(p) - \hat{v}(p) u_\varepsilon(p); \quad (3.18)$$

$$u_\varepsilon(p) = (\hat{T}^{-1} + W_z)^{-1} (\hat{v}^* \varphi(p^2 - z)^{-1})_T. \quad (3.19)$$

При этом, очевидно, $(\hat{R}_z \varphi)(p) = \varphi_\varepsilon(p)(p^2 - z)^{-1}$ (3.20) и имеет место

Лемма 3.5. Пусть $\lambda \in \tilde{\Delta}_\delta$ и положительное ε достаточно мало. Тогда (а) $u_\varepsilon(p) \in C^\infty(T)$ и в метрике $C(T)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ $u_\varepsilon(p) \rightarrow u_0(p) \in C^\infty(T)$; (б) если $\lambda > 0$ и $p^2 = \lambda$, то $\hat{v}(p) u_0(p) = \varphi(p)$;

$$(c) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_T |\varphi_\varepsilon(p)|^2 [(p^2 - \lambda)^2 + \varepsilon^2]^{-1} dp = 0. \quad (3.21)$$

Доказательство. Утверждение (а) вытекает из соотношения (1.18), где в силу леммы 3.1 b можно заменить λ на z , неравенства (2.1), а также неравенства (3.14), куда ввиду определения множества $\tilde{\Delta}_0$ можно подставить $\xi = \ker \{if_0(\lambda)\}$. Пункт (б) леммы вытекает из (а) и равенства, получаемого из (3.19) после применения к нему оператора $\hat{T}^{-1} + W_z$ с последующим предельным переходом $\varepsilon \rightarrow +0$. Пункт (с) вытекает из (3.18) при использовании уже доказанных пунктов (а), (в) настоящей леммы.

Таким образом, (3.19) и (3.20) означают справедливость равенства (3.17), что завершает доказательство леммы 3.4, из которой, в свою очередь, следует правильность соотношения (3.10), а с ним и леммы 3.3. Но лемма 3.3 вместе с теоремой 1.1 дадут утверждение теоремы 1.3.

Поступила в редколлегию 05.06.86

УДК 517.9+513.8

Ф. С. РОФЕ-БЕКЕТОВ, А. М. ХОЛЬКИН

СВЯЗЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА.

II. ПРИМЕНЕНИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ И ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ

Обозначения, определения, нумерация формул, теорем и т. п. продолжают принятые в [1]. Список литературы свой.

§ 4. Мультипликативное представление положительных дифференциальных операторов и его приложения. Факторизационная теорема Фробениуса [2, с. 214] допускает следующее обобщение на случай конечных и бесконечных систем дифференциальных уравнений.

Теорема 3. Пусть $\omega(x) \in B(H^n, H)$ — какое-нибудь самосогласованное решение уравнения

$$l[y] \equiv \sum_{j=0}^n (-1)^j D^j p_j(x) D^j y + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{r-n-1} (-1)^j D^j \{D q_j(x) + q_j^*(x) D\} D^j y = \lambda W(x) y, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

при $\lambda = 0$, $r = 2n$ (дефинитность $p_n(x)$ и полуограниченность операции l здесь не требуются). Тогда в каждой точке $x \in (a, b)$, где существует $(\omega^\wedge)^{-1}(x) \in B(H^n)$, операция l (1) допускает мультипликативное представление

$$l[y] = \mu^+ p_n(x) \mu[y], \quad (23)$$

$$\text{где} \quad \mu[y] = y^{(n)} - \omega^{(n)}(x) (\omega^\wedge)^{-1}(x) y^\wedge, \quad (24)$$

μ^+ — операция, формально сопряженная к μ в $L_2\{H; (a, b); dx\}$. При этом

$$\mu[\omega] = 0, \quad \mu^+[\{0_H; \dots; 0_H; I_H\} (\omega^\wedge)^{-1}] = 0. \quad (25)$$

Напомним, что при $r = 2n$

$$y^\wedge(x) = \text{col} \{y^{(k)}(x)\}_{k=0}^{n-1}, \quad y^\vee(x) = \text{col} \{y^{[2n-1]}(x)\}_{j=1}^n, \quad (5)$$

где $y^{[j]}$ — квазипроизводные (7) (см. [1]).

Доказательство. В силу (24) очевидно, что $\mu[\omega] = 0$. Поскольку операцию μ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu[y] &= y^{(n)} - \{0_H; \dots; 0_H; I_H\} (d\omega^\wedge / dx) (\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge = \\ &= \{0_H; \dots; 0_H; I_H\} \left\{ I_{H^n} D - \left(\frac{d}{dx} \omega^\wedge \right) (\omega^\wedge)^{-1} \right\} \begin{pmatrix} I \\ ID \\ \vdots \\ ID^{n-1} \end{pmatrix} y, \end{aligned}$$

где $D = \frac{d}{dx}$, то операция μ^* , формально сопряженная к μ в $L_2\{H; (a, b); dx\}$, имеет вид $\mu^*[y] = -\{I; -ID; \dots; (-I)^{n-1} D^{n-1}\} \times$

$$\times \left\{ I_{H^n} D + (\omega^\wedge)^{-1*} \frac{d}{dx} (\omega^\wedge)^* \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} y. \text{ Поэтому } \mu^*[\{0; \dots; 0; I\} (\omega^\wedge)^{-1}] =$$

$$= \{-I; ID; \dots; (-I)^n D^{n-1}\} \left\{ I_{H^n} D + (\omega^\wedge)^{-1*} \frac{d}{dx} (\omega^\wedge)^* \right\} \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & \ddots \\ & & & I \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times (\omega^\wedge)^{-1*} = \{-I; ID; \dots; (-I)^n D^{n-1}\} \left\{ \frac{d}{dx} [(\omega^\wedge)^{-1*}] + (\omega^\wedge)^{-1*} \left(\frac{d}{dx} (\omega^\wedge)^* \right) \times \right.$$

$$\left. \times (\omega^\wedge)^{-1*} - \begin{pmatrix} D & & \\ I & D & \\ & \ddots & \ddots \\ & & D & \\ & & & I & 0 \end{pmatrix} (\omega^\wedge)^{-1*} \right\} = 0.$$

Непосредственно проверяется, что

$$V(x, t) = \omega(x) (\omega^\wedge)^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} : H \rightarrow H \quad (6)$$

является операторно-значной функцией Коши для $\mu[y]$, а поэтому $-V^*(t, x)$ — функция Коши для $\mu^*[y]$. В частности, $\mu_x^+[V^*(t, x)] = 0$ в силу (25), а

$$\mu_x^+ \left[\int_{\xi}^x V^*(t, x) l_t[y] dt \right] = -l_x[y], \quad (26)$$

если в точке $\xi \in (a, b)$ оператор $\omega^\wedge(x)$ имеет ограниченный обратный на всем H^n и x принадлежит той окрестности ξ , где это свойство

сохраняется в силу непрерывности $\omega^\wedge(x)$. Подсчитаем левую часть (26) непосредственно, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^x V^*(t, x) l_t[y] dt &= \int_{\xi}^x (l_t[V(t, x)])^* y(t) dt + [V^{\vee*}(t, x) y^\wedge(t) - \\ &- V^{\wedge*}(t, x) y^\vee(t)] \Big|_{\xi}^x = \{0; \dots; 0; I\} \{(\omega^\wedge)^{*-1}(x) (\omega^\vee)^*(x) y^\wedge(x) - \\ &- y^\vee(x)\} - \{0; \dots; 0; I\} (\omega^\wedge)^{*-1}(x) \{(\omega^\vee)^*(\xi) y^\wedge(\xi) - \\ &- (\omega^\wedge)^*(\xi) y^\vee(\xi)\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как решение $\omega(x)$ — самосогласованно, то $(\omega^\vee)^* \omega^\wedge - (\omega^\wedge)^* \omega^\vee = 0$, поэтому $(\omega^\wedge)^{*-1} (\omega^\vee)^* = \omega^\vee (\omega^\wedge)^{-1}$ и первая половина правой части (27), с учетом (5) и так как

$$y^{[n]} = p_n y^{(n)} - \frac{i}{2} q_{n-1} y^{(n-1)}, \quad (7)$$

равна

$$\begin{aligned} &\{0; \dots; 0; I\} \omega^\vee(x) (\omega^\wedge)^{-1}(x) y^\wedge(x) - y^{[n]}(x) = \\ &= \omega^{[n]} (\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge - y^{[n]} = \\ &= p_n \{ \omega^{(n)} (\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge - y^{(n)} \} - \frac{i}{2} q_{n-1} \{ \omega^{(n-1)} (\omega^\wedge)^{-1} y^\wedge - y^{(n-1)} \} = \\ &= -p_n \mu[y] - \frac{i}{2} q_{n-1} \{ \{0; \dots; 0; I\} y^\wedge - y^{(n-1)} \} = -p_n(x) \mu[y]. \end{aligned}$$

Поэтому из (26) и (27), в силу (25), получаем (23). Теорема 3 доказана*.

В качестве примера применения доказанной теоремы установим достаточный критерий осцилляторности уравнений четного порядка $2n$, который в случае уравнений второго порядка с операторно-значными коэффициентами обобщает относящуюся специально к этому случаю теорему Эдждена и Павловски [3], так как допускает операторы, содержащие члены с первой производной.

Определение 3. Уравнение (1) порядка $2n$ с позитивным старшим коэффициентом называем осцилляторным при $\lambda = 0$ в окрестности $x = \infty$, если оно не имеет самосогласованных решений $Y(x, 0) \in B(H^n, H)$ таких, что существует $(Y^\wedge)^{-1}(x, 0) \in B(H^n)$ при каждом достаточно большом x .

При $\dim H < \infty$ определение эквивалентно общепринятому [2].

Пусть g — линейный позитивный функционал на C^* -алгебре $B(H)$. Широкий класс таких функционалов имеет вид $g(T) = \text{sp}(AT)$, где $A = A^* \geq 0$ — ядерный оператор. При $\dim H < \infty$ такой вид, как известно (Уолтерс, 1980), имеют все позитивные функционалы на $B(H)$.

Полагаем $g(D^i p(x) D^k) = D^i g(p(x)) D^k$, где $p(x) \in B(H)$.

* Общая идея приведенного доказательства сходна с доказательством М. Г. Крейна 1937 г. теоремы Фробениуса [2, п. 44], однако последнее основано на использовании детерминантов, поэтому наша схема отличается и в скалярном случае от известных, включая и формулировку теоремы Фробениуса, которая заменяется эквивалентной.

Теорема 4. Если скалярное уравнение $g(l)[u] = 0$ осцилляторно, то и операторное уравнение (1) порядка $2n$ с позитивным старшим коэффициентом $p_n(x) \gg 0$ тоже осцилляторно при $\lambda = 0$.

Доказательство. Пусть $g(l)[u] = 0$ — осцилляторно, тогда [2] $\forall N > 0$ найдутся $\alpha > 0$, $x_2 > x_1 > N$ такие, что существует нетривиальное решение $f: R \rightarrow C$ скалярной задачи $g(l)[f] = -\alpha f$, $f^\wedge(x_1) = f^\wedge(x_2) = 0$. С другой стороны, если уравнение $l[u] = 0$ неосцилляторно, то оно имеет решение $\omega(x)$, удовлетворяющее при всех $x > N > 0$, N — достаточно большое число, условиям теоремы 3, а поэтому при $x > N$ операция l допускает мультипликативное представление (23). Поэтому, интегрируя по частям и применяя затем к обеим частям равенства функционал g , приходим к противоречию:

$$\begin{aligned} 0 &< g\left(\int_{x_1}^{x_2} (\mu[f])^* p_n(x) \mu[f] dx\right) = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \bar{f}(x) g(l) f(x) dx = -\alpha \int_{x_1}^{x_2} |f|^2 dx < 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Обобщением теоремы М. Г. Крейна—Хайнца—Реллиха [2, п.° 44] является

Теорема 5. Пусть $p_n(x) \gg 0$, $r = 2n$. Тогда неотрицательность минимального оператора L эквивалентна любому из двух следующих условий:

1°. Представимость дифференциальной операции l (1) в виде (23), где $\mu[y] = y^{(n)} + s_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + s_0(x)y$, $a < x < b$, $s_k(x) \in C^n(a, b)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

2°. Существование $\omega(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы 3 при всех $x \in (a, b)$, включая обратимость $\omega^\wedge(x)$.

Замечание 3. Если рассматриваемый дифференциальный оператор положительно определен $L \gg 0$, то он допускает факторизацию и в замыкании (a, b) и там же $(\omega^\wedge)^{-1} \in B(H^n)$. Если $-\infty < a < b < \infty$, то верно и обратное утверждение.

Доказательство. Если выполняется любое из условий 1°, 2° теоремы, то операция l допускает мультипликативное представление (23) и неотрицательность операции $l = \mu^+ p_n \mu$, даже при $p_n(x) \gg 0$, очевидна. Если же $-\infty < a < b < \infty$ и операция l допускает мультипликативное представление в $[a, b]$ и там же $(\omega^\wedge)^{-1} \in B(H^n)$, то минимальный оператор L положительно определен, поскольку в противном случае для самосопряженного расширения L_b^0 , порожденного условиями $y^\wedge(b) = 0$ и

$$\omega^\wedge^*(a) y^\vee(a) - \omega^\vee^*(a) y^\wedge(a) = 0, \quad (28)$$

имели бы $\inf \sigma(L_b^0) \leq 0$ и поэтому, в силу непрерывной и строго монотонной зависимости $\inf \sigma(L_\xi^0)$ от ξ , где L_ξ^0 порожден выражением l (1) и условиями (28) и $y^\wedge(\xi) = 0$, и так как при $\xi \searrow a$ $\inf \sigma(L_\xi^0) \nearrow +\infty$

(см. [4; 5, лемма 2], условие (28) полуограниченное*), нашлась бы точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $0 \in \sigma(L_\xi^0)$. Но тогда в силу леммы 1 из [1] было бы $0 \in \sigma(\omega^\wedge(\xi))$, вопреки условию.

Пусть теперь $L \geq 0$. Если a (или b) конечно, то в качестве $\omega(x)$ возьмем фундаментальное решение (ф. р.) уравнения $l[y] = 0$ с начальными данными: $\omega^\wedge(a) = 0$, $\omega^\vee(a) = I$ (или соответственно $\omega^\wedge(b) = 0$, $\omega^\vee(b) = I$). Если бы при некотором $\xi \in (a, b)$ оказалось, что $0 \in \sigma(\omega^\wedge(\xi))$, то мы имели бы по лемме 1 из [1], что $0 \in \sigma(L_\xi^0)$, где L_ξ^0 — самосопряженный оператор, порожденный задачей (1), $y^\wedge(\xi) = 0$, $y^\vee(\xi) = 0$ ($y^\wedge(a) = 0$, $y^\vee(b) = 0$). Поэтому, в силу строгой монотонности по ξ нижней грани рассматриваемой задачи (см. [4] или [5, лемма 2]), оказалось бы, что $\inf \sigma(L^F) < 0$, вопреки неотрицательности минимального оператора L . Таким образом, $(\omega^\wedge)^{-1}(x) \in B(H^n) \forall x \in (a, b)$, поэтому по теореме 3 представление (23) справедливо всюду в (a, b) и $\mu[y]$ обладает указанными свойствами.

Если оператор L положительно определен и a (или b) конечно, то, выбирая на противоположном конце самосопряженное граничное условие $U_b^F[y] = 0$, отвечающее расширению по Фридрихсу, получим, что минимальный относительно точки $\xi \in [a, b)$ ($\xi \in (a, b]$) оператор $L_\xi \geq 0$ в $H(\xi, b)$ (соответственно в $H(a, \xi)$). Поэтому 0 оказывается точкой регулярного типа для L и существует ф. р. $\omega(x) = Y(x, 0)$ задачи $l[y] = 0$, $U_b^F[y] = 0$ (или $U_a^F[y] = 0$), причем по лемме 1 из [1] оператор $\omega^\wedge(x)$ имеет ограниченный обратный во всем H^n при всех $x \in [a, b)$ ($x \in (a, b]$). Если a и b конечны, то в силу непрерывной зависимости нижней грани спектра оператора L^F от a и b [4; 5, лемма 2] при некоторых ε , $\varepsilon' > 0$ минимальный оператор в $H(a - \varepsilon, b + \varepsilon')$ положительно определен. Поэтому существует решение $\omega(x)$, удовлетворяющее условиям теоремы 3 на $(a - \varepsilon, b + \varepsilon') \supset [a, b]$.

Таким образом, если хотя бы один из концов интервала (a, b) является конечным, то теорема 5 и замечание 3 доказаны.

Теперь пусть $a = -\infty$, $b = \infty$. Тогда, если $0 \in \inf \sigma_e(L)$, то ф. р. $Y(x, \lambda)$ задачи (1), с $U_a[y] = 0$, удовлетворяющего определению 1 из [1] (см. также [5]), может не существовать при $\lambda = 0$. Построим на нижней грани предельного спектра минимального оператора L самосогласованное операторное решение $\omega(x) \in B(H^n, H)$ уравнения (1) на оси, удовлетворяющее условиям теоремы 3. Этим будет завершено доказательство теоремы 5.

Пусть $Y_0(x)$, $Y_1(x) \in B(H^n, H)$ — решения уравнения (1) при $\lambda = 0$ и при начальных условиях

$$Y_0^\wedge(0) = I_n, \quad Y_0^\vee(0) = 0_n, \quad Y_1^\wedge(0) = 0_n, \quad Y_1^\vee(0) = I_n.$$

Положим $\omega_\alpha(x) = Y_0(x) + Y_1(x)C_\alpha$, $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$, где

$$C_\alpha = -(Y_1^\wedge)^{-1}(\alpha) \cdot Y_0^\wedge(\alpha) \in B(H^n) \quad (29)$$

выбрано так, что $\omega_\alpha^\wedge(\alpha) = 0$. (Существование $(Y_1^\wedge)^{-1}(\alpha) \in B(H^n)$ обеспечено при $\alpha \neq 0$, так как $L \geq 0$ на оси).

* Так как $[\omega^{\wedge*}(a)]^{-1} \in B(H^n)$.

Покажем, что $\omega_\alpha(x)$ является самосогласованным ф. р. задачи $l[y] = 0$, $y^\wedge(\alpha) = 0$, $\alpha \neq 0$, $x \in R$ (30). Прежде всего заметим, что $C_\alpha^* = C_\alpha$, так как $0 = W_\alpha\{\omega_\alpha, \omega_\alpha\} = W_0\{\omega_\alpha, \omega_\alpha\} = C_\alpha^* - C_\alpha$, поэтому $\omega_\alpha(x)$ удовлетворяет самосопряженному краевому условию при $x = 0$: $y^\vee(0) - C_\alpha y^\wedge(0) = 0$ (31). Так как $\omega_\alpha(0) = I_n$, $\omega_\alpha^\wedge(0) = C_\alpha$, то любое решение $l[y] = 0$, удовлетворяющее (31), представимо в виде $y = \omega_\alpha(x)h$, $h \in H^n$ и

$$M_{\omega_\alpha}(x) \equiv \sum_{k=0}^{2n-1} \omega_\alpha^{(k)*}(x) \omega_\alpha^{(k)}(x) \gg 0, \quad (32)$$

так как $M_{\omega_\alpha}(0) \gg I_n \gg 0$ (ср. (11) из [1]). Следовательно, $\omega_\alpha(x)$ является самосогласованным ф. р. задачи $l[y] = 0$ и (31), а поэтому в силу [6, лемма 2] существует $[\omega_\alpha^\vee(x) + i\omega_\alpha^\wedge(x)]^{-1} \in B(H^n)$, откуда при $x = \alpha$ следует существование $[\omega_\alpha^\vee(\alpha)]^{-1} \in B(H^n)$. Это означает, что любое решение задачи (30) представимо в виде $\omega_\alpha(x)h$, $h \in H^n$, и потому, учитывая (32), видим, что $\omega_\alpha(x)$ есть самосогласованное ф. р. задачи (30). Поэтому при всех $x \neq \alpha$ оператор $\omega_\alpha^\wedge(x)$ имеет ограниченный обратный во всем H^n , так как, если при некотором $\xi \neq \alpha$ $0 \in \sigma(\omega_\alpha^\wedge(\xi))$, то в силу леммы $1 \in \sigma(L_{\alpha, \xi}^0)$, где $L_{\alpha, \xi}^0$ — самосопряженный оператор, порожденный задачей (1) с $y^\wedge(\alpha) = y^\wedge(\xi) = 0$ на отрезке $[\alpha, \xi]$ ($[\xi, \alpha]$), вопреки тому, что $L \geq 0$ на $(-\infty, \infty)$ и что нижняя грань $\sigma(L_{\alpha, \xi}^0)$ строго убывает при расширении конечного интервала [4, 5].

Из (29) имеем

$$\frac{dC_\alpha}{d\alpha} = (Y_1^\wedge)^{-1} \left(\frac{d}{d\alpha} Y_1^\wedge \right) (Y_1^\wedge)^{-1} Y_0^\wedge - (Y_1^\wedge)^{-1} \frac{d}{d\alpha} Y_0^\wedge. \quad (33)$$

Как известно, при $r = 2n$ уравнение (1) сводится к симметричной системе вида

$$J \frac{dz}{dx} = (\lambda A(x) + B(x))z, \quad (34)$$

где $z(x, \lambda) = y^\wedge(x, \lambda) \oplus y^\vee(x, \lambda) \in H^{2n}$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = B^*(x) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

— операторы в H^{2n} , причем

$$B_{22}(x) = \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{n-1} \oplus p_n^{-1}(x). \quad (35)$$

Используя систему (34) при $\lambda = 0$, из (33) получим

$$\begin{aligned} \frac{dC_\alpha}{d\alpha} &= (Y_1^\wedge)^{-1} \{ (B_{21}Y_1^\wedge + B_{22}Y_1^\vee)(Y_1^\wedge)^{-1}Y_0^\wedge - (B_{21}Y_0^\wedge + B_{22}Y_0^\vee) \} = \\ &= (Y_1^\wedge)^{-1} B_{22} \{ Y_1^\vee (Y_1^\wedge)^{-1} Y_0^\wedge - Y_0^\vee \}. \end{aligned}$$

Поскольку $0 = W_0 \{Y_1, Y_1\} = W_\alpha \{Y_1, Y_1\}$, то

$$Y_1^\vee(\alpha)(Y_1^\wedge)^{-1}(\alpha) = (Y_1^\wedge)^*{}^{-1}(\alpha) \cdot (Y_1^\vee)^*(\alpha),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dC_\alpha}{d\alpha} &= (Y_1^\wedge)^{-1} B_{22} \{ (Y_1^\wedge)^*{}^{-1} (Y_1^\vee)^* Y_0^\wedge - (Y_1^\wedge)^*{}^{-1} (Y_1^\wedge)^* Y_0^\vee \} = \\ &= (Y_1^\wedge)^{-1} B_{22} (Y_1^\wedge)^*{}^{-1} W_\alpha \{Y_1, Y_0\} = (Y_1^\wedge)^{-1} B_{22} (Y_1^\wedge)^*{}^{-1} W_0 \{Y_1, Y_0\} = \\ &= (Y_1^\wedge)^{-1} B_{22} (Y_1^\wedge)^{-1*} \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

(последнее в силу (35) и так как $\rho_n(x) \gg 0$).

Покажем, что $|C_\alpha| < \text{const}$ при $\alpha \rightarrow \pm \infty$ (и, вообще, при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

В силу (36) верхняя грань оператора $C_\alpha = C_\alpha^*$ остается при $\alpha \rightarrow -\infty$ ограниченной сверху. Нижняя грань C_α , т. е. $\inf \sigma(C_\alpha)$, ограничена снизу при $\alpha \rightarrow -\infty$, так как, если бы для некоторой последовательности $\alpha_k \rightarrow -\infty$ было бы $\inf \sigma(C_{\alpha_k}) \rightarrow -\infty$, то самосопряженная краевая задача в $H(0, 1) = L_2\{H; (0, 1); W(x)dx\}$:

$$l_W[y] = W^{-1}l[y] = \lambda y, \quad y^\vee(0) - C_{\alpha_k} y^\wedge(0) = 0, \quad y^\wedge(1) = 0,$$

имела бы при достаточно больших k отрицательную нижнюю грань, что видно из рассмотрения квадратичной формы типа Дирихле с внеинтегральным членом $(C_{\alpha_k} y^\wedge(0), y^\wedge(0))$, отвечающей в $H(0, 1)$ этой задаче. Но тогда при таких k нашлось бы $x_k \in (0, 1)$ такое, что $0 \in \sigma(\omega_{\alpha_k}^\wedge(x_k))$, вопреки установленному свойству $[\omega_\alpha^\wedge(x)]^{-1} \in B(H^n)$ при $x \neq \alpha$.

В силу ограниченности и монотонности C_α при $\alpha \rightarrow -\infty$ существует самосопряженный сильный предел $C = s - \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} C_\alpha$.

Положим $\omega(x) = Y_0(x) + Y_1(x)C$. Поскольку C_α не убывает при $\alpha \neq 0$, то при любом $\xi < 0$ нижняя грань оператора в $H(\xi, 0)$, порожденного $l_W[y]$ и самосопряженными граничными условиями $y^\wedge(\xi) = 0$, $y^\vee(0) - C_\alpha y^\wedge(0) = 0$, не понижается при $\alpha \searrow -\infty$, поэтому дифференциальный оператор, порожденный (1), $y^\wedge(\xi) = 0$, $y^\vee(0) - C y^\wedge(0) = 0$, имеет положительную нижнюю грань и в силу теоремы 1 из [1] оператор $\omega^\wedge(x)$ ограниченно обратим на всем H^n при всех $x \leq 0$. На правой полуоси рассмотрим семейство операторов L_α , являющихся расширением по Фридрихсу минимального относительно $x = \infty$ оператора L'_α , порожденного в $H(0, \infty)$ выражением $l_W[y]$ и краевым условием в нуле (31). Оператор $L_\alpha \geq 0$ и не возрастает по α в силу (36). Поэтому в пределе при $\alpha \rightarrow -\infty$ имеем $L_{(-\infty)} \geq 0$ и оператор $\omega^\wedge(x)$ ограниченно обратим в H^n на всей оси. Теорема доказана.

Следствие 3. Если для некоторой нетривиальной вектор-функции $h(x) \in C^{2n}(\alpha, \beta)$, $h^{(k)}(\alpha) = h^{(k)}(\beta) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$: $\int_\alpha^\beta (l[h], h) dx \leq 0$, (в частности, если α и β — сопря-

женные точки), то для любого самосогласованного решения ω , $I[\omega] = 0$, найдется точка $x \in [\alpha, \beta]$, где $\omega^\wedge(x)$ не имеет ограниченного обратного во всем H^n . Если неравенство строгое, то такая точка найдется в (α, β) .

(При $\dim H < \infty$ и $r = 4$ отсюда следует результат Л. М. Кукса (1974) и к тому же при меньших ограничениях).

Действительно, если бы существовало самосогласованное решение $\omega(x)$ уравнения $I[\omega] = 0$ такое, что $\omega^\wedge(x)$ имеет ограниченный обратный во всем H^n при всех $x \in [\alpha, \beta]$, то в силу замечания 3 минимальный в $H(\alpha, \beta)$ оператор, а с ним и его расширение по Фридрихсу были бы положительно определены, вопреки тому, что $h \in D(L^F)$ и $\langle L^F h, h \rangle \leq 0$. Если неравенство строгое, то, используя теорему 5 и рассуждая аналогично, получаем второе утверждение следствия.

§ 5. Уровни в лакуне предельного спектра. Не требуя ни полуограниченности минимального оператора $L \subseteq \tilde{L}$, где $\tilde{L}$ — некоторое его самосопряженное расширение, порожденное распадающимися краевыми условиями $U_a[y] = 0$, $U_b[y] = 0$, ни четности порядка r дифференциального уравнения (1) (допускается $r = 2n$ и $r = 2n + 1$), предположим C^{2r} — гладкость коэффициентов операции $l_w[y] = W^{-1}l[y]$ и обозначим M замкнутый минимальный дифференциальный оператор, порожденный в $H(a, b)$ операцией $l_w^2[y] = l_w[l_w[y]]$ (37).

Поскольку операторы M и $(\tilde{L})^2$ совпадают на C_0^∞ , то $M \subseteq (\tilde{L})^2$, т. е. $(\tilde{L})^2$ является некоторым самосопряженным расширением $\tilde{M}$ положительного симметрического оператора M .

Обозначим M_b — сужение оператора $\tilde{M}$ требованием минимальности относительно b , $p = \text{Def} \{ \tilde{M} | D(\tilde{M}) \cap D(M_b^F) \}$, $N(\lambda, \mu)$ — количество собственных значений $\lambda_k \in (\lambda, \mu)$ оператора $\tilde{L}$ с учетом их кратностей $\kappa(\lambda_k)$.

Пусть $Y(x, \lambda)$ — ф. р. задачи (1) с $U_a[y] = 0$. Положим

$$Y(x, \lambda, \mu) = \{Y(x, \lambda); Y(x, \mu)\}: H^2 \rightarrow H \quad (38)$$

$$Y^\Delta(x, \lambda, \mu) = \text{col} \{Y^{(k)}(x, \lambda, \mu)\}_{k=0}^{r-1}. \quad (39)$$

Теорема 6*. Пусть (α, β) — лакуна в предельном спектре $\tilde{L}$, $\alpha < \lambda < \mu < \beta$. Тогда

$$N(\lambda, \mu) - p \leq \sum_{x \in (a, b)} \text{nul } Y^\Delta(x, \lambda, \mu) \leq N(\lambda, \mu), \quad (40)$$

причем

$$\text{nul } Y^\Delta(x, \lambda, \mu) = \text{nul } Y^{\Delta*}(x, \lambda, \mu). \quad (41)$$

Если $\kappa_{L_b}(\lambda) = \kappa_{L_b}(\mu) = 0$, где $L_b \subseteq \tilde{L}$ — минимальный относительно конца b оператор, то в (40) вместо p можно взять $\min \{p, \text{Def } M_b - \kappa(\lambda) - \kappa(\mu)\}$. Если $a > -\infty$, то теорема верна и при $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$.

* Случай $r = 1$, $\dim H < \infty$, $-\infty < x < \infty$ содержится в [7]. Другой подход к исследованию дискретных уровней в спектральных лакунах, основанный на методе фазовых функций, развит в [8, теорема 4] для скалярного оператора Шредингера.

Замечание 4. Если $b < \infty$, то $0 < p = \frac{r}{2} \dim H$, $\text{Def } M_b = r \dim H$. (Из неравенства $p > 0$ видно, что при $b < \infty$ расширение по Фридрихсу M_b^F не может быть получено как квадрат самосопряженного дифференциального оператора $\tilde{L}$, т. е. оператор $(M_b^F)^{\frac{1}{2}}$ не является дифференциальным, хотя $M_b^F \geq 0$).

Доказательство. Самосопряженное расширение минимального (замкнутого) оператора M , приводящее к самосопряженному оператору $(\tilde{L})^2$, порождается граничными условиями

$$U_a[y] = 0, \quad U_a[l_W[y]] = 0 \quad (42), \quad U_b[y] = 0, \quad U_b[l_W[y]] = 0 \quad (43),$$

$$l_W[y] \in H(a, b) \quad (44).$$

Последнее условие (44) может полностью или частично оказаться следствием первых двух и требования $y \in D(M^*)$. Условия (42), (43) вместе порождают самосопряженное расширение минимального оператора M в том и только в том случае, когда для каждой функции $y \in D(M^*)$ они влекут, что $l_W[y] \in H(a, b)$.

Поскольку $\text{Def } M \geq \text{Def } (L^2)$, то на основании теоремы о квадрате замкнутого симметрического оператора с конечным индексом дефекта (см. [2, с. 48]) имеем при конечных индексах дефекта оператора L $\text{Def } (L^2) = 2\text{Def } L$ и $\text{Def } M \geq 2\text{Def } L$ (45). Примеры, в которых реализуется строгое неравенство, известны уже в скалярном случае при $r = 2$ (Чаудхури, Эверит, 1969). Если неравенство строгое, то условие (44) полностью не является следствием (42), (43) и требования $y \in D(M^*)$. Условия (42) — (44) являются обобщением неравенства (45) и условий, когда оно переходит в равенство, на случай $\text{Def } L = \infty$. (Для скалярного уравнения эквивалентные условия, но в другой форме получил Цеттл в 1975 г.).

Условие (44) является линейным и распадающимся, ибо иначе его можно записать так:

$$\int_a^b \left| W^{\frac{1}{2}} l_W[y] \right|^2 dx < \infty, \quad \int_a^b \left| W^{\frac{1}{2}} l_W[y] \right|^2 dx < \infty. \quad (46 a, b)$$

Без ограничения общности будем считать, что $\lambda = -\mu < 0$. Так как $\mu^2 < \inf \sigma_l(M_b) \leq \min \{\alpha^2, \beta^2\}$, то уравнение $l_W^2[y] = \mu^2 y$ (47) с условиями (42), (46 а) имеет фундаментальное операторное решение $Z(x, \mu^2): H^2 \rightarrow H$. С другой стороны, оператор-функция $Y(x, -\mu, \mu): H^2 \rightarrow H$ (38) также является решением уравнения (47) и при любом $h \in H^2$ вектор-функция $y_h(x, \mu) = Y(x, -\mu, \mu)h$ (48) удовлетворяет условиям (42), (46 а). Оператор $Y(x, -\mu, \mu)$ (38) при $\mu \neq 0$ невырожден, то есть, если $Y(x, -\mu, \mu)h \equiv 0$, $h \in H^2$, то $h = 0$. Действительно, пусть $h = h_- \oplus h_+$, где $h_{\pm} \in H$, и пусть

$$Y(x, -\mu, \mu)h = Y(x, -\mu)h_- + Y(x, \mu)h_+ = 0. \quad (49)$$

Тогда

$$0 \equiv l_W[Y(x, -\mu)h_- + Y(x, \mu)h_+] = -\mu Y(x, -\mu)h_- + \mu Y(x, \mu)h_+. \quad (50)$$

Сравнивая (49), (50) при $\mu \neq 0$, получаем $Y(x, -\mu)h_- = Y(x, \mu) \cdot h_+ \equiv \equiv 0$, следовательно, $h_- = h_+ = 0$.

Так как $Z(x, \mu^2)$ есть ф. р. задачи (47), (42), (46 а), то при любом $h \in H^2$ для функции (48) найдется такой $g \in H^2$, что $y_h(x, \mu) = z_g(x, \mu)$, где $z_g(x, \mu) = Z(x, \mu^2)g$ (51). Покажем, что и для любого $g \in H^2$, если $y(x, \mu) = z_g(x, \mu)$ определить формулой (51), найдется такой $h \in H^2$, что будет выполняться (48), т. е. $Y(\cdot, -\mu, \mu)h = Z(\cdot, \mu^2)g$ (52), где любой из векторов $h, g \in H^2$ можно выбирать произвольно, а второй определяется по нему.

Вектор-функция $u(x, \mu) = z_g(x, \mu) - Y(x, \mu)h_+ - Y(x, -\mu)h_-$, $h_{\pm} \in H$ (53) является решением задачи (47), (42), (46). Покажем, что можно подобрать $h_{\pm} \in H$ так, чтобы

$$(l_W[u])^\wedge(c) = i\mu u^\vee(c, \mu), \quad (l_W[u])^\vee(c) = -i\mu u^\wedge(c, \mu), \quad (54)$$

где $c \in (a, b)$. Тогда, интегрируя по частям, получим $0 = \langle l_W^2[u], u \rangle - \langle u, l_W^2[u] \rangle = ((l_W[u])^\wedge(c), u^\vee(c)) - ((l_W[u])^\vee, u^\wedge(c)) + (u^\wedge(c), (l_W[u])^\vee(c)) - (u^\vee(c), (l_W[u])^\wedge(c)) = 2i\mu [(u^\vee(c), u^\vee(c)) + (u^\wedge(c), u^\wedge(c))]$. Если $\mu \neq 0$, то $u^\wedge(c) = u^\vee(c) = 0$, поэтому в силу (54) $(l_W[u])^\wedge(c) = (l_W[u])^\vee(c) = 0$ и, следовательно, $u(x, \mu) \equiv 0$, откуда вытекает (52).

Для доказательства (54) заметим, что, поскольку $l_W[u] = l_W[z_g] - \mu Y(x, \mu)h_+ + \mu Y(x, -\mu)h_-$, то условия (54) принимают вид $(l_W[z_g])^\wedge(c) - i\mu z_g^\vee(c) = -i\mu V_+(c, \mu)h_+ - i\mu V_-(c, -\mu)h_-$, $(l_W[z_g])^\vee(c) + i\mu z_g^\wedge(c) = \mu V_+(c, \mu)h_+ - \mu V_-(c, -\mu)h_-$, где операторы $V_{\pm}(x, \mu) := Y^\vee(x, \mu) \pm iY^\wedge(x, \mu): H \rightarrow H^\sim$ при всех $x \in (a, b)$ имеют ограниченные обратные, определенные во всем $H^\sim$ (по лемме 2 из [6]). Эта система однозначно разрешима относительно $h_{\pm}$ и поэтому, взяв в (53) в качестве $h_{\pm}$ решение этой системы, получим, что $u(x, \mu)$ удовлетворяет (54), и, следовательно, представление (52) доказано.

Так как $Z(x, \mu^2)$ есть ф. р. задачи (47), (42), (46 а) порядка $2r$, то $Z^\wedge(x, \mu^2) = \text{col}\{Z^{(k)}(x, \mu^2)\}_{k=0}^{r-1}: H^2 \rightarrow H^r$. В силу (32) и (52) $Z^\wedge(x, \mu^2)g = Y^\Delta(x, -\mu, \mu)h$ (55). Покажем, что при $\mu \neq 0$ $\text{pnl } Z^\wedge(x, \mu^2) = \text{pnl } Y^\Delta(x, -\mu, \mu)$ (56). Если при некотором $x \in (a, b)$ существуют линейно независимые векторы $h_1, h_2, \dots, h_k \in H^2$ такие, что $Y^\Delta(x, -\mu, \mu)h_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, то соответствующие им в силу (52) векторы $g_1, g_2, \dots, g_k \in H^2$ также линейно независимы, ибо иначе существовала бы нетривиальная линейная комбинация $c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_kh_k$, такая, что $Y(\cdot, -\mu, \mu)(c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_kh_k) \equiv 0$, вопреки невырожденности $Y(\cdot, -\mu, \mu)$. Следовательно, $\text{pnl } Y^\Delta(x, -\mu, \mu) \leq \leq \text{pnl } Z^\wedge(x, \mu^2)$. Аналогично доказывается обратное неравенство, и мы получаем (56).

Если при некотором $x \in (a, b)$ $h_0 \in \text{Coker } Y^\Delta(x, -\mu, \mu)$, то для всех $h \in H^2$ $(Y^\Delta(x, -\mu, \mu)h, h_0) = 0$ и в силу (52) $(Z^\wedge(x, \mu^2)g, h_0) = 0$ для всех $g \in H^2$, следовательно, $\text{Coker } Y^\Delta(x, -\mu, \mu) \subseteq \text{Coker } Z^\wedge(x, \mu^2)$. Аналогично доказывается обратное включение, откуда

$$\text{Coker } Y^\Delta(x, -\mu, \mu) = \text{Coker } Z^\wedge(x, \mu^2). \quad (57)$$

Сравнивая (56) и (57) и учитывая фредгольмовость (т. е. нетеровость с нулевым индексом) ф. р. $Z(x, \mu^2)$ (см. [1, § 1] или [6, теорема 2]), получим (41).

Обозначим $N_1(\mu^2)$ количество собственных значений $\mu_k^2 < \mu^2$ оператора $\tilde{M}$ с учетом их кратностей $\kappa_1(\mu_k^2)$. Заметим, что $N_1(\mu^2) = N(-\mu, \mu)$, причем $\kappa_1(0) = \kappa(0)$ и $\kappa(-\mu_k) + \kappa(\mu_k) = \kappa_1(\mu_k^2)$. Поэтому в силу (56) и осцилляционной теоремы 1 из [1] для оператора $\tilde{M} = (\tilde{L})^2$ имеем (40).

Если $b < \infty$, то самосопряженное расширение $\tilde{L}$ минимального относительно точки $x = b$ оператора L_b порождается граничным условием вида (8) из [1]: $\cos B \cdot y^\vee(b) + \sin B \cdot y^\wedge(b) = 0$ (8), а самосопряженное расширение $\tilde{M} = \tilde{L}^2$ оператора M_b порождается граничными условиями (8) и

$$\cos B \cdot (l_W[y])^\vee(b) + \sin B \cdot (l_W[y])^\wedge(b) = 0. \quad (58)$$

Операторы $\tilde{M}$ и $\tilde{M}_b^F$ являются самосопряженными расширениями их максимальной общей части Λ , определенной на вектор-функциях $y \in D(M^*)$, удовлетворяющих условиям (42), (46), $y^\wedge(b) = y^\vee(b) = 0$ (58). Индексы дефекта оператора Λ есть

$$(\text{rnk} \{\cos B; \sin B\}, \text{rnk} \{\cos B; \sin B\}), \text{ т. е.}$$

$$\text{Def} \{\tilde{M} | D(\tilde{M}) \cap D(M_b^F)\} = \frac{r}{2} \dim H.$$

Теорема 6 и замечание 4 доказаны.

Список литературы: 1. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка. 1. Теоремы типа Штурма // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1987.— Вып. 48. С. 49—60. 2. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М., 1963.— 340 с. 3. Etgen G., Pawlowski J. A comparison theorem and oscillation criteria for second order differential systems // Pacif. J. Math.— 1977.— 72, № 1.— Р. 59—69. 4. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Зависимость спектра операторной краевой задачи от изменения интервала // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 43.— С. 107—119. 5. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциальных систем произвольного порядка // Докл. АН СССР.— 1981.— 261, № 3.— С. 551—555. 6. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Фундаментальная система решений операторного дифференциального уравнения с краевым условием на бесконечности // Мат. заметки.— 1984.— 36, № 5.— С. 697—709. 7. Холькин А. М. Осцилляционные теоремы для систем Штурма—Лиувилля и Дирака на осн. // Исследования по теории операторов и их приложениям: Сб. науч. тр.— К., 1979.— С. 147—161. 8. Рофе-Бекетов Ф. С. Константы типа Кнезера и эффективные массы для зонных потенциалов // Докл. АН СССР.— 1984.— 276, № 2.— С. 356—359.

Поступила в редколлегию 25.12.85

**РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ
ИНТЕРПОЛЯЦИИ И СОЕДИНЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ. I.**

Изучение абстрактной задачи интерполяции, рассматривавшейся в [4], нами проводится на основании теории открытых систем. Конструкции рассматриваемого типа развиты в работах [1—3], там же имеются дальнейшие ссылки. Работа состоит из двух частей. В первой изложены необходимые для дальнейшего сведения из теории открытых систем. Вторая посвящена собственно исследованию абстрактной задачи интерполяции; приложения к конкретным интерполяционным задачам не рассматриваются.

Остановимся кратко на содержании работы. Ряд интерполяционных задач анализа (Неванлинны—Пика, проблемы моментов и многие другие) укладывается в абстрактную схему, в которой данным задачи («узлам» интерполяции и «интерполируемым значениям») соответствуют оператор и квадратичная форма в некотором линейном пространстве, связанные между собой соотношением определенного вида. Это соотношение позволяет построить по имеющимся объектам унитарный узел в гильбертовом пространстве. Дальнейшее исследование задачи связано с представлением Фурье этого узла и узла, получающегося его соединением с произвольным унитарным узлом, внешние пространства которого фиксированы. При этом мы используем функциональную модель в форме де Бранжа—Ровняка. Сравнение различных форм функциональной модели проведено в [6].

При исследовании конечной степенной проблемы моментов Гамбургера наблюдается следующий эффект: естественному описанию поддается множество решений не самой исходной задачи, а несколько ослабленной (а именно: все моменты, кроме последнего, совпадают с данными, а последний лишь оценивается сверху данным). Аналогичный эффект имеет место и в некоторых других задачах, связанных с интерполяцией на границе области, например, в задаче о лифтинге коммутанта, если характеристическая функция не является внутренней [5].

Рассматриваемая схема исследования задач позволяет объяснить описанный эффект. Точнее говоря, оказывается, что он равносильен известному в теории операторов эффекту, когда при соединении простых узлов может получиться не простой узел; при этом остаточная часть вычисляется [3].

Автор выражает глубокую благодарность В. Э. Кацнельсону и П. М. Юдицкому за полезные обсуждения, а также М. Л. Содину за ряд полезных замечаний.

§ 1. Некоторые определения и факты из теории открытых систем. Здесь мы в основном придерживаемся терминологии и обозначений работы [1]. 1. Определение

унитарного узла и его характеристической функции. Унитарным узлом δ называется совокупность пространств H^δ (внутренние состояния), N_1^δ (пространство входов), N_2^δ (пространство выходов) и разби- того на блоки унитарного линейного отображения A^δ пространства $H^\delta \oplus N_1^\delta$ на $H^\delta \oplus N_2^\delta$:

$$A^\delta = \begin{bmatrix} A_{in}^\delta & A_1^\delta \\ (A_2^\delta)^* & A_{12}^\delta \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где $A_{in} = P_H^{(2)} A | H$, $A_{12} = P_{N_2} A | N_1$, $A_1 = P_H^{(2)} A | N_1$, $A_2^* = P_{N_2} A | H$, P — ортогональные проекторы на соответствующие подпространства (при этом $P_H^{(1)}$ из $H \oplus N_1$, $P_H^{(2)}$ — из $H \oplus N_2$). Блочный оператор дей- ствует на векторы вида $\begin{bmatrix} h \\ n_1 \end{bmatrix}$, а его значения — векторы вида $\begin{bmatrix} h \\ n_2 \end{bmatrix}$ ¹.

Характеристической функцией узла δ называется оператор функция (из N_1 в N_2):

$$\theta(\zeta) = P_{N_2} (1_{H \oplus N_2} - \zeta A P_H^{(2)})^{-1} A | N_1. \quad (1.2)$$

З силу унитарности A она определена и голоморфна при $|\zeta| < 1$. Через блоки оператора A характеристическая функция выражается ледующим образом:

$$\theta(\zeta) = A_{12} + \zeta A_2^* (1_H - \zeta A_{in})^{-1} A_1. \quad (1.2')$$

2. Основные тождества для характеристической функции узла. Положим

$$\begin{aligned} G_1(\zeta) &= P_H A (1_{H \oplus N_1} - \zeta P_H A)^{-1} | N_1, \\ G_2(\zeta)^* &= P_{N_1} A (1_{H \oplus N_1} - \zeta P_H A)^{-1} | H, \quad (|\zeta| < 1). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Или в другой форме

$$G_1(\zeta) = (1_H - \zeta A_{in})^{-1} A_1, \quad G_2(\zeta)^* = A_2^* (1_H - \zeta A_{in})^{-1}. \quad (1.3')$$

В терминах введенных обозначений

$$A (1_{H \oplus N_1} - \zeta P_H A)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{in} (1_H - \zeta A_{in})^{-1} & G_1(\zeta) \\ G_2(\zeta)^* & \theta(\zeta) \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Из унитарности узла вытекают важные соотношения

$$\begin{bmatrix} \frac{1_{N_2} - \theta(\zeta) \theta(\mu)^*}{1 - \bar{\zeta} \mu} & \frac{\theta(\zeta) - \theta(\mu)}{\zeta - \mu} \\ \frac{\theta(\zeta)^* - \theta(\mu)^*}{\bar{\zeta} - \bar{\mu}} & \frac{1_{N_1} - \theta(\zeta)^* \theta(\mu)}{1 - \bar{\zeta} \mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2(\zeta)^* \\ G_1(\zeta)^* \end{bmatrix} [G_2(\mu), G_1(\mu)]. \quad (1.5)$$

Из них, в частности, следует сжимаемость Θ .

¹ Всюду, где это не приводит к двусмысленности, мы опускаем индекс δ .

3. Узел и динамика (связь последовательностей узлом). Подробно об этом см., например, [2]. Операторный узел задает динамику (эволюцию) открытой системы с дискретным временем по формуле

$$\begin{bmatrix} h(n+1) \\ \varphi_2(n) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} h(n) \\ \varphi_1(n) \end{bmatrix}, \quad (n \geq 0),$$

где $h(n) \in H$ — эволюция внутреннего состояния (начальное внутреннее состояние $h(0)$ — произвольно); $\varphi_1(n) \in N_1$ — произвольный входной сигнал; $\varphi_2(n) \in N_2$ — сигнал, получающийся на выходе.

Для вычисления характеристической функции бывает полезно следующее определяющее ее свойство: пусть $h(0) = 0$, а $\varphi_1(n)$ такова, что ряд $\Phi_1(\xi) = \sum \varphi_1(n) \xi^n$ сходится в некоторой окрестности нуля, тогда ряд $\Phi_2(\xi) = \sum \varphi_2(n) \xi^n$ также сходится в окрестности нуля ($\varphi_2(n)$ задается динамикой узла) и $\Phi_2(\xi) = \Theta(\xi) \Phi_1(\xi)$. (1.6)

4. Простая и изолированная части узла. Узел называется простым (относительно внешних пространств N_1 и N_2), если у оператора A нет приводящих подпространств, содержащихся в H и отличных от нулевого. Пусть $H' \subset H$ — максимальное приводящее A подпространство, тогда совокупность пространств $H^\circ = H \ominus H'$, N_1 , N_2 и оператор $A^\circ = A|_{H^\circ \oplus N_1}$ образует узел δ_0 (тоже унитарный), который называется простой частью узла δ . При этом операторы A_1 , A_2 , A_{12} не изменяются. Характеристическая функция при этом также не изменяется.

Пространство H' и $A|_{H'}$ будем называть изолированной (от внешних пространств N_1 и N_2) частью узла δ . Отметим, что $A|_{H'}$ — унитарный оператор.

5. Представление Фурье. Унитарный узел может быть реализован в виде функциональной модели, состоящей из двух частей, которые отвечают простой и изолированной частям узла.

а) Рассмотрим следующее преобразование, которое будем называть представлением Фурье, отвечающим простой части узла δ ,

$$(Gh)(\xi) = \begin{bmatrix} G_2(\xi)^* h \\ \bar{\xi} G_1(\xi)^* h \end{bmatrix}, \quad (h \in H, |\xi| < 1). \quad (1.7)$$

Пространство получающихся при этом функций $f(\xi)$, которое мы будем обозначать через H° , может быть описано внутренним образом:

$f(\xi) = \begin{bmatrix} f_+(\xi) \\ f_-(\xi) \end{bmatrix}$, где 1. $f_+(\xi) \in H_+^2(N_2)$, $f_-(\xi) \in H_-^2(N_1)$, $|\xi| < 1$; 2. $f(t)$ при почти всех $|t| = 1$ принадлежит области определения оператора

$$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta(t) \\ \theta(t)^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1/2]} \quad \text{и} \quad \int_T \left\langle \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1]} f, f \right\rangle dm < \infty,$$

где T — единичная окружность; dm — нормированная мера Лебега на ней. Отметим, что по определению область значений оператора

¹ Функции из H_-^2 мы считаем продолженными с единичной окружности во внутренность единичного круга антиголоморфным образом, при этом $f_-(0) = 0$.

$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1/2]}$ ортогональна ядру оператора $\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}$. Интеграл в условии 2 задает скалярное произведение в H^θ .

Отображение $G: H \rightarrow H^\theta$ унитарно на H^θ (внутреннее пространство простой части узла δ) и обращается в ноль на его ортогональном дополнении H' , образом является все H^θ . Следовательно,

$$P_{H^\theta} h = G^* G h = \int_T [G_2, t G_1] \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1]} G h \, dm, \quad (1.8)$$

где сходимость интеграла понимается в слабом смысле (на H или H^θ).

Оператор A_{in} при отображении G переходит в модельный оператор

$$A_{in}^\theta f = \bar{t} \left(f - \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_+(0) \\ 0 \end{bmatrix} \right), \text{ т. е. } G A_{in} = A_{in}^\theta G. \quad (1.9)$$

Оператор A_{in}^θ в совокупности с операторами

$$A_1^\theta = \bar{t} \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta(0) \\ 1_{N_1} \end{bmatrix}, \quad (N_1 \rightarrow H^\theta), \quad (A_2^\theta)^* f = f_+(0), \quad (f \in H^\theta);$$

$$A_{12}^\theta = \theta(0), \quad (N_1 \rightarrow N_2)$$

образуют унитарный узел, являющийся функциональной моделью узла δ . Отметим, что

$$(A_1^\theta)^* f = (t f_-)(0), \quad A_2^\theta = \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{N_2} \\ -\theta(0)^* \end{bmatrix}, \quad (N_2 \rightarrow H^\theta).$$

И кроме того

$$G_2^\theta(\mu)^* f = f_+(\mu), \quad G_2^\theta(\mu) = \frac{\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{N_2} \\ -\theta(\mu)^* \end{bmatrix}}{1 - t\bar{\mu}}, \quad \bar{\mu} G_1^\theta(\mu)^* f = f_-(\mu),$$

$$G_1^\theta(\mu) = \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\theta(\mu) \\ 1_{N_1} \end{bmatrix} \frac{1}{t - \mu}.$$

б) Для построения функциональной модели, отвечающей изолированной части, воспользуемся следующей конструкцией. Пусть K — гильбертово пространство; Γ — линейный оператор из K в H' такой, что замыкание $\Gamma(K)$ — циклическое подпространство унитарного оператора $U = A_{in}|_{H'}$.

$$\text{Положим } (Ih)(\zeta) = \frac{1}{2} \Gamma^* \left(\frac{1_H + \zeta A_{in}}{1_H - \bar{\zeta} A_{in}} + \frac{1_H + \bar{\zeta} A_{in}^*}{1_H - \zeta A_{in}^*} \right) P_{H'} h. \quad (1.10)$$

¹ Характеристическая функция модельного узла равна θ . Следовательно, определяемая формулой (1.2) характеристическая функция может быть произвольной сжимающей (не обязательно чистой).

Это гармоническая K -значная вектор функция. Ей однозначно соответствует K -значная мера на единичной окружности T

$$dv_h = \omega - \lim_{r \rightarrow 1} (Ih)(rt) dm(t) = \Gamma^* d\Sigma(t) P_H h, \quad (1.11)$$

где $d\Sigma(t)$ — разложение единицы унитарного оператора U .

Определим голоморфную в единичном круге оператор-функцию (из K в K):

$$a(\zeta) = \frac{1}{2} \Gamma^* \frac{1_H + \zeta A_{in}}{1_H - \zeta A_{in}} \Gamma. \quad (1.12)$$

Она обладает свойством $a(\zeta) + a(\zeta)^* \geq 0$ (1.13). Соответствующая мера (операторно-значная)

$$d\sigma(t) = \omega - \lim_{r \rightarrow 1} (a(rt) + a(rt)^*) dm(t) = \Gamma^* d\Sigma(t) \Gamma. \quad (1.14)$$

Пространство мер dv_h , ($h \in H$) есть пополнение пространства мер вида $dv = d\sigma f$ (где f — K -значная вектор-функция на T) в метрике

$$\langle dv, dv \rangle = \int_T \langle d\sigma f, f \rangle = \int_T \langle d\sigma^{[-1]} dv, dv \rangle. \quad (1.15)$$

В этой метрике отображение $h \rightarrow dv_h$ унитарно на H' . На H^0 оно обращается в ноль. При этом $dv_{A_{in}h} = i dv_h$ (1.16). Описанное пространство мер будем обозначать через $H^{d\sigma}$.

Итак формулы (1.7) и (1.11) задают унитарное отображение H на $H^0 \oplus H^{d\sigma}$ (H^0 на H^0 и H' на $H^{d\sigma}$ соответственно). При этом оператор A_{in} переходит в модельный оператор, задаваемый формулами (1.9) и (1.16) соответственно. Элемент $Gh \oplus dv_h$ называется преобразованием Фурье вектора h , а свойство унитарности этого преобразования записывается в виде равенства Парсевала

$$\langle h, h \rangle = \int_T \left\langle \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \theta \\ \theta^* & 1_{N_1} \end{bmatrix}^{[-1]} Gh, Gh \right\rangle dm + \int_T \langle d\sigma^{[-1]} dv_h, dv_h \rangle. \quad (1.17)$$

6. Соединение узлов. В этом пункте мы рассматриваем одну из возможных операций соединения узлов. Систематическому изучению подобной операции и многих других посвящена работа [2].

Пусть α и β узлы, причем $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$. Будем говорить, что узел γ получается замыканием узла α посредством узла β , если $N_2^\beta = N_2$, $N_1^\beta = N_1$, уравнения динамики узлов α и β

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(n+1) \\ \varphi_2^\alpha(n) \end{bmatrix} = A^\alpha \begin{bmatrix} h^\alpha(n) \\ \varphi_1^\alpha(n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} h^\beta(n+1) \\ \varphi_2^\beta(n) \end{bmatrix} = A^\beta \begin{bmatrix} h^\beta(n) \\ \varphi_1^\beta(n) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

совместно с соотношениями (отражающими факт соединения)

$$\varphi_1^\alpha(n) = \varphi_2^\beta(n) \oplus \varphi_1(n), \quad \varphi_2^\alpha(n) = \varphi_1^\beta(n) \oplus \varphi_2(n) \quad (1.19)$$

допускают исключение $\Phi_1^\beta(n)$ и $\Phi_2^\beta(n)$ и могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} h^\alpha(n+1) \oplus h^\beta(n+1) \\ \varphi_2(n) \end{bmatrix} = A^\gamma \begin{bmatrix} h^\alpha(n) \oplus h^\beta(n) \\ \varphi_1(n) \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Вообще говоря это возможно не всегда. Однако при наших рассмотрениях возникает узел α , обладающий свойством $P_{N_1} A_{12}^\alpha | N_2 = 0$.

При выполнении этого условия узел α допускает замыкание посредством любого узла β такого, что $N_2^\beta = N_2$, $N_1^\beta = N_1$. Могут быть выписаны явные формулы узла γ : $H^\gamma = H^\alpha \oplus H^\beta$, $N_1^\gamma = L_1$, $N_2^\gamma = L_2$. Если узлы α и β унитарны, то γ также унитарен.

7. Представление Фурье соединения узлов (простая часть). Характеристическую функцию узла α в дальнейшем будем обозначать через $S(\zeta)$ и разбивать на блоки в соответствии с разбиением пространств $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$, индексируя блоки так же, как и в работе [1, формула (1)]:

$$S = \begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{11} & s_{12} \end{bmatrix},$$

которая действует на векторы вида $\begin{bmatrix} n_2 \\ l_1 \end{bmatrix}$, получаются векторы вида $\begin{bmatrix} l_2 \\ l_1 \end{bmatrix}$, т. е. $s_{11} = P_{L_2} S | N_2$, $s_{12} = P_{L_2} S | L_1$, $s_{21} = P_{N_1} S | N_2$, $s_{22} = P_{N_1} S | L_1$.

Характеристическую функцию замыкающего узла β будем обозначать через ω и через ω — характеристическую функцию узла γ ($\omega: N_1 \rightarrow N_2$, $\omega: L_1 \rightarrow L_2$).

Положим

$$\Phi_1^\alpha(\zeta) = \sum \Phi_1^\alpha(n) \zeta^n = \sum (\Phi_2^\beta(n) \oplus \varphi_1(n)) \zeta^n = \Phi_2^\beta(\zeta) \oplus \Phi_1(\zeta),$$

$$\Phi_2^\alpha(\zeta) = \sum \Phi_2^\alpha(n) \zeta^n = \sum (\Phi_1^\beta(n) \oplus \varphi_2(n)) \zeta^n = \Phi_1^\beta(\zeta) \oplus \Phi_2(\zeta),$$

(см. формулы (1.18), (1.19)).

Пользуясь определяющим свойством характеристической функции (см. п. 3), запишем

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^\beta(\zeta) \\ \Phi_2(\zeta) \end{bmatrix} = S(\zeta) \begin{bmatrix} \Phi_2^\beta(\zeta) \\ \Phi_1(\zeta) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} \Phi_2^\beta(\zeta) &= \omega(\zeta) \Phi_1^\beta(\zeta), \\ \Phi_2(\zeta) &= \omega(\zeta) \Phi_1(\zeta). \end{aligned}$$

Откуда получаются следующие соотношения:

$\begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \omega \varphi \\ 1_{L_1} \end{bmatrix}$ (1.21), где $\varphi = (1_{N_1} - s_{21}\omega)^{-1} s_{22}$ (1.22). Функция $\varphi(\zeta)$ определена и голоморфна при $|\zeta| < 1$ (в силу того, что $s_{21}(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ — сжимающие функции, а $s_{21}(0) = P_{N_1} A_{12}^\alpha | N_2 = 0$); $\varphi: L_1 \rightarrow N_1$. Таким образом, $\omega = s_{12} + s_{11}\omega(1_{N_1} - s_{21}\omega)^{-1} s_{22}$ (1.23). Рассматривая замыкание узла α^* посредством узла β^* , получим узел γ^* и соотношения двойственные (1.21): $\begin{bmatrix} \psi^* \\ \omega^* \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} \omega^* \psi^* \\ 1_{L_1} \end{bmatrix}$ (1.21'), где $\psi = s_{11}(1_{N_1} -$

— $\omega s_{21})^{-1}$, (1.22') $\psi(\zeta)$ определена и голоморфна при $|\zeta| < 1$; $\psi(\zeta) : N_2 \rightarrow L_2$. Отметим, что формула (1.23) содержится в работе [1].

Представление Фурье узла γ , порождаемое его простой частью (определение см. п. 5), может быть выражено через соответствующие представления узлов α и β , а именно, для любого $h^\gamma = h^\alpha \oplus h^\beta$ и любого $|\zeta| < 1$

$$G^\gamma h^\gamma = \begin{bmatrix} \psi \omega & 1_{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^* \omega^* & 1_{L_1} \end{bmatrix} G^\alpha h^\alpha + \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} G^\beta h^\beta, \quad (1.24)$$

где φ и ψ определены формулами (1.22) и (1.22'); ω — характеристическая функция узла β . Напомним, что $N_2^\alpha = N_1 \oplus L_2$, $N_1^\alpha = N_2 \oplus L_1$, $N_1^\beta = N_1$, $N_2^\beta = N_2$.

8. Представление Фурье соединения (изолированная часть). Оказывается, что построенный таким образом узел γ может быть не простым (даже если узлы α и β просты). Впервые такого сорта вопросы были полностью исследованы, по-видимому, в работах Ю. Л. Шмulyяна (см., например, [3]).

Пусть α и β — простые узлы.

Пусть $K^\gamma = N_2 \oplus N_1$, P' — ортопроектор на $(H^\gamma)'$

$$(P' = 1_{H^\gamma} - (G^\gamma)^* G^\gamma), \quad \Gamma^\gamma = P' (A_2^\alpha \oplus A_2^\beta) \times \begin{bmatrix} \omega(0)^* & 1_{N_1} \\ 0 & 0 \\ 1_{N_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\Gamma^\gamma (K^\gamma)$ — циклическое подпространство оператора $U^\gamma = A_{in}^\gamma | (H^\gamma)'$. Функция $a^\gamma(\zeta)$, определяемая формулой (1.12), может быть вычислена и равна $(a^\gamma(\zeta) : N_2 \oplus N_1 \rightarrow N_2 \oplus N_1)$

$$a^\gamma(\zeta) = \begin{bmatrix} \overset{0}{\psi}(\zeta) & \overset{0}{\psi}(\zeta) \omega(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) \overset{0}{\psi}(\zeta) & \overset{0}{\varphi}(\zeta) \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega(0) \\ -\omega(0)^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \int_T \frac{t+\zeta}{t-\bar{\zeta}} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega \varphi \\ \omega^* \psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & \omega \\ \omega^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi \omega \\ \varphi^* \omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} dm(t), \quad (1.25)$$

где φ и ψ — те же, что определены выше, $\overset{0}{\varphi}(\zeta) = (1_{N_1} - s_{21}(\zeta) \omega(\zeta))^{-1}$, $\overset{0}{\psi}(\zeta) = (1_{N_2} - \omega(\zeta) s_{21}(\zeta))^{-1}$ (1.26), T — единичная окружность, dm — нормированная мера Лебега на ней. Корректность определения интеграла в (1.25) следует, например, из того, что

$$G^\gamma (A_1^\alpha \oplus A_1^\beta) \begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega(0) \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \psi & \psi \omega \\ \varphi^* \omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_{L_2} \\ \omega^* \end{bmatrix} [\psi(0), \omega(0) \psi(0)]}{t}. \quad (1.27)$$

¹ Заметим, что K^γ — есть пространство, по которому соединяются узлы α и β .

Таким образом, правая часть (1.27), примененная к $\begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}$, принадлежит H^w при любых n_2 и n_1 .

Функцию $a^\gamma(\zeta)$ можно записать еще в следующем виде:

$$a^\gamma(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{1_{N_2 \oplus N_1} + \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}}{1_{N_2 \oplus N_1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega(0) \\ -\omega(0)^* & 0 \end{bmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \int_T \frac{t+\zeta}{t-\zeta} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} dm. \quad (1.28)$$

Представление Фурье узла γ , порождаемое его изолированной частью (определение см. п. 5, формула (1.10)) вычисляется и имеет вид

$$(I\gamma h^\gamma)(\zeta) = \begin{bmatrix} \omega\varphi & 0 & \psi^* & 0 \\ \varphi & 0 & \omega^*\psi^* & 0 \end{bmatrix}(\zeta) \cdot (G^\alpha h^\alpha)(\zeta) + \\ + \begin{bmatrix} \psi & s_{21}^*\varphi^* \\ s_{21}\psi & \varphi^* \end{bmatrix}(\zeta) \cdot (G^\beta h^\beta)(\zeta) - \\ - \int_T \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} G^\gamma h^\gamma dm. \quad (1.29)$$

Напомним, что $G^\gamma h^\gamma$ вычисляется по формуле (1.24).

9. Критерий простоты соединения. Пусть α и β — простые узлы. Из определения функции $a^\gamma(\zeta)$ видно, что узел γ — прост тогда и только тогда, когда $a^\gamma(\zeta) + a^\gamma(\zeta)^* = 0$ или (что тоже самое, ввиду неотрицательности $a^\gamma(\zeta) + a^\gamma(\zeta)^*$) тогда и только тогда, когда $a^\gamma(0) + a^\gamma(0)^* = 0$ или (ввиду нормировки $a(0)$ на неотрицательную величину) тогда и только тогда, когда $a(0) = 0$ (или в какой-нибудь одной точке единичного круга). Последний вариант критерия простоты узла γ в силу формулы (1.25) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & \omega(0) \\ \omega(0)^* & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \int_T \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} dm. \quad (1.30)$$

Кроме критерия простоты узла γ нас будет интересовать критерий обращения в ноль преобразования I^γ на H^α (а не на всем $H^\gamma = H^\alpha \oplus \oplus H^\beta$). Для получения такого критерия достаточно вычислить преобразование I^γ на полном в H^α множестве $G_2^\alpha(\mu) n_2^\alpha$ и $G_1^\alpha(\mu) n_1^\alpha$ ($|\mu| < 1$). Как показывают вычисления

$$I^\gamma(G_2^\alpha(\mu) n_2^\alpha) = \frac{d\sigma^\gamma}{1-\bar{\mu}} \begin{bmatrix} -s_{21}(\mu)^* & -s_{11}(\mu)^* \\ 1_{N_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

где $d\sigma^\gamma$ — мера, отвечающая функции $a^\gamma(\zeta) + a^\gamma(\zeta)^*$, $n_2^\alpha = n_1 \oplus l_2$;

$$I^\gamma(G_1^\alpha(\mu)n_1^\alpha) = \frac{d\sigma^\gamma}{t-\mu} \begin{bmatrix} 1_{N_1} & 0 \\ -s_{21}(\mu) & -s_{22}(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 \\ l_1 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

где $n_1^\alpha = n_2 \oplus l_1$.

Мы в настоящей работе ограничиваемся рассмотрением таких узлов α , для которых $s_{21}(0) = 0$. Но тогда, полагая в формулах (1.31) и (1.32) $\mu = 0$, $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, получим

$$I^\gamma(G_2^\alpha(0)(n_1 \oplus 0)) = d\sigma^\gamma \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

$$I^\gamma(G_1^\alpha(0)(n_2 \oplus 0)) = \bar{t} d\sigma^\gamma \begin{bmatrix} n_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Из обращения в ноль выражений (1.33) и (1.34) следует, что $d\sigma^\gamma = 0$, т. е. узел γ — прост! Таким образом в нашем случае критерий обращения в ноль I^γ на H^α совпадает с критерием простоты узла γ (т. е. равенства нулю I^γ на $H^\alpha \oplus H^\beta$). Отметим, что при наличии у узла α изолированной части, она же тривиальным образом войдет и в узел γ . Описанный выше критерий в этом случае утверждает, что сверх того у γ нет ничего в изолированной части.

10. Равенство Парсеваля для узла γ . В общем случае имеет место следующее равенство (узел β мы считаем простым, $h^\gamma = h^\alpha \oplus h^\beta$):

$$\begin{aligned} \langle h^\gamma, h^\gamma \rangle &= \int_T \left\langle \begin{bmatrix} 1_{L_2} & w \\ w^* & 1_{L_1} \end{bmatrix}^{[-1]} G^\gamma h^\gamma, G^\gamma h^\gamma \right\rangle dm + \\ &+ \int_T \langle (d\sigma^\gamma)^{[-1]} dv_{h^\gamma}^\gamma, dv_{h^\gamma}^\gamma \rangle + \langle P_{(H^\alpha)} h^\alpha, h^\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где w , $G^\gamma h^\gamma$ определяются из формул (1.23), (1.24), $d\sigma^\gamma$, $dv_{h^\gamma}^\gamma$ — из формул (1.25), (1.29), $P_{(H^\alpha)}$ — ортопроектор на изолированную часть узла α .

Список литературы: 1. Аров Д. З., Гроссман Л. З. Матрицы рассеяния в теории расширений изометрических операторов // Докл. АН СССР. Сер. мат. — 1983. 270, № 1. — С. 17—20. 2. Гроссман Л. З. Операторные узлы. — Одесса, 1985. — 216 с. — Деп. в УкрНИИТИ 15.05.85. — № 1025 Ук-Д 85. 3. Шмультян Ю. Л. Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неэрмитовости // Мат. сб. — 1962. — 57 (99), № 1. — С. 105—136. 4. Кацнельсон В. Э. и др. Абстрактная задача интерполяции и теория расширений изометрических операторов / В. Э. Кацнельсон, А. Я. Хейфец, П. М. Юдицкий. — Х., 1986. — 26 с. — Деп. в УкрНИИТИ 23.09.86. — № 2274 Ук-Д 86. 5. Юдицкий П. М. Задача о лифтинге. — Х., 1983. — 59 с. — Деп. в УкрНИИТИ 18.04.83. — № 311 Ук-Д 83. 6. Nikolskii N. K., Vasyunin V. I. LOMI, preprint E-5-86. — L., 1986. — 28 с.

Поступила в редколлегию 15.04.86

СОДЕРЖАНИЕ

Бирбраир Л. В., Сапронов Ю. И. Линейная классификация квадратичных отображений в пространстве S^3	3
Блох А. М., Любич М. Ю. О типичном поведении траекторий преобразования отрезка	5
Велиев О. А. О спектре многомерных периодических операторов	17
Ву Куок Фонг. Теория Перрона—Фробениуса для почти периодических представлений полугрупп в пространствах L_p	35
Кадец В. М. Базисы с индивидуальными скобками и базисы с индивидуальными перестановками	43
Каткова О. М. Целые функции с асимптотически кратно-положительными последовательностями коэффициентов	51
Лундина Д. Ш. Ограниченные решения уравнения Кортевега де Фриза	59
Любарский М. Г. О локально ограниченных и локально отделенных от нуля движениях в векторных G -расслоениях (линейных расширениях)	70
Любарский Ю. И. Полнота и минимальность систем функций вида $\{a(t) \varphi^n(t) - b(t) \psi^n(t)\}_N^\infty$	77
Чорвидас С. Т. Вариации норм дифференциальных операторов в пространствах целых функций	86
Тастур Л. А., Фиготин А. Л. Один пример многомерных почти периодических операторов, точечный и непрерывный спектр которых пересекаются	
Гофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Связь спектральных осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка	101
II. Применения факторизации и возведения в квадрат	
Хейфец А. Я. Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем. I.	112

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ,
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

В ы п у с к 49

Редактор *З. Н. Щегельская*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. Н. Быкова*

ИБ № 12210

Сдано в набор 08.09.87. Подписано в печать 22.02.88. БЦ 09528. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл.-печ. л. 8. Усл. кр.-отт. 8,25. Уч-изд. л. 9,7. Тираж 800 экз. Изд. № 1593. Зак. 7-383. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. Ф. Фрунзе, 310057 Харьков, ул. Донец-Захаржевского 6/8 в Харьковской городской типографии № 16. 310003, Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 802.

УДК 513.7

Линейная классификация квадратичных отображений в пространстве S^3 / Л. Б. Бир-браир, Ю. И. Сапронов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 3—5.

Рассматривается действие группы $Gl(n, C)^3$ на многообразии регулярных квадратичных отображений $F: S^n \rightarrow S^n$. Для случая $n = 3$ выписаны все нормальные формы.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.9

Типичном поведении траекторий преобразований отрезка / А. М. Блох, А. Ю. Любич // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 5—16.

Рассматривается класс C^3 -гладких преобразований отрезка $[0, 1]$, для которых число критических точек конечно и шварцман отрицателен. Доказано, что для почти всех x , ω -предельное множество траектории $f^n x$ совпадает с циклом периодической точки или транзитивного отрезка или с предельным множеством некоторой рекуррентной критической точки. Отсюда следует, что преобразование с d критическими точками имеет не более $d + 2$ неразложимых аттракторов в смысле Милнора. Аттрактор единствен, если преобразование унимодально и $f: c \rightarrow 1 \rightarrow 0$ (c — критическая точка).

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.98

О спектре многомерных периодических операторов / О. А. Велиев // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 17—34.

Пусть Ω — решетка в n -мерном евклидовом пространстве R^n , а F — фундаментальная область решетки Ω .

Обозначим через H оператор Шредингера, порожденный в $L_2(R^n)$ выражением $-\Delta u + q(x)u$ (1), а через H^F — оператор, порожденный в $L_2(F)$ выражением (1) и квазипериодическими граничными условиями, где $q(x)$ — периодическая (относительно решетки Ω) функция.

В работе получены асимптотические формулы для собственных чисел оператора H^F и с помощью этих формул доказано, что существует такое число $\lambda(q)$, что интервал $(\lambda(q), \infty)$ принадлежит спектру оператора H (при $n \geq 3$ для достаточно гладких потенциалов $q(x)$, а при $n = 2$ для любого потенциала $q(x)$ из $L_2(F)$), т. е. доказывается гипотеза Бете—Зоммерфельда для произвольной решетки.

Библиогр.: 10 назв.

Теория Перрона—Фробениуса для почти периодических представлений полугрупп в пространствах $L_p / В у К у о к Ф о н г //$ Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 35—42.

Классическая теория Перрона—Фробениуса неотрицательных матриц обобщается на неотрицательные почти периодические представления топологических полугрупп в пространствах $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где (Ω, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой, $1 \leq p < \infty$. С каждым таким представлением связывается ассоциированное действие его ядра Сушкевича на некотором естественно возникающем пространстве с мерой, что позволяет сводить изучение спектральных свойств представления к эргодическим свойствам соответствующего действия. В частности, установлено, что граничный спектр неразложимого представления является подгруппой дуальной группы к ядру Сушкевича (совпадает с ней, если рассматриваемая полугруппа абелева). В общем случае граничный спектр циклическ (т. е. является объединением подгрупп дуальной группы к ядру Сушкевича). Результаты статьи новы даже при рассмотрении полугрупп степеней одного оператора (иными словами, представлений полугруппы $\mathbb{Z}_+$), что дает обобщенную теорию Перрона—Фробениуса для неотрицательных п. п. операторов.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 517.981

Базисы с индивидуальными скобками и базисы с индивидуальными перестановками / Ка де ц В. М. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 43—51.

Приведены примеры базисов с индивидуальными скобками и базисов с индивидуальными перестановками, для которых нельзя осуществить единого для всех $x \in X$ выбора $\{n_i\}$ или π соответственно.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.547.2

Целые функции с асимптотически кратно-положительными последовательностями коэффициентов / Ка т к о в а О. М. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 51—59.

В работе вводится определение асимптотически кратно-положительных последовательностей. (Понятие кратно положительной последовательности было определено в работах Фекете; Rendiconti Circolo Matematico Palermo, 1912, 34, p. 89—120; и Шенберга; Ann. of Math., 1955, 62, 3, p. 447—471). Исследуется множество корней целых функций с асимптотически кратно-положительными последовательностями тейлоровских коэффициентов.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.9

Ограниченные решения уравнения Кортевега де Фриза / Лундина Д. Ш. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 59—70.

Найдены новые типы ограниченных неубывающих решений уравнения и доказано, что они являются пределами N -солитонных решений.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.9

О локально ограниченных и локально отделенных от нуля движениях в векторных G -расслоениях (линейных расширениях) / Любарский М. Г. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 70—77.

Рассматривается векторное G -расслоение над минимальным G -пространством, обладающее тем свойством, что движение каждой его точки ограничено и отделено от нуля над достаточно малой окрестностью любой точки базы. Доказывается, что это расслоение обладает структурой расслоенного пространства с бикомпактной структурной группой, причем действие группы G сохраняет проекцию на слой расслоенного пространства. С помощью этого результата на векторные G -расслоения, или в другой терминологии на линейные расширения топологических групп преобразований переносится ряд теорем о представлениях бикомпактных групп.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.555/983

Вариации норм дифференциальных операторов в пространствах целых функций / Норвидас С. Т. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 86—93.

Работа посвящена изучению норм $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{B_k}$ операторов $F(D)$, где

$D = \left(i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ в банаховских пространствах B_k , состоящих из сумм целых в C^n функций, преобразования Фурье которых, понимаемые в смысле теории распределений, сосредоточены в компакте $K \subset R^n$. Класс, откуда «вербуются» функции F — это класс преобразований Фурье регулярных борелевских мер конечной вариации на R^n .

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.4

Один пример многомерных почти периодических операторов, точечный и непрерывный спектр которых пересекаются / Пастур Л. А., Фиготин А. Л. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 94—101.

Изучены точечная и абсолютно непрерывная компоненты спектра одного класса многомерных почти периодических типа Шредингера операторов. Библиогр.: 1 назв.

УДК 517.9 + 513.8

Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка. П. Применения факторизации и возведения в квадрат / Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1988. — Вып. 49. С. 101—111.

Для бесконечных систем дифференциальных уравнений произвольного четного порядка на конечном и бесконечном интервалах установлены факторизационные теоремы типа Фробениуса и М. Г. Крейна—Хайнца—Реллиха, откуда выводится обобщение на рассматриваемые уравнения порядка $2l$ критерия осцилляторности Этджена и Павловски, относящегося ко 2-му порядку, а также вариант теоремы сравнения типа Штурма. Аналог осцилляционной теоремы для дискретных уровней в лакуне непрерывного спектра получен для задач как четного, так и нечетного порядка.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.54 + 517.98

Равенство Парсеваля в абстрактной задаче интерполяции и соединение открытых систем / А. Я. Хейфец // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 112—120.

Исследуется абстрактная задача интерполяции, введенная в предшествующей работе автора, В. Э. Кацнельсона и П. М. Юдицкого. С абстрактной задачей интерполяции ассоциируется некоторая открытая система — унитарный узел. Показано, что решение абстрактной задачи интерполяции адекватно замыканию соответствующего узла.

ТРЕБОВАНИЯ К АВТОРАМ СБОРНИКА

1. Рукописи статей, направляемые в редакцию сборника, должны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнена данная работа. Необходимы две рецензии — внешняя и внутренняя.

2. Объем статьи не должен превышать 12 страниц машинописного текста, включая список литературы, таблицы и реферат.

3. Рукопись подается в двух экземплярах, напечатанная на машинке через два интервала только на черной ленте, включая сноски, таблицы и примечания на одной стороне стандартного листа белой бумаги. Должны быть строго выдержаны поля: 2 см сверху, 1 см справа, 2,5 см слева и снизу. Таблицы и список литературы печатаются на отдельных страницах. Страницы нумеруются посередине верхнего поля карандашом. На полях рукописи необходимо синим карандашом указать место расположения рисунков или таблиц. Сокращение слов в таблицах не допускается.

4. В тексте разрешаются только общепринятые сокращения (т. е., и т. д., и т. п., и др.). Иностранный текст, если нет машинки с иностранным шрифтом, вписывается от руки.

5. Формулы должны быть разборчиво написаны от руки тушью или черными чернилами (буквы вдвое больше печатных). Следует четко разграничить индексы и показатели степени, прописные и строчные буквы. Буквы одинакового начертания — с, k, v, w, s, z, x, y, p подчеркивать синей пастой: прописные (большие) — двумя черточками снизу, строчные (малые — двумя черточками сверху. Особенно аккуратно следует вписывать сходные по очертаниям буквы: h и n, l и e, d и g. Необходимо четко отличать штрихи от единиц. Все греческие буквы обводить красным карандашом. Готический шрифт не употреблять. Буквы на рисунках размечаются так же.

6. Иллюстративный материал (не более одного рисунка на пять страниц текста) прилагается отдельно в двух экземплярах и выполняется тушью на кальке. На обороте каждого рисунка указывать его номер, фамилию автора и название статьи. Подписи к рисункам следует прилагать на отдельном листе в конце статьи. На первых экземплярах рисунков буквенных и цифровых обозначений не давать.

7. Цифра в тексте, указывающая ссылку на литературу, заключается в квадратные скобки. В список литературы включаются только те работы, на которые ссылается автор статьи, в такой последовательности: для книг — фамилия автора, инициалы, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том, общее количество страниц; для журналов — фамилия автора, инициалы, название статьи, журнала, год издания, номер тома, номер журнала, номер страниц статьи. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

8. В конце рукописи должны быть указаны название учреждения, в котором выполнена работа, имя, отчество, фамилия автора, домашний адрес, дата, подпись.

9. В случае переработки статьи датой ее поступления считается дата получения редакцией исправленного варианта (в двух экземплярах). После переработки статья вновь рассматривается редколлегией. При отказе в публикации работы редколлегии оставляет за собой право не возвращать автору экземпляр.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4627. Теория функций, функционал. анализ и их прил.
1988. Вып. 49. 1 - 128.

