

# Кільця — ідеали, гомоморфізми та факторизація в задачах

## Лекція для студентів ММФ ХНУ.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Щугайло О.М.

Травень — 2015

### Зміст

1	Означення ідеалу	1
2	Спеціальні ідеали та кільця з умовами на ідеали	6
3	Гомоморфізми кілець.	19
4	факторкільця	28
5	Відповіді і вказівки до розв’язування задач і вправ	32
5.1	Ідеали. . . . .	32

В пропонованій підбірці задач багато задач стосуються перевірки того чи іншого твердження, — в таких задачах слова “перевірити правильність твердження”, “довести, що ...” пропускаємо.

### 1 Означення ідеалу

**Означення 1.1** *Лівим (відповідно, правим) ідеалом кільця  $K$  називаємо таке підкільце  $A \subseteq K$ , що  $a \in A, b \in K \Rightarrow b \cdot a$  (відповідно,  $a \in A, b \in K \Rightarrow b \cdot a$ )*

*Якщо підкільце є і лівим і правим ідеалом, то його називають двостороннім ідеалом або просто ідеалом.*

*Ідеал, що складається лише із нуля, та ідеал, що збігається з усім кільцем, називають тривіальними. А ідеал, що не збігається із усім кільцем, називають власним*

1. Якщо ідеал  $A$  кільця  $K$  з одиницею містить обертий елемент, то  $A = K$ .

2. Підмножини

$$m\mathbb{Z} = \{m \cdot n | n \in \mathbb{Z}\}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

і тільки вони утворюють ідеали кільця  $\mathbb{Z}$ .

3. Дроби з чисельниками, що діляться на 3, утворюють ідеал кільця  $K \subseteq \mathbb{Q}$ , що утворене дробами із знаменниками вигляду  $2^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

4. Ідеали кільця утворюють частково впорядковану множину за теоретико-множинним включенням. Намалювати діаграму Хассе чвм (частково впорядкованої множини) ідеалів кільця класів лишків  $\mathbb{Z}_{36}$ .

5. Матриці з нульовим  $k$ -м рядком утворюють правий але не лівий ідеал кільця матриць  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $1 < n$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

6. Матриці з нульовим  $k$ -м стовпчиком утворюють лівий але не правий ідеал кільця матриць  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $1 < n$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

7. В кільці  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$  досторонніми є лише тривіальні ідеали — нульовий та все кільце.

8. Множина

$$A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f(a) = 0\}, \quad a \in \mathbb{R}$$

є ідеал кільця  $\mathbb{R}$

9. Підмножина

$$a \cdot K = \{a \cdot x | x \in K\} \subseteq K$$

кільця  $K$  утворює правий ідеал цього кільця. Показати, що цей правий ідеал не завжди є лівим.

10. Підмножина

$$K \cdot a = \{x \cdot a | x \in K\} \subseteq K$$

кільця  $K$  утворює лівий ідеал цього кільця. Показати, що цей лівий ідеал не завжди є правим.

11. Навести приклад кільця  $K$  і в ньому елемента  $a \in K$  такого, що підкільце

$$a \cdot K \cdot a = \{a \cdot x \cdot a | x \in K\} \subseteq K$$

не є ні лівим ні правим ідеалом.

12. Нехай  $K$  кільце,  $A$  його правий ідеал і  $a \in K$ . Тоді  $a \cdot A$  є правим ідеалом як в  $K$  так і в  $A$ .

13. В прямому добутку  $K_1 \times K_2$  кілець з одиницею  $K_1, K_2$  всі ідеали мають вигляд  $A \times B$ , де  $A$  ідеал кільця  $K_1$ , а  $B$  — ідеал кільця  $K_2$ . Навнсть одніці в кільцях  $K_1, K_2$  суттєва.

14. Скінченні підмножини утворюють ідеал кільця підмножин заданої множини.
15. Послідовності із скінченною кількістю ненульових елементів утворюють ідеал кільця цілочисельних послідовностей  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$
16. Функції із  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , що дорівнюють нулю за межами певного відрізка, утворюють ідеал кільця  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  всіх дійсних функцій.
17. Нехай  $A$  ідеал кільця матриць над комутативним кільцем з одиницею  $K$ . Тоді в кільці  $K$  існує ідеал  $B$  такий, що  $A$  є кільцем всіх матриць над  $B$ . Існування одиниці в кільці  $K$  є суттєвою вимогою.
18. Якщо кільце має одиницю, то об'єднання лінійно впорядкованої сукупності власних ідеалів цього кільця знову є власним ідеалом.
19. Навести приклад кільця без одиниці, в якому об'єднання лінійно впорядкованої сукупності ідеалів збігається із усім кільцем.
20. В кільці класів лишків за модулем 16 дільники нуля утворюють ідеал.
21. В кільці класів лишків за модулем 12 дільники нуля не утворюють ідеал.
22. Якщо в комутативному кільці з одиницею перетин ненульових ідеалів є ненульовий ідеал, то множина дільників нуля в цьому кільці утворюють ідеал.
23. Дільники нуля в кільці класів лишків за модулем  $n$  утворюють ідеал тоді і тільки тоді, коли  $n$  є степенем простого числа.
24. Перетин будь-якої сукупності ідеалів кільця знову є ідеалом цього кільця.
25. В чвм (частково впорядкованій множині) ідеалів кільця точною верхньою гранню твг або супремумом для множини ідеалів  $A_\alpha$ ,  $\alpha \in M$  буде ідеал, що складається із сум вигляду

$$\sum_{\alpha \in M} a_\alpha, \quad a_\alpha \in A_\alpha.$$

26. Нехай  $A$  і  $B$  ідеали кільця  $K$ . Тоді множина сум

$$\left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \mid a_k \in A, b_k \in B, \quad n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

знову буде ідеалом кільця  $K$ . Цей ідеал називають добутком ідеалів  $A, B$  і позначають  $A \cdot B$ .

27. Нехай  $A, B$  — ідеали кільця  $K$ . Тоді

$$A \cdot B \subseteq A \cap B.$$

Навести приклад кільця  $K$  і в ньому ідеалів  $A, B$  таких, що  $AB \neq A \cap B$ .

28. Нехай  $A$  — ідеал комутативного кільця  $K$ . Тоді множина

$$R(A) = \{x \in K \mid x^n \in A \text{ для деякого } n = 1, 2, 3, \dots\}$$

також буде ідеалом кільця  $K$ . Умова комутативності кільця  $K$  є суттєвою.

29. Нільпотенти комутативного кільця утворюють ідеал. Навести приклад кільця, в якому нільпотенти не утворюють ні лівий ні правий ідеал.

30. Нехай  $A$  — абелева група і  $B \subseteq A$  її підгрупа. Показати, що множина

$$M = \{f \in \text{End } A \mid f(A) \subseteq B\}$$

є правий ідеал кільця ендоморфізмів  $\text{End } A$  цієї групи. Навести приклад групи  $A$  і її підгрупи  $B$  таких, що множина  $M$  не утворює лівий ідеал кільця  $\text{End } A$ .

31. Нехай  $A, B, C$  три такі ідеали кільця  $K$  і  $B \subseteq A$ . Тоді

$$A \cap (B + C) = B + A \cap C. \quad (1)$$

Тотожність (1) називають модулярною тотожністю або тотожністю Дедекінда.

32. Навести приклад кільця  $K$  і в ньому ідеалів  $A, B, C$  таких, що

$$A \cap (B + C) \neq A \cap B + A \cap C.$$

33. Нехай  $A, B, C$  множини матриць, що мають вигляд відповідно

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & l & 2m \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді  $A, B, C$  є кільцями,  $B$  — ідеал кільця  $A$ ,  $C$  — ідеал кільця  $B$ , але  $C$  не є ідеалом кільця  $A$ .

34. Нехай  $K$  кільце,  $A$  його підкільце. Тоді множина

$$B = \{x \in K \mid xA \subseteq A, \quad Ax \subseteq A\}$$

буде підкільцем кільця  $K$  а  $A$  буде його ідеалом.

35. Нехай  $I, J$  — ідали кільця  $K$ . Тоді множина

$$A = \{x \in K \mid x \cdot I \subseteq J\}$$

також є ідеалом кільця  $K$ .

36. Для будь-якої підмножини  $X \subseteq K$  кільця  $K$

(а) множина

$${}^{\perp}X = \{a \in K \mid a \cdot X = 0\}$$

є лівим ідеалом;

(б) множина

$$X^{\perp} = \{a \in K \mid X \cdot a = 0\}$$

є лівим ідеалом.

Якщо множина  $X$  одноелементна, тобто  $X = \{a\}$  для деякого  $a \in K$ , то будемо писати

$${}^{\perp}X = {}^{\perp}a, \quad X^{\perp} = a^{\perp}.$$

37. Якщо множина  $X$  є лівим (відповідно, правим) ідеалом кільця  $K$ , то множина  ${}^{\perp}X$  (відповідно,  $X^{\perp}$ ) є двостороннім ідеалом цього кільця.

38. Нехай  $K$  кільце і  $a, b$  його елементи. Тоді

$$a^{\perp} \cap b^{\perp} \neq 0 \Rightarrow (a + b)^{\perp} \neq 0.$$

39. Нехай  $K$  кільце і  $A, B$  його ідали. Тоді

$$(A + B)^{\perp} = (A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}.$$

40. Якщо  $K$  кільце і  $K \supseteq A \supseteq B$ , то

$$A^{\perp} \subseteq B^{\perp}; \quad {}^{\perp}A \subseteq {}^{\perp}B.$$

41. Якщо  $K$  кільце і  $K \supseteq A$ , то

$$({}^{\perp}(A^{\perp}))^{\perp} = A^{\perp}.$$

42. Нехай  $A_{\alpha}$  ( $\alpha \in M$ ) - деяка сукупність лівих ідеалів кільця  $K$ . Тоді

$$\left( \sum_{\alpha \in M} A_{\alpha} \right)^{\perp} = \bigcap_{\alpha \in M} A_{\alpha}^{\perp}$$

43. Нехай  $K$  кільце, в якому виконуються дві умови — для кожного правого ідеала  $A$  існує лівий ідеал  $B$  такий, що  $A = B^\perp$  і для кожного лівого ідеала  $B$  існує правий ідеал  $A$  такий, що  $B = {}^\perp A$ . Тоді для кожного спадного ланцюга

$$K \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

правих ідеалів виконується рівність

$${}^\perp \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} {}^\perp A_k.$$

44. Нехай  $M$  множина таких лівих ідеалів  $A$  кільця з одиницею  $K$ , що для деякого правого ідеала  $B$  можна записати  $A = B^\perp$ . Тоді

(a)  $0 \in M \quad K \in M$ ;

(b)  $A_1, A_2 \in M \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in M$ ;

(c) для будь-яких  $A_1, A_2 \in M$  в чвм  $M$  існує точна верхня грань.

45. На множині  $\{a, b, c, d\}$  визначити операції додавання та множення так, щоб ця множина стала кільцем і ідеалами цього кільця були

(a)  $I_1 = \{a\}, I_2 = \{a, b\}, I_3 = \{a, c\}, I_4 = \{a, d\}, I_5 = \{a, b, c, d\}$ ;

(b)  $I_1 = \{b\}, I_2 = \{b, c\}, I_3 = \{b, d\}, I_4 = \{a, b, c, d\}$ ;

(c)  $I_1 = \{d\}, I_2 = \{a, b, c, d\}$ .

## 2 Спеціальні ідеали та кільця з умовами на ідеали

**Означення 2.1** Ідеал  $A$  кільця  $K$  називають

головним, якщо  $A$  є перетином усіх ідеалів, що містять деякий фіксований елемент  $a \in K$  (головний ідеал, що є перетином усіх ідеалів, які містять  $a \in K$  позначають через  $(a)$  і кажуть, що він породжений елементом  $a \in K$ );

скінченнопородженим, якщо для деякої скінченної множини  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$   $A = (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n)$  (такий ідеал позначають  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ );

максимальним, якщо він є максимальним елементом у частково впорядкованій множині власних ідеалів кільця  $K$ ;

мінімальним, якщо він є мінімальним елементом у частково впорядкованій множині ненульових ідеалів кільця  $K$ ;

нільідеалом, якщо  $A$  як підкільце кільця  $K$  є нількільцем, тобто всі його елементи нільпотентні;

нільпотентним, якщо для деякого натурального  $n$  і для будь-якого набору  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  елементів із  $K$  виконується рівність  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 0$ .

Якщо в означенні 2.1 замінити поняття ідеал на поняття правий (відповідно, лівий) ідеал, то одержимо означення головного, скінченнопородженого, ніль-ідала, нільпотентного, максимального та мінімального правого (відповідно, лівого) ідеалів.

**Означення 2.2** Кільце  $K$  називають

*кільцем головних ідеалів, якщо в ньому кожен ідеал головний;*

*кільцем з умовою обриву зростаючих ланцюгів (скорочено у.о.з.л.), якщо в будь-якій зростаючій послідовності*

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

*ідеалів всі ідеали, починаючи з деякого, збігаються;*

*кільцем з умовою обриву спадних ланцюгів (скорочено у.о.с.л.), якщо в будь-якій спадній послідовності*

$$K \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

*ідеалів всі ідеали, починаючи з деякого, збігаються;*

*простим, якщо в ньому немає нетривіальних ідеалів;*

*локальним, якщо в ньому є єдиний максимальний ідеал.*

**Означення 2.3** Кільце з умовою обриву спадних ланцюгів лівих ідеалів називають також артіновим. А кільце з умовою обриву зростаючих ланцюгів лівих ідеалів називають нютеревим.

**Означення 2.4** В комутативному кільці  $K$  ідеал  $A$  називається простим, якщо для будь-яких  $x, y \in K$  із того, що  $x \cdot y \in A$  випливає, що  $x \in A$  або  $y \in A$ .

У вправах, що стосуються простих ідеалів, мається на увазі, що кільце комутативне.

46. Нульовий ідеал є головним.

47. Якщо кільце  $K$  має одиницю, то  $K$  є головним ідеалом.

48. Головний ідеал  $(a)$ , що породжений елементом  $a \in K$  кільця  $K$ , збігається із множиною

$$(a) = A + B + C + D + E,$$

де

$$A = \left\{ \underbrace{a + a + \dots + a}_n \mid n = 1, 2, \dots \right\}, \quad B = \left\{ \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_n \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

$$C = \{ax|x \in K\}, \quad D = \{xa|x \in K\}$$

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^n x_k \cdot a \cdot y_k \mid n = 1, 2, \dots, \quad x_k, y_k \in K \right\}.$$

49. Головний ідеал  $(a)$ , що породжений елементом  $a \in K$  кільця з одиницею  $K$ , збігається із множиною

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_k \cdot a \cdot y_k \mid n = 1, 2, \dots, \quad x_k, y_k \in K \right\}.$$

50. Нехай  $K$  кільце з одиницею і  $x \in K$ . Тоді

- (a) правий ідеал  $xK$  є головним правим ідеалом, що породжений елементом  $x \in K$ ;
- (b) якщо  $x$  необоротний елемент ненульового кільця  $K$ , то головний правий ідеал  $xK$  є власним ідеалом;
- (c) лівий ідеал  $xK$  є головним лівим ідеалом, що породжений елементом  $x \in K$ ;
- (d) якщо  $x$  необоротний елемент ненульового кільця  $K$ , то головний лівий ідеал  $Kx$  є власним ідеалом;

51. навести такі приклади кільця  $K$  і елемента  $x \in K$ , що

- (a) правий ідеал  $xK$  не збігається з головним правим ідеалом, що породжений елементом  $x \in K$ ;
- (b) лівий ідеал  $Kx$  не збігається з головним лівим ідеалом, що породжений елементом  $x \in K$ .

В наступних вправах 53 — 58 потрібно перевірити, що ідеал  $A$  кільця  $K$  є головним.

53.  $A = 2\mathbb{Z}, \quad K = \mathbb{Z}.$

54.  $A = \{0, 3\}, \quad K = \mathbb{Z}_6;$

55.  $A = \{0, 3, 6, 9\}, \quad K = \mathbb{Z}_{12}.$

56.  $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \quad K = \mathfrak{B}(1, 2, 3).$

57.  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$

$$58. A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\};$$

59. Які елементи входять в головний правий ідеал  $aK$ , якщо

$$(a) \ a = \{0, 2, 4\}, \quad K = \mathfrak{B}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\});$$

$$(b) \ a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = M_3(\mathbb{R});$$

$$(c) \ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = M_3(\mathbb{R})$$

60. Скільки елементів містить головний правий ідеал  $(a)$ , якщо

$$(a) \ a = 5, \quad K = \mathbb{Z}_2 4;$$

$$(b) \ a = 6, \quad K = \mathbb{Z};$$

$$(c) \ a = \{1, 5, 9, 10, 14\}, \quad K = \mathfrak{B}(\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 20\});$$

61. Для  $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$  головні ліві ідеали  $M_2(\mathbb{Z}) \cdot A$ ,  $M_2(\mathbb{Z}) \cdot B$

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

різні;

62. Для  $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$  головні ліві ідеали  $M_2(\mathbb{Z}) \cdot A$ ,  $M_2(\mathbb{Z}) \cdot B$

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(b) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

однакові;

В наступних вправах 63 — 66 потрібно перевірити рівність головних ідеалів  $(a)$  та  $(b)$  кільця  $K$ .

$$63. \ a = 4, \quad b = 1, \quad K = \mathbb{Z}_{15}.$$

$$64. \ a = 2x + 1, \quad b = 4x + 2, \quad K = \mathbb{R}[x].$$

65.  $a = \frac{6}{7}$ ,  $b = 2$ ,  $K \subset \mathbb{Q}$  складається із усіх дробів, що мають непарний знаменник.

66.  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = -6$ ,  $K \subset \mathbb{Q}$  складається із усіх дробів, чий знаменник є степенем двійки.

63. Якщо  $f(x) = x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 10x + 276 \in \mathbb{R}[x]$  і  $g \in (f) \subset \mathbb{R}[x]$ . Тоді  $g(3) = 0$ .

64. Нехай  $M$  множина і  $A, B \subseteq M$ . Тоді

$$A \in (B) \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

65. В адитивній абелевій групі з нульовим множенням циклічні підгрупи і тільки вони є головними ідеалами.

66. Кожний скінченнопороджений ідеал кільця  $\mathfrak{B}(M)$  є головним

В наступних вправах 71 — 79 довести, що ідеал  $A$  кільця  $K$  не є головним.

71.  $A$  складається із усіх скінчнних підмножин нескінченної множини  $M$ ,  $K = \mathfrak{B}(M)$ .

72.  $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $A$  складається із тих функцій, які дорівнюють нулю за межами певного (для кожної функції свого) відрізка.  $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

73.  $A$  складається із усіх матриць, що мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$K$  — підкільце кільця  $M_3(\mathbb{R})$ , що складається із матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

74.  $A$  складається із усіх матриць, що мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$K$  — підкільце кільця  $M_3(\mathbb{R})$ , що складається із матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

75.  $A$  складається із тих послідовностей цілих чисел, в яких лише скінченна кількість ненульових елементів;  $K = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ .
76.  $K = \mathbb{Z}(i\sqrt{5})$ ;  $A = (a, b)$ ,  $a = 3, b = 1 + 2i\sqrt{5}$ .
77.  $K = \mathbb{R}[x, y]$ ,  $A = \left\{ \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k} x^i y^k \in \mathbb{R}[x, y] \mid a_{0,0} = 0. \right\}$
78.  $K = K_1[[x]]$ ,  $A = B + (x)$ .
79.  $K = \mathbb{Z}[x]$ .  $A = (2) + (x)$ .
80. Кожен ідеал є сумою головних.
81. Якщо головний ідеал є сумою певної сукупності головних ідеалів, то в цій сукупності є скінченна підмножина, що дає ту ж суму.
82. Для будь-якої функції  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  можна знайти функцію  $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  таку, що  $(f) + (g) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  і  $(f) \cap (g) = 0$ .
83. Головний ідеал, що породжений необоротним елементом комутативного кільця з одиницею, є власним. Навести приклад кільця з одиницею  $K$  і необоротного елемента  $a \in K$ , для яких  $(a) = K$ .
84. Нехай  $A$  мінімальний правий ідеал кільця  $K$ . Тоді або  $A^2 = 0$  або  $A = eK$  для деякого ідемпотента  $e \in K$ .
85. Якщо  $K$  — тіло і  $I$  — непорожня множина, то для кожного  $f \in K^I$  існує ідемпотент  $e \in K^I$  такий, що  $(e) = (f)$ .
86. Для кожного  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  існує ідемпотент  $e \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  такий, що  $(e) = (f)$ .
87. Якщо  $e$  ідемпотент кільця з одиницею  $K$ , то для головних правих ідеалів  $A = eK$  та  $B = (1 - e)K$  виконуються рівності

$$A + B = K, \quad A \cap B = 0.$$

88. Нехай  $K$  область цілісності,  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ ;  $A, B$  — ідеали кільця  $K$  тоді
- (a)  $(x)A \subseteq (x)B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ;
- (b)  $(x)A = (x)B \Leftrightarrow A = B$ ;

В наступних вправах 89 — 93 потрібно перевірити, що кільце  $K$  є кільцем головних ідеалів.

89.  $K = \mathbb{R}[x]$ .
90.  $K = \mathbb{Z}$ .

91.  $K = \mathbb{Z}_p$ .
92.  $K = \mathfrak{B}(M)$ , якщо  $M$  — скінченна множина.
93.  $K = \mathbb{R}[[x]]$ .

В наступних прикладах 94 — 96 потрібно перевірити, що кільце  $K$  не є кільцем головних ідеалів.

94.  $K = \mathbb{Z}[x]$ .
95.  $K = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
96.  $K = \mathfrak{B}(M)$ , якщо  $M$  — нескінченна множина.

97. Для будь-якого простого  $p$  кільце  $p$ -адичних чисел є кільцем головних ідеалів.

У вправах 98 — 104 потрібно перевірити максимальність ідеала  $A$  кільця  $K$ .

98.  $K = \mathbb{Z}$ ,  $A = 3\mathbb{Z}$ .
99.  $K = \mathbb{Z}_{14}$ ,  $A = \{0, 7\}$ .
100.  $K = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ,  $A = \{M \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \notin M\}$ .
101.  $K$  — підкільце кільця раціональних чисел, що складається із дробів, що мають зменником степінь двійки.  $A = (12)$
102.  $K$  — підкільце кільця раціональних чисел, що складається із дробів, що мають непарний зменник.  $A = (6)$
103.  $K = M_2(\mathbb{Z})$ ,  $A = 2M_2(\mathbb{Z})$ .
104.  $K = \mathbb{R}[x]$ ,  $A = (x)$ .
105. Ідеал (4) не максимальний в кільці  $K \subseteq \mathbb{Q}$ , що складається із дробів з непарним знаменником.
106. Ідеал (9) не максимальний в кільці  $K \subseteq \mathbb{Q}$ , що складається із дробів із знаменниками, що є степенями двійки.
107. Нульовий ідеал в кільці  $\mathbb{Z}$  простий але не максимальний.
108. Знайти всі максимальні ідеали кільця  $\mathbb{Z}_{36}$ .
109. Матриці вигляду  $\begin{pmatrix} q & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  утворюють максимальний правий ідеал в кільці  $M_2(\mathbb{R})$ .

110. Матриці вигляду  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$  утворюють максимальний лівий ідеал в кільці  $M_2(\mathbb{R})$ .

111. Правий ідеал, що складається із матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не є максимальним правим ідеалом в кільці  $M_3(\mathbb{R})$ .

112. Ідеал, що складається із скінченних підмножин нескінченної множини  $M$  не є максимальним в кільці  $\mathfrak{B}(M)$  всіх підмножин множини  $M$ .

113. Які ідеали максимальні в кільці  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

114. Максимальний ідеал в кільці  $\mathfrak{B}(M)$ , що містить всі скінченні підмножини, не є головним.

115. В комутативному кільці з одиницею кожен власний ідеал міститься в деякому максимальному.

116. Нульовий ідеал максимальний в комутативному кільці одиницею тоді і тільки тоді, коли кільце є полем.

117. Навести приклад комутативного кільця безодиниці, в якому нульовий ідеал є максимальним

118. Ідеал  $A$  кільця  $\mathbb{C}[x]$  є максимальним тоді і тільки тоді, коли для деякого  $a \in \mathbb{C}$   $A = (x - a)$ .

119. Власний ідеал  $A$  комутативного кільця з одиницею  $K$  максимальний тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall r \notin A)(\exists x \in K)1 - rx \in A.$$

120. Комутативне кільце з одиницею є локальним в тому і тільки тому випадку, коли із рівності  $r + s = 1$  випливає, що один із елементів  $r, s$  оборотний.

У вправах 121 — 126 потрібно перевірити, що кільце  $K$  локальне.

121.  $K = \mathbb{R}$ .

122.  $\mathbb{R}[[x]]$ .

123.  $K = M_2(\mathbb{R})$ .

124.  $K = \mathbb{Z}_p^n$ , де  $p$ —просте число,  $n = 1, 2, \dots$

125.  $K$  — підкільце кільця раціональних чисел, що складається із дробів із непарними знаменниками.

126.  $K$  — кільце цілих  $p$ -адичних чисел,  $p$  — просте число.

У вправах 127 — 132 потрібно перевірити, що кільце  $K$  не локальне.

127.  $K = \mathbb{Z}$ .

128.  $K = \mathbb{R}Z_6$ .

129.  $K = \mathbb{R}[x]$ .

130.  $K = \mathbb{Z}[[x]]$ .

131.  $K = M_2(\mathbb{R})$ .

132.  $K$  — підкільце кільця раціональних чисел, що складається із дробів, чії знаменники є степенями двійки.

133. В кільці з одиницею  $K$  наступні умови рівносильні

(а) Кільце  $K$  містить єдиний правий максимальний ідеал.

(b) Всі необоротні елементи кільця  $K$  утворюють власний двосторонній ідеал.

(c) Кільце  $K$  містить єдиний лівий максимальний ідеал.

(d) Для будь-якого елемента  $a \in K$  або  $a$  або  $1 - a$  є оборотним елементом.

134. Навести приклад локального кільця  $K$  і в ньому підкільця  $K_1$  так, щоб кільце  $K_1$  не було локальним.

135. Для кожного максимального (відповідно, простого) ідеала  $A$  комутативного кільця з одиницею  $K$  ідеал

$$B = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \in K[x] \mid a_0 \in A\}$$

є максимальним (відповідно, простим) ідеалом кільця  $K[x]$ .

У вправах 136 — 142  $K$  є кільцем з одиницею і  $a \in K$ .

136. За якої умови для максимального правого ідеала  $M$  кільця  $K$   $1 \notin aK + M$ .

137. За якої умови для для будь-якого максимального правого ідеала  $M$  кільця  $K$   $1 \notin aK + M$ .

138. Використовуючи приклад 137 показати, що елемент  $1 - ax$  буде оборотним справа для будь-якого  $x \in K$  тоді і тільки тоді, коли  $a$  лежить у перетині всіх максимальних правих ідеалів.

139. Нехай  $x, y \in K$  такі, що  $(1 - ax)y = 1$ . Знайти елемент  $z \in K$  такий, що  $(1 - xa)z = 1$ .
140. Використовуючи вправу 139 перевірити, що коли елемент  $1 - ax$  оборотний справа для будь-якого  $x \in K$  то і елемент  $1 - xa$  оборотний справа для будь-якого  $x \in K$ .
141. Використовуючи результати прикладів ??, 140 перевірити, що перетин всіх максимальних правих ідеалів кільця є двостороннім ідеалом.
142. Використовуючи результат прикладу ?? та оборотність елемента  $1 - u$  для будь-якого нільпотента  $u$  показати, що кожний нільпотентний ідеал  $i$ , відповідно, сума всіх нільпотентних ідеалів кільця  $K$  міститься в перетині всіх максимальних правих ідеалів.
143. Використовуючи результати прикладів 136, ?? перевірити, що перетин всіх максимальних правих ідеалів кільця  $K$  з одиницею збігається із перетином всіх максимальних правих ідеалів.
144. Використовуючи результати прикладів 136, ?? перевірити, що формальний многочлен із коефіцієнтами із комутативного кільця з одиницею лежить в перетині всіх максимальних ідеалів кільця многочленів тоді і тільки тоді, коли він нільпотентний.
145. Використовуючи результат прикладу 142 показати, що коли кожний максимальний правий ідеал містить ненульовий ідемпотент, тоді перетин всіх максимальних правих ідеалів є нільпотентним ідеалом.
146. Для простого натурального числа  $p$  ідеал  $p\mathbb{Z}$  кільця  $\mathbb{Z}$  простий.
147. Нульвий ідеал кільця  $\mathbb{Z}_{11}$  простий.
148. Якщо  $p$  просте натуральне число і  $p \in$  дільником  $n$ , то ідеал  $p\mathbb{Z}_n$  простий в кільці  $\mathbb{Z}_n$ .
149. Ідеал  $(x)$  простий в  $\mathbb{Z}[x]$ .
150. Ідеал  $(x + 1)$  простий в  $\mathbb{R}[x]$ .
151. Ідеал  $(x^2 + 1)$  простий в  $\mathbb{R}[x]$ .
152. Нехай  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ . Ідеал  $A = \{N \subseteq M \mid 3 \notin N\}$  простий в  $\mathfrak{B}(M)$ .
153. Ідеал  $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$  простий в  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
154. Ідеал  $(2) + (x)$  є простим в кільці  $\mathbb{Z}[x]$ .
155. В підкільці кільця раціональних чисел, що складається із дробів з непарним знаменником, ідеал  $(\frac{10}{11})$  є простим.

156. Ідеал  $(x^2 + 1)$  не простий в  $[x]$ .
157. Ідеал  $(x^2 - 1)$  не простий в  $\mathbb{R}[x]$ .
158. Нехай  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Ідеал  $A = \{N \subseteq M \mid 1, 3 \notin N\}$  не простий в  $\mathfrak{B}(M)$ .
159. Нехай  $M$  — нескінченна множина. Тоді ідеал, що складається із скінчених підмножин не простий в кільці всіх підмножин множини  $M$ .
160. Нульовий ідеал є простим тоді і тільки тоді, коли кільце є областю цілісності.
161. Множина нільпотентних елементів комутативного кільця з одиницею є перетином всіх простих ідеалів цього кільця.
162. Кожний максимальний ідеал комутативного кільця з одиницею є простим ідеалом.
163. Множина простих ідеалів комутативного кільця з одиницею не поржня.
164. Якщо кожен елемент  $x \in K$  комутативного кільця з одиницею  $K$  задовольняє певному рівнянню  $x^n = x$  (для кожного числа  $n$  своє), тоді в цьому кільці кожен простий ідеал є максимальним.
165. В булевому кільці кожен простий ідеал максимальний.
166. Комутативне кільце з одиницею містить єдиний простий ідеал тоді і тільки тоді, коли кожен необоротний елемент нільпотентний.
167. В комутативному кільці з одиницею множина дільників нуля містить простий ідеал.
168. Якщо ідеал міститься в скінченному об'єднанні простих ідеалів, то він міститься в одному з них.
169. Показати, що власний ідеал  $A$  комутативного кільця з одиницею  $K$  має властивість

$$(\forall n = 0, 1, 2, \dots)(\forall x \in K)(x^n \in A \Leftrightarrow x \in A)$$

тоді і тільки тоді, коли він є перетином деякої сукупності простих ідеалів.

170. Частково впорядкована множина простих ідеалів має мінімальні елементи.
171. Ідеал  $(4) + (x)$  кільця  $\mathbb{Z}[x]$  не є простим і не є добутком простих ідеалів.
172. В комутативному кільці з одиницею ідеал  $I$  простий тоді і тільки тоді, коли для будь-яких ідеалів  $A, B$  виконується умова

$$(A \cdot B) \Leftrightarrow (A \subseteq I \text{ або } B \subseteq I).$$

173. Чи може підкільце кільця з єдиним простим ідеалом мати декілька простих ідеалів?

У вправах 174 — 176  $K$  є комутативним кільцем з одиницею,  $\text{Spec } K$  означає множину простих ідеалів кільця, і якщо  $a \in K$ , то  $\Gamma a$  означає множину простих ідеалів, які не містять  $a$ ; якщо  $A \subseteq K$ , то

$$\Gamma A = \{P \in \text{Spec } K \mid P \not\supseteq A\}.$$

174. Для  $A \subseteq K$  можна написати

$$\Gamma A = \cup_{a \in A} \Gamma a.$$

175. Якщо  $A_i (i \in I)$  — деяка множина ідеалів кільця  $K$ , то

$$\bigcup_{i \in I} \Gamma A_i = \Gamma \left( \sum_{i \in I} A_i \right).$$

176. Якщо  $a, b \in K$  і  $A, B$  — ідеали кільця  $K$ , то

$$\Gamma a \cap \Gamma b = \Gamma(a \cdot b); \quad \Gamma A \cap \Gamma B = \Gamma(A \cdot B).$$

177.  $\Gamma K = \text{Spec } K$

178.  $\Gamma 0 = \emptyset$ .

179. Сума  $A + B$  ідеалів  $A$  та  $B$  буде нільпотентним ідеалом тоді і тільки тоді, коли і  $A$  і  $B$  є нільпотентними ідеалами.

180. Якщо ідеали  $A_\alpha, \alpha \in M$  нільпотентні, то

(a) сума  $\sum_{\alpha \in M} A_\alpha$  є нільідеалом,

(b) якщо множина  $M$  скінченна, то сума  $\sum_{\alpha \in M} A_\alpha$  є нільпотентним ідеалом.

181. Якщо комутативне кільце задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів, то кожний ніль-ідеал є нільпотентним.

182. Навести приклад ненільпотентного кільця, в якому кожний скінченнопороджений ідеал є нільпотентним.

183. Підкільце  $K$  кільця  $M_2(\mathbb{R})$ , що складається із матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Q}, \quad b, c \in \mathbb{R},$$

задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для правих ідеалів, але не задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для лівих ідеалів.

184. Підкільце  $K$  кільця  $M_2(\mathbb{Q})$ , що складається із матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Q},$$

задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для правих ідеалів, але не задовольняє умову обриву спадних ланцюгів для лівих ідеалів.

185. Підкільце  $K$  кільця  $M_2(\mathbb{Q})$ , що складається із матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b, c \in \mathbb{Q},$$

задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів для правих ідеалів, але не задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів для лівих ідеалів.

186. Якщо в кільці  $K$  виконується умова обриву спадних ланцюгів для лівих ідеалів, і для кожного правого ідеала  $A$  існує лівий ідеал  $B$  такий, що  $A = B^\perp$ , то в цьому кільці  $K$  виконується умова обриву зростаючих ланцюгів для правих ідеалів.

187. Якщо в кільці  $K$  для кожного лівого ідеала  $A$  існує елемент  $x \in K$  такий, що  $A = {}^\perp(xK)$  для кожного правого ідеала існує лівий ідеал  $B \subseteq K$  такий, що  $C = B^\perp$ , то в для лвих ідеалів виконується умова обриву спадних ланцюгів.

188. Якщо в кільці  $K$  для кожного лівого ідеала  $A$  існує скінченна підмножина  $X \subseteq K$  і для кожного правого ідеала  $B$  існує скінченна підмножина  $Y \subseteq K$  такі, що

$$A = {}^\perp X, \quad B = Y^\perp,$$

то в кільці виконуються обидві умови — і у.о.с.л. і у.о.з.л. як для лівих так і для правих ідеалів.

189. Якщо комутативне кільце з одиницею задовольняє умови обриву спадних ланцюгів для ідеалів, то кожний простий ідеал в цьому кільці є максимальним.

190. Якщо кільце є областю цілісності і воно задовольняє умову обриву спадних ланцюгів, то це кільце є полем.

191. Комутативне кільце з одиницею, яке задовольняє умову обриву спадних ланцюгів, має лише скінченну кількість простих ідеалів.

### 3 Гомоморфізми кілець.

**Означення 3.1** Відображення  $f : K \rightarrow L$  із кільця  $K$  в кільце  $L$  називається гомоморфізмом, якщо для будь-яких  $x, y \in K$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

**Означення 3.2** Сюр'єктивний гомоморфізм називають накладенням або епі-морфізмом;

ін'єктивний гомоморфізм називають вкладенням або мономорфізмом;

бієктивний гомоморфізм називають ізоморфізмом;

**Означення 3.3** Гомоморфізм із кільця  $K$  в себе називають ендоморфізмом, бієктивний ендоморфізм називають автоморфізмом.

Множину гомоморфізмів із кільця  $K$  в кільце  $L$  позначають  $\text{Hom}(K, L)$ , а множину ендоморфізмів кільця позначають  $\text{End } K$  або  $\text{End}_K$ .

Щоб підкреслити, що гомоморфізм є природним, всім однаково зрозумілим і не вимагає розлогого означення такий гомоморфізм називають канонічним. Прикладом канонічного гомоморфізму із кільця цілих чисел в кільце дійсних чисел є гомоморфізм, який ставить у відповідність цілому числу це ж саме ціле число, але вже як елемент кільця дійсних чисел. .

**Означення 3.4** Якщо  $a \in K$  оборотний елемент кільця  $K$  то відображення  $\hat{a} : K \rightarrow K$ , яке задане умовою

$$\hat{a}(x) = a^{-1} \cdot x \cdot a$$

називають внутрішнім автоморфізмом кільця  $K$ .

**Означення 3.5** Кажуть, що два кільця  $K$  і  $L$  ізоморфні, якщо існують два ізоморфізми

$$f : K \rightarrow L, \quad g : L \rightarrow K.$$

Щоб сказати, що кільця  $K$  і  $L$  ізоморфні, пишуть  $K \cong L$ .

192. Відображення, що обернене до ізоморфізму є ізоморфізмом.

193. Бінарне відношення “кільце  $K$  ізоморфне кільцю  $L$ ” є відношенням еквівалентності на класі кілець.

194. Нехай  $K, L$  два кільця і  $f \in \text{Hom}(K, L)$ . Тоді для будь-якого  $x \in K$

$$f(-x) = -f(x).$$

195. Нехай  $K, L$  два кільця і  $f \in \text{Hom}(K, L)$ . Тоді

(a)

$$\text{Ker } f = \{x \in K : f(x) = 0\} \subseteq K$$

є ідеалом кільця  $K$ ;

(b)

$$\text{Im } f = \{y \in L : f(x) = y \text{ для деякого } x \in K\} \subseteq L$$

є підкільцем кільця  $L$ ;

Ідеал  $\text{Ker } f$  називають ядром гомоморфізма  $f$ , а підкільце  $\text{Im } f$  називають образом гомоморфізма  $f$ .

196. Відображення  $f : K \rightarrow L$  із кільця  $K$  в кільце  $L$ , щозадане правилом  $f(x) = 0$  для будь-якого  $x \in K$  є гомоморфізмом, його називають нульовим гомоморфізмом і позначають  $0$ .

197. Нехай  $K, L$  два кільця і  $f \in \text{Hom}(K, L)$ . Тоді

(a) якщо  $X$  нільпотент кільця  $K$  то  $f(x)$  — нільпотент кільця  $L$ ;

(b) якщо  $X$  ідемпотент кільця  $K$  то  $f(x)$  — ідемпотент кільця  $L$ .

198. Нвести приклад кільця  $K$  і двох ендоморфізмів  $f_1, f_2 : K \rightarrow K$  таких, що відображення  $h : K \rightarrow K$ , яке задається правилом  $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , не є ендоморфізмом.

199. Якщо — нескінченне поле, то множина гомоморфізмів  $\text{Hom}(K[x], K)$  нескінченна.

200. Відображення  $a \mapsto na$  із  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Z}$  ( $n$  фіксоване натуральне число більше 1) не є ендоморфізмом.

201. Не існує ненульових гомоморфізмів із  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{Q}$ .

202. Не існує ненульових гомоморфізмів із  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{Z}$ .

203. Побудувати три різні вкладення із  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

204. Нехай  $K$  кільце,  $a \in K$  — виділений елемент цього кільця. Перевизначити операції додавання та множення в  $K$  так, щоб одержалось кільце і роль нуля в ньому відігравав елемент  $a$ .

205. Показати, що на множині  $\{a, b, c, d\}$  можна шістьма способами визначити операції додавання та множення так, щоб одержались неізоморфні кільця.

У вправах 206 — 220 показати, що кільце  $K_1$  ізоморфне кільцю  $K_2$

206.  $K_1 = \mathbb{C}$ ,  $K_2$  складається із матриць  $M_2(\mathbb{R})$ , що мають вигляд

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

207.  $K_1 = \mathbb{H}$ ,  $K_2$  складається із матриць  $M_2(\mathbb{C})$ , що мають вигляд

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

208.  $K_1 = \mathbb{H}$ ,  $K_2$  складається із матриць  $M_4(\mathbb{R})$ , що мають вигляд

$$\begin{pmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & -d & c \\ -c & d & a & b \\ -d & -c & -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

209.  $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $K_2$  складається із матриць  $M_2(\mathbb{Q})$ , що мають вигляд

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

210.  $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $K_2$  складається із пар  $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , додавання та множення яких здійснюється за правилами:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

211.  $K_1 = \mathbb{Z}_6$ ,  $K_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ .

212.  $K_1 = \mathbb{Z}$ ,  $K_2$  кільце ендоморфізмів абелевої групи  $\mathbb{Z}$ .

213.  $K_1 = O_p$  — кільце цілих  $p$ -адичних чисел,  $K_2$  кільце ендоморфізмів абелевої групи типу  $p^\infty \mathbb{Z}$

214.  $K_1 = M_n(\mathbb{Z})$ ,  $K_2$  кільце ендоморфізмів абелевої групи  $\mathbb{Z}^n$  ( $n \geq 1$ ).

215.  $K_1 = K' \times K''$ ,  $K_2 = K'' \times K'$ .

216.  $K_1 = \mathbb{R}[x]$ ,  $K_2 = \mathbb{R} \langle x \rangle$ .

217.  $K_1 = \mathfrak{B}(\{1, 2, 3\})$ ,  $K_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

218.  $K_1 = \mathbb{Z}_n$ ,  $K_2 = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \mathbb{Z}_{p_3^{\alpha_3}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$ , де  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$  і  $p_1, p_2, \dots, p_k$  різні прості числа.

219.  $K_1 = (K' \times K'') \times K'''$ ,  $K_2 = K' \times (K'' \times K''')$ , де  $K', K'', K'''$  деякі кільця.

220. Нехай  $K$  — кільце. Можна подубувати інше кільце  $K^*$ , яке складається із тих же елементів, що і  $K$ , у них збігаються операції додавання, але множення  $a * b$  в  $K^*$  визначається за множенням  $x \cdot y$  в  $K$  наступним чином

$$a * b = b \cdot a.$$

Нове побудоване кільце  $K^*$  називається двоїтим (дуальним) до заданого кільця  $K$ . Довести, що кільця  $M_n(\mathbb{R})$  ізоморфне дуальному до нього.

У вправах 221 — ?? показати, що кільце  $K_1$  не ізоморфне кільцю  $K_2$ .

221.  $K_1 = \mathbb{Z}$ ,  $K_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

222.  $K_1 = \mathbb{Z}$ ,  $K_2 = \mathbb{Z}[x]$ .

223.  $K_1 = \mathbb{Z}$ ,  $K_2 = M_2(\mathbb{Z})$ .

224.  $K_1 = \mathbb{Z}_4$ ,  $K_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

225.  $K_1 = \mathbb{C}$ ,  $K_2 = \mathbb{R}$ .

226.  $K_1 = M_2(\mathbb{R})$ ,  $K_2 = M_3(\mathbb{Z})$ .

227.  $K_1 = \prod_{p-} \text{просте } \mathbb{Z}_p$ ,  $K_2 = \prod_{\alpha=1}^n \mathbb{Z}_{q^\alpha}$   $q$  — фіксоване просте число.

228. Якщо кільце  $K$  булеве, то  $K[x] \cong K \langle x \rangle$ .

229. Якщо кільце  $K$  скінченне, то  $K[x] \cong K \langle x \rangle$ .

230. Якщо кільце  $K$  є нескінченною областю цілісності, то  $K[x] \cong K \langle x \rangle$ .

231. В будь-якому кільці з одиницею існує підкільце, що ізоморфне одному із кілець  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$ .  $n = 2, 3, 4, \dots$

232. В будь-якій області цілісності існує підкільце, що ізоморфне одному із кілець  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ ,  $p$  — просте число.

У вправах 233 — 235 меться на увазі, що кільця  $K_1, K_2$  ізоморфні.

233.  $M_2(K_1) \cong M_2(K_2)$ .

234.  $K_1[x] \cong K_2[x]$ .

235.  $K_1^I \cong K_2^I$ .

236. Навести приклад таких кілець  $K, K_1, K_2$ , що  $K \times K_1 \cong K \times K_2$  і  $K_1 \not\cong K_2$ .

237. Навести приклад такого кільця  $K$ , що  $K \cong K \times K$ .

238. Навести приклад кільця, яке ізоморфне власному підкільцю.
239. Якщо кільця  $K_1, K_2$  ізоморфні, то кільце  $K_1$  комутативне, (нільпотентне, булеве, скінченне, просте) тоді і тільки тоді, коли цю ж властивість має  $K_2$ .
240. Якщо комутативне кільце  $K$  має одиницю і для будь-якого  $x \in K$   $x^2 = \pm x$  (прчому  $x^2 = -x$  для деякого  $x \in K$ ) то в цьому кільці є два ідеали  $A, B$  такі, що  $A$  — булеве кільце,  $B \cong Z_3$  і  $K = A + B$ .
241. За яких умов для двох ідеалів  $A, B$  кільця  $K$  відображення  $(a, b) \mapsto a + b$  є ізоморфізмом із кільця  $A \times B$  в кільце  $K$ .
242. Відображення  $\text{id}_K : K \rightarrow K$  із кільця  $K$  в себе, що задане правилом  $\text{id}_K(x) = x$  є автоморфізмом кільця  $K$ , його називають одиничним або тотожним.
243. В кільці  $\mathbb{Z}$  немає неединичного автоморфізму.
244. В кільці  $\mathbb{Q}$  немає неединичного автоморфізму.
245. В кільці  $\mathbb{R}$  немає неединичного автоморфізму.
246. В кільці  $\mathbb{C}$  є точно два автоморфізми.
247. Ендоморфізми кільця разом з операцією множення (як відображень) утворюють напівгрупу.
248. Якщо кільце не нульове, то напівгрупа ендоморфізмів не є групою.
249. Автоморфізми кільця разом з операцією множення (як відображень) утворюють групу, її позначають  $\text{Aut } K$ .
250. Внутрішні автоморфізми кільця утворюють підгрупу групи автоморфізмів. Ця підгрупа є інваріантною, або нормальним дільником.
251. В кільці  $M_n(\mathbb{R})$  всі автоморфізми внутрішні.
252. Нехай  $K$  — кільце,  $x$  — символ,  $f \in \text{Aut } K$  і  $K[x, f]$  множина формальних виразів

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad a_i \in K (i \geq 0).$$

Визначимо додавання таких виразів (назвемо їх перекошеними многочленами) як звичайних многочленів. Будемо вважати, що  $x \cdot \alpha = f(\alpha)x$ , що приводить до нступного визначення множення перекошених рядів: для

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k,$$

$$u \cdot v = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j+k=i} a_j f^j(b_k) \right) x^i.$$

Множина  $K[x, f]$  перекошених рядів разом із введеними операціями додавання та множення утворюють кільце.

253. Перекошені ряди із скінченною кількістю ненульових доданків утворюють підкільце кільця перекошених рядів. Це підкільце називають кільцем перекошених многочленів.
254. Навести приклад неединичного внутрішнього автоморфізму цілочисельного групового кільця групи підстановок  $n$ -го степеня —  $\mathbb{Z}(S_n)$ .
255. Група  $\text{Aut } \mathbb{Z}[x]$  не комутативна.
256. Навести приклад кільця, в якому
- є не внутрішній автоморфізм;
  - група автоморфізмів одноелементна;
  - група автоморфізмів двоелементна;
  - група автоморфізмів ізоморфна групі підстановок  $n$ -го степеня;
  - група автоморфізмів ізоморфна мультиплікативній групі ненульових дійсних чисел.
257. Якщо  $G$  — група автоморфізмів  $n$ -елементного кільця, а  $S$  — наагрупа ендоморфізмів цього кільця, то
- $|G| \leq n!$ ;
  - $|S| \leq n^n$ .
258. Гомоморфізм  $f$  із кільця  $K_1$  в кільце  $K_2$  є вкладенням (мономорфізмом) тоді і тільки тоді коли ядро  $\text{Ker } f$  цього гомоморфізму нульове.
259. Ненульовий гомоморфізм із тіла в кільце завжди є вкладенням.
260. Нехай  $f : K_1 \rightarrow K_2$  деякий гомоморфізм із кільця  $K_1$  в кільце  $K_2$ . За яких умов існує гомоморфізм  $g : K_2 \rightarrow K_1$  із кільця  $K_2$  в кільце  $K_1$  такий, що
- $f \cdot g = \text{id}_{K_2}$ ;
  - $g \cdot f = \text{id}_{K_1}$ .
- У вправах 261 — 265 побудувати вкладення.
261.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .
262.  $\mathfrak{B}(M) \rightarrow \mathbb{Z}^I$ , ( $M \subseteq I$ ).

263.  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ .

264.  $Z \rightarrow \prod_{p-}$  просте  $\mathbb{Z}_p$ .

265.  $Z \rightarrow \prod_{\alpha=1,2,3,\dots} \mathbb{Z}_{q^\alpha}$ .  $q$  – деяке просте число.

У вправах 266 – 268, де  $K$  деяке кільце, потрібно побудувати вкладення.

266.  $K \rightarrow K^2$ .

267.  $K \rightarrow K^I$  ( $|I| \geq 1$ ).

268.  $K \rightarrow M_n(K)$  ( $n \geq 1$ ).

269. Для будь-якого комутативного кільця з одиницею  $K$  існує локальне кільце  $L$  і вкладення  $K \rightarrow L$ .

270. Якщо  $f, g$  – два ендоморфізми кільця  $K$  і  $f$  не вкладення, то  $g \cdot f$  також не вкладення.

271. Якщо  $f, g$  – два ендоморфізми кільця  $K$  і  $f$  не накладення, то  $f \cdot g$  також не накладення.

272. Побудувати ненульовий гомоморфізм  $\mathbb{R}[x] \rightarrow R[[x]]$ , який не був би вкладенням.

273. Нехай  $A$  – ідеал кільця  $K_1$ ,  $B$  – ідеал кільця  $K_2$  і  $f : K_1 \rightarrow K_2$  накладення. Тоді

(a)  $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$  є ідеалом кільця  $K_2$ ;

(b)  $f^{-1}(B) = \{x \in K_1 | f(x) \in B\}$  є ідеалом кільця  $K_1$ ;

(c) ідеал  $B$  буде максимальним (простим) в тому і тільки тому випадку, коли максимальним (простим) буде ідеал  $f^{-1}(B)$ ;

(d) Якщо ідеал  $B$  є “великим”, тобто для будь-якого ідеалу  $C \subseteq K_2$  буде  $B \cap C \neq 0$ , то “великим” буде і ідеал  $f^{-1}(B)$ .

274. Якщо  $K_1$  комутативне (відповідно, ніль-кільце, локальне, булеве) кільце і  $f : K_1 \rightarrow K_2$  – накладення, то комутативним (відповідно, ніль-кільцем, локальним, булевим) буде також  $K_2$ .

275. Нехай  $K_e$  кільце, що побудоване із кільця  $K$  за допомогою зовнішнього приєднання одиниці. Побудувати вкладення  $f : K \rightarrow K_e$ .

276. Нехай  $K$  кільце, і  $g : G_1 \rightarrow G_2$  вкладення групи  $G_1$  в групу  $G_2$ . Побудувати вкладення  $f : K(G_1) \rightarrow K(G_2)$ .

277. Для простого натурального числа  $p$  побудувати вкладення кільця цілих чисел в кільце цілих  $p$ -адичних чисел.

278. Побудувати накладення

(a)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

(b)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ .

279. Нехай  $K$  — кільце з одиницею. Побудувати накладення  $K[x] \rightarrow K$ .

280. Нехай  $K$  кільце з одиницею і  $A \subset K[x]$  ідеал кільця  $K[x]$ , що складається із тих многочленів, що діляться на  $x - 1$ . Чи буде відображення  $K[x] \rightarrow A$ , що задається правилом  $f \mapsto (x - 1)f$  для  $f \in K[x]$  накладенням?

281. Нехай  $K$  — поле,  $L$  кільце,  $f : K[[x]] \rightarrow L$  накладення, що не є ізоморфізмом, і  $i : K[x] \rightarrow K[[x]]$  — “канонічне” вкладення, тобто  $i(a) = a$  для будь-якого  $a \in K[x]$ . Тоді  $f \circ i : K[x] \rightarrow L$  накладення, що не є ізоморфізмом.

282. Нехай  $I$  така частково впорядкована множина, що для будь-яких  $i, j \in I$  в  $I$  існує точна нижня грань;  $K_i (i \in I)$  — сукупність кілець;

$$f_{i,j} : K_i \rightarrow K_j, \quad i, j \in I, \quad i > j$$

така сукупність гомоморфізмів кілець, що для  $i, j, k \in I, i > j > k$

$$\forall x \in K_i \quad f_{i,k}(x) = f_{i,j}(f_{j,k}(x));$$

$M$  множина тих елементів  $a \in \prod_{i \in I} K_i$ , для яких виконується умова: якщо  $i, j \in I, i > j$ , то  $f(a(i)) = a(j)$ .

Показати, що

(a)  $M$  підкільце кільця  $\prod_{i \in I} K_i$ ;

(b) Множина  $L$  таких елементів  $a \in M$ , що  $a(i) = 0$  для деякого  $i \in I$  утворюють ідеал кільця  $M$ .

283. Для гомоморфізмів  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ , що задані умовами

$$\pi_1(n) = r, \text{ якщо } 0 \leq r < 6 \text{ і } n = 6q + r \quad (n, q, r \in \mathbb{Z});$$

$$\pi_2(n) = 3r, \text{ якщо } 0 \leq r < 2 \text{ і } n = 2q + r \quad (n, q, r \in \mathbb{Z}),$$

знайти кільце і гомоморфізми такі, що для будь-яких  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  таких, що

$$\pi_1(n_1) = \pi_2(n_2)$$

система рівнянь

$$f_1(a) = n_1, \quad f_2(a) = n_2,$$

має в єдиний розв'язок.

284. Нехай  $f : K_1 \rightarrow K_2$  деякий гомоморфізм із кільця  $K_1$  в кільце  $K_2$ . Для довільного кільця  $K$  визначимо відображення

$$\check{f} : \text{Hom}(K, K_1) \rightarrow \text{Hom}(K, K_2)$$

правилом:

$$g \in \text{Hom}(K, K_1) \Rightarrow \check{f}(g) = f \cdot g.$$

Показати, що відображення  $\check{f}$  буде ін'єктивним в тому і тільки тому випадку, коли  $f$  вкладення.

285. Нехай  $f : K_1 \rightarrow K_2$  деякий гомоморфізм із кільця  $K_1$  в кільце  $K_2$ . Для довільного кільця  $K$  визначимо відображення

$$\hat{f} : \text{Hom}(K_2, K) \rightarrow \text{Hom}(K_1, K)$$

правилом:

$$g \in \text{Hom}(K_2, K) \Rightarrow \hat{f}(g) = g \cdot f.$$

Показати, що якщо  $f$  накладення, то відображення  $\hat{f}$  буде ін'єктивним для будь-якого кільця  $K$ . Навести приклад кілець  $K_1, K_2$  і гомоморфізму  $f : K_1 \rightarrow K_2$  таких, що відображення буде ін'єктивним для будь-якого кільця  $K$ .

286. Нехай маємо два кільця  $K_1, K_2$ . Для трійки  $\langle K; f_1, f_2 \rangle$  де  $K$  кільце а  $f_i : K \rightarrow K_i (i = 1, 2)$  гомоморфізми кілець, може виконуватися умова:

“Для будь-якого кільця  $K'$  і гомоморфізмів  $g_i : K' \rightarrow K_i (i = 1, 2)$  існує єдиний гомоморфізм  $h : K' \rightarrow K$  такий, що

$$g_1 = f_1 \cdot h, \quad g_2 = f_2 \cdot h$$

(іншими словами, діаграма комутативна)“.

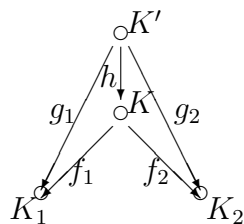
Показати, що трійка  $\langle K_1 \times K_2; \rangle$ , де

$$\pi_i(K_1 \times K_2 \rightarrow K_i \quad (i = 1, 2)$$

“канонічні проєкції“ —

$$(a, b) \in K_1 \times K_2 \Rightarrow (a, b) \xrightarrow{\pi_1} a, (a, b) \xrightarrow{\pi_2} b,$$

задовольняють умову, і якщо трійка  $\langle K; f_1, f_2 \rangle$  задовольняє умову, то  $K \cong K_1 \times K_2$ .



## 4 факторкільця

**Означення 4.1** Коли  $I$  - двосторонній ідеал кільця  $K$ , то на класах

$$[a] = \{a + x \mid x \in I\}, \quad a \in I$$

можна ввести операції додавання та множення: для  $a, b \in K$

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a] \cdot [b] = [ab].$$

Класи із так визначеними операціями додавання та множення утворюють кільце. Це кільце називають факторкільцем кільця  $K$  за ідеалом  $I$  і позначають  $A/I$ .

Клас, що містить елемент  $a \in K$  позначають також  $\bar{a}$ . Якщо потрібно наголосити, за яким саме ідеалом  $I$  іде факторизація, тоді клас (факторклас) елемента  $a \in K$  позначають  $[a]_I$ .

У попонованих нижче вправах символом  $K$  позначається деяке кільце, а  $I$  — його ідеал.

287. Два елементи лежать в одному факторкласі тоді і тільки тоді, коли їх різниця лежить в ідеалі.
288. Бінарне відношення “елемента  $a \in K$  лежить в одному факторкласі з елементом  $b \in K$  відносно заданого ідеала  $I \subseteq K$ ” є відношенням еквівалентності на  $K$ .
289. Перевідрити коректність визначення операцій додавання та множення факторкласів кільця  $K$  за ідеалом  $I$ , тобто коли

$$a_1, a_2, b_1, b_2 \in K, \quad quad[a_1] = [a_2], \quad [b_1] = [b_2],$$

тоді

$$(a) \quad [a_1 + b_1] = [a_2 + b_2],$$

$$(b) \quad [a_1 \cdot b_1] = [a_2 \cdot b_2].$$

290. Чи буде визначення операцій в факторкільці коректним, якщо замість двостороннього ідеала використовувати лише правий чи лівий ідеали.
291. Перевірити асоціативність та обидва дистрибутивні закони для операцій в факторкільці.
292. Відображення  $\pi : K \rightarrow K/I$ , що визначається правилом

$$x \in K \Rightarrow x \stackrel{rel \pi}{\mapsto} [x]$$

є гомоморфізмом кілець. Його гомоморфізм називають канонічним накладенням.

293. Канонічне накладення дійсно є накладенням. а якої умови цей гомоморфізм є вкладенням.

294. Нехай  $f : K_1 \rightarrow K_2$  гомоморфізм із кільця  $K_1$  в кільце  $K_2$ .

Профакторизувавши кільце  $K_1$  за ідеалом  $\text{Ker } f$  одержимо фактокільце  $K/\text{Ker } f$ .

Перевірити, що відображення  $\bar{f} : K/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ , що задається правилом

$$[x] \xrightarrow{\bar{f}} f(x)$$

є коректно визначений ізоморфізм. Перевірити також, що

$$f = i \cdot \bar{f} \cdot \pi,$$

де  $i : \text{Im } f \rightarrow K_2$  є канонічним вкладенням, а  $\pi : K_1 \rightarrow K_1/\text{Ker } f$  — канонічне накладення (канонічна проекція), тобто наступна діаграма комутативна

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{f} & K_2 \\ \pi \downarrow & & \uparrow i \\ K/\text{Ker } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f \end{array}$$

295. Класи факторкільця  $K/(0)$  одноелементні.

296. Кільце  $K/K$  нульове.

297. Кільце  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  складається із двох класів — класу парних і класу непарних чисел.

298. Відображення  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , що задається правилом  $[0] \rightarrow 0$ ,  $[1] \rightarrow 1$  є ізоморфізм між кільцями  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  і  $\mathbb{Z}_2$ .

299. Кожен елемент кільця  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  може бути єдиним чином записаний у вигляді  $[k]$ , де  $k = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ .

300. Дано індуктивне означення “терма” (“виразу” в специфічному для теорії кільць мовному оточенні) — певної послідовності змінних, дужок, знаків додавання, множення та віднімання. База індукції — перший крок: терми, що побудовані на першому кроці, це змінні. Індуктивне припущення — припустмо, що ми побудували терми на кроках  $1, 2, \dots, n - 1$ . Індуктивний перехід — якщо  $A, B$  — терми, що уже побудовані на попередніх кроках, то термами будуть також

$$(-A), \quad (A + B), \quad (a \cdot B).$$

Два терми, що з'єднані знаком  $=$ , називаємо тотожністю.

Якщо за будь-яких підстановки елементів кільця замість змінних ліва частина тотожності приймає те ж значення, що і права, то кажемо, що задан тотожність виконується в кільці.

Показати о коли тотожність виконується в кільці  $K$  і  $I$  — ідеал кільця  $K$ , то ця тотожність виконується також в факторкільці  $K/I$ .

301. Якщо кільце комутативне (булеве) то також буде комутативним (булевим) факторкільце за будь-яким ідеалом.
302. Якщо всі елементи кільця задовольняють тотожність  $x^n = x$  ( $n \geq 2$ ) то ця тотожність задовольняють всі елементи факторкільця за будь-яким ідеалом.
303. Факторкільце нількільця за будь-яким ідеалом також є нількільцем.
304. Якщо ідеал і факторкільце за цим ідеалом є нількільцями, то і все кільце є нількільцем.
305. Якщо нільпотенти кільця утворюють ідеал, то факторкільце за цим ідеалом не має ненульових нільпотентів.
306. Навести приклад некомутативного кільця і в ньому комутативного ідеалу таких, що факторкільце за цим ідеалом комутативне.
307. Вказавши відповідний приклад, показати, що клас  $[a] \in K/I$  факторкільця  $K/I$  може бути
- (а) центральним елементом;
  - (б) ідемпотентом;
  - (в) нільпотентом;
  - (г) дільником нуля;
  - (е) оборотним елементом
- навіть якщо ця властивість не має елемент  $a \in K$ .
308. Чи лежать
- (а)  $x^5 - 3x^2 + x - 7$  і  $x^4 + 5$ ;
  - (б)  $x^2 + x + 1$  і  $x^2 + x + 1$ ;
  - (в)  $(x^2 + 1)x$  і  $(x^2 + 1)(x + 1)$ ;
  - (г)  $x^2 + 1$  і  $0$ ;
  - (е)  $ax + b$  і  $cx + d$   $a \neq c$ ;

(f)  $x^2 + 1$  і  $1$ ;

в одному факторкласі кільця  $\mathbb{R} \langle x \rangle / (x^2 + 1)$ ?

309. Нехай  $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  і  $I = \{(0, a) | a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Перевірти, що

- (a) В кожному класі факторкільця  $K/I$  існує і до того ж єдиний елемент, який має вигляд  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
- (b) кільце  $K/I$  нескінченне.
- (c) елементи  $(1, 2)$  і  $(2, 1)$  лежать в різних класах.
- (d)  $K/I \cong \mathbb{R}$ .

310. В кожному класі кільця  $\mathbb{R} \langle x \rangle / I$ , де

- (a)  $I = (x)$ ;
- (b)  $I = (x - 1)$ ;
- (c)  $I = (ax + b, \quad a \neq 0)$ ;

є многочлен нульового степеня (число) і такий представник єдиний.

311. Довести, побудувавши потрібний ізоморфізм, що

- (a)  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1)$ ;
- (b)  $\mathbb{R}[x]/(x) \cong \mathbb{R}[x]/(x - 1) \cong \mathbb{R}[x]/(2x + 3)$ ;
- (c)  $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ;
- (d)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$ .

312. Дільниками нуля в кільці  $\mathbb{Q}/(x^2 - 4)$  будуть класи  $[ax - 2a]$ ,  $[ax + 2a]$ , ( $a \in \mathbb{Q}$ ).

313. Чи є в кільці  $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 4)$

- (a) ідемпотенти окрім  $[0]$ ,  $[1]$ .
- (b) ненульові нільпотенти.

314. Якщо  $K$  кільце  $A \subseteq K$  його ідеал і  $B \subseteq K/A$  ідеал кільця  $K/A$ , то

$$\{x \in K | [x] \in B\}$$

є ідеал кільця  $K$ .

315. Якщо  $K$  кільце,  $A, B$  - його ідеали і  $A \subseteq B$ , то  $\{[x]_A | x \in B\} = B/A$  є ідеалом кільця  $K/A$ .

316. Для кожного ідеала  $A$  кільця  $K/I$  існує ідеал  $B$  кільця  $K$  такий, що

$$a \in A \Leftrightarrow a = [x] \text{ для деякого } x \in B,$$

при цьому  $K/B \cong (K/I)/A$ .

317. Нехай  $K$  - деяке кільце,  $L \subseteq K$  — його підкільце і  $A$  — ідеал кільця  $K$ . Тоді  $A$  буде ідеалом кільця  $A + L$ ,  $L \cap A$  буде ідеалом кільця  $L$  і при цьому

$$(A + L)/A \cong L/(A \cap L).$$

318. Нехай  $K$  — скінченне поле і  $f(x) \in K[x]$  многочлен степеня більше 0. Тоді

(а)  $|K[x]/(f)| = p^n$  для деякого простого  $p$  і деякого  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

(б) Якщо  $i : K \rightarrow K[x]$  канонічне вкладення,  $i(a) = a$  для будь-якого  $a \in K$ , а  $\pi : K[x] \rightarrow K[x]/(f)$  канонічне накладення, то  $\pi \cdot i$  вкладення.

319. Факторкільце локального кільця за будь-яким ідеалом є локальним кільцем.

320. Ідеал комутативного кільця з одиницею буде максмальним (простим) тоді і тільки тоді, коли факторкільце за цим ідеалом є полем (облстю цілісності).

321. Якщо кожний скінченнопороджений ідеал кільця нільпотентний, то нільпотентним буде і кожний скінченнопороджений ідеал факторкільця.

322. Нехай  $A, B$  — ідеали кільця  $K$ . Показати, що відображення

$$h : K/(A \cap B) \rightarrow K/A \times K/B,$$

що задане умовою

$$[x]_{A \cap B} \xrightarrow{h} ([x]_A, [x]_B) \quad x \in K$$

є гомоморфізмом кілець. За якої умови цей гомоморфізм буде ізоморфізмом.

## 5 Відповіді і вказівки до розв'язування задач і вправ

### 5.1 Ідеали.

1. Якщо  $a$  — оборотний елемент кільця  $K$  і  $b$  — довільний елемент кільця  $K$ , то

$$a \in A \Rightarrow a \cdot (a^{-1}b) \in A \Rightarrow (a \cdot a^{-1})b \in A \Rightarrow b \in A.$$

Таким чином, якщо  $a \in A$ , то  $A = K$ .

2. Спочатку потрібно переконатися, що  $m\mathbb{Z}$  є ідеалом, коли  $m = 0, m\mathbb{Z} = 0$  або  $m = 1, m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ .

Далі переконуємося, що  $m\mathbb{Z}$  є ідеалом, коли  $m \geq 2$ . Дійсно, нехай  $a, b \in m\mathbb{Z}$ . Тоді  $a = ma_1, b = mb_1$  для деяких  $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$  і  $a - b = m(a_1 - b_1) \in m\mathbb{Z}$ . Якщо  $a \in m\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ , то  $a = ma_1, ab = m(a_1b) \in m\mathbb{Z}$ . Таким чином те, що  $m\mathbb{Z}$  є ідеалом, перевірене.

Нехай  $A$  - ненульовий ідеал кільця  $\mathbb{Z}$  і  $m$  найменше додатне число із  $A$ . Оскільки  $A$  — ідеал кільця  $\mathbb{Z}$ , то для будь-якого  $n \in \mathbb{Z}$   $mn \in A$  і  $A \supseteq m\mathbb{Z}$ .

Перевіряємо зворотнє включення —  $A \subseteq m\mathbb{Z}$ . Вибираємо будь-який елемент  $n \neq 0, n \in A$  і доводимо  $n \in m\mathbb{Z}$ . Дійсно, оскільки  $A$  — ідеал, то також  $-n \in A$ , це дозволяє вважати, що  $n > 0$ . Ділимо  $n$  на  $m$  з остачею:

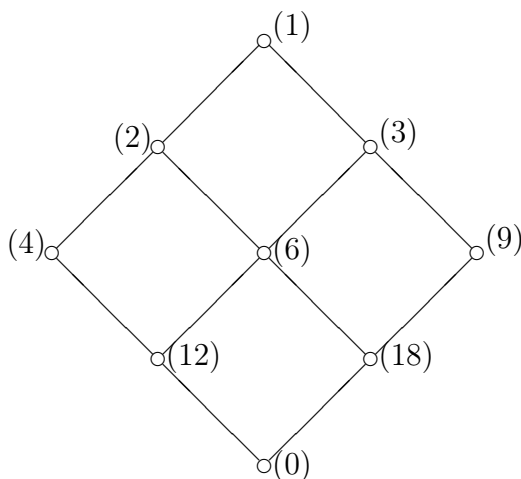
$$n = mq + r, \quad q, r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < m.$$

Оскільки  $mq \in A$  то  $r = n - mq \in \mathbb{Z}$ . Враховуючи, що  $m$  найменше додатне число із  $A$  одержуємо  $r = 0$ , тобто  $n = mq \in A$ . Отже перевірка зворотного включення  $A \subseteq m\mathbb{Z}$  закінчена. Разом з доведеним вище включенням  $A \supseteq m\mathbb{Z}$  це дає рівність  $A = m\mathbb{Z}$ .

3. Твердження випливає із наступних рівностей: для  $a, b \in \mathbb{Z}, m, n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{3a}{2^n} - \frac{3b}{2^m} = \frac{3(a2^m - b2^n)}{2^n 2^m}, \quad \frac{3a}{2^n} \cdot \frac{3b}{2^m} = \frac{9ab}{2^n 2^m}.$$

4.



5. Позначимо через  $I$  множину дійсних матриць розміру  $n \times n$  з нульовим  $k$ -м рядком. Якщо  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in I$  довільна матриця із  $I$ ,  $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$  довільна матриця із  $M_n(\mathbb{R})$ , і  $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^n = A \cdot B$ , то при  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$c_{k,j} = \sum_{i=1}^n a_{k,i} b_{i,j} = \sum_{i=1}^n 0 \cdot b_{i,j} = 0$$

і, відповідно,  $C \in I$ . Подібним чином, з використанням означення суми та різниці матриць доводиться, що для  $A, B \in I$  буде  $A - B \in I$ .

Те, що  $I$  — правий ідеал кільця  $M_n(\mathbb{R})$ , перевірене.

Перевіримо, що  $I$  не є лівим ідеалом. Для цього виберемо матрицю  $A \in I$  з ненульовим елементом  $a_{r,s}$  і матрицю  $B$ , в якій  $b_{k,r} = 1$ , а решта елементів — нулі. За правилом множення матриць, якщо  $C = B \cdot A$ , то  $c_{k,s} = a_{rs} \neq 0$  і  $B \cdot A \notin I$ . Цим доведено, що правий ідеал  $I$  не є лівим.

## Показчик

- автоморфізм
  - кілець, 19
  - одиничний, 23
  - тотожний, 23
- чвм, 2
- діаграма
  - Хассе, 2
  - комутативна, 29
- добуток
  - ідеалів, 3
- додавання
  - класів, 28
- ендоморфізм
  - кілець, 19
  - внутрішній, 19
- епіморфізм
  - кілець, 19
- факторизація
  - кілець, 28
  - за ідеалом, 28
- факторклас, 28
- гомоморфізм
  - канонічний, 19
  - кілець, 19
  - нульовий, 20
- ідеал, 1
  - двосторонній, 1
  - головний, 6
  - лівий, 1
  - максимальний, 6
  - мінімальний, 6
  - нільпотентний, 6
  - правий, 1
  - простий, 7
  - скінченнопороджений, 6
  - тривіальний, 1, 2
  - великий, 25
  - власний, 1
- ізоморфізм
  - кілець, 19
- кілець
  - артінове, 7
  - дуальне, 22
  - двоїсте, 22
  - головних ідеалів, 7
  - класів лишків, 2
  - локальне, 7
  - матриць, 2
  - ньотереве, 7
  - перекошених многочленів, 24
  - перекошених рядів, 24
  - підмножин, 2
  - послідовностей, 3
  - просте, 7
  - з у.о.с.л, 7
  - з у.о.з.л, 7
- клас
  - елемента, 28
  - нуля, 28
- ланцюг, 6
  - ідеалів, 6
  - спадний, 6
- множення
  - класів, 28
- множина
  - частково впорядкована, 2
- мономорфізм
  - кілець, 19
- накладення
  - канонічне, 28
  - кілець, 19
- ніль-ідеал, 6
- образ
  - гомоморфізма, 20
- підкілець, 1
- проекція

- канонічна, 29
- проекції
  - канонічні, 27
- супремум, 3
- терм
  - в кільці, 30
- тіло, 24
- тотожність, 30
  - Дедекінда, 4
  - модулярна, 4
- твг, 3
- вираз, 30
- відношення
  - бінарне, 28
  - еквівалентності, 28
- вкладення
  - канонічне, 27
  - кілець, 19
- ядро
  - гомоморфізма, 20
  - гомоморфізму, 24