

Множини — аксіоматика Цермело-Френкеля

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень — 2015

Зміст

1	Наївний та аксіоматичний підхід до множин	2
1.1	Наївний підхід Кантора	2
1.2	Аксіоматичний підхід	4
2	Аксіоматика Цермело — Френкеля	6
2.1	Мова теорії множин	6
2.2	Формули теорії множин та класи	8
2.3	Аксіоми теорії множин	10
2.3.1	Аксіома об'ємності. ¹	10
2.3.2	Аксіома порожньої множини	10
2.3.3	Аксіома пари	11
2.3.4	Аксіома об'єднання	12
2.3.5	Схема аксіом виділення	12
2.3.6	Схема аксіом підстановки	14
2.3.7	Аксіома степеня	16
2.3.8	Аксіома регулярності	17
2.3.9	Аксіома нескінченності	17
2.3.10	Аксіома вибору	17

¹Цю аксому називають також аксіомою екстенсимальності

1 Наївний та аксіоматичний підхід до множин

1.1 Наївний підхід Кантора

Множини лягли в основу математики завдяки ключовим працям Георга Кантора, які були надруковані в 1879—1897 роках. Сучасники Г.Кантора ганьбили його і його праці як тільки могли. Знеславлений і спалюваний він пішов із життя 6 січня 1918 року. Георг Кантор пішов із життя, а надійнішого підґрунтя для математики до сих пір немає.

До Кантора математикам вірою і правдою слугували натуральні числа і геометричні об'єкти. Відрізок і пряма не складалися із точок — словом континуум (неперервний) підкреслювалась їх неподільність.

Г.Кантор уявляв множини як справді існуючі (нехай в уяві) речі. Так існує зграя горобців (одна, яка складається із багатьох горобців), існує одна купа піску (одна, яка складається із багатьох піщенок), існує коробка сірників (одна, яка складається із багатьох сірників). Георг Кантор означив — множина це “багато, що уявляється як одне”. І означення, і пояснення, і приклади математики сприйняли як вкрай незрозумілі і, відповідно, незадовільні.

Особлив шкода вбачалась сучасниками Г.Кантора в пропонуваному вченні у втручанні у нескінченність. До Кантора нескінченність була одна, і вона була властивістю лише Бога. А канторівський порядок серед багатьох нескінченностей вважався за розбещення молоді та математичне шахрайство.

В роботі з множинами Г. Кантор допускав повну сваволю — ніяких обмежень. От оці множини Г.Кантор досліджував і свою роботу назвав “Вчення про множини”. На сьогодні такий підхід називають “Наївною теорією множин” або “Інтуїтивною теорією множин”.

Візьмемо для прикладу п'ятиелементні множину

$$M = \{3, \{\sqrt{3}, 9\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \emptyset, \sqrt{2}\}.$$

Елементами цієї множини є два числа $3, \sqrt{2}$ і три множини $\{\sqrt{3}, 9\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \emptyset$. Розглянемо три висловлення, що стосуються елементів множини M

Число $\sqrt{3}$ належить елементу (множині) $\emptyset$.

Число $\sqrt{3}$ належить елементу (множині) $\{\sqrt{3}, 9\}$.

Число $\sqrt{3}$ належить елементу (числу) 3 .

Перше висловлення не відповідає дійсності, воно хибне. Друге висловлення відповідає дійсності, воно істинне. А третє висловлення безглузде.

В загальному випадку елементами множини можуть бути як множини, так і елементи, які множинами не є — це первісні, неподільні елементи. Розглядати належність чи неналежність якогось елемента первісному (неподільному) елементу є безглуздом. Первісні неподільні елементи називають атомами та ур-елементами²

В інтуїтивній теорії множин крім термінів множина та елемент множини використовується слово клас. Термін “клас” вживається замість терміну “множина” в трьох випадках

- коли є сумнів щодо допустимості вжитку слова множина;
- коли мовний смак вимагає вжити якийсь синонім слова множина;
- коли певна множина стало (здавна так склалося) називається класом.

²В давньоскандинавській міфології є руна (символ), який називають ур, або уруз, що є знаком первісної сили. В німецькій мові ур означає первісного тура (бика)

Наведемо приклади. Уявити всі двоелементні множини важко. Тому доцільно говорити про клас усіх двоелементних множин, а не про множину всіх двоелементних множин. В наведеному прикладі ми уникли розмови про те, чи утворюють множину всі двоелементні множини.

Всі прямі, що паралельні даній, утворюють множину, але коли говорять і про інші множини точок та прямих на площині, то доцільно говорити про клас прямих що паралельні даній.

Всі парні числа і всі непарні цілі числа утворюють дві підмножини множини цілих чисел, але їх стало називають класами — класом парних чисел і класом непарних чисел, або класами лишків за модулем 2 — так заведено.

1.2 Аксіоматичний підхід

Аксіоматичний підхід (тут — до множин) пропонує замінити те, що ми якось уявляємо (тут — множини), символами, що позбавлені змісту. Мета такого перезапису

- чітко вказати на те, що ми приймаємо як безоглядно правильне без будь-якого обгрутування, на віру;
- зробити чіткими кроки в міркуваннях про уявлені речі (тут — про множини), що в свою чергу, дозволяє перевіряти кожен крок;
- зменшити по можливості кількість тверджень, що прийняті на віру;
- шукати інші речі (тут — не множини), які ведуть себе подібно до множин.

Візьмемо для прикладу геометрію, яка єдина в шкільному курсі математики чітко формулює аксіоми, з яких виводяться теореми.

Розрівняну ділянку землі ми можемо уявити — називаємо її площиною. Натягнуті мотузки уявити також можемо — уявляємо їх як прямі. Вбиті в землю кілочки можемо уявити — називаємо їх точками. Отже ми маємо уявлювані речі, які замінюємо послідовністю знаків “точка”, “пряма” на “площині”. Далі вводяться трикутники, кути та подібне, щодо яких доводяться теореми. При доведенні можна прослідкувати за кожним кроком, пояснити його. І ще можна обдумувати питання — чи можна аксіому паралельності довести, чи це неможливо.

І насамкінець, можна будувати інші речі, які не узгоджуються із уявою про площину, але задовольняють прийнятим на віру твердженням — аксіомам. Для прикладу, нехай маємо три аксіоми

Через дві точки проходить єдина пряма.

Через точку p оза прямою проходить єдина пряма, що паралельна їй (не має з нею спільних точок).

Існують чотири точки, серед яких будь-яка трійка не належить одній прямій

Виберемо чотири символи A, B, C, D , назвемо їх точками і скажемо, що вони утворюють всю площину (інших точок на цій площині немає). Двійки точок (двоелементні підмножини множини $\{A, B, C, D\}$) назвемо прямими. Пряма проходить через ті точки, з яких вона складається.

Ми одержали площину, яка задовольняє всі три аксіоми, але жодним чином не узгоджується із тією уявою про площину, з якої починалось написання цих аксіом.

Звернемо увагу на те, що аксіоматичний підхід вимагає задання символів (алфавіту) для запису аксіом, теорем, для позначення виділених елементів, для позначення змінних елементів, для технічних потреб (наприклад, для зручності роботи) ,

для позначення відношень між різними елементами — в прикладі з площиною маємо говорити про належність точки прямій та подібного.

2 Аксиоматика Цермело — Френкеля

Традиція вимагає, щоб аксіоми теорії множин, на відміну від аксіом геометрії, записувалися символічно. Тому до початку запису аксіом потрібно ввести символіку, за допомогою якою буде здійснюватися цей символічний запис.

2.1 Мова теорії множин

Алфавіт містить символи

- для позначення логічних зв'язок, кванторів та логічних констант (сталих) — $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$, логічні константи $0, 1$;
- для позначення змінних — малі латинські букви, малі латинські букви із індексами, та однієї константи — $\emptyset$.;
- двомісного предикатного символу $\in$ (читається “належить”), та двомісного предикатного символу $=$ (читається “дорівнює”);
- допоміжні символи — відкрита дужка $($, закрита дужка $)$, та.

Великі латинські букви, грецькі букви, Фігурні дужки, двокрапка, вертикальна риска,— це речі, які дають зручність в роботі. Їх використовують в записах, але не включають до алфавіту, тому що без них можна обійтися. Протягом роботи виникає потреба вжитку багатьох інших символів для скорочення записів, для зручності запису та читання. Ці символи будуть вводитися за потребою без особливого наголосу.

Всі змінні і стала $\emptyset$ називаються множинами. Виділений елемент — стала, називається порожньою множиною. Якщо $x \in y$, то множину x називають елементом множини y .

Для скорочення пишуть $x \notin y$ замість $\neg(x \in y)$ і $x \neq y$ замість $\neg(x = y)$.

Первісних елементів (чи неподільних, чи урелементів в іншій термінології) в аксіоматиці Цермело — Френкеля немає, але є класи.

Використовувані відношення “належить” та “дорівнює” суттєво відрізняються тим, що “дорівнює” обов’язково узгоджується із здоровим глуздом, а “належить” — не обов’язково. Відро яблуку може належати одному яблуку, всі додатні числа можуть належати о дному від’ємному і решта дурниць — все це можливо до тих пір, поки не буде явно заборонено тією чи іншою аксіомою, тією чи іншою теоремою.

Зовсім інша річ “дорівнює”. Це відношення обов’язково симетричне транзитивне і рефлексивне. Воно використовується в тому ж розумінні як і “те ж саме, що і ...” або “тотожне” в живому спілкуванні. В філософських розділах логіки “ x дорівнює y ” означає, що кожна властивість, яку має x , є також властивістю y . Сказане можна записати і символічно

$$(x = y) \Leftrightarrow \forall P (P(x) \Leftrightarrow P(y)), \quad (1)$$

де квантор загальності навішується на одномісні предикати P , що в логіці першого порядку заборонено, але дозволено в логіці другого порядку. Таким чином, якщо ви маєте в двох руках по білій більярдній кулі, які неможливо розрізнити, то казати, що вони, ці кулі, рівні в нашому мовному оточенні заборонено, бо одна з них має властивість “знаходиться в лівій руці” (друга цієї властивості не має), а друга має властивість вона “знаходиться в правій руці” (перша цієї властивості не має).

2.2 Формули теорії множин та класи

Формули будуються кроками — спочатку будуються формули першого кроку, потім будуються формули другого кроку, і так далі. Коли побудовані формули n -го кроку для деякого натурального числа n , приходить черга будувати формули $n + 1$ -го кроку.

Формули першого кроку мають вигляд

$$(x = y) \tag{2}$$

та

$$(x \in y), \tag{3}$$

Це найпростіші або, як кажуть, атомарні формули.

В (2) і в (3) x та y є довільними змінними, тому (2) і (3) радше назвати схемами формул, тому що замість x та y можна підставляти будь-яку змінну. Так формулами першого кроку будуть

$$(x = y), \quad (x = x), \quad (z = t), \quad (x_1 = t_1), \quad (u_3 = u_3),$$

$$(x \in y), \quad (x \in x), \quad (z \in t), \quad (x_1 \in t_1), \quad (u_3 \in u_3).$$

Коли уже побудовані формули $A, B, \dots n$ -го кроку, то формулами $n + 1$ -го кроку будуть

$$(A \wedge B), \quad (\neg A), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B), \quad (\forall x A), \quad (\exists x A). \tag{4}$$

Знову ж, насправді записи (4) задають лише правила побудови формул — потрібно замість A, B підставити формулу, яка одержана на одному з попередніх кроків. Так формулами другого кроку будуть

$$((x = x) \wedge (x \in y)), \quad ((u_1 \in t) \Rightarrow (u_1 \in s)), \quad (\neg(u = v)), \quad (\forall x(x \in y)), \quad (\exists x(x \in$$

Формулами третього кроку будуть

$$(((x = x) \wedge (x \in y)) \Rightarrow ((u_1 \in t) \Rightarrow (u_1 \in s))), \quad ((\neg(u = v)) \vee (x \in v))$$

В правильно побудованих формулах дуже багато дужок, що заважають розуміти те, що передається формулою. Для комп'ютера кількість дужок не проблема — для нього найважливішим є однозначність розуміння записаного. А для людини дуже довгий запис із дуже великою кількістю дужок може бути непереборною проблемою. Тому існує ряд домовленостей про дужки, які можна об'єднати одним: дужки можна не писати тоді і тільки тоді, коли існує впевненість, що їх в будь-який момент можна однозначно відновити.

Сукупності множин називають класами.

Класи окреслюються висловленнями зі змінними, тобто предикатами, які в свою чергу записуються символічно у вигляді формули. Отже

Класами називаємо сукупність множин x , для яких істинна якась формула із однією вільною змінною x . В символічному записі, коли $A(x)$ певна формула теорії множин, то

$$K = \{x | A(x)\} \quad (5)$$

є класом.

Для прикладу, всі множини, які дорівнюють самі собі, утворюють клас. Деякі класи є множинами, але клас буде множиною тоді і тільки тоді, коли це вимагається чи то аксіомою, чи є наслідком аксіом.

Належність класу позначається тим же символом $\in$, що і формальний предикат в мові теорії множин, але має найвний, інтуїтивний зміст. Точніше, коли маємо клас (5), то запис $a \in K$ означає не більше і не менше як те, що $A(a) = 1$. А коли кажемо, що клас K , що заданий (5), є множиною m і пишемо $m = K$, то маємо на увазі формулу

$$\forall x ((x \in m) \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

2.3 Аксиоми теорії множин

2.3.1 Аксиома об'ємності.³

Аксиома об'ємності стверджує, що множина повністю визначається своїми елементами. Символьно цю аксіому можна записати наступним чином

$$\forall x, y ((x = y) \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow (z \in y))).$$

Завдяки цій аксіомі для доведення рівності двох множин досить довести дві речі

1. Кожен елемент першої множини є елементом другої множини.
2. Кожен елемент другої множини є елементом першої множини.

Наслідком цієї аксіоми є те, що порядок запису елементів у множині не має значення. Також один елемент не може входити у множину двічі.

2.3.2 Аксиома порожньої множини

Аксиома порожньої множини стверджує, що клас, який не містить жодного елемента, є множиною. Символьно цю аксіому можна записати наступним чином

$$\exists x \forall y (\neg(y \in x)).$$

За аксіомою об'ємності порожня множина єдина і для неї можна використовувати позначення $\emptyset$.

Якби клас без елементів не був множиною, то виникли б незручності при введенні перетинів множин та введенні доповнення до множини — потрібно було б слідкувати, щоб вони не були порожні.

³Цю аксіому називають також аксіомою екстенсимальності

2.3.3 Аксіома пари

Аксіома пари стверджує, що для будь-яких множин x, y можна утворити нову множину z , єдиними елементами якої є x та y . Формально ця аксіома записується наступним чином.

$$\forall x \forall y \exists z \forall t ((t \in z) \Leftrightarrow ((t = x) \vee (t = y))).$$

Пара z_1 , що побудована за елементами x, y , і пара z_2 , що побудована за елементами y, x , це одна і та ж пара — це забезпечується аксіомою об'ємності. Тому її називають невідпорядкованою і позначають $\{x, y\}$. В пропонованій аксіомі елементи x, y не обов'язково різні. Коли $x = y$ аксіома пари забезпечує існування множини, єдиним елементом є x . Така пара $\{x, x\}$ позначається $\{x\}$.

Потрібно мати на увазі, що хоч множина $\emptyset$ не має жодного елемента, множина $\{\emptyset\}$ має один елемент, цим елементом є порожня множина.

Пара $\{x, \{x, y\}\}$, що утворена за допомогою множин x та y , називається відпорядкованою парою і позначається (x, y) . Подивимось, коли пара (x, y) і пара (y, x) є однією і тією ж множиною.

Перший випадок, коли $x = y$, тоді, звичайно, $(x, x) = (x, x)$.

Другий випадок, коли $x \neq y$. Тоді, за аксіомою об'ємності, повинні виконуватися дві рівності

$$y = \{x, y\}, \quad x = \{x, y\}$$

які забезпечують рівність $x = y$, яка суперечить припущенню.

Отже пара (x, y) дорівнює парі (y, x) тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

Відпорядкована триелементна множина (x, y, z) визначається як $\{x, (y, z)\}$. подібним чином вводяться чотириелементні відпорядковані множини і т. д.

2.3.4 Аксіома об'єднання

Аксіома об'єднання (її також називають аксіомою суми) каже, що для будь-якої множини x існує множина y , яка визначається умовою: елемент z є елементом множини y тоді і тільки тоді, коли для деякої множини t

$$t \in x, \quad z \in t.$$

— множина, то існує множина y елементами якої є елементи елементів x і тільки вони. Формально

$$\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \Leftrightarrow (\exists t ((t \in x) \wedge (z \in t)))).$$

Множину y , існування якої забезпечується аксіомою об'єднання, позначають

$$\cup_{t \in x} t.$$

Розглянемо ретельніше випадки, коли множина x має мало елементів.

Припустимо, що множина x має єдиний елемент $t = t_0$. Тоді множина $y = \cup_{t \in x} t$ складається із тих і тільки тих елементів, які належать t_0 . Отже за аксіомою об'ємності $y = t_0$. Отже об'єднання однієї множини і сама ця множина це одне і те ж.

Припустимо, що множина x має два елементи t_1 та t_2 . Тоді множина $y = \cup_{t \in x} t$ складається із тих і тільки тих елементів, які належать або t_1 або t_2 . В такому випадку множину y позначають $y = t_1 \cup t_2$. відповідно, коли множина x складається із трьох елементів t_1, t_2, t_3 , використовують позначення $y = t_1 \cup t_2 \cup t_3$.

2.3.5 Схема аксіом виділення

Формулювання схеми аксіом виділення наступне.

Нехай x є множина і формула теорії множин $\varphi(t)$.
Тоді існує множина y , що складається із тих і тільки

тих елементів t множини x , для яких формула $\varphi(t)$ істинна.

Якщо замість $\varphi(t)$ поставити якусь певну формулу, то схема аксіом перетвориться в конкретну аксіому.

Символьно аксіома виділення для даної множини x і для даної формули $\varphi(t)$ запишеться наступним чином

$$\exists y ((t \in y) \Leftrightarrow ((t \in x) \wedge \varphi(t))). \quad (6)$$

З використанням словосполучки “універсальна множина” можна сказати, що кожен одномісний предикат $\varphi(t)$ виділяє у універсальній множині x підмножину — область істинності предиката $\varphi(t)$. От тому, що “предикат виділяє”, схема аксіом і називається схемою аксіом виділення.

Звернемо увагу на те, що множина y , яка за заданими множиною x і формулою $\varphi(t)$ за допомогою аксіом виділення задовольняє умову

$$\forall t ((t \in y) \Rightarrow (t \in x)). \quad (7)$$

Коли множини x, y задовольняють умову (7), кажемо, що множина y є підмножиною множини x .

Словосполучка “множина y є підмножиною множини x ” і символічний запис $y \subseteq x$ означають одне і те ж — формулу (7).

Схема аксіом виділення дозволяє визначити перетин двох множин. Якщо a, b — дві відомі множини і $\varphi(t) = (t \in b)$, то ми маємо множину c , яка визначається своїми елементами (в формулі (6) потрібно замінити x на a і y на c):

$$(t \in c) \Leftrightarrow ((t \in a) \wedge (t \in b)).$$

Ця множина c називається перетином множин a і b і позначається $c = a \cap b$.

Також аксіома виділення дозволяє визначити різницю двох множин — $x \setminus y$:

$$(t \in x \setminus y) \Leftrightarrow ((t \in x) \wedge (x \notin y)).$$

2.3.6 Схема аксіом підстановки

Ще одна схема аксіом формалізує уяву про те, що для заданого відображення (функціонального відношення, або функціонального предиката) образ множини, що є областю визначення, також є множиною.

Нехай u — множина і $P(x, y)$ — двомісний предикат, який задовольняє дві умови

- Для будь-якої множини x із u існує множина y така, що на парі (x, y) предикат $P(x, y)$ істинний.
- Якщо множина x належить u і предикати $P(x, y_1)$, $P(x, y_2)$ істинні для деяких множин y_1, y_2 , то y_1, y_2 є однією і тією ж множиною.

Якщо множина u і двомісний предикат $P(x, y)$ задовольняють ці дві вимоги, то кажемо, що P — функціональний предикат на множині u .

Наведемо приклад функціонального предиката. Візьмемо множиною u множину натуральних чисел. Далі візьмемо площину, на якій введена прямокутна система координат. Предикат $P(x, y)$ буде істинним, за визначенням, тоді і тільки тоді, коли x — натуральне число, а y — квадрат із вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, x)$, $(x, 0)$, (x, x) (див. рис. 1). Оскільки для кожного натурального числа існує і єдиний відповідний квадрат, то побудований двомісний предикат є функціональним на множині натуральних чисел. Аксіома підстановки гарантує нам, що сукупність (клас) квадратів із вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, x)$, $(x, 0)$, (x, x) є множиною.

В загальному випадку аксіома підстановки каже:

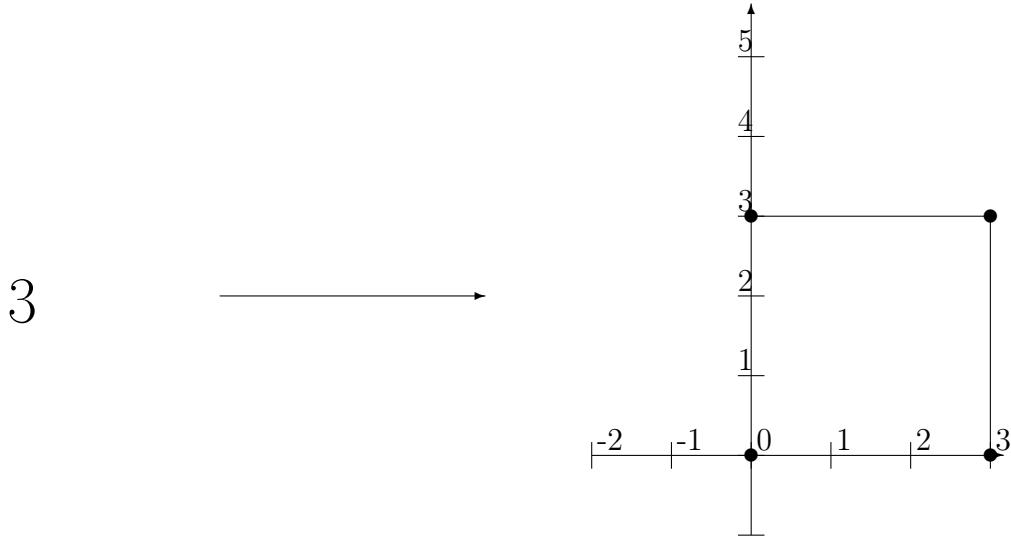


Рис. 1: Предикат $P(x, y)$ істинний, коли $x = 3$, а y є квадратом із вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$

якщо $P(x, y)$ — функціональний предикат на множині u , то клас v тих множин y , що разом з деяким $x \in u$ задовольняють предикат $P(x, y)$, є множиною.

Оскільки традиція вимагає, щоб аксіома теорії множин була записана символічно, то виконаємо цю роботу.

Вводимо скорочення — запис $\exists!yQ(y)$ є скороченням для формули

$$\exists y (Q(y) \wedge (\forall x (Q(x) \Rightarrow (x = y)))).$$

Запис $\exists!yP(y)$ читається як “Існує елемент y , який задовольняє умову $Q(y)$, і такий елемент єдиний.”

Використовуючи введене скорочення можна записати, що значить предикат $P(x, y)$ із вільними змінними x, y є функціональним на множині u :

$$\forall x((x \in u) \Rightarrow (\exists!y P(x, y))). \quad (8)$$

Позначимо останню формулу (8) через A . Отже формула A означає, що предикат $P(x, y)$ є функціональним і задає неявно відображення $y = y(x)$ із множини u .

Перейдемо до запису того, що множина v є образом множини u для заданого відображення $y = y(x)$:

$$\forall y ((y \in v) \Leftrightarrow \exists x ((x \in u) \wedge P(x, y))) \quad (9)$$

Позначимо формулу (9) через B . Тепер нам потрібно записати твердження “Якщо предикат P задає y як функцію від x на множині u , то існує множина v , яка є образом множини u ”

$$A \Rightarrow \exists v B \quad (10)$$

Без скорочень аксіома підстановки записується у вигляді

$$(\forall x ((x \in u) \Rightarrow (\exists! y P(x, y)))) \Rightarrow \exists v (\forall y (y \in v \Leftrightarrow \exists x ((x \in u) \wedge P(x, y)))). \quad (11)$$

Аксіома підстановки найменш очевидна серед усіх аксіом. І з нею можна погодитися тільки маючи певний стаж роботи в царині теорії множин, або погоджуючись з авторитетами, наприклад, з Коеном.

2.3.7 Аксіома степеня

Аксіома степеня стверджує,

для заданої множини x існує множина, елементами якої є підмножини заданої множини x і тільки вони.

Аксіома степеня має таку назву тому, що множина усіх підмножин множини x стало позначається 2^x .

Що таке підмножина множини, і чому підмножина множини є множиною, ми уже обговорили, коли розглядали аксіому виділення (див. формулу (7)). Тому все підготовано для символічного запису аксіоми степеня. Символьний запис має наступний вигляд

$$\forall x \exists y \forall z ((z \in y) \Leftrightarrow (z \subseteq x)).$$

2.3.8 Аксіома регулярності

Аксіома регулярності:

кожна непорожня множина не має спільних елементів з деяким своїм елементом.

Для прикладу, множина

$$A = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

має спільний елемент з множиною $B = \{\{\emptyset\}\}$, але не має спільних елементів із множиною $\{\emptyset\}$. Ця аксіома може бути записана символічно:

$$\forall x (\neg(x = \emptyset) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Аксіома регулярності унеможливорює існування множини, єдиним елементом якої є сама ця множина.

2.3.9 Аксіома нескінченності

Аксіома нескінченності забезпечує існування множини, яка містить $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$. Її вигляд

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow \{y\} \in x)).$$

2.3.10 Аксіома вибору

Найхвилююча аксіома теорії множин — аксіома вибору. Хвилююча тому, що така ж очевидна, як і аксіома паралельності в геометрії, також невивідна, але її прийняття приводить до вельми важких для сприйняття логічно неспростовних висновків. Частина математиків приймає аксіому і безоглядно користується нею, а частина чітко слідкує — що доведено з її допомогою, а що можна довести без неї. Із англійської назви “axiom of choice” береться її скорочена назва — АС.

Аксіома вибору в нестрогому формулюванні має вигляд

В кожній непорожній множині можна вибрати один елемент

В такому формулюванні аксіома вибору найочевидніша.

Зупинимося на займеннику “кожний”, вжиток якого відізняється від вжитку займенника “всі.” Кожен із двох сухариків можна з’їсти натщесерце, а всі (обидва) з’їсти натщесерце неможливо — другий буде істися після того, як уже з’їли перший. Кожен українець може відвідати лекцію з теорії множин, а всі — ні, аудиторія всіх не вмістить. В аксіомі вибору йдеться про вибір елементів у всіх непорожніх множинах в один і той же час (по одному в кожній). А таке формулювання АС уже не таке очевидне.

Далі зупинимося на словосполучі “можна вибрати”, яка налягає на існування певного алгоритму, певної чітко вказаної послідовності дій, які в підсумку приведуть до виділення одного елемента в кожній непорожній множині. Вимога існування певного алгоритму — досить обтяжлива вимога. Значно легше словосполучу “можна вибрати” розуміти як ні до чого не зобов’язуюче “існує функція, відображення”. Тим більше, що функцію $x \mapsto y = f(x)$ можна уявляти як множину M впорядкованих пар (x, y) . Вибір елемента y , що належить множині x , можна розглядати як утворення впорядкованої пари (x, y) , де $x \in y$. Нагадаємо, що поняття впорядкованої пари нами уже формалізоване.

За такого підходу аксіома вибору стверджує існування множини M , яка задовольняє наступні чотири вимоги

1. Множина складається із впорядкованих пар, першим елементом яких є множини, тобто

$$(x \in M) \Rightarrow \exists a \exists b (x = (a, b)). \quad (12)$$

2. Кожна множина a є першим елементом певної впорядко-

ваної пари із M , тобто:

$$\forall a \exists b ((a, b) \in M). \quad (13)$$

3. Для заданої множини a існує єдина множина b , що разом з a утворює пару $(a, b) \in M$:

$$((a, b_1) \in M) \wedge ((a, b_2) \in M) \Rightarrow (b_1 = b_2). \quad (14)$$

4. Якщо дві множини утворюють впорядковану пару із M , то друга множина є елементом першої множини, тобто

$$\forall a \forall b ((a, b) \in M) \Rightarrow (b \in a). \quad (15)$$

Тепер ми в змозі записати АС символно, використовуючи символні записи (12), (13), (14), (15) — навісивши потрібні квантори і з'єднавши одержані формули знаком кон'юнкції:

$$\begin{aligned} \exists M ((\forall x ((x \in M) \Rightarrow \exists a \exists b (x = (a, b)))) \wedge (\forall a \exists b (a, b) \in M) \wedge \\ \wedge (\forall a \forall b_1 \forall b_2 (((a, b_1) \in M) \wedge ((a, b_2) \in M) \Rightarrow (b_1 = b_2))) \\ \Rightarrow \wedge (((a, b) \in M) \Rightarrow (b \in a))). \end{aligned} \quad (16)$$

Показчик

аксіма

нескінченності, 17

аксіома

екстенсiональностi, 10

об'єднання, 12

об'ємності, 10

пари, 11

порожньої множини, 10

регулярності, 17

степеня, 16, 17

суми, 12

аксіоматика

Цермело — Френкеля, 6

алфавіт, 6

атом, 3

елемент

множини, 7

первісний, 3

урелемент, 3

формули

n -го кроку, 8

атомарні, 8

другого кроку, 8

найпростіші, 8

першого кроку, 8

теорії множин, 8

функція, 16

область визначення, 16

образ, 16

клас, 10

множина

двоелементна, 13

порожня, 7, 10

універсальна, 13

мова

теорії множин, 6

об'єднання множин, 13

пара

невпорядкована, 11

впорядкована, 11

перетин множин, 13

підмножина, 13

предикат

функціональний, 14

що задає функцію, 16

схема

формул, 8

схема аксіом

підстановки, 13

виділення, 13

теорія множин

аксіоматична, 4

інтуїтивна, 3

наївна, 2