```
461880545116:563=800000000
450400000000      20000000
                   300000
 11480545116        90000
 11260000000         1000
   220545116          700
   168900000           30
    51645116            2
    50670000     820391732
      975116
      563000
      412116
      394000
       18016
       17890
        1126
        1126
          0.
```

§ 52.

Какъ въ умноженіи, такъ и въ дѣленіи, въ практикѣ опытный разрѣшатель можетъ опускать нули; а къ каждому остатку сносить по одной цыфрѣ дѣлимаго и ставить нуль въ частномъ, какъ скоро остатокъ, вмѣстѣ со снесенною цыфрою, окажется меньше отдѣльнаго дѣлимаго. Для лучшаго уразумѣнія разрѣшимъ примѣръ по общеупотребительному способу:

156826: 68=2306
136
208
204
426
408
18.

Въ семъ рѣшеніи, при началѣ дѣйствія, должно въ дѣлимомъ отсчитать столько цыѳръ отъ лѣвой руки, чтобъ составилось число, въ которомъ дѣлитель могъ бы содержаться; въ нашемъ примѣрѣ отсчитываемъ 4 цыѳры и, *задавшись* двумя, находимъ въ остаткѣ 20, куда сношу одну цыѳру дѣлимаго 8 и по предыдущему, задавшись 3, нахожу остатокъ 4, который съ одною цыѳрою дѣлимаго меньше дѣлителя; почему въ частномъ пишемъ 0 и, снесши вторую цыѳру дѣлимаго, окончить дѣйствіе, задавшись 6, уже нетрудно.

Этотъ способъ рѣшенія основывается на томъ замѣчаніи § 10 V, что число цыѳръ произведенія равно числу оныхъ въ обоихъ производителяхъ или однимъ меньше. Взявши дѣлимое и дѣлитель разрѣшеннаго примѣра, должны сказать, что частное не можетъ имѣть болѣе 4-хъ знаковъ, а потому

158826=*тыс.* 68+*сот.* 68+*дес,* 68+*един.* 68

Раздѣливъ же обѣ части уравненія на грани, съ правой руки къ лѣвой, такъ, чтобъ въ каждой находилось по одному члену или числу, имѣемъ

$$158\,|\,8\,|\,2\,|\,6\,| = (\textit{тыс.}).\ 68\,|+\textit{сот.}\ 68\,|+(\textit{дес.})\ 68\,|+(\textit{ед.})69$$

Откуда вижу, что *(тыс.)* 68 соотвѣтствуетъ три числа дѣлимаго: 156, а прочимъ, согласно условія, по одному; такъ что сложеніе всѣхъ членовъ, при расположеніи одного подъ другимъ, должно выразиться *лѣстницею, выступая* каждымъ низшимъ членомъ на одинъ знакъ отъ единицъ вправо; именно:

(тыс.)	68 соотвѣтствуетъ	156
(сот.)	68	8
(десят.)	68	2
(едини.)	68	6

и *(ты.)*68+*(сот.)* 68 + *(дес.)* 68 + *(ед.)* 68 = 156826.

Вотъ почему въ практикѣ, при дѣленіи чиселъ, сносится по одной цыфрѣ къ остатку дѣлимаго, когда опускаются нули.

Вообще, чтобъ раздѣлить одно число на другое, при соблюденіи (§ 50), должно *съ лѣвой стороны, т. е. съ самаго высшаго разряда единицъ дѣлимаго, брать столько цыфръ, сколько ихъ находится въ дѣлителѣ или одною болѣе, (если величина ихъ окажется меньше дѣлителя); а потомъ искать, сколько разъ сей, заключается въ отдѣльномъ дѣлимомъ: полученную, такимъ образомъ, высшую цыфру частнаго, написавъ въ правой сторонѣ послѣ знака (=) умножить на дѣлителя и произведеніе вычесть изъ отдѣльнаго дѣлимаго.*

Къ остатку, снести слѣдующую цыфру дѣлимаго, и подобно предыдущему, опять искать вторую и уже низшую, за первою, — цыфру частнаго, *которую, написавъ вправо отъ найденной, произведеніе, всего частнаго на дѣлителя, вычитать изъ втораго отдѣльнаго дѣлимаго.*

Ко второму остатку сносятъ слѣдующую цыфру дѣлимаго, отъ чего получится третье отдѣленіе, съ которымъ поступаютъ также, какъ съ предидущимъ, что продолжаютъ до самаго окончанія вычисленія; и такимъ образомъ находятъ сложное частное. Признакъ же, покоему можно узнавать, *вѣрно ли опредѣлена* цыфра частнаго, состоитъ въ томъ, если вычтемъ произведеніе дѣлителя на сію цыфру, изъ остатка дѣлимаго и *получимъ остатокъ* меньшій дѣлителя. Если же остатокъ выйдетъ больше, или равенъ ему, то найденную цыфру частнаго должно увеличить *единицею.*

§ 53.

Въ случаѣ весьма многосложныхъ чиселъ, можно облегчить дѣйствіе и притомъ почти тѣмъ же, чѣмъ облегчается умноженіе; т. е. надобно предварительно составить изъ дѣлителя девять произведеній, помножая его на девять простыхъ чиселъ. Вотъ примѣръ:

```
5609803456738956124:5802347=966816265338
52221123
 38769115
 34814082
  39550336
  34814082
   47362547
   46418776
     9437713
     5802347
     36353668
     34814082
      15395869
      11604694
       37911755
       34814082
        30976736
        29011735
         19650011
         17407041
          22429702
          17407041
           50226614
           46418776
            3806838
```

1.......... 5802347
2.......... 11604694
3.......... 17407041
4.......... 23209388
5..........290117735
6.......... 34814082
7.......... 40616429
8.......... 46418774
9.......... 5222123

Предлагаемъ еще нѣсколько примѣровъ, разрѣшаемыхъ по нижеслѣдующему образцу, въ которомъ дѣлимое расположено съ лѣвой стороны, противъ его съ правой дѣлитель, а подъ симъ частное; все же дѣлопроизводство, на лѣвой сторонѣ вертикальной черты, подъ дѣлимымъ.

$$\begin{array}{r|r}
6302012760090 & 7002003 \\
6301802700000 & \overline{900000} \\
\hline
210060090 & 30 \\
210060090 & \overline{900030}
\end{array}$$

$$200745 \;\left|\begin{array}{l} 5 \\ \hline 40149 \end{array}\right| \quad 2100078 \;\left|\begin{array}{l} 3 \\ \hline 700026 \end{array}\right| \quad 896800 \;\left|\begin{array}{l} 5 \\ \hline 179200 \end{array}\right|$$

ПРАВИЛА

На рѣшеніе практическихъ вопросовъ умноженія и дѣленія и самыя вопросы.

§ 54.

Всѣ вообще задачи на умноженіе разрѣшаются *двумя* уравненіями:

$$x\ \partial=\partial' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\partial.\ (2\ x')=2\ \partial.\ x=\partial \ldots (7)$$

То есть, или изъ задачи 1-е, отыскивается искомое произведеніе ∂', по двумъ даннымъ производителямъ x и ∂; или 2-е, опредѣляется степень увеличиванія одного производителя 2.x', по данному уменьшенію другаго ∂, (или 2.∂ поданному, x'), при постоянномъ произведеніи ∂' (§ 45). Вообще, рѣшеніе всѣхъ задачь, на умноженіе, приводится къ двумъ правиламъ: къ рѣшенію задачь *прямыхъ* и къ рѣшенію задачь *обратныхъ*; и каждое изъ сихъ рѣшеній имѣетъ *по два случая.*

Случаи прямыхъ задачь.

I. Составленіе уравненія или формулы (а) изъ задачи вообще основывается на скрывающемся между условіями оной прямомъ смыслѣ: *во сколько больше, во столько больше*: (§ 46, 1).

Первый случай рѣшенія: *за одинъ* рубль куплено 3 пуда: сколько за 4 рубля можно купить? Очевидно въ 4 раза больше; или $4.3=12$ пуд. Ибо, если 3 пуда повторимъ 4 раза, то получимъ $8+3+3+3=3.\ 4=12$ пуд.

Второй случай. За 3 руб. купленъ *одинъ* пудъ, за сколько рублей можно купить 4 пуда? На основаніи перваго рѣшенія въ 4 раза больше 3 рублей, или

$$x=3\text{ р.}\times 4\text{ п.}=12\text{ рублей.}$$

Случаи обратныхъ задачь.

II. Составленіе уравненія (7) изъ задачи, вообще основывается на скрывающемся между условіями оной *обратномъ* первому рѣшенію смыслѣ; и имянно: *во сколько меньше, во столько больше.*

Первый случай. Пять работниковъ оканчиваютъ нѣкоторую работу въ 6 часовъ, во сколько часовъ окончитъ ту же работу *одинъ* работникъ? Очевидно въ *пять* разъ большее время противу 6 часовъ, или $x=5.6=30$ дней. Почему же очевидно?

Объясненіе. Если трудъ 5 работниковъ, или число 5 примемъ за *единичную* степень работы совершаемой ими каждый часъ, то величина всей работы должна выразиться чрезъ $5+5+5+5+5+5=5.\ 6=30$; т. е.

$$5\ \text{р.} \times \overset{\partial}{6} = 30.$$

И такъ, *степень или величина всей работы равна произведенію числа рабочихъ на число времени, въ которое оная окончена.* Поелику же произведеніе 30, какъ степень работы, по условію вопроса не измѣняется, ибо оную должны окончить и 5 рабочихъ и *одинъ* рабочій; и поелику измѣненія, какъ изъ рѣшенія видно, содержатся между рабочими и временемъ т. е. между обоими производителями 5 и 6, потому что 5 рабочихъ замѣняютъ *однимъ* т. е. уменьшаютъ въ 5 разъ и удерживаютъ туже работу (30); слѣд. время совершенія работы 6 час. должно увеличиться въ 5 разъ, чтобъ оное приравнить труду *одного* рабочаго, для той же работы; ибо во сколько разъ одинъ производитель постояннаго произведенія

$$5\ \text{р.} \times \overset{\partial}{6} = 30$$

уменьшается, во столько разъ другой данной производитель увеличивается, (§ 45) такъ что степень работы (30) *при одномъ* рабочемъ должна выразиться чрезъ

$$(1\ \text{р.}) \times \overset{\text{час.}}{(5.\ 6)} = 30;$$

то есть

$$5\ \text{р.} \times \overset{\partial}{6} = (1\ \text{р.}) \times \overset{\text{час.}}{(5.\ 6)} = 1\ \text{р.} \times \overset{\partial.}{30}.$$

Слѣд. сдѣсь $5. \times 6$ показываетъ степень увеличиванія 6 час. въ 5 разъ, когда уменьшаются 5 рабочихъ въ 5 же разъ, при совершенiи одной и той же работы (30). Другими словами: когда 5 рабочихъ оканчиваютъ (30) въ 6 часовъ, то *одинъ* рабочiй совершитъ (30) въ 5. 6 часовъ. Словомъ, задача рѣшина по обратному смыслу: *во сколько меньше, во столько больше.*

Вторый случай. 5 работниковъ совершаютъ нѣкоторую работу въ 6 часовъ, сколько рабочихъ туже работу окончитъ въ *одинъ* часъ? На основанiи перваго случая, совершитъ въ 6 разъ большее число 5 рабочихъ, т. е. $x = 5$ р. $\times$ 6 ч. $= 30$ раб., такъ что

$$(5 \text{ р.}) \times 6 \text{ ч.} = (1 \text{ ч.}) \times 5 \cdot 6 \text{ р.} = 1 \text{ ч.} \times 30 \text{ раб.}$$

Вообще обратнымъ правиломъ собственно опредѣляется не произведенiе, по даннымъ производителямъ, какъ въ первомъ правилѣ, *но увеличиванiе одного изъ производителей по данному уменьшенiю другаго, при постоянномъ произведенiи.* Притомъ замѣтимъ, что степень этого увеличиванiя тогда только равна величинѣ постояннаго произведенiя, когда уменьшенiе другаго производителя, какъ въ нашемъ случаѣ, переходитъ или обращается *въ единицу.*

§ 55.

И такъ правилъ, для задачъ умноженiя, вообще только два: одно прямое,—другое обратное. Для ясности же заключенiй выпишемъ кратко, какъ рѣшенныя задачи, такъ и ихъ разультаты; а дабы числа задачъ обоихъ правилъ стояли предъ глазами, то будемъ всегда располагать ихъ такъ, чтобъ *однородныя* находились *подъ однородными*: а имянно:

а) ***Результаты прямой задачи***:

1. ***Случай.*** За 1 рубль куплено 3 пуд. ***Отд.*** 1
— 4 руб. — — x пуд. ***Отд.*** 2

Откуда за ***четыре*** рубли можно купить

$$x = 4^{\text{п.}}. \ 3 \text{ р.} = 12 \text{ пуд.}$$

2. ***Случай.*** За 3 руб. куплено 1 пуд. ***Отд.*** 1
— x руб. — — 4 пуд. ***Отд.*** 2

Откуда за ***четыре*** пуда должно заплатить

$$x = 4^{\text{п.}}. \ 3 \text{ р.} = 12 \text{ руб.}$$

b). ***Результаты обратной.***

1. ***Случай.***

5 работ. совершаютъ работу въ 6 час. ***Отд.*** 1
1 раб. — — — — — — x час. ***Отд.*** 2

Откуда *одинъ* работникъ окончитъ работу въ

$$x = 5 \text{ р} \times 6 \text{ час.} = 30 \text{ час.}$$

2. ***Случай.***

5 работ. совершаютъ работу въ 6 час. ***Отд*** 1
x раб. — — — — — — 1 час. ***Отд.*** 2

Откуда въ *одинъ* часъ, должно употребить работниковъ

$$x = 6 \text{ ч.} \times 5 \text{ р.} = 30 \text{ работ.}$$

И такъ, изъ сей краткой выписки, относительно самыхъ задачь умноженія, заключаемъ вообще, что

1. Каждый вопросъ имѣетъ два отдѣленія, изъ коихъ въ одномъ содержится два данныхъ *разнородныхъ* числа, а въ другомъ одно данное, другое *искомое*, также между собою разнородныя; притомъ одно изъ данныхъ должно быть непремѣнно *единица*.

2 Въ каждомъ отдѣленіи два разнородные члена соотвѣтственно—однородны разнороднымъ членамъ другаго отдѣленія; такъ что вообще, въ задачѣ содержится по парѣ однородныхъ, а по—другой разнородныхъ; поелику же одно данное есть *единица*, то въ задачѣ собственно два однородныхъ и одно имъ разнородное:—послѣднее можетъ быть или искомое, или данное число.

3. Поелику каждая прямая задача, и каждая обратная—имѣетъ собственно два разнородныхъ члена, то и на каждое правило выходитъ по два случая, такъ что всѣхъ случаевъ умноженія, составляющихъ одно существенное цѣлое — общій выводъ правилъ, (на умноженіе практическихъ вопросовъ), всего *четыре*.

III. Но поелику два случая правила прямаго, какъ видно изъ результатовъ оныхъ, между собою, а другія два обратнаго, между собою въ способѣ рѣшенія тожественны, въ слѣдствіе того на каждое правило выходитъ только по одному общему заключенію, а имянно:

a). *Умноженіемъ двухъ разнородныхъ чиселъ, въ задачѣ прямой, опредѣляется искомое, для величины множественнаго требованія.*

b). *Умноженіемъ же двухъ разнородныхъ чиселъ, въ обратной,—искомое, для величины единичнаго требованія.*

Вообще c). *если въ прямой задачѣ содержится* *множественное, а въ обратной единичное требованіе, то, въ обоихъ случаяхъ, рпшеніе оной принадлежитъ къ умноженію, при чемъ въ прямой задачѣ данныя разнородныя числа должно перемножать на крестъ* изъ обѣихъ отдѣленій и произведеніе приравнить x; въ обратной же данныя разнородныя числа *перемножать соотвѣтственно* изъ одного только отдѣленія и произведеніе также приравнить x, ходящемуся въ другомъ;—потому что данный членъ, того отдѣленія, въ которомъ находится искомое x есть единица; а $1.\ x = x$; тоже должно разумѣть и въ прямой задачѣ, перемножая на крестъ 1 на x.

Эти замѣчанія, извлеченныя изъ самаго хода рѣшеній составляютъ вообще *три правила* умноженія, на рѣшеніе практическихъ задачь, тѣмъ болѣе важныя, что на оныхъ основываются какъ задачи дѣленія (§ 57), такъ и правило *тройное обратное.* (§ 136).

§ 56.

Всѣ вообще задачи на дѣленіе разрѣшаются тремя уравненіями:

$$x.\ \partial = \partial' \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$x = \frac{\partial'}{\partial} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

$$\partial.\ (2.x') = 2\partial.x' = \partial' \ldots. (7)$$

т. е. или изъ задачи 1-е, опредѣляется искомое x по основному уравненію (a); или 2-е, минуя оное, x выражается прямо чрезъ результатъ (c); или 3-е, отыскивается по уравн. (7) уменьшеніе дѣлителя ∂ по данному увеличиванію частнаго $(2.x')$ и обратно уменьшеніе частнаго x' по данному увеличиванію дѣлителя $(2.\partial)$, при постоянномъ дѣлимомъ ∂'. Вообще рѣшеніе всѣхъ задачь на дѣленіе приводится къ двумъ правиламъ: къ рѣшенію задачь *прямыхъ* и къ рѣшенію задачь *обратныхъ*, какъ и въ умноженіи; при томъ каждое изъ оныхъ имѣетъ свои *два* собственные *случая*.

Случаи прямыхъ задачъ.

I. Составленіе уравненія (а) изъ задачи основывается на скрывающемся между условіями оной прямомъ смыслѣ: *во сколько больше, во столько больше*, какъ въ прямыхъ задачахъ на умноженіе; вся разность, что сдѣсь одинъ производитель искомый, а въ умноженіи оба данны. Вотъ примѣръ: нѣкто имѣетъ столько пудъ серебра, что если оныя увеличатся въ 7 разъ, то у него будетъ 2161 пудъ; какъ велико число пудъ серебра? Изобразивъ искомое чрезъ x говорю: поелику x пудъ противъ 2161 пуд. въ 7 разъ меньше; слѣд., если x повторится 7 разъ, то произведетъ 2161 пудъ; итакъ

$$7.\ x = 2161.$$

Откуда, опредѣляя x, какъ дѣлителя (§. 41,5), будетъ

$$x = \frac{2161}{7} = 309 \text{ пудъ.}$$

II. Составленіе же прямо результата дѣленія (с) изъ задачи, основывается на скрывающемся между условіями задачи прямомъ смыслѣ: *во сколько разъ меньше, во столько разъ меньше.*

Случай 1. За 4 рубля куплено 12 пудъ, сколько пудъ можно купить за *одинъ* рубль? Очевидно въ 4 раза меньше 12 или $\frac{12}{4}=3$ пуд. Почему же очевидно?

Объясненіе. Если число пудъ купленныхъ за *одинъ* рубль повторимъ 4 раза, то, на основаніи перваго рѣшенія, въ произведеніи должно выйти 12 пуд. И такъ, изобразивъ чрезъ x искомое число пудъ получимъ

$$4.x=12$$

гдѣ 4 есть частное (§ 41, 5) 12 — дѣлимое и требуется дѣлитель x. Но при постоянномъ дѣлителѣ x, частное во сколько разъ уменьшится, во столько же разъ уменьшится и дѣлимое (§ 46, 1,); и такъ, раздѣливъ какъ частное 4, такъ и дѣлимое 12 на 4 имѣемъ

$$\frac{4}{4}x=\frac{12}{4}$$

или

$$1.x=\frac{12}{4}=3.$$

Откуда понятно, что за $\frac{4}{4}$ руб. или 1 руб. т. е. за 4 руб. уменьшенныхъ въ 4 раза можно купить не 12 пуд., а только четвертую часть 12-ти или $\frac{12}{4}=3$ пуд., когда за 4 рубля куплено 12 пудъ; словомъ, задача рѣшена по прямому смыслу: *во сколько меньше, во столько меньше.*

Случай 2. *За одинъ* рубль куплено 30 ѳунтовъ, за сколько рублей можно купить 360 ѳунтовъ? На основаніи перваго случая, если x повторю 30 разъ, тогда получу 360 т. е.

$$30.x=360$$

откуда

$$x=\frac{360}{30}=12 \text{ рублей.}$$

И такъ изъ хода нашего объясненія втораго рѣшенія, перваго случая, слѣдуетъ, что при выраженіи задачи прямо результатомъ дѣленія, построеніе основнаго уравненія (а) совершается *умозрительно*, тогда какъ въ первомъ рѣшеніи, оно производилось чувственно, т. е. на самомъ дѣлѣ, подъ рукою, явно. А изъ сего видѣть можно причину, почему а) первый способъ рѣшенія хотя и продолжительнѣе, но за то менѣе втораго обремѣняетъ память, несмотря что второе рѣшеніе скорѣе удовлетворяетъ требованію; впрочемъ эта трудность уничтожается навыкомъ, а еще болѣе, изложеніемъ положительныхъ правилъ; b) показанныя два рѣшенія, несмотря на видимую разность, между собою совершенно тожественны, поелику конецъ обѣихъ выраженъ однимъ и тѣмъ же результатомъ дѣленія; слѣд. онѣ составляютъ не два разныхъ, но одно общее рѣшеніе, извѣстное подъ именемъ *рѣшенія задачъ прямаго смысла*.

Случаи обратныхъ задачъ.

§ 57.

Вопросы разрѣшаемыя на основаніи уравненія (7) имѣютъ обратный, первымъ двумъ случаямъ, смыслъ, и имянно: *во сколько больше, во столько меньше* (§. 45); поелику опымъ отыскивается уменьшеніе дѣлителя по данному увеличиванію частнаго, и обратно, уменьшеніе частнаго по данному увеличиванію дѣлителя.

Случай 1. *Одинъ* работникъ оканчиваетъ нѣкоторую работу въ 16 дней, во сколько дней туже работу окончатъ 8 рабочихъ? Очевидно, что въ 8 разъ меньшее время 16 дней т. е. $\frac{16}{8}=2$ дня. Но почему же очевидно?

Объясненіе. Если трудъ *одного* рабочаго или число 1 примемъ за степень работы, свершаемой имъ въ день, то вся работа должна выразиться чрезъ 16, и имянно:

$$(1\ р).\ 16=16$$

Поелику же степень работы 16 по условію вопроса неизмѣняется, ибо оную должны окончить *и одинъ* и 8 рабочихъ, и поелику измѣненія содержатся между рабочими и временемъ, потому что одного работника замѣняютъ 8-ю, т. е. увеличиваютъ въ 8 разъ; слѣд. степень работы (16), при 8 рабочихъ, на основаніи (§ 54 II) должна выразиться чрезъ

$$(8\ р.).\ \overset{д}{x}=16,$$

или

$$(1\ р.)\times 8.\ \overset{дн.}{x}=16;$$

откуда $x=\overset{дн.}{\frac{16}{8}}=2$ такъ, что

$$(8\ р.).\ 2=16.$$

или

$$(1\ р.).\ 16\ д=(8\ р.).\ 2д=16;$$

т. е. время совершенія работы 16 дней должно уменьшить въ 8 разъ или $\frac{16}{8}=2$ дня, чтобъ приравнить работу (16) восьми работникамъ; ибо, во сколько разъ дѣлитель увеличивается или уменьшается, во столько разъ частное, на оборотъ, уменьшается или увеличивается. Слѣд. выведенный результатъ

$$x=\frac{16}{8}=2$$

показываетъ степень уменьшенія 16 дней въ 8 разъ, когда увеличивается 1 раб. въ 8 же разъ, при совершеніи одной и той же работы (16). Другими словами: когда 1 работ. оканчиваетъ (16) въ 8. 2 дня, то 8 рабочихъ совершатъ ту же работу въ 2 дня; короче: задача рѣшена по обратному смыслу: *во сколько больше, во столько меньше.*

Случай 2. Если *одинъ* работникъ нѣкоторую работу совершаетъ въ 18 дней, то сколько работниковъ туже работу окончать въ 6 дней? На основаніи рѣшенія перваго случая совершатъ въ 6 разъ меньшее время; т. е.

$$6.\ x=18,$$

или

$$x=\frac{18}{6}=3 \text{ рабоч.}$$

Такъ что

$$(1 \text{ р.}).\ 18^{\partial}=(3 \text{ р.}).\ 6^{\partial}=18.$$

Вообще обратнымъ смысломъ рѣшенія, опредѣляется собственно не частное, по данному дѣлимому и дѣлителю, какъ въ задачахъ прямаго смысла, *но уменьшеніе даннаго дѣлителя по данному увеличиванію частнаго, и обратно уменьшеніе частнаго по данному увеличиванію дѣлителя при постоянномъ дѣлимомъ.*

§ 58.

Показавъ ходъ рѣшеній практическихъ задачъ, на дѣленіе, займемся теперь изложеніемъ положительныхъ правилъ, для таковыхъ рѣшеній. Изъ сказаннаго до сего времени, мы могли только замѣтить, что правилъ для задачъ дѣленія вообще два: одно *прямое*, другое *обратное*; но какими онѣ имянно выражаются результатами, для этого слѣдуетъ еще выписать кратко рѣшенныя задачи и сличать съ ихъ результатами; а дабы числа задачъ стояли предъ глазами, то будемъ располагать, какъ и въ умноженіи, отдѣленія каждаго вопроса такъ, чтобъ *однородныя* находились подъ *однородными*, и имянно:

а.) Результаты прямыхъ задачъ.

1. *Случай.* за 4 руб. куплено 12 пуд. *Отд.* 1.
   1 р. — — — х пуд. *Отд.* 2.

$$4 \text{ р.} \times x = 12 \ldots\ldots (a)$$

Откуда по выведенному *за одинъ* рубль можно купить пудовъ

$$x = \frac{\overset{n.}{12}}{4\ р.} \ldots\ldots\ (c)$$

2. *Случай.* За 1 руб. куплено 30 фун. *Отд.* 1.
х р. — — — 360 фун. *Отд.* 2.

$$\overset{ф}{30} \times x = \overset{ф}{360} \ldots\ldots\ldots\ (a)$$

Откуда *за триста шестьдесятъ* фунтовъ заплачено

$$x = \frac{360\ ф.}{30\ ф} \ldots\ldots\ldots\ (c)$$

b.) Результаты обратныхъ.

1. *Случай.*
1 работ. оканчиваетъ работу въ 16 дней. *Отд.* 1.
8 р. — — — — — — — — х дней. *Отд.* 2.

$$8\ р. \times x = \overset{д}{16} \ldots\ldots\ (a)$$

Откуда *восемь* работниковъ окончатъ работу въ

$$x = \frac{\overset{д}{16}}{8\ р.} \ldots\ldots\ldots\ (e)$$

2. *Случай.* 1 раб. соверш. раб. въ 18 дней. *Отд.* 1.
х раб. — — — — — 6 дней *Отд.* 2.

$$\overset{д}{6}.\ x = \overset{д}{18} \ldots\ldots\ (a)$$

Откуда *въ шесть* дней работу окончатъ работниковъ

$$x = \frac{18^{\partial}}{6\partial} \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

И такъ, изъ сей краткой выписки относительно самыхъ задачь дѣленія вообще заключаемъ, что

1. Каждый вопросъ имѣетъ два отдѣленія, изъ коихъ въ одномъ содержится два данныхъ *разнородныхъ* числа, а въ другомъ—одно данное, другое—*искомое*, также между собою разнородныя, при томъ какое либо данныхъ должно быть непремѣнно *единица*.

2. Въ каждомъ отдѣленіи два разнородныя члена соотвѣтственно однородны разнороднымъ членамъ другаго отдѣленія; такъ что вообще, въ—задачѣ пара чиселъ однородныхъ, а другая—разнородныхъ; поелику же одно данное есть *единица*, то въ задачѣ собственно два однородныхъ и одно имъ разнородное; оно можетъ быть искомое, или данное число.

3. Поелику каждая задача прямая, и каждая обратная имѣетъ собственно два разнородныхъ члена, то на каждое правило выходитъ по два случая, такъ что всѣхъ случаевъ дѣленія составляющихъ одно существенное цѣлое—общій выводъ правилъ, (на дѣленіе практическихъ вопросовъ), всего *четыре*.

Наконецъ 4. Изъ разсмотрѣнія хода рѣшеній показанныхъ четырехъ случаевъ задачь и, изъ сличенія ихъ съ своими результатами явствуетъ вообще, что каждую задачу на дѣленіе можно разрѣшать или основнымъ уравненіемъ дѣленія (a), или прямо его результатомъ (c), какъ видѣли въ началѣ (§ 56 и 57); почему для каждаго изъ сихъ рѣшеній постановимъ общія и вмѣстѣ особенныя правила.

§ 59.

Правила для рѣшенія задачь по уравнію (а)

1. Изъ сличенія числовыхъ уравненій (а) прямаго смысла съ своими задачами слѣдуетъ вообще: *чтобъ изъ прямой задачи дѣленія, получить основное уравненіе (а), для того должно, числа двухъ отдѣленій перемножить между собою на крестъ,— однородное съ разнороднымъ, и полученныя произведенія связать знакомъ равенства (=); т. е. одно приравнить другому.* При этомъ замѣтимъ, что составляя по сему правилу уравненіе, изъ задачи, выражаемъ множественное его требованіе (§ 56,), а уже результатъ дѣленія опредѣлитъ настоящее требованіе вопроса т. е. единичное.

2. Изъ сличенія же числовыхъ уравненій (а) обратнаго смысла съ своими задачами, слѣдуетъ также вообще: *чтобъ изъ обратной задачи дѣленія, получить основное уравненіе (а), то разнородныя числа каждаго отдѣленія должно соотвѣтственно перемножить, и полученныя произведенія соединить знакомъ равенства.* Также замѣтимъ, что составляя по сему правилу уравненіе, изъ задачи, выражаемъ единичное его требованіе (§ 55 пра. 6,) а уже результатъ дѣленія опредѣлитъ настоящее требованіе вопроса и имянно—множественное.

3. Поелику же въ каждой задачѣ дѣленія одно данное число есть единица, то въ первомъ случаѣ (т. е. въ за-

дачѣ прямаго смысла) *собственно должно перемножать на крестъ искомое съ даннымъ разнороднымъ и произведеніе приравнить третьему данному числу въ задачѣ* (§ 55, с); *во второмъ случаѣ, должно перемножать только соотвѣтственно разнородныя, того отдѣленія, въ которомъ содержится искомое, и произведеніе приравнить данному числу другаго отдѣленія.*

§ 60.

Правила для рѣшенія задачь по результату дѣленія (с).

Изъ сличенія числовыхъ результатовъ дѣленія (с) съ своими задачами прямаго и обратнаго смысла слѣдуетъ, что

1. *Дѣленіемъ двухъ разнородныхъ чиселъ, въ прямой задачѣ, опредѣляется искомое, для величины единичнаго требованія; а дѣленіемъ однородныхъ, для—множественнаго.* При томъ,

a) Въ дѣленіи разнородныхъ условій, *искомое частное* (собственно дѣлитель) *всегда разнородно съ даннымъ дѣлителемъ* (собственно частнымъ) *и однородно съ дѣлимымъ; притомъ, дѣлимое съ дѣлителемъ постоянно находятся въ одномъ отдѣленіи, а искомое частное — въ другомъ.*

b) При дѣленіи однородныхъ условій, *искомое частное* (собственно частное) *разнородно и съ дѣлителемъ и съ дѣлимымъ, и особый признакъ дѣли-*

маго опрѣдѣляется числомъ, которое содержится въ одномъ отдѣленіи съ искомымъ. Впрочемъ, поелику и умноженіемъ двухъ чиселъ (только разнородныхъ), въ прямой задачѣ (§ 55 прав. а) также опредѣляется искомое для величины множественнаго требованія, то всегда должно во первыхъ разсмотрѣть связь условій, имянно ли задача принадлежитъ къ дѣленію; а потому въ семъ разѣ, если замѣтимъ, что учащійся смѣшивается, сбивается въ соображеніи, то полезнѣе составлять, изъ задачи, основное уравненіе дѣленія, по правилу § 59,1, поелику тогда нѣтъ надобности такъ подробно вникать въ связь условій, чтобы ниотыскивалось.

2. *Дѣленіемъ двухъ разнородныхъ и однородныхъ чиселъ, въ обратной задачѣ, опредѣляется искомое, всегда, для величины множественаго требованія*: ибо единичное исключительно принадлежитъ умноженію (§ 55 прав. б.) Притомъ

а) Въ дѣленіи разнородныхъ условій, *признакъ дѣлимаго опредѣляется*, кромѣ самаго смысла, *числомъ, которое содержится въ другомъ отдѣленіи отъ дѣлителя и искомаго и есть однородно съ послѣднимъ.*

Ь) *Въ дѣленіи однородныхъ условій, признакъ дѣлимаго заключается въ числѣ, которое въ задачѣ стоитъ, согласно предыдущему, въ другомъ отдѣленіи отъ дѣлителя и искомаго, но только разнородно съ послѣднимъ.*

И такъ, изъ подробнаго разбора показанныхъ двухъ правилъ, состоящихъ изъ четырехъ перемѣнъ, вытекаетъ *третье* общее правило: *если въ прямой задачѣ единичное, а въ обратной множественное требованіе, то въ обоихъ случаяхъ, достовѣрно можемъ сказать, что рѣшеніе оной принадлежитъ къ дѣленію.*

Сводъ заключеній. Вообще при разрѣшеніи задачи по правиламъ (§ 59 1, 2 и 3) обязаны только каждый разъ, увѣряться въ дѣйствительномъ смыслѣ, принадлежащемъ исключительно задачѣ; въ то время, какъ при разрѣшеніи по правиламъ (§ 60 1, 2 и 3), кромѣ сказаннаго, должны еще разсмотрѣть: точно ли единичное или множественное требованіе въ вопросѣ для того, чтобъ положительно уже можно было рѣшеніе его отнести или къ умноженію, или къ дѣленію.

И такъ показанныя замѣчанія, извлеченныя изъ самаго хода рѣшеній, составляютъ *шесть общихъ* и *четыре частныхъ* правилъ дѣленія, для рѣшенія практическихъ задачъ; изъ коихъ *первыя три* общія § 59, употребляются, когда вопросъ выражается основнымъ уравненіемъ дѣленія; *а вторыя три* общія и четыре частныя § 60, —когда вопросъ выражается прямо результатомъ дѣленія. Эти правила, тѣмъ болѣе важны, что на нихъ основывается правило *тройное прямое.* (§ 136).

§ 61.

Къ частному случаю показанныхъ правилъ принадлежитъ *правило смѣшенія простое,* состоящее въ опредѣленіи средняго достоинства нѣсколькихъ вещей, коихъ число и цѣны порознь даны. Напримѣръ крестьянинъ въ одинъ базаръ вывезъ четыре мѣры яблокъ и продавалъ ихъ такъ: за первую мѣру взялъ 250 коп., за вторую 258 коп., за третью 252., а при раздѣлѣ базара, за четвертую 228 коп. и хочемъ знать, въ какой цѣнѣ обошлась ему мѣра *круглымъ* счетомъ, или иначе говоря: *въ общей сложности?*

Рѣшеніе. Смысломъ вопроса требуется опредѣлить искомаго производителя x, по данному произведенію, выражающемуся въ суммѣ всѣхъ полученныхъ денегъ и другому производителю, состоящему въ суммѣ единицъ проданныхъ мѣръ яблокъ.—Но сумма вырученныхъ, за четыре мѣрки, денегъ=988 коп.; по сему

$$4x = 988$$

$$x = \frac{988}{4} = 247 \text{ коп.}$$

Здѣсь x въ общемъ, а 247 въ частномъ назначеніи называется *среднимъ достоинствомъ вещей.* И такъ, *среднее достоинство многихъ вещей равно суммѣ чиселъ, выражающихъ цѣнность каждой, раздѣленной на число вещей, принятыхъ за единицы.*

§ 62.

Послѣ сего предлагаемъ задачи на умноженіе и дѣленіе.

а) Задачи умноженія:

1.) Нѣкто получаетъ доходу каждый день по 40903 руб. Спраш. сколько въ 365 дней получитъ?

Рѣшеніе. Вопросъ прямой, а потому

$$x=40903 \times 365=1,493,345 \text{ руб.}$$

2.) Нѣкто выстроилъ домъ въ 5 дней 9-ю работниками: спр. сколько въ одинъ день должно употребить рабочихъ для окончнія этого дѣла?

Рѣшеніе. Вопросъ обратный, и,

$$x=5.9=45 \text{ челов.}$$

3.) За 500 серебряныхъ рублей сколько получить должно ассигнаціями, знавши, что промѣнъ состоитъ изъ 287 коп. ассигн. на рубль серебряный?

1935 руб. ассигн.

4. Нѣкто желаетъ, изъ Россіи перевесть въ Англію 5000 руб., курсъ же на Лондонъ состоялъ въ то время 11 пенсовъ за рубль, (н. з.) чего стоятъ 5000 руб.?

55000 руб. пенсовъ.

Ђ). Задачи дѣленія:

1. За равную храбрость 401 человѣка солдатъ выдано награжденія 4812 руб. спр. сколько каждому досталось?

Рѣшеніе. Вопросъ прямой, а потому

$$x=\frac{4812}{401}=12 \text{ руб.}$$

2. Нѣкто выстроилъ домъ въ одинъ день 49 человѣками: спр. въ 7 дней сколько рабочихъ окончатъ это дѣло?

Рѣшеніе. Вопросъ обратной.

$$x=\frac{49}{7}=7 \text{ чел.}$$

3. Неизвѣстная сумма положена въ Опекунскій Совѣтъ, и когда удвоилась, то предположено было раздать потерпѣвшимъ отъ пожара 50 человѣкамъ по ровну, и при раздѣлѣ каждому досталось 1456 руб. Спр. величина той суммы до выклада?

Рѣшеніе. Составляю

$$\frac{2.\,x}{50}=1456$$

Откуда по (§ 41, а)

$$2.\,x=72800$$

А по (§ 41, с)

$$x=\frac{72800}{2}=36{,}400 \text{ руб.}$$

4. Если 135600 копѣекъ серебряныхъ составляютъ 524772 копѣйки ходячими, то (н. з.) какой былъ курсъ серебрянаго рубля на ходячія?

787 коп.

5. Нѣкто хочетъ промѣнять 150 аршинъ сукна на таѳту; при чемъ, каждыя три аршина сукна стоятъ одинъ аршинъ таѳты; (н. з.) сколько долженъ дать таѳты, чтобы не остался онъ въ убыткѣ?

Найдется 50 арш. таѳты.

6. Нѣкто купилъ домъ за 5200 руб. и отдалъ его въ наймы по 650 руб. въ годъ; спраш. въ какое время домъ окупится?

Въ 8 лѣтъ.

О дѣлителяхъ.

§ 63.

Ежели одно число дѣлится на другое безъ остатка, то говорятъ: оно дѣлится *на цѣло*, и дѣлитель сего числа называется *цѣльнымъ*. Тѣ числа суть *первоначальныя* или *простыя*, которыя дѣлятся на цѣло только на самыхъ себя и на единицу; напротивъ, числа, имѣющія цѣльныхъ дѣлителей, кромѣ единицы и самихъ себя, именуются *составными*.

Такъ 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199 и пр. суть числа первоначальныя; но 4, 6, 8, 9; 10, 12 и пр. числа составныя.

Для опредѣленія всѣхъ цѣльныхъ дѣлителей даннаго числа, должно сперва найти тѣ изъ нихъ, которыя суть числа первоначальныя; для сего раздѣляютъ данное число на первоначальныя, слѣдуя ихъ естественному порядку т. е. сперва на 2, потомъ на 3, далѣе 5 и пр., пока выйдетъ въ частномъ числѣ первоначальное: тутъ дѣйствіе оканчивается. Напримѣръ, раздѣливъ 360 на 2, получаю въ частномъ 180; слѣд.

$$360 = 2 \times 180;$$

раздѣливъ 180 опять на 2, нахожу въ частномъ 90; слѣд.

$$180=2\times 90, \text{ и } 360=2\times 2\times 90.$$

Число 90 раздѣленное на 2 даетъ въ частномъ 45 слѣд.

$$90=2\times 45, \text{ и } 360=2\times 2\times 2\times 45.$$

Поелику 45 на 2 безъ остатка не дѣлится, то пробую дѣлить его на слѣдующее первоначальное число 3; въ частномъ выходитъ 15; слѣд.

$$45=3\times 15, \text{ и } 360=2\times 2\times 2\times 3\times 15.$$

наконецъ вижу, что 15 разлагается на производителей 3×5; слѣд.

$$360=2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5$$

Все это дѣлопроизводство располагаютъ въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Вотъ еще примѣръ:

$$\begin{array}{r|r} 13650 & 2 \\ 6825 & 3 \\ 2275 & 5 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \end{array}$$

Нашедши первоначальныхъ дѣлителей даннаго числа, всѣ прочіе составляются изъ перемноженія оныхъ по два, по три, по четыре и пр.; или лучше, сперва составляются сложные дѣлители изъ каждаго отдѣленія простыхъ, и потомъ уже оные перемножаются. Такъ, въ первомъ примѣрѣ сложные дѣлители каждаго отдѣленія простыхъ суть

1, 2, 4, 8.
1, 3, 9.
1, 5.

Перемноживъ первый порядокъ на второй, найдемъ

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72;

потомъ сіи числа должно помножить на 1 и 5 получимъ:

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

вотъ всѣ цѣльные дѣлители числа 360.

§ 64.

При нахожденіи цѣльныхъ дѣлителей данныхъ чиселъ, весьма часто встрѣчаются затрудненія въ опредѣленіи оныхъ: посему предлагаемъ здѣсь нѣкоторыя теоремы касательно чиселъ.

1). *Число не можетъ дѣлиться на другое больше половины.* Когда данное число раздѣлится на свою половину, тогда въ частномъ выйдетъ 2; слѣд. отъ раздѣленія того же числа на число, большее его половины, частное будетъ менѣе 2, и болѣе 1, т. е. это частное не можетъ быть цѣлое число.

2). *Ежели, пробуя простыхъ дѣлителей, дойдемъ до такого изъ нихъ, который, будучи помноженъ самъ на себя, дастъ произведеніе больше дан-*

наго числа; то это число есть простое. Объяснимъ это правило примѣромъ: раздѣляя 347 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19, въ послѣднемъ дѣленіи находимъ въ частномъ 18 и въ остаткѣ 5; слѣд. 347 состоитъ изъ числа 19, помноженнаго на число меньшее 19, т. е. другимъ простымъ производителемъ должно быть или 17, или 13,..........; но сіи производители были уже испытываемы; а потому и заключаемъ, что 347 есть число простое.

3). *Ежели многія дѣлимыя* ∂', ∂'', ∂''', *имѣютъ общаго дѣлителя* ∂, *то и сумма ихъ дѣлится на того же дѣлителя.*

Ибо, положивъ частное отъ перваго дѣлимаго чрезъ x, отъ втораго чрезъ x′ отъ третьяго чрезъ x″ найдемъ

$$\partial' = \partial.x$$
$$\partial'' = \partial.x'$$
$$\partial''' = \partial.x''$$

Сумма коихъ

$$\partial' + \partial' + \partial'' = (x + x' + x'').\partial;$$

что раздѣливъ на ∂ имѣемъ

$$\frac{\partial' + \partial'' + \partial''' +}{\partial} = \frac{(x + x' + x'').\ \partial}{\partial} = x + x' + x''; \text{ ибо } \frac{\partial}{\partial} = 1.$$

4). Составное число относительно одного изъ своихъ цѣлыхъ дѣлителей (§ 63), называется *кратнымъ*. Цѣльный дѣлитель можетъ быть первоначальнымъ или составнымъ числомъ; слѣд. въ послѣднемъ случаѣ, онъ можетъ имѣть своихъ цѣльныхъ дѣлителей. И такъ, на основаніи сего и предыдущаго правила слѣдуетъ, что *число* $(x + x' + x'')\partial$ *кратное другаго* ∂, *дѣлится на всѣхъ его цѣльныхъ* *дѣлителей.* Посему всѣ числа, кратныя отъ 10, — имѣющія на концѣ *нуль* дѣлятся на 2 и на 5.; ибо 5.2=10, а 10 дѣлитъ свои кратныя числа; слѣд. они должны дѣлится на 2 и 5.

5.) *Ежели сумма и одно ея слагаемое дѣлятся на данное число, то на это число должно дѣлиться и другое слагаемое.* Положимъ опять, что $д'+д''=д.x$ и $д''=д.x'$, что подставивъ вмѣсто $д''$, выйдетъ $д'+д.x'=д.x$ отсюда $д'=д.x-д.x'=(x-x').д$; слѣд. и $д'$ дѣлится на $д$.

6.) Изъ сего правила слѣдуетъ: поелику десятки, сотни, тысячи, и. т. д. дѣлятся на 2 и на 5 (потому, что сотни тысячи и пр. суть числа кратныя отъ 10); слѣд. всякое число, имѣющее на концѣ цыфры 2 и 5 должно дѣлиться на 2 и на 5. Также число дѣлится на 2, когда цыфра его единицъ есть кратная отъ 2. Поелику сто дѣлится на 4; слѣд. на 4 будутъ дѣлится тысячи, десятки тысячь и пр. и потому, ежели двѣ послѣднія цыфры даннаго числа дѣлятся на 4, то и все число будетъ дѣлится на 4. Поелику 1000, десятки и сотни тысячь, и пр. дѣлятся на 8, слѣд:, ежели три послѣднія цыфры даннаго числа дѣлятся на 8, то и все число дѣлится на 8.

7.) Всякое сложное число можетъ разложиться на единицы, десятки, сотни, тысячи............Такъ напр., число

$$8753=8000+700+50+3$$
$$=8.1000+7\cdot100+5.10+3$$
$$=8(999+1)+7(99+1)+5(9+1)+3$$

поелику же произведеніе суммы нѣсколькихъ чиселъ равняется суммѣ произведеній каждаго слагаемаго, по сему третья строка чиселъ даетъ,

$$8753 = 8.999 + 8 + 7.99 + 7 + 5.9 + 5 + 3$$
$$= 8.999 + 7.99 + 5.9 + 8 + 7 + 5 + 3$$
$$= 8.111.9 + 7.11.9 + 5.9 + 8 + 7 + 5 + 3$$
$$8753 = (8.111 + 7.11 + 5).9 + 8 + 7 + 5 + 3.$$

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго тожества на число 9 получимъ

$$\frac{8753}{9} = \frac{(8.111 + 7.11 + 5).9 + 8 + 7 + 5 + 3}{9}$$

но $\frac{(8.111 + 7.11 + 5).\ 9}{9}$ = цѣлому частному; слѣдов.

$$\frac{8753}{9} = \text{цѣл. част.} + \text{ост. отъ} \frac{8 + 7 + 5 + 3}{9}$$

$$= \text{цѣл. част.} + \text{ост. отъ} \frac{23}{9}$$

$$= \text{цѣл. част.} + \text{ост. отъ} \frac{2 + 3}{9}. \text{ или } 5.$$

Откуда слѣдуетъ, что остатокъ отъ дѣленія всякаго числа на 9 найдется, если сложатся всѣ цыфры, принявъ ихъ за простыя единицы, и если изъ суммъ превышающихъ 9 будетъ исключаться 9; посему вообще, *если сумма цыфръ даннаго числа дѣлится на цѣло на* 9, *то и все число дѣлится на* 9. *Когда же число дѣлится на* 9, *тогда оно дѣлится и на* 3; *слѣд., если сумма цыфръ дѣлится на* 3, *то и все число дѣлится на* 3.

8.) Изъ правила 4 и (§ 23, II,) слѣдуетъ, если $\frac{\partial'}{\partial} =$ цѣл. част. x, то и $\frac{\partial' \times 8}{\partial} = 8.\ x.$

Но это равенство разлагается на 2 части:

$$\frac{\partial.'8}{\partial}=\frac{\partial'}{\partial}.8=\frac{8}{\partial}.\partial'=8.x.$$

Слѣд. *чтобъ раздѣлить произведеніе двухъ чиселъ, должно раздѣлить котораго нибудь изъ производителей* (§ 23, II). *Также, если общій дѣлитель д произведенія двухъ дѣлимыхъ д' и 8 недѣлитъ на цѣло дѣлимаго 8, то непремѣнно долженъ дѣлить другое д'.* А какъ

$$\partial'.8=\partial.(8.x)=(8\,\partial).x,$$

то *для помноженія произведенія двухъ чиселъ, должно помножить одного изъ производителей.*

9.) Если два числа ∂' и ∂'' имѣютъ общаго дѣлителя ∂ и, если $\partial'>$ (больше) ∂'', то по раздѣленіи ∂' на ∂'' получимъ $\partial'=\partial''x+$ *ост.* Изъ сего видно, что и ост. дѣлится на ∂ (прав. 5).

10.) *Когда дѣлимое и дѣлитель помножатся на одно число, тогда цѣльная часть частнаго неперемѣняется; остатокъ же увеличивается во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ.* Если $\partial'=\partial.x+$*ост.*, то и $8.\partial'=(8.\partial).\ x+8.\ ($*ост.*$)$.

§ 65.

Объ остаткахъ можно сдѣлать важное замѣчаніе. Раздѣляя, 10, 100, 1000, 10000, 100000 на число 7, въ остаткѣ отъ перваго получимъ 1, отъ втораго 3, отъ третьяго 2, отъ четвертаго 6, отъ пятаго 4, отъ шестаго 5, послѣ чего станутъ выходить по періодамъ опять тѣже остатки;

это есть слѣдствіе того, что остатки должны быть менѣе дѣлителя 7.

Всякое число, какъ 13527542, можно представить въ такомъ видѣ 2+40+500+7000+..........; остатки сихъ чиселъ, раздѣленныхъ на 7, будутъ вышеписанныя, повторенныя 2, 4, 5.......... разъ. И такъ напиши подъ даннымъ числомъ, начиная отъ правой руки остатки: 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2................ такъ:

13527542
31546231

1. 2=2
3. 4=12
5. 2=10
7. 6=42
и пр.
105.

помножъ каждое изъ нихъ на верхнюю цыфру; сумма произведеній 105 будетъ остатокъ послѣ дѣленія, или сей остатокъ будетъ тотъ же, что изъ $\frac{105}{7}$ или 0; посему предложенное число дѣлимо на 7.

Когда дѣлится 1000 на 7, то вмѣсто остатка 6 можно предположить, что онъ есть—I. Ибо каждое частное можно брать по излишку и не достатку; такъ, отъ $\frac{25}{7}$ частное будетъ или—3, или 4; такъ что 25=3. 7+4, или 25=4. 7—3; слѣд. остатокъ будетъ 4 или — 3: въ этомъ то— смыслѣ должно принимать остатки съ знакомъ (—).

И такъ, остатки отъ $\frac{10^4}{7}$, $\frac{10^5}{7}$ суть — 3, — 2; слѣд. можно сказать, что остатки 1, 3 и 2 возобновляются безпрестанно: только произведенія должно попеременно вычитать и складывать. Вотъ примѣръ:

$$\begin{array}{rr}
\multicolumn{2}{c}{13527541} \\
\multicolumn{2}{c}{31231231} \\
7 & 2 \\
6 & 12 \\
10 & 10 \\
\hline
23 & 3 \\
 & 3 \\
\cline{2-2}
 & 30
\end{array}$$

Здѣсь передѣлано выше предложенное дѣйствіе сообразно съ симъ обстоятельствомъ; линеичка показываетъ вычитаемыя произведенія, и 30—23 или 0 есть искомый остатокъ.

Раздѣливши 10 на 11 остатокъ по предыдущему будетъ —1, $\frac{100}{11}$ даетъ 1, $\frac{1000}{7}$ опять—1........... и т. д. такъ что 1 и—1 суть одинъ послѣ другаго выходящіе остатки отъ дѣленія 1, 10, 100, 1000...........на 11. Отсюда явствуетъ, что, ежели даннаго числа сложатся всѣ цыфры нечетныхъ, потомъ, всѣ цыфры четныхъ мѣстъ и изъ первой суммы вторая вычитается, то остатокъ будетъ равенъ остатку дѣленія сего числа на 11.

Пусть дано 732931; поелику $1 + 9 + 3 = 13$,

$3+2+7=12$, и $13-12=1$; слѣд. $\frac{732931}{11}$ даетъ остатокъ 1. Также въ 429180 находится $0+1+2=3$, $8+9+4=21$, а какъ изъ 3 нельзя вычестъ 21, то придай къ 3 произведеніе 2.11 выйдетъ 25; (поелику чрезъ это остатокъ 3 неизмѣняется; ибо если обратно число 25 раздѣлимъ на 11, то получимъ опять 3), но $25-21=4$ слѣд. 4 есть искомый остатокъ. Число 806113 есть краткое 11, поелику получиться $15-4=11$ а $11-11=0$.

§ 66.

На открытыхъ свойствахъ чиселъ 9 и 11 основывается сокращенная повѣрка сложенія, умноженія,.....вычитанія, дѣленія........ Для этого, стоитъ только съ остатками чиселъ ихъ отъ 9 и 11 произвести тѣже дѣйствія какія сдѣланы и надъ сими числами, такъ 1), въ сложеніи—должно взять сумму остатковъ всѣхъ слагаемыхъ и сравнить съ остаткомъ суммы данныхъ чиселъ, если вычисленіе вѣрно, то оба полученныя остатки будутъ равны; 2) въ умноженіи — произведеніе остатковъ обоихъ производителей должно быть равно остатку отъ цѣлаго произведенія; 3, въ вычитаніи — сумма остатковъ вычитаемаго и разности должна быть равна остатку уменьшаемаго; 4), въ дѣленіи—произведеніе остатковъ частнаго на дѣлителя (и плюсъ остатокъ остатка дѣлимаго, если онъ будетъ) должно быть равно остатку отъ всего дѣлимаго. Для ясности предлагаемъ здѣсь самыя примѣры:

Повѣрка числомъ 9

$$\text{Слож.}\left\{\begin{array}{lr} 5786 \text{ остат.} & 8 \\ +475\ldots\ldots\ldots & 7 \\ \hline 6261 & \overline{15} \\ \hline \end{array}\right. \qquad \text{вычит.}\left\{\begin{array}{lr} 6261 \text{ остат.} & 6 \\ -476\ldots\ldots\ldots & 7 \\ \hline 5786\ldots\ldots\ldots & 8 \end{array}\right.$$

ост. 6 6 $\overline{15}$ или 6

$$\text{Умн.}\left\{\begin{array}{l} 5009 \text{ ост. } 5 \\ \times 732\ldots\ldots 3 \\ \qquad\qquad \overline{15} \\ \hline 3621507\ldots\text{ост. } \overline{6} \end{array}\right.$$

ост. 6

$$\text{Дѣлен.}\left\{\begin{array}{l} 111\overset{1}{\overbrace{11}}\overset{1}{\overbrace{111}}\overset{0}{\overbrace{11}}:1234 = 900414 + \text{ост. } \overset{1}{\overbrace{235}} \\ \qquad\qquad\qquad\text{и такъ} \\ \partial.\ 1\times ч\ 0 + ост.\ 1 = \partial'. \end{array}\right.$$

Повѣрка числомъ 11.

Возмемъ примѣръ умноженія

$$\begin{array}{ll} 5786 \text{ ост. } 13-13=0 \\ \times 475\ldots\ldots 9-7=3 \\ \hline 2748350 & \overline{3.0=0} \\ \hline \end{array}$$

ост. 20—20=0

Какъ ни кажется удобною показанная повѣрка числами 9 и 11, но она имѣетъ и свои недостатки: послику остатки получаемые отъ 9 независятъ отъ знаменованія мѣстъ чиселъ, по чему легко можетъ случиться, что при вычисленiи напримѣръ найденной суммы 6261 число 6, выражающее тысячи, ошибочно ставится на мѣсто сотень, а число 2 сотни на мѣсто тысячь, и чрезъ то ложная сумма 2661 будетъ разнится отъ истинной на 3600 единицъ, хотя отъ нея остатокъ есть также 6.

Подобная ошибка, впрочемъ рѣже, можетъ быть и при повѣркѣ числомъ 11; такъ, если въ найденномъ произведенiи 2748350 число 5 десятковъ случайно поставится на мѣсто 8 тысячь, а 8 тыс. на мѣсто 5 десят. то ложное произведенiе 2845380 будетъ разниться отъ истиннаго на 2970 единицъ, хотя отъ него остатокъ есть одинъ и тотже, какой и въ истинномъ.

По этой причинѣ повѣрки чрезъ 9 и 11 правильнѣе назвать *полуповѣрками*, которыя можно употребить при недостаткѣ времени; при излишествѣ же онаго каждое вычисленiе лучше повторять покрайней мѣрѣ разъ, а это облегчается тѣмъ, когда одну и туже выкладку дѣлаютъ двое.

§ 67.

Разсматривая примѣры (§ 63) видимъ, что числла 360 и 13650 имѣютъ общими дѣлителями 2, 3, 5: ежели 360 и 13650 раздѣлимъ на 2. 3. 5; то получимъ числа

2. 2. 3. 5. 7. 13,

которыя уже общихъ дѣлителей не имѣютъ; посему 2.3.5. или 30 есть наибольшiй общiй дѣлитель чиселъ 360 и 13650. И такъ *наибольшiй общiй дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ есть произведенiе ихъ общихъ простыхъ дѣлителей.* Руководствуясь этимъ правиломъ, для нахожденія наибольшаго общаго дѣлителя, должны предварительно разлагать числа на простые дѣлители, что сопровождается иногда съ затрудненіями, почему надобно предложить другое правило, которое бы миновало оныя. Правило это состоитъ въ слѣдующемъ: пусть данныя числа будутъ 13650 и 1540. Прежде всего замѣтимъ, что искомый дѣлитель неможетъ быть болѣе 1540, иначе бы меньшее число дѣлилось на цѣло на большее (§ 641); но какъ само 1540 можетъ быть дѣлителемъ обѣихъ данныхъ чиселъ, то и должно испытать дѣленіе 13650 на 1540; въ частномъ выходитъ 8, въ остаткѣ 1330, т. е.

$$13650 = 1540.8 + 1330.$$

Хотя чрезъ это дѣленіе недостигли желаемаго, однако можемъ возпользоваться онымъ: если бы знали число, на которое дѣлятся 1540 и 1330, то на это число раздѣлилось и 13650 (§. 64, 4 и 5 и 9,) т. е., общій дѣлитель 1540 и 1330 (дѣлителя и остатка) былъ бы дѣлителемъ и 13650 (дѣлимаго); посему опять имѣемъ причину дѣлить 1540 на 1330; въ частномъ находимъ 1, въ остаткѣ 210. Повторивъ предыдущее разсужденіе усмотримъ необходимость дѣлить 1330 на 210, но какъ и здѣсь получается остатокъ 70, то должно еще раздѣлить 210 на 70: дѣленіе оканчивается безъ остатка. И такъ

$$14650 = 1540.8 + 1330$$
$$1540 = 1330.1 + 210$$
$$1330 = 210.6 + 70$$
$$210 = 70.3$$

По послѣднену выраженію заключаемъ, что 210 дѣлится на 70 безъ остатка; но какъ 70 и 210.6 раздѣляется такимъ же образомъ на 70, то 70 будетъ дѣлителемъ и 1330. Откуда переходимъ ко второму выраженію, въ которомъ 1330 и 210 дѣлятся на 70, слѣд. на 70 должно дѣлиться 1540; а когда 1540 и 1330 дѣлятся на 70, то и 13650 будетъ дѣлится на 70. И такъ 70 есть общій дѣлитель 13650 и 1540. Остается разсмотрѣть, будетъ ли 70 наибольшій общій дѣлитель. Для сего примемъ, что дѣйствительно есть общій дѣлитель для 13650 и 1540, который больше 70: въ этомъ случаѣ, по первому изъ вышеприведенныхъ выраженій, должно заключить, что на предлагаемаго дѣлителя должно дѣлиться 1330, по второму 210, по третьему 70; слѣд. большее число дѣлило бы меньшее безъ остатка, что невозможно (§. 64,1). И такъ и проч.

Дѣйствія потребныя для нахожденія наибольшаго дѣлителя располагаются въ такомъ видѣ:

13650	1540	1330	210	70
	8	1	6	3

Вотъ еще примѣры:

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2

561	32	11	15	2	1
	17	1	1	7	2

Въ первомъ примѣрѣ искомый дѣлитель есть 47, во второмъ же 1; слѣд. числа 561 и 32 общаго дѣлителя неимѣютъ.

Изъ всего предложеннаго слѣдуетъ правило: *чтобъ* *найти наибольшаго общаго дѣлителя двухъ чиселъ, должно большее изъ нихъ раздѣлить на меньшее; на остатокъ—меньшее число; на каждый новый остатокъ—предыдущаго дѣлителя, и продолжать это до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ выйдетъ нуль: дѣлитель послѣдняго дѣленія будетъ искомымъ.*

Для опредѣленія общаго большаго дѣлителя многихъ чиселъ, должно *находить общихъ дѣлителей постепенно такъ: перваго и втораго числа общій дѣлитель сравнить съ третьимъ числомъ, отсюда найденнаго дѣлителя сравнить съ четвертымъ числомъ: и т. д., общій дѣлитель послѣдняго дѣйствія будетъ искомымъ.* Напримѣръ, для 48, 18, 15 общій дѣлитель первыхъ двухъ чиселъ есть 6, и общій дѣлитель 6 и 15 есть 3; слѣд. 3 есть искомый общій дѣлитель. По разложенію данныхъ чиселъ на простые дѣлители, сіе правило дѣлается очевиднымъ. Имянно:

$$48=2.2.2.2.3$$
$$18=2.3.3.$$
$$15=5.3.$$