

Список литературы: 1. Математическая теория оптимальных процессов, Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и др.—М.: Физматгиз, 1969.—384 с. 2. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости.—Мат. сб., 1979, 109 (151), вып. 4, с. 582—606. 3. Айзекс Р. Дифференциальные игры.—М.: Мир, 1967.—479 с. 4. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр.—Усп. мат. наук, 1966, 21, вып. 4, с. 50—132. 5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.—М.: Наука, 1974.—455 с. 6. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения.—Изд. Харьк. Мат. о-ва, 1892.—250 с. 7. Беллман Р. Динамическое программирование.—М.: ИЛ, 1960.—400 с. 8. Зубов В. И. Лекции по теории управления.—М.: Наука, 1975.—496 с. 9. Летов А. М. Динамика полета и управление.—М.: Наука, 1969.—359 с. 10. Красовский Н. Н. О выборе параметров оптимальных устойчивых систем.—Тр. I Междунар. конгресса ИФАК.—М.: Изд-во АН СССР, т. 2, 1961. с. 254—266. 11. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 2, изд. 3-е.—М.—Л.: Главн. ред. общетехн. лит., 1936.—322 с.

Поступила 6 июня 1979 г.

УДК 517. 977.1

В. М. ГАВРИЛЯКО

О СИНТЕЗЕ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

В статье рассматривается обобщение основной теоремы В. И. Коробова [1] для системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R_n, \quad u \in M \subset R_m, \quad (1)$$

основанное на теории дифференциальных неравенств Т. Важевского [2]. Теорема может быть распространена на основе метода В. М. Матросова [3] на вектор-функции управляемости [4]. Рассмотрена задача синтеза кусочно-постоянного управления, вычисляемого в некоторые дискретные моменты времени. Исследуется сходимость разностной аппроксимации системы (1). Показывается, что если $T(x_0)$ момент времени, в который траектория системы (1), начинающаяся в точке $x_0 \in R_n$, попадает в точку $x = 0$ согласно системе $\dot{x} = f(x, u(x))$, то для $\forall \nu > 0$ можно указать явное выражение для шага h вычислений такое, что разностная траектория попадает в точку $x = 0$ за время $t \leq T(x_0) + \nu$. Приводятся также некоторые результаты численного эксперимента на ЭВМ.

Рассмотрим уравнение (уравнение сравнения)

$$\dot{v} = \omega(v), \quad (2)$$

в котором функция $\omega(v)$ непрерывна при $v \geq 0$ и имеет единственное решение $v = v(t, v_0)$ в каждой области $J_\varepsilon = \{v : 0 < \varepsilon \leq v \leq c\}$. При этом для $\forall v \in J_\varepsilon$ имеем

$$\omega(v) \leq 0 \quad (3)$$

Пусть, кроме этого, существует конечный момент времени $t^* = T(v_0)$ такой, что решение уравнения сравнения $\dot{v} = \omega(v)$, $v(t_0) = v_0$ принимает значение $v(t^*, v_0) = 0$. Будем предполагать, что вектор-функция $f(x, u)$ в каждой области

$$I_\rho = \{(x, u) : 0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1, u \in M \subset R_r\}$$

удовлетворяет условию Липшица по x , u . Тогда имеет место

Теорема 1. Пусть существует функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая условиям:

1. $\Theta(x) \geq 0$, $\Theta(x) = 0$ только при $x = 0$ [1];
2. $\Theta(x)$ непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируема всюду, за исключением, быть может, точки $x = 0$ [1];
3. Существует функция $u(x)$ при $x \in Q$, где $Q = \{x : \Theta(x) \leq c, c > 0\}$ (здесь c таково, что Q ограничено), такая, что $\Theta(x)$ удовлетворяет в силу системы (1) дифференциальному неравенству $\dot{\Theta}(x(t)) \leq \omega(\Theta(x(t)))$; (4)
4. $u(x)$ при $x \in I_\rho$ и $x \in Q$ удовлетворяет условию Липшица [1]. Тогда траектория системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в точке $x_0 \in Q$ в момент времени $t_0 = 0$, оканчивается в точке $x = 0$ в момент времени $T \leq t^*$.

Доказательство теоремы основано на использовании схемы доказательства теоремы 1 [4] и теореме о дифференциальных неравенствах [2].

Рассмотрим теперь вопрос о численном решении задачи синтеза управлений. Для этого исходную «дифференциальную» задачу заменим разностной.

Пусть область изменения аргумента t есть $[0, T]$. Ограничения на T обсудим ниже. Разобьем отрезок на m равных частей, вводя точки $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Множество этих точек назовем сеткой на отрезке $[0, T]$ и обозначим U^h . Векторная функция $Y = Y(t_i)$ дискретного аргумента t_i называется векторной сеточной функцией. Мы будем использовать запись $Y(t_i) = Y_i$. Множество всех векторных сеточных функций, заданных на U^h образует векторное пространство. Пусть C_n^h — банахово пространство сеточных функций $X^h = (X_0, X_1, \dots, X_m)$ с нормой $\|x^h\| = \sum_i \max_j |x_j^i|$. Определим оператор разностной производной D^h по правилу $D^h X_j^h = (X_{j+1} - X_j)/h$. Рассмотрим теперь отрезок $[0, T_1]$ такой, что при $t \in [0, T_1]$ решение уравнения $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающееся в точке $x_0 \in Q$, согласно теореме 1 существует и единственно, и для $\forall t \in [0, T_1]$ будет $\|x(t)\| \geq \varepsilon$ при $0 < \varepsilon \leq \|x_0\|$. На этом отрезке определим сетку U^h , на которой рассмотрим разностную задачу Коши $D^h x^h = f(x^h, u^h(x^h))$, $x_0^h = x_0$ (5).

Лемма 1. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1 функция $f(x, u(x))$ в каждой области $J_\rho = \{x : 0 < \varepsilon \leq \|x\| \leq \rho\}$ обладает ограниченными частными производными f_{ix_j} , f_{iuk} , u_{kx_i} ; $i = \overline{1, n}$; $k =$

$= \overline{1, r}$. Тогда разностная схема (5) в области J_p сходится к решению дифференциальной задачи в этой области.

Следствие. Пусть $h \rightarrow 0$, тогда траектория системы (5), начинающаяся в точке $x_0 \in Q$ при $t = 0$, оканчивается в точке $x = 0$ в момент времени $T \leq T(\theta(x_0))$. Действительно, повторяя доказательство теоремы 1, рассмотрим траекторию $x(t)$ в области $Q \setminus S(\epsilon)$. Тогда, согласно теореме 1 за время $T_* \leq T(\theta(x_0))$ траектория попадет на границу шара $S(\epsilon)$, а согласно лемме 1 при $h \rightarrow 0$ разностная траектория сходится к непрерывной. Поэтому существует достаточно малый шаг h такой, что за время T_* разностная траектория попадет в область $S(2\epsilon) \setminus S(\epsilon)$. Аналогично теореме 1 устремим $\epsilon \rightarrow 0$, тогда время попадания в точку $x = 0$ есть $T \leq T(\theta(x_0))$.

Однако результаты следствия мало пригодны для организации вычислительного процесса, позволяющего реализовать дискретный синтез на ЭВМ. Желательно в каждой области J_p уметь оценивать требуемый шаг h . Следуя [1], оценим шаг h в случае, когда

уравнение сравнения (3) имеет вид $\dot{v} = -\beta v^{1-\frac{1}{\alpha}}$, где α, β — некоторые положительные числа. Зададим любое сколь угодно малое $\nu > 0$ и определим $\mu = \alpha^{-1}\beta - T_0(T_0 + \nu)^{-1}$, где $T_0 = \alpha\beta^{-1}\theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, очевидно $0 < \mu < \beta$. Имеет место следующая

Лемма 2. Пусть для дискретного процесса (5) выполнены условия леммы 1 и кроме этого функция $\nabla \theta^{\frac{1}{\alpha}}(x)$ в каждой области J_p удовлетворяет условию Липшица. Тогда можно указать такой шаг $h(J_p)$, что дискретная траектория, начинающаяся в точке $x_0 \in J_p$, попадает на границу шара $S(\epsilon)$ в некоторую точку y за время $T \leq \alpha(\beta - \mu)^{-1}(\theta(x_0) - \theta(y))$. При этом шаг h выбирается из условия $hL_J \max_{x \in J_p} \|f(x, u(x))\|^2 \leq 2\mu$.

Следствие. Существует конечное время $T(x_0)$ такое, что сеточная траектория x^h , где h выбирается в каждой области J_p согласно лемме 2, начинающаяся в точке $x_0 \in Q$ оканчивается в точке $x = 0$ в момент времени $T(x_0) \leq T_0 + \nu$.

В случае, когда система (1) является линейной, а управление $u(x)$ одномерным, удастся получить явное выражение для оценки шага h .

Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + bu$, $u \in R_1$, $|u| \leq d$. В работе [1] для этой системы были построены функция управляемости $\theta(x)$ в виде

$$2\alpha_0\theta^{1+\frac{2n-1}{\alpha}} - \sum_{ij} f_{ij}\theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} z_i z_j = 0; \quad z = Lx, \quad (6)$$

а также управление $u(x)$, обладающее указанными выше свойствами. Выполнимость условий леммы 2 непосредственно вытекает из теоремы о неявной функции. Для определения α был проделан

численный эксперимент на ЭВМ, результаты его показали, что при $n = 1,8$ $\alpha = 1$, при $n = 9$ $\alpha = 2$. Таким образом в первом случае уравнение (6) является полиномом степени $2n$ относительно Θ . Можно показать, что в предположении $\Theta \leq 1$, $\nu = \lambda_{\min}(F)$; $\lambda = \lambda_{\max}(F)$:

$$\left(\frac{\nu}{2a_0} \|z\|^2\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \leq \Theta(z) \leq \left(\frac{\lambda}{2a_0} \|z\|^2\right)^{\alpha(\alpha+2n-1)^{-1}}. \quad (7)$$

Оценим теперь постоянную Липшица L_k для множества I_k : $I_k = \{z: 0 < \varepsilon_k \leq \|z\| \leq \varepsilon_{k-1}\}$, $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\varepsilon_0 = \|z_0\|$. Согласно обобщенной теореме о среднем, в качестве константы Липшица L_k можем принять величину

$$L_k \geq \max_{z \in I_k} \left\| \left(\frac{\partial^2 \Theta^{1/\alpha}(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right) \right\| \quad (i, j = \overline{1, n})$$

Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный результат $(A: I_n^1 \rightarrow I_n^1; \|A\| = \max_k \sum_j |a_{jk}|)$:

$$\left| \frac{\partial^2 \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right| \leq R \Theta^{\frac{i+j-2n}{\alpha}-1}.$$

Здесь

$$R = \frac{\lambda \|F\|}{2\alpha a_0 \rho^2} \left(\frac{4|1-\alpha|}{\alpha} \|F\| + \rho + 4\|F_\alpha\| + 4 \frac{\|F\| \cdot \|F_2\|}{\rho} + 4\|F_1\| \right),$$

где F , F_2 , F_1 , F_α — квадратные матрицы размером $n \times n$ с компонентами (соответственно)

$$f_{ij}; \quad \left(1 + \frac{2n-i-j+1}{\alpha}\right) \left(\frac{i+j-2}{\alpha} - 1\right) f_{ij}; \quad \frac{i+j-2}{\alpha} f_{ij}; \\ \left(1 + \frac{2n-i-j+1}{\alpha}\right) f_{ij};$$

ρ — минимальное собственное значение матрицы F_α , $\rho > 0$. Учитывая $\Theta < 1$, получаем

$$\left\| \frac{\partial^2 \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right\| \leq R n \Theta^{\frac{2-2n}{\alpha}-1}.$$

Но так как $\varepsilon_k \leq \|z\| \leq \varepsilon_{k-1}$, то $\Theta(z) \geq N_2(\varepsilon_k)$. Откуда $\|(\cdot)\| \leq \leq R n N_2(\varepsilon_k)^{\frac{2-2n}{\alpha}-1}$. Таким образом постоянную Липшица можем

взять равной $L_k = P \varepsilon_k^{-s}$, где $P = R n \left(\frac{\nu}{2a_0}\right)^{\frac{2-2n-\alpha}{\alpha+1}}$; $s = \frac{4n+2\alpha-4}{\alpha+1}$.

Согласно [4] имеем $\|u(z)\| \leq d$. Следовательно, можем принять $h = 2\mu p^{-1} (\|A\| \varepsilon_{k-1} + d)^{-2} \varepsilon_k^s$.

Использование ЭВМ приводит к регулированию с помощью кусочно-постоянного управления, являющегося функцией фазовых координат объекта, вычисляемых в некоторые дискретные моменты времени [5]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in R_n, \quad u \in R_1, \quad |u| \leq 1; \quad u(x(t)) = u_k, \\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (8)$$

Имеет место следующая

Теорема. Пусть $\text{rang } [b, A b, \dots, A^{n-1}b] = n$, а система, не ограничивая общности, имеет канонический вид [4]. Тогда существует такая последовательность шагов дискретности $\{h_i\}_{i=1}^\infty$, $h_i = t_{i+1} - t_i$, что управление вида [4]

$$u(x(t)) = \sum_{i=1}^n a_i \Theta^{\frac{i-n-1}{\alpha}}(x(t_k)) x_i(t_k)$$

переводит систему (8) из произвольной точки $x_0 \in R_n$ в точку $x = 0$ за конечное время. При этом для $\forall x \in I_m$ имеем $h_i \leq \alpha_m \varepsilon_{m-1}^p$.

Список литературы: 1. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости.— Докл. АН СССР, 1979, 248, № 5, с. 1051—1055. 2. Wazewski T. Systèmes des equations et des inegalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications — Ann. de la Soc. Pol. de Math., 1950, 23. 3. Матросов В. М. К теории устойчивости движения.— Прикл. математика и механика, 1962, 26, вып. 6, с. 992—1002. 4. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости.— Мат. сб. Новая сер., 1979, 109, вып. 4, с. 582—606. 5. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.—494 с.

Поступила 5 июня 1979 г.

УДК 519

Е. А. ГОРИН, д-р физ.-мат. наук

НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

1. **Введение.** Согласно классическому неравенству Бернштейна, если

$$f(x) = \sum_{-n}^n c_k e^{ikx}$$

тригонометрический полином степени n , причем $|f(x)| \leq M$ всюду на вещественной оси R , то $|f'(x)| \leq Mn$, т. е. в sup -норме $\|f'\| \leq n \|f\|$ (1). Знак равенства в (1) возможен в том и только в том случае, когда полином сводится к комбинации двух крайних мономов.

Неравенство типа (1) было открыто С. Н. Бернштейном примерно в 1910 г. в связи с его исследованиями по конструктивной

теории функций. В мемуаре «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени» («Сообщения Харьковского математического общества», 1912, т. 13) С. Н. Бернштейн дает доказательство неравенства (1) для четных и нечетных вещественных тригонометрических полиномов, а для общих полиномов он получает неравенство с заменой n на $2n$ справа, т. е. в несколько менее точной форме (см., впрочем, комментарии автора к [1]).

В первых работах С. Н. Бернштейна неравенство (1) непосредственно связывается с классическими исследованиями П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Для четных вещественных тригонометрических полиномов это неравенство, как легко видеть, равносильно неравенству $(1 - t^2)^{1/2} |p'(t)| \leq Mn$, $-1 \leq t \leq 1$ (2) в классе вещественных алгебраических полиномов степени n , для которых $|p(t)| \leq M$ при $-1 \leq t \leq 1$. С. Н. Бернштейн дает прямое доказательство неравенства (2), отмечая, что оно «в сущности вытекает» из рассуждений А. А. Маркова (имеется в виду работа «Об одном вопросе Д. И. Менделеева», 1889 г.). Экстремалами для неравенства (2) служат как раз полиномы, кратные полиномам Чебышева. Аналогично разбирается несколько более сложный и, как оказывается, более важный случай нечетных тригонометрических полиномов.

Неравенства типа (1) играют решающую роль при доказательстве так называемых обратных теорем теории приближений, в которых заключение о гладкости функции выводится из возможности ее подходящей аппроксимации. Рассмотрим для примера непрерывную 2π -периодическую функцию f и положим $E_n(f) = \inf \|f - f_n\|$, где нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам степени не выше n . Допустим, что $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ (3) при некотором $\alpha > 0$. Соотношение (3) позволяет представить f в виде $f = f_2 + (f_4 - f_2) + (f_8 - f_4) + \dots$ (4), где f_n — полином степени $\leq n$ и $\|f_n\| \leq Cn^{-\alpha}$. Из уравнения (1) вытекает, что ряд справа в (4) останется равномерно сходящимся после k -кратного дифференцирования, если $k < \alpha$, а это позволяет утверждать, что f обладает непрерывными производными соответствующих порядков.

В 1914 г. были опубликованы работы Ф. Рисса и М. Рисса, содержавшие новые доказательства неравенства (1) в полном объеме. Доказательство М. Рисса основано на его интерполяционной формуле, выражающей производную через сдвиги, и этот прием с большим эффектом применен в ряде последующих исследований. Далее мы остановимся на функционально-алгебраическом механизме некоторых из таких формул.

Любопытно, что во введении к мемуару о наилучшем приближении С. Н. Бернштейн отмечал, что открытие в 1885 г. Вейерштрассом его «замечательной по своей общности теоремы (речь идет об аппроксимации непрерывных функций полиномами) определило дальнейший ход развития анализа; с этого момента тео-

рия функций комплексной переменной, достигшая в то же время своего величайшего расцвета, постепенно отходит на задний план, выдвигая вперед изучение функций вещественной переменной». Неравенство (1), разумеется, также трактуется С. Н. Бернштейном в вещественном плане. Вскоре, однако, это неравенство и его обобщения оказались в фокусе разнообразных исследований, причем не только по теории приближений, но и по теории целых функций, начатых, кстати, самим С. Н. Бернштейном (*tempora mutantur, et nos mutamur in illis*), а затем — по теории операторов, абстрактному гармоническому анализу, банаховым алгебрам и т. д.

Классические аспекты темы нашли довольно полное отражение в литературе (см., в частности, [2—9]). В данном обзоре мы касаемся только двух вопросов — операторов, сохраняющих неравенства (эта тема классическая), и неравенств бернштейновского типа с точки зрения абстрактного гармонического анализа (эта тема новая). Точки соприкосновения возникают благодаря привлечению идеи положительной определенности. Конечно, ряд замечательных результатов выдающихся математиков не будет освещен. Ссылки, как правило, даются не на первоисточники, а на наиболее доступные (русскому читателю) сочинения, некоторые результаты из перечисленных выше монографий приводятся вообще без ссылок.

Мысль о том, что понятие положительно определенной функции может объяснить совпадение нормы и спектрального радиуса функции от эрмитова оператора и, следовательно, ряд неравенств бернштейновского типа с точными константами возникла у меня при ознакомлении с работой Х. Кенига [10].

Я благодарен А. Г. Баскакову, Ю. А. Брудному, А. Г. Костюченко, Б. Я. Левину, Н. Б. Левиной, В. Я. Лину, С. А. Молчанову и В. М. Тихомирову, принимавшим участие в обсуждении идеи и появившихся результатов, а также другим товарищам, оказавшим мне помощь по отдельным вопросам.

Я глубоко признателен Правлению Харьковского математического общества за высокую честь, оказанную мне предложением написать статью, приуроченную к 100-летию юбилею Общества.

2. Примеры. Следующее обобщение неравенства (1) также принадлежит С. Н. Бернштейну (см., например, [2, с. 182]). Пусть $\sigma > 0$; обозначим через B_σ линейное пространство всех целых функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ограниченных на вещественной оси $\mathbb{R}$ и экспоненциального типа $\leq \sigma$. Из теоремы Фрагмена — Линделефа вытекает, что фактически для таких функций $|f(z)| \leq \sigma e^{\sigma|y|}$, в частности, они образуют банахово пространство относительно $\sup$ -нормы на $\mathbb{R}$. Оказывается, $\|f'\| \leq \sigma \|f\|$ (5) для всех $f \in B_\sigma$. Равенство $|f'(x_0)| = \sigma \|f\|$ возможно только для биномов, тогда как равенство в (5) осуществимо и на других функциях, например, при $f(x) = \cos(1+x^2)^{1/2}$, хотя здесь $|f'(x)| < 1$ при всех вещественных x .

Неравенство ($\alpha \in \mathbf{R}$)

$$\sup_{\mathbf{R}} |f(x + iy) e^{-i\alpha} + f(x - iy) e^{i\alpha}| \leq 2 (\operatorname{ch}^2 \sigma y - \sin^2 \alpha)^{1/2} \|f\| \quad (6)$$

для всех $f \in B_{\sigma}$ принадлежит Боасу (см. [2, с. 334]). При $\alpha = \pi/2$ и $y \rightarrow 0$ оно переходит в неравенство (5).

Частные случаи неравенства

$$\sup_{\mathbf{R}} |f'(x)| \leq \frac{\sigma}{2 \sin \sigma h} \sup_{\mathbf{R}} |f(x + h) - f(x - h)|, \quad (7)$$

где $f \in B_{\sigma}$, $0 \leq \sigma h < \pi$, были установлены С. М. Никольским и С. Б. Стечкиным, а в общем виде оно доказано С. Н. Бернштейном. В той же работе содержится одно из наиболее тонких (на наш взгляд) неравенств рассматриваемой серии:

$$\sup_{\mathbf{R}} |f(x + h) - f(x - h)| \leq 2 \sin \sigma h \|f\|, \quad (8)$$

$f \in B_{\sigma}$, $0 \leq \sigma h \leq \pi/2$. В пределе при $h \rightarrow 0$ оно также дает (5). Заметим, что константы во всех приведенных неравенствах точные. Ряд общих неравенств такого типа содержится в работах Боаса, М. Г. Крейна, Сивина (см. по этому поводу, например, [5, с. 229]).

Известны L^p -аналоги перечисленных неравенств. Например, если $1 \leq p \leq \infty$ и $f \in L^p(\mathbf{R}) \cap B_{\sigma}$, то

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \sigma \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (9)$$

а если f — тригонометрический полином степени $\leq n$, то

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(x + h) - f(x - h)|^p dx \right)^{1/p} \leq 2 \sin nh \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (10)$$

при $0 \leq nh \leq \pi/2$ (см. [2, 5, 9]). Более того, вместо L^p -норм можно использовать весьма общие нормы с определенными условиями однородности (Н. И. Ахиезер).

Дифференциально-разностные неравенства указанных типов известны и для функций нескольких переменных (С. М. Никольский, П. И. Лизоркин и др.). Многочисленные примеры таких неравенств и их приложения можно найти в [4, 5, 7, 8]. Приведем один из сравнительно новых примеров. Пусть $f(x)$ и $f(z)$ — целая функция, для которой $|f(x)| \leq 1$ при $x \in \mathbf{R}^n$ и $|f(z)| \leq$

$$\leq C e^{\left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2}}. \text{ Тогда [11] для оператора Лапласа}$$

$$\sup_{\mathbf{R}^n} |\Delta f(x)| \leq n, \quad (11)$$

причем константа точная и достигается на функции $\cos \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$. В [11] приводится аналог интерполяционной формулы Рисса для

операторов Лапласа на довольно общих римановых многообразиях, и в этой обстановке получается аналог неравенства (11). Другое обобщение, когда оператор Лапласа заменяется эллиптическим оператором второго порядка, приводится в [12].

В дальнейшем мы обсуждаем две общие схемы, позволяющие с единой точки зрения рассмотреть приведенные примеры и ряд других, в том числе многомерных.

3. Операторы, сохраняющие подчинение (общая схема). Неравенство (5) допускает следующую интерпретацию. Пусть $f \in B_\omega$ и $\omega(x) = Me^{-ix}$. Тогда неравенство $|f(x)| \leq |\omega(x)|$ на вещественной оси влечет за собой неравенство $|f'(x)| \leq |\omega'(x)|$. Далеко идущие обобщения неравенства (5) связаны с заменой в этом утверждении функции Me^{-ix} функциями $\omega(x)$ гораздо более общего вида (а также с заменой оператора дифференцирования широким классом других операторов).

Первые нетривиальные классы таких мажорант $\omega(x)$ указал С. Н. Бернштейн еще в 1923 г., затем этот класс был расширен Н. И. Ахиезером. Ряд интересных результатов принадлежит В. С. Виденскому. По-своему тема мажорант развивалась в работах Н. Н. Меймана. Наиболее полные результаты были получены Б. Я. Левиным [3].

Общая схема такова. Рассматривается некоторое линейное (топологическое) пространство F целых функций одной или нескольких переменных (мы ограничимся в основном функциями одной переменной). На F вводится отношение $f_1 < f_2$ частичного порядка (подчинения), удовлетворяющее определенным дополнительным условиям. Во всяком случае отношение выбирается таким, чтобы из $f_1 < f_2$ вытекало интересующее нас неравенство, скажем, неравенство $|f_1(x)| \leq |f_2(x)|$ на вещественной оси. Далее, выбирается некоторый класс Ω мажорант (ниже классы H^+ , PH^+ , EH^+ ; обозначения не стандартные). Класс Ω называется допустимым, если имеет место эквивалентность $f < \omega \in \Omega \Leftrightarrow \zeta f + \omega \in \Omega$ при $|\zeta| \leq 1$. Ценность этого понятия ясна: проверка отношения подчинения оказывается равносильной доказательству включения, а это может упрощать дело. Существенно, конечно, что в естественных ситуациях удастся указывать нетривиальные допустимые классы мажорант. Предположим теперь, что некоторый (непрерывный) линейный оператор $T: F \rightarrow F$ обладает тем свойством, что $T(\Omega) \subseteq \Omega$, причем класс Ω допустим. Тогда $f < \omega \in \Omega \Rightarrow \zeta f + \omega \in \Omega \Rightarrow \Rightarrow \zeta Tf + T\omega \in \Omega \Rightarrow Tf < T\omega$. Таким образом, каждый оператор, сохраняющий принадлежность к Ω , сохраняет и отношение подчинения (элемента из F элементу из Ω), а такое отношение содержит интересующее нас неравенство.

4. Целые функции и мажоранты. Для описания конкретных результатов нам потребуется ввести обозначения и напомнить некоторые известные факты (детали см., например, в [2, 3 и 13]). Через H мы будем обозначать пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах (проективный

предел банаховых пространств). Сопряженное к H пространство E составляют (по определению) так называемые аналитические функционалы. Пространство E в сильной топологии есть индуктивный предел банаховых пространств, в частности, хотя это пространство не метризуемо, для него выполняется теорема замкнутом графике (Гротендик).

Пространство E находится в естественной двойственности с пространством целых функций $f(z)$ конечного экспоненциального типа (и по этой причине в дальнейшем будет часто с ним отождествляться). Действительно, пусть $\psi: H \rightarrow C$ — непрерывный линейный функционал и $f(z) = \psi(e_z)$, где $e_z(\lambda) = \exp \lambda z$. Тот факт, что каждая целая функция экспоненциального типа допускает ровно одну такую реализацию, в одномерном случае устанавливается при помощи преобразования Бореля. Напомним, что преобразованием Бореля целой функции $f(z)$ экспоненциального типа не выше σ называется функция

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^{n+1}},$$

где $a_n/n!$ коэффициенты Тейлора в нуле функции f . Функция $\hat{f}$ голоморфна во всяком случае при $|\lambda| > \sigma$. При $\operatorname{Re} \lambda > \sigma$ функция $\hat{f}$ представляется в виде преобразования Лапласа от f . Имеет место формула обращения

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r>\sigma} e^{\lambda z} \hat{f}(\lambda) d\lambda,$$

из которой следует, что $f(z) = \psi(e_z)$, если

$$\psi(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r>\sigma} g(\lambda) \hat{f}(\lambda) d\lambda. \quad (12)$$

Таким образом, форма $\hat{f}(\lambda) d\lambda$ реализует меры, отвечающие ψ .

Формула спаривания (12) тесно связана с композицией Шура:

если $g(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{n!} \lambda^n$, то

$$(f * g)(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n b_n}{n!} \lambda^n.$$

В таком виде композиция Шура определена даже в классе формальных степенных рядов. Если же $g \in H$ и $f \in E$, то возникают дополнительные тождества

$$(f * g)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r>\sigma} g(\lambda \zeta) \hat{f}(\zeta) d\zeta =$$

$$= g\left(\lambda \frac{d}{d\zeta}\right) f(\zeta) |_{\zeta=0} = g\left(\frac{d}{d\zeta}\right) f(\lambda\zeta) |_{\zeta=0} \quad (13)$$

(последнее равенство при $\lambda \neq 0$).

Пусть $T: E \rightarrow E$ — непрерывный линейный оператор и $k(\lambda, z) = (Te_\lambda)(z)$. Легко проверить, что интегральное ядро $k(\lambda, z)$ оператора T голоморфно по совокупности переменных, что $|k(\lambda, z)| \leq Ce^{\sigma|z|}$ при $|\lambda| \leq \rho < \infty$ и что для функций $f \in E$ типа $\leq \sigma$ $(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho>\sigma} k(\lambda, z) \hat{f}(\lambda) d\lambda$. Другие полезные представления для T можно получить, используя тождества (13).

Связь между непрерывными операторами из H в H и из E в E ясна. Отметим, кстати, что если осуществить «антиестественное» вложение $E \subset H$, то каждый непрерывный оператор $T: H \rightarrow H$, для которого $T(E) \subseteq E$, будет порождать непрерывный оператор из E в E (в силу теоремы о замкнутом графике).

Если непрерывный оператор $T: E \rightarrow E$ коммутирует с оператором $\frac{d}{dz}$, то для его интегрального ядра $k(\lambda, z)$ будет выполняться уравнение $\partial k / \partial z = \lambda k$, откуда легко следует, что

$$(Tf)(z) = g\left(\frac{d}{dz}\right) f(z), \quad (14)$$

где g — (произвольная) целая функция.

Существенную роль для дальнейшего играет оператор Иенсена

$$(J_n f)(z) = \left(1 + \frac{z}{n} \frac{d}{d\zeta}\right)^n f(\zeta) |_{\zeta=0}.$$

Ясно, что $J_n f$ — полином и что $J_n \rightarrow 1$ (соответственно, сильно в H и E).

Теперь мы опишем классы мажорант. Через H^+ будем обозначать совокупность тех $g \in H$, для которых $|g^*(\lambda)| \leq |g(\lambda)| \neq 0$ при $\text{Im } \lambda > 0$, где $g^*(\lambda) = g(\bar{\lambda})$. Если g — полином, то $g \in H^+$ в том и только в том случае, когда $g(\lambda) \neq 0$ в открытой верхней полуплоскости. Очевидно, что класс H^+ мультипликативен (но не аддитивен). Поэтому последнее утверждение о полиномах достаточно проверять только для полиномов первой степени, а для них оно очевидно. В случае произвольных целых функций условие $g(\lambda) \neq 0$ не достаточно для принадлежности к H^+ (функция $\exp i\sigma\lambda$, $\sigma > 0$).

Ясно, что H^+ замкнуто в $H \setminus \{0\}$. Замыкание множества полиномов из H^+ в $H \setminus \{0\}$ будем обозначать через RH^+ . Класс RH^+ — один из наиболее важных в обсуждаемом контексте — выгодно отличается от всего класса H^+ . Отметим, в частности, что (как это сразу вытекает из теоремы Гаусса о нулях производной полинома) класс RH^+ замкнут относительно дифференцирования (исключение — константы), тогда как H^+ — нет (функция $\lambda \exp \lambda^2$).

Из теоремы Адамара о разложении в произведение легко выводится, что $EH^+ = E \cap H^+ \subset RH^+$.

Функции классов H^+ , PH^+ и EH^+ могут быть весьма полно описаны в терминах канонических произведений (см. [3]), причём отчасти это делается сравнительно просто. Оказывается, например, что для нулей $\lambda_k \neq 0$ функции $g \in PH^+$ сходятся ряды $\sum \operatorname{Im} 1/\lambda_k$ (члены этого ряда неотрицательны) и $\sum 1/|\lambda_k|^2$ и что экспоненциальный порядок такой функции не превосходит 2.

Оказывается, каждое из следующих условий равносильно принадлежности целой функции g к классу PH^+

(а) $J_n g \in H^+$ ($n = 1, 2, 3 \dots$);

(б) $\tau_\zeta g \in H^+$ при $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$, где $(\tau_\zeta g)(\lambda) = g(\lambda - \zeta)$.

(в) $|g(\xi + i\eta)| \leq |g(\xi + ia)|$ при $|\eta| \leq a$ для каждого $a \geq 0$

(г) при каждом $a > 0$ и каждом $\xi \in \mathbf{R}$ функция, определяемая для $-2a \leq t \leq 0$ соотношением

$$t \rightarrow \frac{g(\xi + i(a+t))}{g(\xi + ia)},$$

продолжается до положительно определенной на оси t ;

д) $g, g', g'' \in H^+$.

Достаточность условия (а) очевидна, а необходимость получается по схеме доказательства теоремы Гаусса. Отсюда легко следует эквивалентность условий (а) — (г) принадлежности к PH^+ для полиномов и необходимость для всех $g \in H$. Конечно, необходимость очевидна и в отношении условия (д).

Предполагая, что для целой функции g выполняется условие (б), можно рассуждать так. Легко проверить, что $|g(\lambda)| \leq |\tau_\zeta g(\lambda)|$, если $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$. Применяя теорему Фрагмена — Линделёфа, отсюда просто вывести, что $\tau_\zeta g - g \in H^+$. Но тогда $g' \in H^+$. Далее, так как $\tau_\zeta g$ при $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$ вместе с g удовлетворяет условию (б), а сдвиг коммутирует с дифференцированием, то $\tau_\zeta g' \in H^+$ при $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$.

Положим $(\tau^h g)(\lambda) = e_\zeta(\lambda) h(\lambda)$. Ясно, что $\tau^h g$ вместе с g удовлетворяет условию (б), если $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$.

Комбинируя эти факты, мы получаем, что $\tau_\xi(\tau^\eta g)' \in H^+$, если $\operatorname{Im} \xi, \operatorname{Im} \eta \leq 0$. Другими словами, $(\tau^\zeta g)'$ удовлетворяет условию (б), если $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$. Итерируя теперь всю процедуру и выбирая подходящие параметры, легко убедиться, что g удовлетворяет условию (а).

С использованием условий (а) и (б) достаточность условий (в) и (г) проверяется еще проще.

Специальный смысл довольно неуклюжего на первый взгляд условия (г) прояснится в п. 6. Достаточность условия (д) — новый тонкий результат, положительно решающий старую проблему Поля [14]; комментарии по этому поводу см. в [15].

Функция $\omega \in H^+$ называется H^+ -мажорантой функции $g \in H$, если $|g(\lambda)|, |g^*(\lambda)| \leq |\omega\lambda|$ при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Возникающее отношение подчинения обозначим $g < \omega \in H^+$.

Аналогичное обозначение применяется при рассмотрении других классов мажорант. С помощью теоремы Фрагмена — Линделёфа устанавливается эквивалентность $g < \omega \in H^+ \leftrightarrow \zeta g + \omega \in H^+$

при всех ζ с $|\zeta| \leq 1$, означающая, что класс H^+ допустим. Допустимыми оказываются также классы RH^+ и EH^+ (детали доказательств и историю вопроса см., например, в [2, 3 и 16]).

5. Операторы, сохраняющие неравенства. Используя допустимость класса H^+ , легко получить следующую теорему Н. Н. Меймана: если $g < \omega \in H^+$, то на вещественной оси $|g'(x)| \leq |\omega'(x)|$. Отсюда сразу вытекает неравенство (5), если взять $\omega(\lambda) = Me^{-i\sigma\lambda}$. В работах [17, 18, 19] даются далеко идущие обобщения этой теоремы, часть из них отражена в [2].

Класс H^+ , однако, является весьма жестким, он не инвариантен даже относительно дифференцирования. Поэтому при исследовании операторов, сохраняющих неравенства, приходится сужать класс допустимых мажорант. В этом смысле классы RH^+ и EH^+ оказываются более выгодными. Более того, в рамках этих классов удается получить в известном смысле окончательные результаты. К изложению двух таких результатов Б. Я. Левина мы теперь переходим.

Для простоты формулировок мы ограничимся непрерывными операторами $T: E \rightarrow E$, коммутирующими с дифференцированием (со сдвигами). По формуле (14) каждый такой оператор допускает представление $(Tf)(z) = g\left(\frac{d}{dz}\right)f(z)$, где $g \in H$. Оказывается, что

$T(EH^+) \subseteq EH^+$ в том и только в том случае, когда $g^* \in RH^+$. Для доказательства достаточности можно сначала ограничиться полиномами f и g , воспользоваться соображениями типа теоремы Гаусса, а затем осуществить предельный переход. Доказательство необходимости может быть основано на специальном выборе полиномов f , позволяющем при помощи тождеств (13) сформировать в качестве Tf полином, рассмотрение которого приводит к заключению, что $J_n g \in H^+$, после чего остается воспользоваться условием (а) из п. 4.

Таким образом,

$$\begin{aligned} f < \omega \in EH^+ &\Rightarrow g\left(\frac{d}{dz}\right)f < g\left(\frac{d}{dz}\right)\omega \in EH^+ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left|g\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right| \leq \left|g\left(\frac{d}{dx}\right)\omega(x)\right| \end{aligned}$$

на вещественной оси, если $g \in RH^+$.

Эта теорема охватывает целый ряд нетривиальных равномерных неравенств, например, полиномиальные неравенства Бернштейна (см. [1, с. 335]) и неравенство (6) Боаса. Для получения последнего неравенства достаточно положить $\omega(x) = Me^{-i\sigma x}$ и $g(\lambda) = \cos \sigma(\lambda + \alpha)$. Для доказательства неравенства (8) требуются дополнительные соображения, так как вместо $\cos \sigma\lambda$ нам пришлось бы иметь дело с $\operatorname{ch} \sigma\lambda$.

Имея в виду условие (г) п. 4 и содержание двух следующих пунктов, придадим теореме Левина такую форму: оператор

$g\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dz}\right)$ тогда и только тогда сохраняя подчинение $f < \omega \in E$ и, следовательно, приводит к неравенствам на вещественной оси, когда $g(\lambda)$ есть равномерный на компактах предел полиномов без нулей в левой полуплоскости. Заметим, что если для полинома $p(0) = 1$ и все нули расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < -a < 0$, то $p(\lambda)$ продолжается с отрезка $[-2a, 0]$ положительно определенной функции на оси. Таким образом, рассматривая сужения полинома на всевозможные прямые, мы получаем большой запас положительно определенных функций.

Б. Я. Левину принадлежит также следующий тонкий результат, в известном смысле центральный в рассматриваемом круге вопросов. Оказывается, если $f \in E$, $\omega \in EH^+$ и для типов выполняется неравенство $\sigma_f \leq \sigma_\omega$, то условие подчинения $f < \omega$ равносильно неравенству $|f(x)| \leq |\omega(x)|$ на вещественной оси. Известные доказательства этого факта не просты.

Сопоставление указанных теорем позволяет делать заключения типа $|f(x)| \leq |\omega(x)| \Rightarrow |(Tf)(x)| \leq |(T\omega)(x)|$, оставаясь в области вещественного переменного.

Пусть G — произвольная выпуклая область на плоскости. Мы можем определить класс H_G^+ «по пересечению», используя вместо вещественной оси опорные прямые к G . Для полинома $f \in H_G^+$ тогда и только тогда, когда все нули f расположены в $\bar{G}$. Легко указать замкнутый конус K_G , обладающий тем свойством, что если все нули полинома q принадлежат K_G , то $q\left(\frac{d}{dz}\right)f \in H_G^+$ для каждого полинома $f \in H_G^+$. Так как подчинение $f_1 < f_2 \in H_G^+$ включает неравенство $|f_1(z)| \leq |f_2(z)|$ вне G , то отсюда можно вывести неравенства типа $\left|q\left(\frac{d}{dz}\right)f_1\right| \leq \left|q\left(\frac{d}{dz}\right)f_2\right|$ на ∂G при определенной связи между (полиномами) f_1 и f_2 на ∂G (ср. [6, с. 220]).

В теории операторов, сохраняющих неравенства, даже в рамках описанной выше общей схемы, остаются интересные вопросы. В частности, мало известно о допустимых классах, отличных от RH^+ и EH^+ , например, о расширениях RH^+ или $B_\sigma \cap H^+$.

С другой стороны, вместо комплексной плоскости и отражения по мнимой оси, быть может, не лишено смысла рассмотреть достаточно хорошее комплексное многообразие X и достаточно хорошо действующую на нем группу Γ . Если G — фундаментальная область, то класс H^+ можно задать условием $|\omega(\gamma z)| \leq |\omega(z)| \neq 0$ при всех $z \in G$ и $\gamma \in \Gamma$ и в соответствии с этим определить подчинение. Случай, когда $X = \mathbb{C}^n$, а Γ — (приводимая) группа, порожденная покоординатными отражениями в мнимых осях, исследован Б. Я. Левиным. Интересно было бы с точки зрения теории подчинения рассмотреть неприводимые конечные группы (Коксетера), порожденные отражениями. Другие обобщения могут быть связаны с

рассмотрением классических обобщений верхней полуплоскости. Наконец, не исключено, что возможен вариант намеченной здесь красивой теории подчинения, имеющий дело не с аналитическими функциями, а с голоморфными отображениями комплексных многообразий одинаковой размерности, когда подчинение $f < \omega$ должно вызывать подчинение $df < d\omega$ дифференциалов на определенных подмногообразиях. Перечисленные вопросы (пока, впрочем, не очень определенные), по-видимому, могут иметь отношение к развитию теории аналитических функционалов и гиперфункций.

6. Эрмитовы элементы и эрмитовы операторы. Опишем некоторые результаты, позволяющие ряд неравенств бернштейновского типа получать в качестве следствий простых общих фактов теории банаховых алгебр.

Пусть A — произвольная банахова алгебра с единицей 1 над полем C комплексных чисел, например, алгебра всех ограниченных операторов банахова пространства, с обычными условиями на норму $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, $\|1\| = 1$. Спектр элемента a будет обозначаться через $\text{Spec}_A(a)$ или $\text{Spec}(a)$. Спектральный радиус $|a|$ определяется соотношением

$$|a| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \max \{ |\lambda| : \lambda - a \in A^{-1} \},$$

где A^{-1} — группа обратимых элементов. Если алгебра A коммутативна, то, согласно теории Гельфанда, $|a| = \max |\varphi(a)|$, где максимум берется по всем $\varphi \in \text{Hom}(A, C)$. Пространство максимальных идеалов коммутативной A отождествляется с $\text{Hom}(A, C)$ в слабой топологии и обозначается $\text{Spec}(A)$. Следующее понятие по отношению к операторам банахова пространства было введено Люмером [20] (см. также [21]). Элемент $a \in A$ называется эрмитовым, если $\|\exp ita\| = 1$ при всех $t \in R$ (15). Понятие эрмитова элемента носит метрический характер. На практике встречаются элементы (операторы), для которых вместо (15) выполняется условие $\|\exp ita\| = O(1)$ при $|t| \rightarrow \infty$. Все качественные выводы при этом сохраняются, поскольку выполнения условия (15) можно добиться переходом к эквивалентной норме. Известны (см. [22, с. 55]) различные критерии эрмитовости, в частности,

(а) $\|1 + ia\| = 1 + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in R$;

(б) $\psi(a) \in R$ для каждого положительного функционала ψ . Функционал ψ называется положительным, если $\|\psi\| = \psi(1)$. Из (б) вытекает, что вещественная линейная комбинация эрмитовых элементов — эрмитов элемент, независимо от того, коммутируют слагаемые или нет. Из (б) следует также, что в случае ограниченных операторов гильбертова пространства эрмитовость в смысле (15) совпадает с обычной, т. е. самосопряженностью относительно естественной инволюции.

Серию нетривиальных примеров эрмитовых операторов мы получаем, рассматривая в различных пространствах функций оператор $a = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$. В частности, в пространствах тригонометрических

полиномов, снабженных однородной нормой, оператор a действует непрерывно, оператор $\exp ita$ реализуется сдвигом и, следовательно, a эрмитов. То же самое относится к пространствам B_σ и их L -аналогам (см. п. 2).

Хорошо известно, что для эрмитовых операторов гильбертова пространства $\|a\| = |a|$. В. Э. Кацнельсон [23] и почти одновременно несколько других авторов [24, 25, 26] обнаружили, что $\|a\| = |a|$ для каждого эрмитова элемента.

Рассуждение Кацнельсона вкратце таково. Пусть ψ — произвольный линейный функционал на A с нормой 1. Положим $f(z) = \psi(\exp iza)$. Легко проверяется, что $f \in B_\sigma$, где $\sigma = |a|$. Поэтому используя неравенство (5), получаем $|\psi(a)| = |f'(0)| \leq \sigma$, и из теоремы Хана — Банаха вытекает, что $\|a\| \leq \sigma$.

Если вместо неравенства (5) использовать несколько более совершенный его вариант (приведенный, скажем, на с. 190 в [2]), то получится теорема Синклера [25]; $\|\lambda_0 + \lambda_1 a\| = |\lambda_0 + \lambda_1 a|$ при любых комплексных λ_0, λ_1 .

Довольно простое доказательство совпадения нормы и спектрального радиуса для эрмитовых элементов, вообще не использующее неравенств Бернштейна, а только основные факты функционального исчисления, дано в [22, с. 56]. Спектр эрмитова элемента, конечно, вещественный. Предположим, что $|a| < \pi/2$. Тогда можно подставить a вместо λ в тождество

$$\lambda = \arcsin(\sin \lambda). \quad (16)$$

Так как сумма модулей тейлоровских коэффициентов для $\arcsin z$ как раз равна $\pi/2$, выходит, что $\|a\| \leq \pi/2$. Кстати, неравенства (1), (5) и (9) отсюда получаются в качестве простых следствий (что наряду с доказательством совпадения нормы и спектрального радиуса для эрмитовых операторов гильбертова пространства удобно использовать в практике преподавания).

Заметим, что подстановка в тождество (16) вместо λ оператора $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ в пространстве B_σ с $\sigma \leq \pi/2$ приводит как раз к интерполяционной формуле М. Рисса, упомянутой во введении.

При всем изяществе приведенных рассуждений они не тривиализуют теоремы Синклера и (очевидной, конечно) теоремы о совпадении нормы и спектрального радиуса для квадрата эрмитова элемента. Дело в том, что квадрат эрмитова элемента, в отличие от ситуации гильбертова пространства, вообще говоря, не эрмитов.

Пример. Оператор a^2 при эрмитовом a , как можно убедиться, используя разложение в ряд Фурье функции $\exp i\lambda^2$, удовлетворяет условию

$$\|\exp ita^2\| \leq c_1 + c_2 |t|^{1/2}.$$

Эта оценка асимптотически точна. Если в качестве a взять $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ в простран-

стве B_0 , то нижняя оценка сведется к оценке решения задачи Коши с начальными данными из B_0 для уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которая легко осуществляется при помощи стандартного варианта леммы ван дер Корпута. В результате для указанного оператора возникает эквивалентность $\|\exp ita^2\| \sim |t|^{1/2}$ (основанный на другой идее вариант примера, дающий несколько более грубый результат, мне сообщил В. Шульман). Если вместо B_0 взять $B_0 \cap L^p$, то наш прием в сочетании с теоремой Рисса — Торина дает в этом случае (при $p > 2$) $\sim |t|^{1/2-1/p}$.

Общий вопрос, который теперь естественно возникает, — это описание класса функций g , для которых $\|g(a)\| = |g(a)|$ при эрмитовых a . Частично эта задача (в сторону достаточности) была решена Х. Кенигом [10]. Общий подход был намечен нами в работах [27 и 28] (кстати, в [28] имеются небольшие погрешности, которые мы здесь устраним).

Уточним сначала постановку вопроса.

Как известно (см. например, [29]), стандартное функциональное исчисление использует формулу Коши. Если функция $g(\lambda)$ голоморфна в окрестности спектра элемента $a \in A$, а контур Γ расположен в этой окрестности и «охватывает» спектр, то полагают

$$\tilde{g}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda) (\lambda - a)^{-1} d\lambda. \quad (17)$$

Формула (17) задает гомоморфизм из алгебры функций, голоморфных в окрестности спектра, в определенную коммутативную подалгебру алгебры A . Функции $g(\lambda) \equiv \lambda$ сопоставляется $\tilde{g}(a) = a$. Теорема об отображении спектров устанавливает, что

$\text{Спек}(\tilde{g}(a)) = g(\text{Спек}(a))$. В частности, если $\tilde{g}(a) = 0$, то $g|_{\text{Спек}(a)} = 0$.

Для эрмитовых элементов функциональное исчисление может быть расширено (подобно тому, как это имеет место для эрмитовых операторов гильбертова пространства). Для дальнейшего полезно иметь в виду инвариантность спектра эрмитова элемента. Действительно, вещественность спектра есть следствие ограниченности семейства $\{\exp ita\}$. С другой стороны, если B — топологическое расширение алгебры A , то для всех элементов из A $\text{Спек}_B(a) \subseteq \text{Спек}_A(a)$ и $\partial \text{Спек}_A(a) \subseteq \text{Спек}_B(a)$. Поэтому для эрмитовых элементов $\text{Спек}_B(a) = \text{Спек}_A(a)$.

Максимальным классом функций $g(\lambda)$, которые возможно «применять» ко всем эрмитовым элементам, оказывается класс функций, представимых интегралом Фурье — Стильтьеса. Для индивидуальных элементов достаточно такой представимости в вещественной окрестности спектра. Напомним, что согласно теореме

Винера — Шилова интегралы Фурье — Стильтьеса локально совпадают с абсолютно сходящимися рядами Фурье.

Если a — эрмитов элемент и

$$\hat{\nu}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\nu(t),$$

то мы полагаем

$$\hat{\nu}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp itad\nu(t). \quad (18)$$

Формулой (18) определяется не увеличивающий нормы гомоморфизм из алгебры мер ограниченной вариации со сверткой в качестве умножения в алгебру A .

Довольно просто проверяются следующие свойства описанного исчисления:

а) если $\hat{\nu}_1(\lambda) = \hat{\nu}_2(\lambda)$ в вещественной окрестности спектра, то $\hat{\nu}_1(a) = \hat{\nu}_2(a)$;

б) если функция $\hat{\nu}(\lambda)$ продолжается до голоморфной в некоторой комплексной окрестности спектра функции $g(\lambda)$, то $\hat{\nu}(a) = \hat{g}(a)$. Это утверждение достаточно доказывать для полиномиальных продолжений. Оно показывает, что «исчисление» (18) естественно продолжает «исчисление» (17).

в) $\text{Спекс } \hat{\nu}(a) = \hat{\nu}(\text{Спекс } (a))$.

Неравенство $\|\hat{\nu}(a)\| \leq \|\nu\|$ можно усилить, взяв справа нижнюю грань по всем мерам, преобразование Фурье которых совпадает с $\hat{\nu}(\lambda)$ в некоторой (вещественной) окрестности спектра. Получаемая при этом оценка точна.

Если $\text{Спекс } (a)$ есть множество спектрального синтеза, то для справедливости утверждения из а) достаточно (и необходимо) совпадения $\hat{\nu}_1$ с $\hat{\nu}_2$ на самом спектре. Точное определение множеств спектрального синтеза (и соответствующие ссылки) в контексте произвольных локально компактных абелевых групп мы дадим ниже. Заметим, что согласно обобщенной теореме Диткина этим свойством обладает каждое замкнутое множество на прямой, граница которого не содержит непустых совершенных подмножеств.

Замечание. Свойство б) можно с успехом использовать, когда нас не интересуют точные константы: достаточно представить $g(\lambda)$ в вещественной окрестности спектра в виде преобразования Фурье какой-нибудь суммируемой функции (или меры) и оценить норму последней. С другой стороны, вычисление нижней грани, о которой сказано выше, может оказаться очень трудной

задачей. В дальнейшем мы как раз и описываем те случаи (имеющие отношение к бернштейновским неравенствам), когда эта задача в определенном смысле решается тривиально.

7. Положительно определенные функции. В дальнейшем нам потребуется использовать понятие положительно определенной функции систематически и мы напомним здесь вкратце основные факты (детали см., например, в [30]). Чтобы не повторяться, будем рассматривать комплексные функции на произвольной локально компактной абелевой группе Λ (основной пример $\Lambda = \mathbb{R}$, но в дальнейшем нам потребуются и другие). Группу непрерывных характеров группы Λ обозначим через $\hat{\Lambda}$, а значение

характера $t \in \hat{\Lambda}$ на элементе $\lambda \in \Lambda$ — через $\langle t, \lambda \rangle$. Элемент меры Хаара на группе Λ обозначается $d\lambda$ (в стандартных ситуациях мера Хаара нормируется стандартно, скажем, на прямой — это мера Лебега). Напомним, что характеры прямой отождествляются с вещественными числами, так что $\langle t, \lambda \rangle = \exp i t \lambda$.

Группа $\hat{\Lambda}$ в топологии равномерной сходимости на компактах сама является локально компактной, и двойственная к ней, согласно теореме Понтрягина, отождествляется с Λ .

Функция g называется положительно определенной, если

$$\sum_{j,k} g(\lambda_j - \lambda_k) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0$$

для любых конечных наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ и $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$. Каждая положительно определенная функция удовлетворяет неравенству $|g(\lambda)| \leq g(0)$ и неравенству М. Г. Крейна

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)|^2 \leq 2g(0) [g(0) - \operatorname{Re} g(\lambda_1 - \lambda_2)].$$

Из этого неравенства сразу вытекает теорема А. П. Артеменко: положительно определенная функция является равномерно непрерывной, если ее вещественная часть непрерывна в нуле (так как для положительно определенной функции $g(-\lambda) = \overline{g(\lambda)}$, то это условие можно ослабить). С другой стороны, положительно определенная функция (на прямой) не обязана даже быть измеримой. Непрерывные положительно определенные функции полностью описываются теоремой Бохнера, согласно которой для каждой такой функции существует ровно одно представление вида

$$g(\lambda) = \int_{\hat{\Lambda}} \langle t, \lambda \rangle d_{\mu}(t),$$

где μ — неотрицательная регулярная мера. В частности, при $\Lambda = \mathbb{R}$ и $g(0) = 1$ получаем представление

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t \lambda} d\mu(t),$$

где μ — вероятностная мера, т. е. g — характеристическая функция вероятностного распределения.

Замечание. Как видно из определения, понятие положительной определенной функции может быть локализовано: можем выбирать точки λ_k только из некоторого подмножества, например, из интервала $(-a, a)$ вещественной оси, когда $\Lambda = \mathbf{R}$. Возникающая при этом проблема продолжения оказалась трудной. В одномерной ситуации она положительно решается (в нескольких вариантах) в работах [31—35] и др. Кстати, ключевым моментом является теорема Рисса — Фейера, алгебраический вариант которой заключается в том, что неотрицательный вещественный полином есть квадрат модуля комплексного полинома. Данное положение не распространяется на полиномы от нескольких переменных (Д. Гильберт). Кроме того, в случае нескольких переменных дополнительное препятствие возникает в связи с неединственностью в одномерной задаче. Ряд важных результатов для многомерной задачи получен Ю. М. Березанским [36].

Судить о положительной определенности по графику функции — примерно то же, что судить по графику функции о сходимости ее ряда Фурье. Есть, однако, удобные признаки и среди них — так называемый критерий Пойа (см., например, [37, с. 581]; на самом деле речь идет о достаточном условии положительной определенности): если g — непрерывная вещественная четная функция, равная 1 в начале координат и равная 0 на бесконечности, и если g имеет вогнутый график, то она является положительно определенной (вогнутость — это $g'' \geq 0$).

8. Совпадение нормы и спектрального радиуса. Теперь мы переходим к описанию ситуаций, при которых $\|g(a)\| = |g(a)|$, где a — эрмитов элемент, а $g = \hat{v}$ — преобразование Фурье меры ограниченной вариации.

Пусть $\lambda_0 \in \text{Спек}(a)$ и $0 = |g(\lambda_0)| = \max \{|g(\lambda)| : \lambda \in \text{Спек}(a)\}$. Определим функцию $h(\lambda)$ соотношением $g(\lambda_0)h(\lambda) = g(\lambda + \lambda_0)$. Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) функция $h(\lambda)$ продолжается из некоторой окрестности множества $-\lambda_0 + \text{Спек}(a)$ до непрерывной положительно определенной функции;

б) множество $\text{Спек}(a)$ есть множество спектрального синтеза и указанное выше продолжение осуществимо с $-\lambda_0 + \text{Спек}(a)$. Тогда $\|g(a)\| = |g(a)|$.

Доказательство просто. Предположим, что выполняется условие а). Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_0 = 0$ и $g(\lambda_0) = 1$. Тогда по условию существует такая вероятностная мера μ , что $g(a) = \hat{\mu}(a)$. Следовательно, $\|g(a)\| \leq \|\mu\| = 1 = |g(\lambda_0)| = |g(a)|$.

Любопытно, что эта теорема имеет некоторое содержательное обращение. Рассмотрим компакт $S \subset \mathbf{R}$. Обозначим через B_S сово-

купность целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси $\hat{R}$, преобразование Фурье которых (в смысле обобщенных функций) сосредоточено в S (другими словами, S содержит спектр Бьерлинга). Пространство B_S наделяется sup -нормой и становится банаховым пространством. В этом пространстве действует оператор $a = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$, и его спектр совпадает с S . Предположим теперь, что $\|g(a)\| = |g'(a)|$ для некоторой функ-

ции $g = \hat{v}$. Построим функцию h так же, как и выше (в качестве λ_0 берется произвольная точка из S , для которой $|g(\lambda_0)| = |g'(a)|$). Оказывается, что в этих условиях функция h совпадает на $-\lambda_0 + S$ с положительно определенной функцией.

Подчеркнем, что непрерывность положительно определенной функции, с которой совпадает h на $-\lambda_0 + S$, не гарантируется и, вообще говоря, не имеет места (см. ниже примеры, связанные с множествами Хельсона). Однако, если S — достаточное густое множество, например, отрезок, то непрерывность (по теореме Артеменко) возникает автоматически.

Сформулированная теорема обращения также имеет довольно стандартное доказательство. Предположим снова, что $\lambda_0 = 0$ и $g(\lambda_0) = 1$. Рассмотрим на B_S функционал $\bar{\Phi}(f) = (g(a)f)(0)$. Легко видеть, что для этого функционала $\|\bar{\Phi}\| = \Phi(1) = 1$. Продолжим функционал Φ с сохранением нормы на все пространство ограниченных функций на $\hat{R}$. Полученный функционал (который обозначим тем же символом) будет положительным, так как его норма достигается на единице (положительность означает, что $\bar{\Phi}(f) \geq 0$, если $f \geq 0$). Пусть $\varphi(\lambda) = \bar{\Phi}(e_\lambda)$, где $e_\lambda(t) = \exp i\lambda t$. Из положительности функционала Φ вытекает, что функция $\varphi(\lambda)$ является положительно определенной. С другой стороны, очевидно, что $\varphi(\lambda) = g(\lambda)$, если $\lambda \in S$, и теорема доказана.

Разумеется, не любой эрмитов элемент годится для доказательства теоремы обращения, однако легко дать достаточное условие пригодности.

Предположим, что алгебра A порождается эрмитовым элементом a . Каждому функционалу $\psi \in A^*$ сопоставим функцию $f(z) = \psi(\exp iza)$. Легко видеть, что при этом возникает линейный изоморфизм между A^* и некоторым подпространством E_a пространства B_S , где $S = \text{Spec}(a)$. Перенесем норму с A^* на E_a . Оператор, сопряженный оператору умножения на a , переходит в оператор $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$. Пространство E_a содержит характеры, отвечающие точкам $\lambda \in \text{Spec}(a)$, — они возникают из мультипликативных функционалов ψ . Легко убедиться, что если нормы линейных комбинаций таких характеров в E_a совпадают с их sup -нормами, то элемент a «достаточен» для доказательства теоремы обращения.

Мы еще вернемся к алгебрам, порожденным эрмитовыми элементами, а сейчас сравним сформулированные выше теоремы с теоремами Левина об операторах, сохраняющих подчинение.

Рассмотрим оператор вида $g\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right)$ в пространстве E . Предположим, что условия теоремы Левина для функции g выполняются. Если теперь $f \in B_0$, то полагая $\omega(x) = \|f\| e^{-ix}$, получим

$$\left| g\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) f(x) \right| \leq |g(-\sigma)| \cdot \|f\|, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

т. е.

$$\left\| g\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right\| = \left| g\left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx}\right) \right| = |g(-\sigma)|.$$

Таким образом, положительная определенность здесь имеет «с запасом», что вполне согласуется с условием g принадлежности к классу RH^+ . Конечно, теоремы Левина в определенных условиях приводят к поточечным неравенствам, но условия на g оказываются более жесткими.

В нашей схеме доказательство ряда неравенств типа приведенных в п. 2 сводится к проверке положительной определенности функций (от дифференцирований), задающих соответствующий оператор. В одномерном случае для этой цели зачастую хватает критерия Пойа. На этом пути легко получаются неравенства (5), (6), (7), (9), (10), теорема Синклера $\|\lambda_0 + \lambda_1 a\| = |\lambda_0 + \lambda_1 a|$ (а вместе с ней обобщенное неравенство Бернштейна [2, с. 190]) и, кроме того, общее объяснение фактов типа $\|a^2\| = |a^2|$, $\|a^{-1}\| = \|a^{-1}\|$, если $\hat{a} > 0$ (ослабленный вариант неравенства Бора — Фавара).

Неравенство (8) с абстрактной точки зрения равносильно тому факту, что для эрмитовых элементов $\|\sin a\| = |\sin a|$, если $|a| \leq \pi/2$. Критерий Пойа здесь не срабатывает (имеется выпуклость вместо вогнутости), общая теорема Левина непосредственно не применима. В этом тонкость неравенства (8). Вместе с тем, для доказательства положительной определенности достаточно периодически продолжить «сломанный косинус» с соответствующего интервала и коэффициенты Фурье «сами собой» оказываются положительными.

Функция $g_a(\lambda) = \begin{cases} (1 - |\lambda|)^a, & \text{если } |\lambda| \leq 1; \\ 0, & \text{если } |\lambda| > 1 \end{cases}$ при $\lambda \geq 1$ является положительно определенной (критерий Пойа). Это приводит к неравенствам Бернштейна для дробных производных с константой σ^2 .

Функция $h_\beta(\lambda) = \begin{cases} 1 - |\lambda|^\beta, & \text{если } |\lambda| \leq 1; \\ 0, & \text{если } |\lambda| > 1 \end{cases}$ является положительно определенной при $0 < \beta \leq 1$. Рассмотрение произведений

g_α позволяет установить, что при $0 < \alpha < 1$ функция g_α не продолжается до положительно-определенной с отрезка $0 \leq \lambda \leq 1$. Это означает, что для некоторых эрмитовых элементов со спектром на отрезке $0 \leq \lambda \leq 1$ заведомо $\|a^\alpha\| > |a|^\alpha$, если $0 < \alpha < 1$. Можно показать, что в описанной ситуации

$$\|a^\alpha\| \leq \frac{2}{1+\alpha} |a|^\alpha. \quad (19)$$

Замечание. Неравенство (19) при $0 < \alpha < 1$ точнее приведенного в [27] неравенства $\|a^\alpha\| \leq (2-\alpha) |a|^\alpha$, хотя оба они асимптотически точны при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow 1$. Неравенство (19) М. Смушкович и В. Писарский получают при помощи довольно простых, но изящных манипуляций с коэффициентами Фурье. Более грубые неравенства для дробных производных известны давно (см. [5, с. 266]), где имеется указание на работу Сивина 1941 г). Еще до опубликования статьи [27] К. И. Осколков сообщил нам, что для тригонометрических полиномов степени h существует такое $\alpha_0 = \alpha_0(h) < 1$, что при $\alpha \geq \alpha_0$ дополнительный множитель к n^α в неравенстве для дробных производных все еще остается равным 1, но что $\alpha_0(h) \rightarrow 1$ при $h \rightarrow \infty$. Второй из этих фактов теперь объясняется просто отсутствием положительно определенного продолжения для g_α с отрезка $[0, 1]$.

Первый факт также можно объяснить из общих соображений: положительная определенность непосредственно связана с положительной определенностью некоторой теплоцевой матрицы, поэтому в конечномерной ситуации срабатывает устойчивость спектра. В бесконечномерном случае спектр может иметь точку накопления в нуле, небольшое возмущение «смазывает» допредельные точки спектра влево, и положительная определенность теряется. Точная константа в неравенстве типа (19) нам не известна.

9. Изометрические представления. Описанные выше теоремы распространяются на функции от нескольких коммутирующих эрмитовых элементов, но удобнее сразу перейти к представлениям групп. Ясно, что с каждым эрмитовым элементом естественно связано изометрическое представление $t \rightarrow \exp ita$ группы R , и именно этот мотив развивается.

Пусть Λ — произвольная локально компактная абелева группа и $\hat{\Lambda}$ — группа характеров. Рассмотрим сильно непрерывное представление $T: \hat{\Lambda} \rightarrow GL(F)$ группы $\hat{\Lambda}$ обратимыми изометриями банахова пространства F . Представление T индуцирует по формуле

$$T_\lambda f = \int_{\hat{\Lambda}} T_\lambda f d\nu(t)$$

представление $T: M(\hat{\Lambda}) \rightarrow L(F)$ алгебры $M(\hat{\Lambda})$ регулярных борелевских мер ограниченной вариации на $\hat{\Lambda}$ со сверткой в ка-

честве умножения в алгебру $L(F)$ ограниченных линейных операторов на F . Ясно, что это представление не увеличивает нормы. Как известно (см., например, [38, 39]), алгебра M полупроста, но, вообще говоря, нерегулярна по Шилову и не симметрична. Напротив, содержащаяся в ней алгебра L^1 (вложение $h \rightarrow hdt$) регулярна и симметрична и ее спектр, т. е. пространство максимальных идеалов, естественно отождествляется с (компактифицированной) группой $\Lambda \subset \text{Spec}(M(\hat{\Lambda}))$.

Теперь нас интересует вопрос о совпадении $\|T_v\|$ с $|T_v|$. Пусть $\text{Ker } T$ — ядро представления T . Спектром $\text{Spec } T$ представления T будем называть оболочку идеала $\text{Ker } T$, т. е. совокупность максимальных идеалов (точек) из $\text{Spec}(M(\hat{\Lambda}))$, содержащих $\text{Ker } T$ (в которых аннулируется каждая функция из $\text{Ker } T$). Аналогичное понятие имеется в [40]. Подобно тому, как это сделано в [40], легко проверить, что представление $T: \hat{\Lambda} \rightarrow GL(F)$ тогда и только тогда равномерно непрерывно, когда $\text{Spec } T \subset \hat{\Lambda}$. Заметим, что компактность спектра представления равносильна некоторому «грубому неравенству бернштейновского типа» [41].

Если $\hat{\Lambda} = R^n$, то каждому равномерно непрерывному представлению соответствует такой однозначно определенный набор $a_1, \dots, a_n \in L(F)$ эрмитовых элементов, что

$$T_t = \exp \sum_1^n it_k a_k, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in R^n.$$

В этой ситуации $\text{Spec } T$ естественно отождествляется с совместным спектром в смысле Шилова набора $a_1, \dots, a_n$, причем совместный спектр можно «отсчитывать», отправляясь, например, от минимальной замкнутой подалгебры, содержащей $a_1, \dots, a_n$. Как и в случае одного элемента, функциональные исчисления оказываются здесь согласованными; если, например, $\hat{v}$ совпадает в вещественной окрестности совместного спектра с полиномом $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, то $T_v = p(a_1, \dots, a_n)$.

При отсутствии равномерной непрерывности потребуются ввести одно дополнительное понятие. Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Следуя А. Г. Баскакову [42], будем говорить, что алгебра A усиленно регулярна (по Шилову), если для любых двух различных точек $\xi_1, \xi_2 \in \text{Spec}(A)$ существуют такие элементы $a_1 a_2 \in A$, что $\hat{a}_k(\xi_k) = 1$, но $a_1 a_2 = 0$ (здесь $\hat{a}$ — преобразование Гельфанда). Легко проверить, что если это условие выполняется, то аналогичная разделимость имеет место и с заменой точек непересекающимися замкнутыми множествами. Очевидно, каждая полупростая регулярная алгебра, а также ее фактор-алгебра будет усиленно регулярной. Согласно теореме Шилова

об идемпотентах, усиленно регулярна каждая алгебра с вполне несвязным пространством максимальных идеалов. Простой анализ другой теоремы Шилова о регулярности показывает, что алгебра усиленно регулярна, если существует разделяющее точки спектра алгебры семейство $\{\hat{a}\}$, подчиненное карлемановскому условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \|\exp ita\|}{1+t^2} dt < \infty.$$

Короче говоря, любая квалифицированная регулярность приводит к усиленной регулярности. С другой стороны, трудно усомниться в существовании таких алгебр A , для которых $\hat{A}$ регулярна по Шилу, тогда как A не является усиленно регулярной, но примером мы не располагаем.

Если $\varphi: A \rightarrow B$ — непрерывный гомоморфизм банаховых алгебр, то $\text{Spes}_B(\varphi(a)) \supseteq \text{Spes}_A(a)$ для каждого $a \in A$. Используя идею квазианалитичности, легко построить примеры, в которых $\text{Spes}(A)$ совпадает с границей Шилова, φ является мономорфизмом с плотным образом, но обратное включение все-таки не имеет места. М. С. Мельников и В. П. Хавин указали мне на одну конструкцию А. А. Гончара [43], позволяющую дополнительно сделать алгебру A равномерной, а алгебру B — алгеброй всех непрерывных функций на компакте.

Вместе с тем, если алгебра A усиленно регулярна, то при любом мономорфизме $\varphi: A \rightarrow B$ $\text{Spes}_B(\varphi(a)) = \text{Spes}_A(a)$ для всех $a \in A$, независимо от того, коммутативна B или нет.

Отсюда вытекает следующее: если A — такая замкнутая подалгебра в $M(\hat{\Lambda})$, что алгебра $A/(A \cap \text{Ker } T)$ усиленно регулярна, то

$$\text{Spes}_{L(F)}(T_v) = \hat{v}(\text{Spes } T)$$

для всех $v \in A$ (ср. с леммой 2.1 в [40]). Смысл этого факта в том, что спектр оператора T_v достаточно широк.

Отсюда по уже описанной схеме выводится следующая теорема. Пусть алгебра A удовлетворяет сформулированному выше условию и $v \in A$. Пусть $\lambda_0 \in \text{Spes } T$

$$|\hat{v}(\lambda_0)| = \max \{|\hat{v}(\lambda)| : \lambda \in \text{Spes } T\}.$$

Если существует такая мера μ , что $\|\mu\| = 1$ и $v - \hat{v}(\lambda_0)\mu \in \text{Ker } T$, то $\|T_v\| = |T_v| = |\hat{v}(\lambda_0)|$.

Эта теорема обобщает приведенную в предыдущем пункте. Различие между случаями a и b исчезло из-за инвариантности формулировки, включающей принадлежность $v - \hat{v}(\lambda_0)\mu$ к ядру

представления. Заметим, что для равномерно непрерывных представлений условие усиленной регулярности снимается, точнее оно выполняется автоматически ввиду регулярности алгебры

$L^1(\hat{\Lambda})$.

В классе равномерно непрерывных представлений имеют место теоремы обращения, на формулировках которых мы останавливаться не будем.

10. Примеры и замечания. Пусть A — произвольная банахова алгебра с единицей и $a_1, \dots, a_n$ — набор коммутирующих эрмитовых элементов. Положим

$$a = \zeta_1 a_1 + \dots + a_n \zeta_n, \quad \zeta_k \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $a = a' + ia''$, где a', a'' — эрмитовы и коммутируют. Если имеем дело с операторами гильбертова пространства (или с C^* -алгеброй), то a нормален и $\|a\| = |a|$. Аналогичное равенство, согласно теореме Синклера, будет иметь место, если $n = 2$ и, кроме того, один из элементов — единица. В общем случае имеем

$$\|a\| \leq \|a'\| + \|a''\| = |a'| + |a''| \leq 2|a|, \quad (20)$$

причем равенство $\|a\| = 2|a|$ оказывается возможным (см. ниже). Положим $b = a_1^2 + \dots + a_n^2$. Тогда

$$\|b\| \leq |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq n|b|, \quad (21)$$

причем здесь также возможен случай равенства.

Неравенство (20) может быть положено в основу доказательства и обобщений классической теоремы Гельфанда — Наймарка о C^* -алгебрах. Поясним это на примере коммутативных алгебр. Предположим, что каждый элемент a алгебры A представим в виде $a' + ia''$, где a', a'' — эрмитовы. Такое представление единственно (кстати, независимо от того, находимся ли мы в коммутативной ситуации или нет) и поэтому на A возникает инволюция $a' + ia'' \rightarrow a' - ia''$. Из формулы (20) вытекает, что гельфандовское представление осуществляет топологический изоморфизм, и остается показать, что на самом деле это — изометрия алгебры A на алгебру $\mathbb{C}(\text{Spec}(A))$. Предположим, что $|a| < 1$. Легко видеть, что при $|\zeta| = 1$

$$(\zeta + a)(1 + \zeta a^*)^{-1} = \exp ib_\zeta,$$

где b_ζ — эрмитов элемент. Но

$$a = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\zeta + a)(1 + \zeta a^*)^{-1} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

откуда следует, что a принадлежит замкнутой выпуклой оболочке элементов вида $\exp ib_\zeta$ и поэтому $\|a\| \leq 1$.

Замечание. Утверждение о том, что в каждой C^* -алгебре единичный шар совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества унитарных элементов (частным случаем которого мы

фактически воспользовались) составляет содержание известной теоремы Руссо — Дэя. Пальмер показал, что достаточно брать $\exp ib$, где b — эрмитовы. Харрис обнаружил, что оба эти утверждения можно вывести при помощи формул В. П. Потапова [44]. Мы выписали нужную формулу в коммутативной ситуации, а в общем случае надо рассматривать $(1 - a^*a)^{-1/2} (\zeta + a) \times \times (1 + \zeta a^*) (1 - a^*a)^{1/2}$.

Детальные ссылки и подробные доказательства перечисленных фактов можно найти в [22]. Обобщенная форма теоремы Гельфанда-Наймарка в [22] называется теоремой Видава — Пальмера. В сущности естественной структурой C^* -алгебры наделяется каждая банахова алгебра, в которой для каждого элемента a имеется элемент b в сопряженном состоянии, т. е. такой, что $\psi(b) = \overline{\psi(a)}$ для каждого положительного функционала (это означает, что $\|\psi\| = \psi(1)$).

Кстати, быть может, не лишено смысла выяснить, в какой степени теорема Руссо — Дэя характеризует C^* -алгебры, если эту теорему понимать достаточно широко: замкнутая выпуклая оболочка экспонент (или обратимых элементов), попадающих в единичный шар, совпадает с ним. Отметим в этой связи следующий факт. Пусть A — (коммутативная) равномерная алгебра с $\sup$ -нормой. Пусть $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная точечная производная, т. е. такой непрерывный линейный функционал на A , что $\psi(ab) = \varphi(a)\psi(b) + \varphi(b)\psi(a)$ для некоторого $\varphi \in \text{Срес}(A)$. Тогда

$$|\psi(\exp a)| \leq 2/e \|\psi\| \cdot \|\exp a\| \quad (22)$$

(с точной константой $2/e < 1$). Поэтому в равномерной алгебре с непрерывной точечной производной указанная оболочка полностью покрывает шар радиуса $\leq 2/e$. Между прочим, отсюда следует, что в теореме Руссо — Дэя аппроксимирующую комбинацию, вообще говоря, нельзя составлять из унитарных элементов, коммутирующих с данным. Неравенство (22) для стандартной диск-алгебры, по-видимому, хорошо известно. Первоначальное рассуждение автора в случае диск-алгебры не использовало конкретных неравенств, а опиралось на так называемую обратную теорему Крейна — Мильмана (см. [45, с. 16]). Идея, что для диск-алгебры отделяющий функционал — точечная производная, подсказана М. Бухтиным.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $\hat{\Lambda} = R^n$ и

$$S = \left\{ \lambda \in \Lambda = \hat{R}^n : \left(\sum_1^n |\lambda_k|^q \right)^{1/q} \leq 1 \right\}.$$

Обозначим через B_S совокупность целых функций в C^n , для которых $|f(z)| \leq M e^{\left(\sum_1^n |y_k|^p \right)^{1/p}}$. Эти функции образуют банахово

пространство относительно sup -нормы по вещественному подпространству и среди ограниченных на вещественном подпространстве (непрерывных) функций характеризуются тем, что их преобразование Фурье сосредоточено в S . Операторы $a_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ эрмитовы

в B_S . Спектр оператора Лапласа $\Delta = -\sum_1^n a_k^2$ совпадает с множе-

ством значений формы $\sum_1^n \lambda_k^2$ на S . Используя приведенные в п. 9 теоремы, можно показать, что равенство $\|\Delta\| = |\Delta|$ осуществляется в точности в двух крайних случаях — при $p = 1$ и при $p = \infty$. Наиболее патологическим оказывается случай $p = 2$. В этом случае $|\Delta| = 1$, $\|\Delta\| = n$, что совпадает с (11). Кроме указанной в [11] экстремали $\cos\left(\sum_1^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ здесь сравнительно легко описать все $f \in B_S$, для которых $\|f\| = 1$ и $|\Delta f(0)| = n$. Из этого примера видно, что равенство в (21) возможно.

Перечисленные факты объясняются очень просто. Построим по квадратичной форме (которую для аккуратности в окрестности S можно было бы заменить финитной гладкой функцией) функцию h в соответствии с п. 8. Используя «густоту» множества S (множество $S - S$ содержит окрестность нуля; ср. [38, с. 200]) и теорему Артеменко, легко убедиться (конечно, имея в виду теоремы п. 9), что $\|\Delta\| = |\Delta|$ в том и только в том случае, когда h продолжается до преобразования Фурье вероятности меры μ . С другой стороны, если μ — вероятностная мера на локально компактной абелевой группе, то множество тех точек, где $|\hat{\mu}(\lambda)| = 1$, образует подгруппу, сужение $\hat{\mu}$ на которую есть характер. Это почти очевидное, но очень полезное замечание принадлежит де Лю и Кацнельсону (см. [46, с. 151], по поводу одномерного случая см. также [37, с. 572]). Отсюда вытекает, что нужное продолжение неизбежно должно быть периодическим. В двух крайних случаях оно оказывается возможным, а в остальных — нет. При $p = 2$ возникает «континуум препятствий», так как квадратичная форма равна 1 всюду на границе S . Далее мы еще раз воспользуемся замечанием де Лю — Кацнельсона.

При $p = 2$, $n = 2$ рассмотрим оператор Коши — Римана $\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$. Полагая

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - ix_2) \frac{\sin \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad (23)$$

получим функцию из B_S , для которой $\|f\| = 1$. После применения указанного оператора мы получим функцию с нормой 2.

Отсюда следует, что $\|a_1 + ia_2\| \leq 2$. Вместе с тем, операторы a_1, a_2 эрмитовы и очевидно, что $|a_1 + ia_2| = 1$. Этим доказано, что неравенство (20) точное. (С. Норвидас заметил, что наша формула (23) при $p = 2$ с точностью до мультипликативной постоянной описывает все экстремали функционала

$$f \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f(0).$$

Любопытные связи с целыми функциями обнаруживаются при рассмотрении группы $\Lambda = \pi$ (окружность). В этом случае $\hat{\Lambda} = \mathbf{Z}$ и изучение представлений по существу сводится к рассмотрению элементов u (операторов), для которых $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$. Часто интересуются, например, величиной $\|1 - u\|$ в сравнении с $|1 - u|$. Если $\text{Spes}(u)$ заполняет окружность, то $\|1 - u\| = |1 - u| = 2$. Предположим поэтому, что $\text{Spes}(u)$ содержится в дуге $|\theta| \leq \sigma < \pi$ единичной окружности. Тогда $u = \exp ia$, где $\text{Spes}(a) \subset \{\lambda \in \mathbf{R} : |\lambda| \leq \sigma < \pi\}$, причем $\|\exp ina\| = 1$ ($n \in \mathbf{Z}$). При эрмитовом a мы имели бы $\|1 - u\| = |1 - u|$, теперь дело осложняется, так как возникает проблема представления мерой, сосредоточенной на $\mathbf{Z}$. Модельным пространством снова оказывается пространство B_σ , но с другой нормой, именно, $\|f\| = \sup \{|f(n)| : n \in \mathbf{Z}\}$. По теореме Картрайт при $\sigma < \pi$ для $f \in B_\sigma$ имеет место неравенство

$$\sup_R |f(x)| \leq k(\sigma) \|f\|.$$

Наилучшие из известных оценок констант $k(\sigma)$ принадлежат С. Н. Бернштейну (см. [2, с. 446]). В частности, он показал, что всегда $k(\sigma) \leq 1/\cos \frac{1}{2}\sigma$ и что при $\sigma = \pi/m$, $m = 2, 3, \dots$ эта оценка неулучшаема. Из сказанного сразу вытекает, что всегда

$$\|1 - u\| \leq 1/\cos \frac{1}{2}\sigma |1 - u|,$$

а если воспользоваться экстремалью Бернштейна

$$f(x) = \frac{\cos \sigma \left(\frac{1}{2} + x \right)}{\cos \frac{1}{2}\sigma}$$

и оператором целочисленного сдвига в B_σ , то легко усмотреть, что при $\tau = \pi/2m$ оценка точна.

Замечание. С проблемой сравнения, которая обсуждается в последнем абзаце, я познакомился по рукописи одной работы А. Г. Баскакова, в которой среди прочего устанавливались некоторые (менее точные) неравенства указанного типа. В работе [48] эта проблема и близкие вопросы исследуются весьма тщательно.

Вернемся к произвольной локально компактной абелевой группе Λ . Пусть $A = A(\Lambda)$ — алгебра преобразований Фурье

функций из $L^1(\hat{\Lambda})$. Компакт $S \subset (\Lambda)$ называется множеством Хельсона, если $A|_S = C(S)$. Обозначим через $I(S)$ и $J(S)$ соответственно наибольший и наименьший замкнутые идеалы алгебры A с нулями на S . Компакт S называется множеством спектрального синтеза, если $I(S) = J(S)$. Детальное обсуждение введенных понятий имеется, например, в [39], [46], [49]. Кстати, известно [54], что указанные свойства множества S формально независимы. Всюду ниже предполагается, что компакт S обладает обоими названными свойствами. Элементы алгебры $A|_S$ снабжаются естественной фактор-нормой. Ясно, что в указанных условиях $\|g\| \leq c_S \max_S |g|$ с некоторой константой $c_S \geq 1$.

Компакт S называется множеством Кронекера, если для каждой функции $g \in C(S)$ с $|g(\lambda)| \equiv 1$ существует такая последовательность χ_n характеров, что $\chi_n \rightarrow g$ равномерно на S (детальное обсуждение этого понятия также имеется в [46, 49]). Легко показать, что каждое кронекеровское множество является множеством Хельсона и множеством спектрального синтеза и что в этом случае $c_S = 1$.

Введем наше обычное пространство B_S ограниченных непрерывных функций на $\hat{\Lambda}$ со спектром Бьерлинга в S . Имея в виду регулярное представление, можем корректно определить операторы $g(T) : B_S \rightarrow B_S$, $g(T) = T_{\hat{v}}|S' = g$ при каждом $g \in C(S)$. Ясно, что $\|g(T)\| \leq c_S |g(T)| = c_S \max_S |g(\lambda)|$. Если $c_S = 1$, в частности, если S кронекеровское, то $\|g(T)\| = |g(T)|$ для всех $g \in C(S)$. Для кронекеровских S можно утверждать также, что при всех $f_1, f_2 \in B_S$

$$|f_1(x)| \leq |f_2(x)| \Rightarrow |g(T)f_1(x)| \leq |g(T)f_2(x)|, \quad (x \in \hat{\Lambda}),$$

если $g \in C(S)$ и $|g(\lambda)| = 1$ всюду на S .

Кронекеровские множества могут быть довольно густыми (разумеется, не в смысле меры Хаара), так что указанные функции g с единичным модулем обладают довольно странными свойствами: каждая из них имеет положительно определенное продолжение на Λ , каждая из них совпадает на S с преобразованием Фурье меры вариации $\leq 1 + \varepsilon$. Но, в силу замечания де Лю-Кацнельсона далеко не каждая из них представляется вероятностной мерой (т. е. обладает непрерывным положительно определенным продолжением).

Если $\hat{\Lambda} = R$, то

$$f_1 < f_2 \in B_S \cap H^+ \Rightarrow |g(T)f_1(x)| \leq |g(T)f_2(x)|, \quad (x \in R) \quad (24)$$

при условии, что равномерно на S имеем $g(\lambda) = \lim p_k(\lambda)$, где p_k — полиномы без нулей в левой полуплоскости. Конечно, для «узких» S мы выходим за пределы класса PH^+ , однако неясно, максимальное ли это расширение с сохранением свойства (24).

Кстати, расширение совсем не происходит, если множество S содержит бесконечные геометрические прогрессии (Б. Я. Левин). (Вопрос об импликации типа (24) имеет смысл при произвольных S).

Изучение эрмитовых операторов, конечно, связано с изучением изометрий банахова пространства. В пространствах, далеких от гильбертова, группа изометрий обычно бедна, для сепарабельных пространств не опровергнута гипотеза Банаха: пространство, группа изометрий которого транзитивно действует на сфере, гильбертово. С другой стороны, бедность запаса эрмитовых операторов как раз позволяет в конкретных ситуациях полностью его описывать, а это может приводить к содержательным классификационным теоремам (именно по этому поводу Люмер изобрел эрмитовы операторы; среди недавних работ отметим [50]).

Вместе с тем, может представить интерес изучение алгебр, порожденных эрмитовыми элементами. Конечно, существует теорема Гельфанда — Наймарка, Видава — Пальмера и вообще богатая теория C^* -алгебр. Однако материал, привлекаемый нами, в частности при обсуждении «теоремы обращения», позволяет предположить, что содержательной может оказаться теория, в которой элементарной моделью служит не равномерная алгебра всех непрерывных функций на компакте, а «коравномерная» алгебра, порожденная операторами дифференцирования в пространствах типа B_S (времена меняются, и мы меняемся с ними).

Насколько нам известно, конкретных результатов в этом плане не много. Если алгебра B порождается одним эрмитовым элементом, то, как легко убедиться, возникает гомоморфизм

$$A(R)/(J \operatorname{Spec}(B)) \rightarrow B$$

с плотным образом. В зависимости от природы $\operatorname{Spec}(B)$ степень сложности ситуации различна. Если, например, $\operatorname{Spec}(B)$ — кронеровское множество, то ситуация крайне проста — алгебра B будет одновременно равномерной и коравномерной. Но уже случай счетного спектра не вполне тривиален — алгебра полупроста [51]. Несколько более общий результат получен авторами [52, 53].

Список литературы: 1. Бернштейн С. Н. Соч. в 3-х т. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 581 с. 2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с. 3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с. 4. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 455 с. 5. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с. 6. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 511 с. 7. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 304 с. 8. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. — Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1960, 105, с. 89—167. 9. Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. — Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1974, 120, с. 1—271. 10. König H. A. functional calculus for Hermitian elements of complex

Banach algebras.— Arch. Matx., 1977, 28, № 4, p. 422—430. 11. Камолов А. Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах.— Мат. заметки, 1974, 15, № 6, с. 967—971. 12. Ганзбург М. И. Теоремы Джексона и Бернштейна в R^n .— Усп. мат. наук, 1979, 34, № 1, с. 225—226. 13. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.— М.: Мир, 1968.—289 с. 14. Hellerstein J. Derivatives of entire functions and a question of Polya.— Bull. Am. Math. Soc., 1975, 81, № 2, p. 453—455. Trans. Am. Math. Soc., 1977, 227, p. 227—249. Trans. Am. Math. Soc., 1977, 234, № 2, p. 497—503. 15. Левин Б. Я. Дополнения и исправления к книге «Распределение корней целых функций».— Харьков: ФТИНТ, Препринт 4-77, 1977. 16. Математика СССР за сорок лет Т. I.— М.: Физматгиз, 1959.—1002 с. 17. Мейман Н. А. Принцип монотонности аргумента и дифференцирование неравенств.— Докл. АН СССР, 1958, 120, № 6, с. 1191—1193. 18. Ахиезер Н. И., Левин Б. Я. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для произвольных целых функций. Исследование по современным проблемам теории комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1960, с. 111—165. 19. Левин М. Б. Оценка производной от мероморфной функции на границе области.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1975, вып. 24, с. 68—85. 20. Lumer G. Semi — inner — product spaces.— Trans. Am. Math. Soc., 1961, 100, p. 29—43. 21. Любич Ю. И. Консервативные операторы.— Усп. мат. наук, 1965, 20, № 5, с. 221—225. 22. Bonsall F. F., Duncan T. Complete normed algebras. Heid, Berl., Springer — Yer; 1973.—301 p. 23. Кацнельсон В. Э. У консервативного оператора норма равна спектральному радиусу.— Мат. исследования, 1970, 5, № 3, с. 186—189. 24. Bonsall F. F., Crabb M. T. The spectral radius of Hermitian element of a Banach algebra.— Bull. Lond. Math. Soc. 1970, 2, p. 178—180. 25. Sinclair A. M. The norm of a Hermitian element in a Banach algebra.— Proc. Am. Math. Soc., 1971, 28, p. 446—450. 26. Browder A. On Bernstein's inequality and the norm of Hermitian operators.— Amer. Math. Monthly, 1971, 78, p. 871—873. 27. Горин Е. А. Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии.— Усп. мат. наук, 1978, 33, № 4, с. 169—188. 28. Горин Е. А. Изометрические представления и дифференциальные неравенства.— В кн.: Материалы конф. по методам алгебры и функц. анализа при исследовании операторов. Тарту: 1978, с. 9—12. 29. Рудин У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.—443 с. 30. Люкис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1956.—251 с. 31. Артеменко А. П. Эрмитово-положительные функции и позитивные функционалы: Дис. канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1941. 32. Крейн М. Г. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций.— Докл. АН СССР, 1940, 26, № 1, с. 17—21. 33. Крейн М. Г. О представлении функций интегралами Фурье — Стильбеса.— Уч. зап. Куйбышевск. пед. и учительск. ин-та им. В. В. Куйбышева. 1943, 7, с. 123—147. 34. Крейн М. Г. об измеримых эрмитово-положительных функциях.— Мат. заметки, 1978, 23, № 1, с. 79—89. 35. Левин Б. Я. Об одном обобщении теоремы Фейера-Рисса.— Докл. АН СССР, 1946, 52, с. 291—294. 36. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка 1965.—798 с. 37. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2.— М.: Мир, 1967.—752 с. 38. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилев Г. Е. Коммутативные нормированные кольца.— М.: Физматгиз, 1969.—315 с. 39. Katznelson Y. An introduction to harmonic analysis.— Zond. Sydn. Toronto, J. Wiley, 1968.—264 p. 40. Любич Ю. И., Мацаев В. И., Фельдман Г. М. О представлениях с отделимым спектром.— Функц. анализ и его прил., 1973, вып. 7, № 2, с. 52—61. 41. Bloom W. Bernstein's inequality for locally compact Abelian groups.— J. Austr. Math. Soc., 1974, 17, № 1, p. 88—101. 42. Баскаков А. Г. О спектральном анализе представлений коммутативных банаховых алгебр.— Тр. НИИМ Воронежск. гос. ун-та, 1974, 15, с. 1—6. 43. Мельников М. С., Синяня С. О. Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного.— В кн.: Итоги науки, современные проблемы мат., 1975, 4, с. 143—250. 44.

Потанов В. П. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций.—Тр. моск. мат. о-ва. 1955, 4, с. 125—236. 45. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке.—М.: Мир, 1968.—112 с. 46. Кахан Ж. П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.—М.: Мир, 1976.—204 с. 47. Бернштейн С. Н. Соч., т. 2.—М.: Изд-во АН СССР, 1954. 48. Crabb B. J., Duncan J. Some inequalities for norm unitaries in Banach algebras.—Proc. Edinburgh. Math. Soc., 1978, 21, p. 17—23. 49. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. т. 2.—М.: Мир, 1975.—901 с. 50. Зайденберг М. Г. К изометрической классификации симметричных пространств.—Докл. АН СССР, 1977, 234, № 2, с. 283—286. 51. Sinclair A. M. The Banach algebra generated by a Hermitian operator.—Proc. Lond. Math. Soc., 1972, 3, № 24, p. 681—691. 52. Фельдман Г. М. О полупростоте алгебры, порождаемой изометрическим оператором.—Функц. анализ и его прил., 1974, вып. 8, № 2, с. 93—94. 53. Горин Е. А. Спектральная устойчивость некоторых банаховых.—Функц. анализ и его прил., 1974, вып. 8, № 2, с. 73—74. 54. J. Benedetto. Spectral Synthesis.—Stuttgart:Teubner, 1975—351 с.

Поступила 29 мая 1979 г.

УДК 517.5

В. П. ПЕТРЕНКО, д-р физ.-мат. наук

О РОСТЕ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

1. Введение. В настоящее время развитие неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций происходит в направлении построения аналогов этой теории для различных математических объектов. Так, с точки зрения теории Р. Неванлинны изучаются голоморфные отображения комплексных многообразий [1, 7].

Рассмотрим специальный случай голоморфных отображений комплексных многообразий — голоморфные кривые, т. е. отображения вида $f: C \rightarrow M$, где M — p -мерное комплексное компактное многообразие, C — комплексная z -плоскость. В случае, когда M есть p -мерное проективное пространство $P_p C$, теория распределения значений голоморфных кривых изложена в монографии Х. Ву [3].

Прежде чем приступить к определению основных характеристик голоморфных кривых, напомним некоторые известные общие факты из теории комплексных многообразий.

Пусть M — p -мерное комплексное компактное многообразие, $\{g_k(q)\}_{k=1}^p$ — локальные голоморфные координаты на M ($q \in M$). Обозначим через $\pi: L \rightarrow M$ голоморфное линейное расслоение над M (т. е. функции перехода в слоях $\pi^{-1}(q)$ ($q \in U_k \cap U_j$) являются голоморфными функциями $\{g_{k,j}(q)\}$, которые образуют коцикл [1, с. 125—386]). Далее будем рассматривать лишь такие многообразия M , которые допускают положительное линейное расслоение L (см. [2, с. 253]). Тот факт, что L является положительным линейным расслоением, означает прежде всего, что в слоях $\pi^{-1}(q)$ определена метрика $ds^2 = h(q) d\zeta d\bar{\zeta}$ (см. [1, с. 386]). При этом сужение $h(q)$ на окрестность u_k многообразия M есть гладкая

положительная функция $h_k(q)$. На пересечении $u_k \cap u_j$ функции $h_k(q)$ и $h_j(q)$ удовлетворяют условию склейки

$$h_k(q) = |g_{kj}(q)|^2 h_j(q).$$

При этом функции $\{g_{kj}(q)\}$ — функции перехода в слоях $\pi^{-1}(q)$. Из соотношения (1) следует, что на M корректно определена

(1.1) — форма $dd^c \ln h_k = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \ln h_k$ (2). Линейное расслоение называется положительным, если (1.1) — форма (2) является положительной формой [2, с. 253]. Предположим, что на M определено голоморфное сечение линейного расслоения L , которое мы обозначим через $S(q)$. Это означает, что на M определено голоморфное отображение $S: M \rightarrow L$, локально согласованное с переходами в слоях, т. е. сужение $S(q)$ на локальные окрестности u_k и u_j при $q \in u_k \cap u_j$ удовлетворяет условию склейки $S_k(q) = g_{kj}(q) S_j(q)$ (3). Нулевое множество этого сечения $S(q)$ называется дивизором на M и обозначается $D(S) = D = \{q \in M : S(q) = 0\}$. Длина вектора $S(q)$ при $q \in u_k$ определяется так:

$$|S(q)|^2 = |S_k(q)|^2 / h_k(q). \quad (4)$$

В силу соотношений (1), (3) при $q \in u_k \cap u_j$

$$|S_k(q)|^2 / h_k(q) = |S_j(q)|^2 / h_j(q).$$

Поэтому $|S(q)|$ определен корректно.

2. Основные характеристики роста и распределения значений голоморфных кривых. Рассмотрим голоморфную кривую на p -мерном комплексном компактном многообразии M , т. е. отображение

$$f: C \rightarrow M. \quad (5)$$

Пусть L — положительное линейное расслоение над M , $S(q)$ — сечение L и $D = D(S)$ — дивизор на M , определенный сечением S . В силу соотношений (4), (5) на комплексной плоскости C однозначно определяется функция $(f(z) \in u_k)$

$$|S(f(z))|^2 = |S_k(f(z))|^2 / h_k(f(z)). \quad (6)$$

Так как M — компактное многообразие, можно считать, что для каждого z $|S(f(z))| \leq 1$.

Характеристики среднего и максимального приближений голоморфной кривой $f(z)$ к дивизору D на окружности $\{z: |z| = r\}$

определяются так: $m(r, D, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|S(f(re^{i\theta}))|} d\theta$; $L(r, D, f) =$

$= \max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|S(f(z))|}$. Характеристика голоморфной кривой f определяется следующим образом (см. [1, с. 388]):

$$T(r, L, f) = T(r, f) = \int_0^r \left\{ \iint_{|z| \leq t} dd^c \ln h_k(f(z)) \right\} \frac{dt}{t}, \quad (7)$$

где $\{h_k\}$ — метрика расслоения L .

Функция $T(r, f)$ не убывает при возрастании r .

В силу соотношения (6) локально функция $|S(f(z))|$ имеет корни, совпадающие с корнями голоморфной функции $S_k(f(z))$ ($f(z) \in u_k$). Поэтому множество корней $|S(f(z))|$ является дискретным множеством. Обозначим через $n(t, D, f)$ число корней $|S(f(z))|$ с учетом их кратностей, попавших в круг $\{z: |z| \leq t\}$. Далее стандартно строится функция $N(r, D, f)$. Имеет место первая основная теорема теории голоморфных кривых. А именно при $r \rightarrow \infty$ $m(r, D, f) + N(r, D, f) = T(r, f) + O(1)$. Первая основная теорема выводится аналогично мероморфному случаю с помощью формулы Стокса. Числа $\delta(D, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, D, f)}{T(r, f)}$ и $\Delta(D, f) =$

$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, D, f)}{T(r, f)}$ называются дефектами голоморфного отображения $f: C \rightarrow M$ относительно дивизора D соответственно в смысле Р. Неванлинны и Ж. Валирона. Ясно, что всегда $0 \leq \delta(D, f) \leq 1$ и $0 \leq \Delta(D, f) \leq 1$.

По аналогии со случаем мероморфных функций и целых кривых вводим отклонение голоморфной кривой f относительно дивизора D : $\beta(D, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, D, f)}{T(r, f)}$.

3. Случай проективного пространства. Пусть $M = P_p C$ — p -мерное комплексное проективное пространство. Все точки $z \in C^{p+1}$, для которых k -я координата $z_k \neq 0$, определяют на $P_p C$ окрестность u_k [1, с. 13]. При этом локальные голоморфные координаты в окрестности u_k задаются так:

$$\zeta_v = z_v / z_k \quad (v \neq k, v = 0, 1, 2, \dots, p), \quad (8)$$

где $z = (z_0, z_1, \dots, z_p) \in C^{p+1}$, $z_k \neq 0$. В качестве линейного расслоения L над $P_p C$ выберем расслоение гиперплоского сечения $\pi: H \rightarrow P_p C$ [2, с. 254]. В этом расслоении коциклом служат функции перехода $g_{kj}(q) = \frac{z_k}{z_j} (q \in u_k \cap u_j)$. Метрика в расслоении H задается функциями

$$h_k(q) = 1 + \sum_{v=0, v \neq k}^p \zeta_v \bar{\zeta}_v = \frac{\sum_{v=0}^p |z_v|^2}{|z_k|^2},$$

где $\{\zeta_v\}_{v=0, v \neq k}^p$ — локальные координаты в окрестности u_k , определенные соотношением (8). Эта метрика называется метрикой Фубини-Штуди [3, с. 22]. Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} dd^c \ln h_k &= \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \ln \left(1 + \sum_{v=0, v \neq k}^p |\zeta_v|^2 \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\sum_{v=0}^p dz_v \wedge d\bar{z}_v}{\sum_{v=0}^p |z_v|^2} - \frac{\left(\sum_{v=0}^p \bar{z}_v dz_v \right) \wedge \left(\sum_{v=0}^p z_v d\bar{z}_v \right)}{\left(\sum_{v=0}^p |z_v|^2 \right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $f(z) = \bar{G}(z) = \{g_0(z), g_1(z), \dots, g_p(z)\}$ — $(p+1)$ -мерная целая кривая, т. е. отображение $f: C \rightarrow C^{p+1}$, индуцирующее отображение $\tilde{f}: C \rightarrow P_p C$ [3, с. 84]. В силу равенств (7), (9) имеем

$$T(r, H, \tilde{f}) = T(r, \tilde{f}) = \\ = \int_0^r \frac{1}{\pi} \left\{ \iint_{|z| \leq t} \frac{\sum_{k=0}^p |g_k(z)|^2 \sum_{k=0}^p |g'_k(z)|^2 - \left| \sum_{k=0}^p \bar{g}_k(z) g'_k(z) \right|^2}{\left\{ \sum_{k=0}^p |g_k(z)|^2 \right\}^2} dx dy \right\} \frac{dt}{t}.$$

А это есть характеристика Л. Альфорса для целой кривой $\bar{G}(z)$ (4).

Голоморфное сечение $S_k = S_k(q)$ на $P_p C$ определяется в каждом слое над u_k :

$$S_k = \sum_{v=0}^p a_v \frac{z_v}{z_k} = a_k + \sum_{v \neq k} a_v \zeta_v,$$

где $\{a_v\}_{v=0}^p = \bar{a}$ — фиксированный вектор из C^{p+1} . Ясно, что при $q \in u_k \cap u_j$

$$S_k(q)/S_j(q) = z_k/z_j = g_{kj}(q).$$

Нулевое множество этого сечения, т. е. дивизор на $P_p C$ является образом гиперплоскости

$$\sum_{v=0}^p a_v z_v = 0 \quad (10)$$

из C^{p+1} в $P_p C$, который также будем называть гиперплоскостью в $P_p C$. Для каждого z имеем $\tilde{f}(z) \in u_k$

$$|S(\tilde{f}(z))|^2 = \frac{|S_k(\tilde{f}(z))|^2}{h_k(\tilde{f}(z))} = \frac{\left| \sum_{v=0}^p a_v g_v(z) \right|^2}{\sum_{v=0}^p |g_v(z)|^2} = \frac{|(\bar{G}(z), \bar{a})|^2}{\|\bar{G}(z)\|^2}.$$

Таким образом, в случае $M = P_p C$

$$m(r, D, \tilde{f}) = m(r, \bar{a}, \bar{G}) - \ln \|\bar{a}\|;$$

$$L(r, D, \tilde{f}) = L(r, \bar{a}, \bar{G}) - \ln \|\bar{a}\|, \quad (11)$$

где вектор $\bar{a}$ определяет гиперплоскость (10) в C^{p+1} . Следовательно, приходим к характеристикам роста и распределения значений целых кривых в смысле Картана [5]. И, значит, изучение

голоморфных кривых в $P_p C$ эквивалентно изучению целых кривых в C^{p+1} .

4. Формула для представления $\ln \frac{1}{|S(f(z))|}$ в секторе. Будем пользоваться некоторыми общими идеями изучения роста мероморфных функций [6].

Пусть при $0 < \alpha < \pi$ и $R > 1$

$$d_R = \{z : |z| < R, |\arg z| < \alpha\}.$$

Сделаем замену $\zeta = z^{2x} = r^{2x} e^{2i\varphi x} = \rho e^{i\theta}$. Тогда в секторе $D_R = \{\zeta : |\zeta| < R^{2x} = R_1, |\arg \zeta| < \pi\}$ определится функция $F(\zeta) = |S(f(\zeta^{1/2x}))|^{-1}$. Пусть при $0 < v < R_1$ и $\zeta \in D_R$

$$Q(v, \zeta) = \ln \left| \frac{R_1^2 - v\zeta}{R_1(v - \zeta)} \right| \frac{R_1(v + |\zeta|)}{R_1^2 + v|\zeta|}.$$

Обозначим через c_k нули функции $|S(f(z))|$, попавшие в замкнутый сектор $\bar{d}_R$ и пусть $p_k = c_k^{2x}$ — их образы в ζ -плоскости. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы замкнутые кружки $K(p_k, \varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - p_k| \leq \varepsilon\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, не пересекались при различных p_k ($p_0 = 0$, $p_{n-1} = -R_1$, $p_n = v$). Через $l(p_k, \varepsilon)$ обозначим либо полную границу $K(p_k, \varepsilon)$, либо ту ее часть, которая попала в область D_R . Удалим из области D_R множество $K(p_k, \varepsilon) \cap D_R$. Полученную многосвязную область обозначим через $B_R(\varepsilon)$ и применим к ней формулу Грина

$$- \iint_{B_R(\varepsilon)} (P \Delta Q - Q \Delta P) d\sigma = \int_{\partial B_R(\varepsilon)} \left(P \frac{\partial Q}{\partial n} - Q \frac{\partial P}{\partial n} \right) ds, \quad (12)$$

где Δ — оператор Лапласа, а $P = P(\zeta) = \ln F(\zeta)$, $Q = Q(v, \zeta)$.

В каждой достаточно малой окрестности точки ζ имеем (см. соотношение (6))

$$P(\zeta) = \ln \frac{1}{|S(f(\zeta^{1/2x}))|} = \ln \frac{1}{|S_k(f(\zeta^{1/2x}))|} + 0,5 \ln h_k(f(\zeta^{1/2x})),$$

где $S_k(f(\zeta^{1/2x}))$ — голоморфная функция в окрестности точки ζ . В силу положительности (1.1)-формы $dd^c \ln h_k$ выполняется неравенство $\Delta \ln h_k(f(\zeta^{1/2x})) \geq 0$, поэтому при $\zeta \in B_R(\varepsilon)$

$$\Delta P(\zeta) \geq 0. \quad (13)$$

Если p_k — корень функции $|S(f(\zeta^{1/2x}))|$ кратности λ_k , то при $\zeta \in K(p_k, \varepsilon)$

$$\ln F(\zeta) = -\lambda_k \ln |\zeta - p_k| + u_k(\zeta), \quad (14)$$

где $u_k(\zeta)$ — гармоническая функция в окрестности p_k .

Подставляя в соотношение (12) значения соответствующих выражений, учитывая неравенство (13) и равенство (14) и, устремляя затем ε к нулю, приходим к такой оценке [6, с. 41—45]:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{R_1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln F(\rho e^{i\theta}) \frac{(R_1^2 - \rho^2) \rho (R_1^2 - \rho^2)}{\rho (\rho + R_1)^2 (R_1^2 + \rho R_1)^2} \rho d\rho d\theta \leq \\ & \leq \sum_{|p_k| < R_1} 2\pi Q(v, p_k) - 2\pi \ln F(v) + 2v \int_{-\pi}^{\pi} \ln F(R_1 e^{i\theta}) \frac{R_1 - v}{R_1 + v} \times \\ & \quad \times \frac{(1 + \cos \theta) R_1 d\theta}{R_1^2 + v^2 - 2R_1 v \cos \theta}. \end{aligned}$$

Производя замену $\zeta = \rho e^{i\theta} = t^{2x} e^{2i\varphi x}$, имеем ($v = r^{2x}$)

$$\begin{aligned} \ln F(v) &= \ln \frac{1}{|S(f(r))|} \leq \frac{(2x)^2}{2\pi} r^{2x} \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{|S(f(t e^{i\varphi}))|} \times \\ & \times \frac{(R^{4x} - r^{4x})(R^{4x} - t^{4x}) t^{2x-1} dt d\varphi}{(r^{2x} + t^{2x})^2 (R^{4x} + r^{2x} t^{2x})^2} + \frac{2x}{\pi} r^{2x} R^{2x} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln \frac{1}{|S(f(R e^{i\varphi}))|} \times \\ & \times \frac{(R^{2x} - r^{2x})(1 + \cos 2\varphi x) d\varphi}{(R^{2x} - r^{2x})(R^{4x} + r^{4x} - 2R^{2x} r^{2x} \cos 2\varphi x)} + \sum_{|c_k| < R} Q(r, c_k). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и первой основной теоремы теории голоморфных кривых так же, как и в случае мероморфных функций [6, с. 46], выводится такое утверждение.

Теорема 1. Пусть $f: C \rightarrow M$ — голоморфное отображение M — r -мерное комплексное компактное многообразие, над которым определено положительное линейное расслоение $\pi: L \rightarrow M$. Если D — дивизор на M , определенный голоморфным сечением $S: M \rightarrow L$, то для каждого α , $0 < \alpha \leq \pi$, $R, R > 1$ и r , $0 < r < R$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} L(r, D, f) &\leq (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{m(t, D, f) t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2} dt + \\ &+ \sum_{|c_k| < R} \ln \frac{r^{2x} + |c_k|^{2x}}{|r^{2x} - c_k^{2x}|} + K(R, r, \alpha), \end{aligned} \quad (15)$$

где c_k — корни функции $|S(f(z))|$, считаемые с учетом их кратностей,

$$\begin{aligned} |K(R, r, \alpha)| &\leq 2x \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \{T(R, f) + C\} + \\ &+ \frac{2r^{2x}}{R^{2x} - r^{2x}} n(R, D, f) + 4x \frac{R^x r^x}{R^{2x} - r^{2x}} \{T(R, f) + c\}. \end{aligned}$$

Из оценки (15) вытекает ряд утверждений о росте голоморфных кривых $f: C \rightarrow M$, аналогичных соответствующим утверждениям о росте мероморфных функций [6, с. 47—52, 91]. Так, для отклонения $\beta(D, f)$ сохраняет силу оценка, которая первоначально была доказана для мероморфных функций. Имеет место такой результат.

Теорема 2. Если голоморфная кривая $f: C \rightarrow M$ имеет конечный нижний порядок λ , то для любого дивизора D

$$\beta(D, f) \leq B(\lambda, \Delta(D, f)),$$

где

$$B(\lambda, \Delta) = \begin{cases} \pi\lambda \sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \lambda \geq 0,5, \text{ либо если } \\ & 0 < \lambda < 0,5, \text{ но} \\ & \sin 0,5\pi\lambda \geq \sqrt{0,5\Delta}; \\ \pi\lambda[\Delta \operatorname{ctg} \pi\lambda + \operatorname{tg} 0,5\pi\lambda], & \text{если } 0 < \lambda < 0,5 \text{ и} \\ & \sin 0,5\pi\lambda < \sqrt{0,5\Delta}; \\ \Delta, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Связь между ростом $m(r, D, f)$ и $L(r, D, f)$ характеризует такой результат.

Теорема 3. Пусть $f: C \rightarrow M$ — голоморфная кривая. Если для некоторого дивизора D при $r \geq r_0(D)$ и $\tau > 0$

$$m(r, D, f) \leq KT(r, f) \ln^{-\tau} T(r, f),$$

то для каждого $\nu > 1$ существует неограниченное множество E , такое, что при $r \geq r_0(D)$ и $r \in E$,

$$L(r, D, f) \leq K_\nu T(r, f) \ln^{\nu-0,5\tau} T(r, f),$$

где буквы K всюду далее в работе означают положительные абсолютные постоянные.

Для доказательства теорем 2, 3 следует использовать неравенство (15) и провести те же рассуждения, что и в случае мероморфных функций [6, с. 47—52, 91].

5. О системе дивизоров с нормальным самопересечением. Пусть на p -мерном комплексном компактном многообразии M определена система дивизоров $\{D_\alpha\}$, которая имеет нормальное самопересечение (см. [7, с. 15]). Это означает, что в каждой окрестности u

$$\left\{ \bigcup_{\alpha} D_{\alpha} \cap u \right\} = \left\{ q \in M : \prod_{\nu=1}^m \sigma_{\nu}(q) = 0, \quad 1 \leq m \leq p \right\},$$

где $\{\sigma_{\nu}(q)\}_{\nu=1}^p$ — локальные голоморфные координаты в окрестности u .

В случае $M = P_p C$ система гиперплоскостей $\{D_\alpha\}$ имеет нормальное самопересечение тогда и только тогда, когда гиперплоскости $\{D_\alpha\}$ находятся в общем положении [7, с. 15; 3, с. 191]. Для гиперплоскостей в C^{p+1} это означает, что векторы $\{\bar{a}^{(\nu)}\}$,

определяющие гиперплоскости, в C^{p+1} выбираются из фиксированной допустимой системы $(p+1)$ -мерных комплексных векторов (см. [5, с. 293]).

Пусть задана голоморфная кривая $f: C \rightarrow P_p C$ и система гиперплоскостей $\{D_\alpha\}$ на $P_p C$, которая имеет нормальное самопересечение. В силу равенства (11) $\beta(D_\nu, f) = \beta(\bar{a}^{(\nu)}, \bar{G})$, где целая кривая $\bar{G}(z)$ индуцирует отображение $f: C \rightarrow P_p C$ (см. [3, с. 83]). Используя далее результаты из теории целых кривых [8], приходим к такому заключению.

Теорема 4. Если голоморфная кривая $f: C \rightarrow P_p C$ имеет конечный нижний порядок λ , то для любой фиксированной системы гиперплоскостей $\{D_\alpha\}$, находящейся в общем положении,

$$\sum_{D_\nu \in \{D_\alpha\}} \beta(D_\nu, f) \leq K(1 + \lambda)(p!)^3.$$

Вероятно, аналог этого утверждения имеет место и в общем случае, т. е. для голоморфных кривых на произвольном компактном комплексном многообразии M , обладающим положительным линейным расслоением.

6. Протяжения голоморфных кривых. Пусть по-прежнему $f: C \rightarrow M$ — голоморфная кривая, $D = D(S)$ — дивизор на M . Для каждой положительной неограниченной при $r \rightarrow \infty$ функции $\Lambda(r) = o(T(r, L, f))$ определим множество

$$E_\Lambda(r, D, f) = \left\{ \theta \in (-\pi, \pi] : \ln \frac{1}{|S(f(re^{i\theta}))|} > \Lambda(r) \right\}.$$

Пусть $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность пиков Поля для функции $T(r, f) = T(r, L, f)$ [6, с. 37]. Положим

$$\sigma_\Lambda(D, f) = \lim_{r_m \rightarrow \infty} \text{mes } E_\Lambda(r_m, D, f) \text{ и } \sigma(D, f) = \inf_{\{\Lambda\}} \sigma_\Lambda(D, f),$$

где $\inf$ берется по всем неограниченным при $r \rightarrow \infty$ функциям $\Lambda(r)$, для которых $\Lambda(r) = o(T(r, f))$. В случае мероморфных функций соответствующая величина $\sigma(a, f)$ называется протяжением мероморфной функции $f(z)$ относительно числа a [9]. По этой причине $\sigma(D, f)$ естественно назвать протяжением голоморфной кривой $f: C \rightarrow M$ относительно дивизора D . А. Бернштейн [9] доказал, что для каждой мероморфной функции конечного нижнего порядка λ и любого числа a

$$\sigma(a, f) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a, f)}{2}} \right\}, \quad (16)$$

где $\delta(a, f)$ — неванлинновский дефект $f(z)$ в точке a .

А. В. Крытов [10] установил, что оценка (16) сохраняет силу и для целых кривых $\bar{G}: C \rightarrow C^{p+1}$, имеющих конечный нижний порядок λ . В силу сделанного выше замечания (см. 3) этим самым доказано, что оценка (16) сохраняет силу и для голоморфных

кривых на проективном пространстве $P_p C$, имеющих конечный нижний порядок λ . Другими словами, для каждой гиперплоскости $D \in P_p C$

$$\sigma(D, f) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\beta(D, f)}{2}} \right\}. \quad (17)$$

Наконец, недавно В. А. Бабец доказал, что оценка (17) сохраняет силу для голоморфных кривых конечного нижнего порядка λ на произвольном компактном комплексном многообразии M , обладающим положительным линейным расслоением.

В настоящее время неизвестна оценка снизу для $\sigma(D, f)$, которая учитывала бы ее зависимость от величины $\beta(D, f)$.

Введем несколько модифицированное определение протяжения, для которого имеет место оценка снизу через величину $\beta(D, f)$.

Пусть $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ две последовательности такие, что $\{2s_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{2R_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются членами последовательности пиков Поля функции $T(r, L, f)$, для которых при $k \geq k_0$ $s_k \leq R_k k^{-1}$ и $s_{k+1} \geq R_{k+1}$. Тогда сегменты $a_k = [2s_k, 0.5R_k]$ не пересекаются при различных значениях k . Положим

$$\sup_{r \in a_k} \text{mes } E(r, D, f) = E_k(D; \Lambda, f); \quad \omega(D; \Lambda, f) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_k(D; \Lambda, f)$$

и

$$\omega(D, f) = \inf_{\{\Lambda\}} \omega(D; \Lambda, f),$$

где $\inf$ берется по всем функциям $\Lambda(r) = o(T(r, L, f))$ при $r \rightarrow \infty$. Имеет место такое утверждение.

Теорема 5. Если голоморфная кривая $f: C \rightarrow M$ имеет конечный нижний порядок λ , то для каждого дивизора D

$$\omega(D, f) \geq \begin{cases} \frac{\beta^2(D, f)}{(\pi\lambda)^3 (1 + \sqrt{2})}, & \text{если } \lambda \geq 0.5; \\ \frac{\beta^2(D, f) \sin \pi\lambda}{(\pi\lambda)^3 (1 + \sqrt{2})}, & \text{если } \lambda < 0.5, \text{ а } \beta(D, f) < \pi\lambda \operatorname{tg} \pi\lambda; \\ \frac{2 \sin^2 0.5\pi\lambda \sin \pi\lambda}{\pi\lambda \cos \pi\lambda}, & \text{если } \lambda < 0.5, \text{ а } \beta(D, f) \geq \pi\lambda \operatorname{tg} \pi\lambda. \end{cases}$$

Наметим ход доказательства этой теоремы. Из определения $\omega(D; \Lambda, f)$ следует, что для каждого ε , $0 < \varepsilon < 1$, по некоторой последовательности $\{k_v\}_{v=1}^{\infty}$, последовательности $\{k\}_{k=1}^{\infty}$ при $v \geq v_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $E_{k_v}(D; \Lambda, f) \leq \omega(D; \Lambda, f) + \varepsilon$. Эту подпоследовательность по-прежнему будем обозначать $\{k\}_{k=1}^{\infty}$. Из определения множеств $E_k(D; \Lambda, f)$ следует, что при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\int_{2s_k}^{0.5R_k} m(r, D, f) \frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \int_{2s_k}^{0.5R_k} [\omega(D; \Lambda, f) + \varepsilon] \frac{L(r, D, f)}{r^{\lambda+1}} dr +$$

$$+ \varepsilon \int_{2s_k}^{0,5R_k} T(r, f) \frac{dr}{r^{\lambda+1}}. \quad (18)$$

Поделим обе части неравенства (15) на $r^{\lambda+1}$ и проинтегрируем полученную оценку по r в пределах $2s_k - 0,5R_k$. Получим такой результат (см. об этом методе [6, с. 48—52]):

$$\begin{aligned} & \int_{2s_k}^{0,5R_k} L(r, D, f) \frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \frac{\pi\lambda}{\sin \frac{\pi\lambda}{2x}} \int_{2s_k}^{0,5R_k} \frac{m(r, D, f)}{r^{\lambda+1}} dr + \\ & + \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \int_{2s_k}^{0,5R_k} \frac{N(r, D, f)}{r^{\lambda+1}} dr + \frac{C}{x-\lambda} \left\{ \frac{T(2s_k, f)}{s_k^\lambda} + \frac{T(2R_k, f)}{R_k^\lambda} \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где C положительная постоянная, а параметр x принимает любое значение из промежутка $\max(0,5, \lambda) < x < \infty$. Оценки (18), (19) показывают, что для каждого ε , $0 < \varepsilon < 1$, при $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta(D, f) - \varepsilon - \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \right\} \int_{2s_k}^{0,5R_k} T(r, f) \frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \\ & \leq \frac{\pi\lambda}{\sin \frac{\pi\lambda}{2x}} [\omega(D; \Lambda, f) + \varepsilon] \int_{2s_k}^{0,5R_k} L(r, D, f) \frac{dr}{r^{\lambda+1}} + \\ & + \frac{C}{x-\lambda} \left\{ \frac{T(2s_k, f)}{s_k^\lambda} + \frac{T(2R_k, f)}{R_k^\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\beta(D, f) > 0$ и $\varepsilon < \beta(D, f)$ для каждого $x > \max(\lambda, 0,5)$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\beta(D, f) - \varepsilon}{\pi\lambda} \sin \frac{\pi\lambda}{2x} - 1 + \cos \frac{\pi\lambda}{2x} \right\} \int_{2s_k}^{0,5R_k} T(r, f) \frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \\ & \leq [\omega(D; \Lambda, f) + \varepsilon] \int_{2s_k}^{0,5R_k} \frac{L(r, D, f)}{r^{\lambda+1}} dr + \frac{C}{x-\lambda} \left\{ \frac{T(2s_k, f)}{s_k^\lambda} + \frac{T(2R_k, f)}{R_k^\lambda} \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Подставим в неравенство (20) вместо интеграла $\int_{2s_k}^{0,5R_k} L(r, D, f) r^{-\lambda-1} dr$

его оценку через интеграл $\int_{2s_k}^{0,5R_k} T(r, f) r^{-\lambda-1} dr$ (случай мероморфных функций см. в [6, с. 51]). В полученной оценке переходим к пределу при $k \rightarrow \infty$. Учитывая поведение суммы

$s_k^{-\lambda} T(2s_k, f) + R_k^{-\lambda} T(2R_k, f)$ по последовательности пиков Поляна [6, с. 40], получаем соотношение

$$\frac{\beta(D, f)}{\pi\lambda} \sin \frac{\pi\lambda}{2x} - 1 + \cos \frac{\pi\lambda}{2x} \leq \omega(D; \lambda, f) B(\lambda, \Delta(D, f)), \quad (21)$$

где $B(\lambda, \Delta)$ — функция, фигурирующая в теореме 2. Оценка (21) имеет место для любого $x > \max(\lambda, 0,5)$ и для любой функции $\Delta(r) = 0$ ($T(r, f)$) ($r \rightarrow \infty$). Поэтому эта оценка сохраняет силу при каждом $x > \max(\lambda, 0,5)$ и для функции $\omega(D, f)$. Выбирая в полученной оценке для $\omega(D, f)$ значение $x = x_0$, которое обуславливает максимум функции, стоящей в левой части неравенства (21), приходим к утверждению теоремы 5. Ясно, что теорема 5 сохраняет силу для мероморфных функций и целых кривых.

Список литературы: 1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, ч. II. — М.: Наука, 1976. — 400 с. 2. Уэлс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1976. — 284 с. 3. Бу Х. Теория равномерного предельного для голоморфных кривых. — М.: Мир, 1973. — 228 с. 4. Ahlfors L. The theory of Meromorphic curves. — Soc. Scient. Fenn. Acta. Nova ser. A, 1941, 3, № 4, p. 1—31. 5. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений. — В кн.: Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. — М.: Физматгиз, 1960. — 319 с. 6. Петренко В. П. Рост мероморфных функций. — Харьков: Вища школа, 1978. — 136 с. 7. Гриффитс Ф., Кинг Дж. Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий. — М.: Мир, 1976. — 96 с. 8. Петренко В. П. Рост целых кривых конечного нижнего порядка. — Мат. сб., 1975, 97 (139) № 4 (8), с. 469—492. 9. Baernstein A. II. Proof of Edrei's spread conjecture. — Proc. London Math. Soc., 1973, 26, № 3, p. 418—434. 10. Крытов А. В. О дефектах целых кривых конечного нижнего порядка. — Укр. мат. журн., 1979, 31, № 3, с. 273—278.

Поступила 24 октября 1979 г.

УДК 517.944

В. М. БОРОК, д-р физ.-мат. наук, Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ,
д-р физ.-мат. наук

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Цель статьи — построение теории единственности и корректной разрешимости задачи Коши для эволюционных систем линейных дифференциальных уравнений с сосредоточенными в фиксированные моменты времени элементами. Пусть $P(s)$, $Q_j(s)$, $j = \overline{1, q}$, — произвольные квадратные $N \times N$ матрицы с полиномиальными относительно $s = (s_1, \dots, s_n)$ элементами; t_j , $j = \overline{1, q}$ — произвольный набор чисел, $0 < t_1 < \dots < t_q \leq T < \infty$. Рассматривается система уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{u}(x, t) + \sum_{j=1}^q Q_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{u}(x, t_j), \quad (1)$$

$$x \in R^n, t \in [0, T],$$

при начальном условии

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x), x \in R^n, \quad (2)$$

где $\bar{u}(x, t) \in C^N$ — искомая, а $u_0(x) \in C^N$ — заданная функция. Системы вида (1) могут быть истолкованы как системы с сингулярными (типа δ -функции) коэффициентами, а также как системы уравнений с переменными отклонениями временного аргумента. Различные задачи для отдельных уравнений такого вида изучались в работах [1, 2] и др.

Исследованию задачи (1), (2) в случае $N = 1$ посвящена работа [3]; в [4] предложена схема исследования единственности решения абстрактной задачи Коши для уравнений с сосредоточенными элементами.

1. Единственность. Вопрос о единственности решения задачи (1), (2) сводится к отысканию функции $f(r) > 0, r > 0$, имеющей при $r \rightarrow \infty$ возможно более быстрый рост и такой, что решение $\bar{u}(x, t)$ системы (1), удовлетворяющее условию (2) с $u_0(x) \equiv 0$ и оценке

$$|\bar{u}(x, t)| \leq Cf(|x|), x \in R^n, t \in [0, T], \quad (3)$$

тождественно равно нулю. Такое решение впредь будем называть 0-решением (нуль-решением) класса $M < f >$. Очевидно, $M < f >$ — банахово пространство с нормой $\|\bar{u}(x)\|_f = \sup_{R^n} |\bar{u}(x)| f^{-1}(|x|)$.

При изучении корректности задачи (1)–(2) также будем использовать банахово пространство $M_q < f >$ с нормой $\|\bar{u}(x)\|_{f, q} = \sup_{|x| \leq q} \|D_x^{\alpha} \bar{u}(x)\|_f$.

Обозначим $B^*(s) = B'(-s)$, где ' означает транспонирование,

$\epsilon(A, t) = \int_0^t \exp\{A\tau\} d\tau$; $G(s)$ — блочную матрицу с $N \times N$ блоками $G_{jk}(s) = Q_j^*(-is) E(P^*(-is), t_k)$, $jk = \overline{1, q}$; наконец, $\Delta(s) = \det \times \times [E - G(s)]$, где E — единичная матрица размером $Nq \times Nq$. Очевидно, элементами $G(s)$ являются целые функции $s \in C^N$ конечного порядка p_0 , где p_0 — проведенный порядок матрицы $P(s)$ [5]. Поэтому $\Delta(s)$ — также целая функция порядка не выше p_0 .

Систему (1) назовем абсолютно невырожденной, если $\Delta(s) \neq 0$ при $s \in C^n$, невырожденной типа a , если $a = \sup\{\alpha: |\operatorname{Im} s| \leq \alpha \Rightarrow \Delta(s) \neq 0\}^*$; почти вырожденной, если $\Delta(s) (\neq 0)$ имеет вещественные нули и, наконец, вырожденной, если $\Delta(s) \equiv 0$.

Исследование единственности решения задачи (1)–(2) будет основано на схеме, изложенной в [4] (принцип Гольмгрена). Для

* $|\cdot|$ — евклидова норма вектора из R^n .

этого необходимо изучить вопрос о разрешимости сопряженной к (1)–(2) задачи, имеющей вид

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = -P^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{v}_k(x, t), \quad k = \overline{1, q}; \quad (4)$$

$$\bar{v}_k(x, t_k) - Q_k^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{i=1}^q \int_0^{t_j} \bar{v}_i(x, \tau) d\tau = \bar{\varphi}_k(x), \quad k = \overline{1, q} \quad (5)$$

в некотором линейном топологическом пространстве Φ_1 при любых заданных вектор-функциях $\bar{\varphi}_k(x)$, $k = \overline{1, q}$ из пространства $\Phi \subset \Phi_1$. Если при этом $\Phi_1 \subset E$, где E — некоторое банахово пространство, Φ плотно в E , а нуль-решения задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \quad (6)$$

в сопряженном пространстве E' тривиальны, но нуль-решения задачи (1)–(2) в E' также тождественно равны нулю.

Для подбора пространств Φ и Φ_1 рассмотрим наряду с (4)–(5) двойственную задачу

$$\frac{d\bar{y}_k(s, t)}{dt} = -P^*(-is) \bar{y}_k(s, t), \quad k = \overline{1, q}; \quad (7)$$

$$\bar{y}_k(s, t_k) - Q_k^*(-is) \sum_{i=1}^q \int_0^{t_j} \bar{y}_i(s, \tau) d\tau = \bar{\psi}_k(s), \quad k = \overline{1, q}, \quad (8)$$

где $\bar{y}_k(s, t)$, $k = \overline{1, q}$ — искомые вектор-функции аргумента t , зависящие от параметра $s \in C^n$. Из (7) следует, что

$$\bar{y}_k(s, t) = \exp \{ -P^* - (is)t \} \bar{\xi}_k(s), \quad k = \overline{1, q}, \quad (9)$$

где векторы $\bar{\xi}_k(s)$ подлежат, в силу (8), определению из системы

$$\begin{aligned} & \exp \{ -P^* (-is) t_k \} \bar{\xi}_k(s) - Q_k^*(-is) \sum_{i=1}^q \times \\ & \times \int_0^{t_j} \exp \{ -P^* (-is) \tau \} d\tau \bar{\xi}_i(s) = \bar{\psi}_k(s) \quad k = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) линейных уравнений допускает преобразование к виду:

$$[E - G(s) D(s)] \bar{\xi}(s) = \bar{\psi}(s), \quad (11)$$

где $\bar{\psi}(s) = \{\bar{\psi}_1(s), \dots, \bar{\psi}_q(s)\}$, $\bar{\xi}(s) = \{\bar{\xi}_1(s), \dots, \bar{\xi}_q(s)\}$; $D(s)$ — квазидиагональная матрица $Nq \times Nq$,

$$D(s) = \text{diag} \{ \exp [-P^* (-is) t_1], \dots, \exp [-P^* (-is) t_q] \}.$$

Из (11) находим $\bar{\xi}(s) = Q(s) \bar{\psi}(s)$, где

$$Q(s) = \text{diag} \{ \exp [P^* (-is) t_1], \dots, \exp [P^* (-is) t_q] \} [E - G(s)]^{-1}. \quad (12)$$

Согласно (9) можем записать решение $\bar{y}_k(s, t)$ задачи (7)–(8) в виде

$$\bar{y}_k(s, t) = \sum_{j=1}^q R_{kj}(s, t) \bar{\psi}_j(s), \quad k = \overline{1, q}; \quad (13)$$

$$R_{kj}(s, t) = \exp \{-P^*(-is)t\} Q_{kj}(s), \quad (14)$$

где $Q_{kj}(s)$ — матрица, составленная из строк матрицы Q_j с номерами $N(k-1)+1, \dots, Nk$ и столбцов с номерами $N(j-1)+1, \dots, Nj$. Из (12)–(14) приходим теперь к важному для дальнейшего утверждению.

Лемма 1. *Решение двойственной задачи (7)–(8) можно представить в виде (13), где $R_{kj}(s, t) = r_{kj}(s, t)/\Delta(s)$; r_{kj} — матрицы, элементы которых при каждом $t \in [0, T]$ есть целые функции $s \in \mathbb{C}^n$ порядка не выше p_0 и конечного типа.*

На основании этой леммы и принципа Гольмгрена ниже с привлечением теории пространств типа S [6, гл. 4] устанавливаются теоремы единственности задачи (1)–(2).

Теорема 1. *Пусть система (1) абсолютно невырождена. Тогда ее 0-решение класса $M < f >$ тождественно равно нулю, если*

выполнено одно из следующих условий: а) $p_0 > 1$, $f(r) = \exp \{ar^{p_1}\}$,

$p_0 = \frac{p_0}{p_0-1}$, a — достаточно мало; б) $p_0 = 1$, $f(r) = \exp \{ar^\gamma\}$,

$a > 0$, $\gamma > 0$ — любые; в) $p_0 < 0$, $f(r)$ — любая функция.

Доказательство. В случае а) в роли Φ выберем прямое произведение N экземпляров нетривиального пространства $S_{\beta, B}^{\alpha, A}$, $\alpha = 1/p_0$, $\beta = 1 - \alpha$. Требование нетривиальности Φ налагает ограничение на параметры A и B : их произведение должно быть достаточно велико. Для выбора параметров A и B воспользуемся следующими соображениями. Условие абсолютной невырожденности системы (1) означает, что $\Delta(s) = \exp \{p(s)\}$, где $p(s)$ — полином степени не выше p_0 . Поэтому элементы матриц $R_{kj}(s, t)$ — целые функции $s \in \mathbb{C}^n$, причем справедливы оценки

$$\|R_{kj}(s, t)\| \leq C \exp \{c|s|^{p_0}\}, \quad C, c > 0, \quad s \in \mathbb{C}^n, \quad t \in [0, T],$$

$$j, k = \overline{1, q}. \quad (15)$$

Потребуем, чтобы умножение на матрицы $R_{kj}(s, t)$ определяло в пространстве

$$\Psi = S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1} \times \dots \times S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1}, \quad A_1 = Ae^{1/AB}, \quad B_1 = Be^{1/AB},$$

ограниченную операцию умножения, переводящую Ψ в $\Psi_1 = S_{\alpha, A_2}^{\beta, B_2} \times \dots \times S_{\alpha, A_2}^{\beta, B_2}$. Это требование налагает ограничение на выбор A_1 и, следовательно, A (оценка сверху) после чего B можно выбрать из условия нетривиальности Φ (и Ψ).

Обозначим теперь

$$E_f = \{\bar{e}(x) : \|\bar{e}\| = \int_{|R|^{1/n}} |\bar{e}(\bar{x})| f(|x|) dx < \infty\}; \quad (16)$$

$$\Phi_1 = S_{\beta, B_3}^{\alpha, A_3} \times \dots \times S_{\beta, B_3}^{\alpha, A_3}, \quad A_3 = A_2 e^{1/A_2 B_2}, \quad B_3 e^{1/A_2 B_2}$$

причём параметр $\alpha > 0$ в определении $f(r)$ подберем из условия $\Phi_1 \subset E_f$, что выполняется при достаточно малом α . Такой выбор пространств обеспечит, в силу (13), разрешимость задачи (7), (8) в Φ_1 при $\bar{\varphi}_k(s) \in \Psi$; используя теоремы о преобразовании Фурье пространств типа S , получаем разрешимость в Φ_1 задачи (5), (6) при любых $\bar{\varphi}_k(x) \in \Phi$. Плотность вложения $\Phi \subset E_f$ гарантируется также теорией пространств типа S . Требование единственности решения задачи Коши в E_f для системы (6) выполнено в силу известной теоремы И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [7]. На основании [4] получаем требуемое в случае a .

В случае b пространство E_f выбирается также в виде (16) с $f(r) = \exp\{ar\}$, а пространство Φ в виде $\Phi = S_{\beta}^{\alpha} \times \dots \times S_{\beta}^{\alpha}$, где $\alpha < 1/\gamma$, $\beta > 1 - \alpha$. Элементами матриц $R_{kj}(s, t)$ служат теперь целые функции экспоненциального типа, операция умножения на $R_{kj}(s, t)$ ограничена в пространстве $\Psi = S_{\beta}^{\alpha} \times \dots \times S_{\beta}^{\alpha}$ и переводит его в себя. Таким образом, задача (7)–(8) разрешима в Ψ , а следовательно, задача (4)–(5) — в Φ . Далее, как в случае a .

В случае c , очевидно, $\Delta(s) = \text{const} (\neq 0)$. В роли Φ можно выбрать пространство $S_0^{\beta} \times \dots \times S_0^{\beta}$ (состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных функций и нетривиальное при $\beta > 1$), где $1 < \beta < 1/\rho_0$. Пространство E_f выбираем согласно (16) с произвольной фиксированной $f(r)$. Доказательство заканчивается как в случае a .

Таким образом, классы единственности решения задачи Коши для системы $\bar{u}'_i = P(\partial/\partial x) \bar{u}(x, t)$ являются также классами единственности решения задачи (1)–(2) в случае абсолютно невырожденной системы (1). Оказывается, что верно и обратное, а именно, при $N = 1$ классы единственности решения задачи (1), (2) совпадают с классами единственности решения задачи (6)–(2). Действительно, согласно [4], при $N = 1$ уравнение [1] является невырожденным тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий: 1) $P(s) \equiv P = \text{const}$, $\sum_i Q_i(s) E(-P, t_i) \equiv P_1 \neq 1$; 2) $q = 1$, $P(s) + Q_1(s) \equiv 0$.

В случае 1) $\rho_0 = 0$ и для обеих задач (1), (2) и (6)–(2) класс единственности решения состоит из всех функций. В случае 2) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (u(x, t) - u(x, t_1)).$$

Пусть уравнение (6) имеет при $t \in [0, T]$ нетривиальное решение класса $M < f >$. Тогда функция $u(x, t) \equiv v(x, t - t_1)$ при $t \in [t_1, T]$ и $u(x, t) \equiv 0$ при $0 \leq t < t_1$ является нетривиальным 0-решением задачи (1), (2) класса $M < f >$.

Теорема 2. Пусть система (1) является невырожденной типа a , $0 < a < \infty$. Тогда всякое ее 0-решение класса $M < \exp \{c|x|\} >$, $c < a$, тождественно равно нулю. В том же классе функций при любом $c > a$ задача имеет нетривиальное 0-решение.

Теорема 3. Пусть система (1) является невырожденной типа 0. Тогда всякое ее 0-решение класса $M < (1 + |x|)^\alpha >$, $\alpha > 0$, тождественно равно нулю. При любом $\varepsilon > 0$ задача (1) — (2) имеет нетривиальное 0-решение класса $M < \exp \{\varepsilon|x|\} >$.

Доказательство утверждений о тривиальности 0-решений соответствующих классов в теоремах 2, 3 проводится по схеме доказательства теоремы 1. В случае $a > 0$ используется оценка снизу в слое $|\operatorname{Im} s| \leq c < a$ целой функции $\Delta(s)$:

$$|\Delta(s)| \geq C_1 \exp \{-c_2 |s|^{p_0 + \varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0 \text{ — любое.}$$

Выбираем $\Phi = S_{1, B}^{\alpha, A} \times \dots \times S_{1, B}^{\alpha, A}$, $0 < \alpha < 1/p_0$ с достаточно малым $B > 0$, $\Phi_1 = S_{1, B}^{\alpha, A} \times \dots \times S_{1, B_1}^{\alpha, A}$, где $(ea)^{-1} < B_1 < (ec)^{-1}$, E_f определяется согласно (16) при $f(x) = \exp \{c|x|\}$.

В случае $a = 0$, очевидно, $\Delta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbf{R}^n$, $R_{kf}(\sigma) \in C^\infty$. Выбираем $\Phi = \Phi_1 = S^0$, E_f — согласно (16) при $f(r) = (1 + r)^\alpha$.

Нетривиальное 0-решение в обоих случаях ищем в виде

$$\bar{u}(x, t) = \exp \{i(x, s_0)\} \bar{h}(t).$$

Из (1) получаем $\bar{h}(0) = 0$,

$$\bar{h}'(t) = P(is_0) \bar{h}(t) + \sum_{j=1}^q Q_j(is_0) \bar{h}(t_j). \quad (17)$$

Полагая $\bar{h}(t) = \exp \{tP(is_0)\} \bar{H}(t)$, получим

$$\bar{H}'(t) = \exp \{-tP(is_0)\} \sum_j Q_j(is_0) \exp \{t_j P(is_0)\} \bar{H}(t_j),$$

откуда

$$\bar{H}(t) = E(-P, t) \sum_j Q_j \exp \{t_j P\} \bar{H}(t_j) = E(-P, t) \sum_j Q_j \bar{h}(t_j).$$

Тогда

$$\bar{H}(t_k) = E(-Pt_k) \sum_j Q_j \exp \{t_j P\} \bar{H}(t_j). \quad (18)$$

Если обозначить $\bar{z} = (\bar{h}(t_1), \dots, \bar{h}(t_q))$, то из (18) получим

$$\bar{z} - \tilde{G}(s_0) \bar{z} = 0, \quad (19)$$

где $\tilde{G}(s_0)$ — блочная матрица с $N \times N$ блоками $\tilde{G}_{kf}(s_0) = E(P(is_0)$,

$t_k) Q_j(is_0)$. Отсюда видно, что $\tilde{G}(s_0) = G'(s_0)$ и, следовательно, $\det [E - \tilde{G}(s_0)] = \Delta(s_0)$.

Уравнение (19) имеет, таким образом, нетривиальное решение $\bar{z}$, если $\Delta(s_0) = 0$. Решение $\bar{h}(t)$ системы (17) найдем в виде $\bar{h}(t) = E(P(is_0, t) \sum_j Q_j(is_0) \bar{h}(t_j))$. При любом $c > a \geq 0$ можно так выбрать s_0 , чтобы $|\operatorname{Im} s_0| < c$, $\Delta(s_0) = 0$, откуда и следует справедливость заключительных утверждений в теоремах 2, 3.

Теорема 4. Пусть система (1) является почти вырожденной. Тогда всякое ее 0-решение класса $L^1(\mathbb{R}^n)$ тождественно равно нулю, но существуют нетривиальные ограниченные 0-решения.

Для доказательства рассмотрим преобразование Фурье $\bar{v}(\sigma, t) = F\{u(x, t)\}$ 0-решения системы (1):

$$\bar{v}_t(\sigma, t) = P(-i\sigma) \bar{v}(\sigma, t) + \sum_{j=1}^q Q_j(-i\sigma) \bar{v}(\sigma, t_j), \quad \bar{v}(\sigma, 0) = 0. \quad (20)$$

Сравнивая (17) и (20) убеждаемся, что $\bar{v}(\sigma, t) = 0$ при $\Delta(-\sigma) \neq 0$, т. е. почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что $\bar{v}(\sigma, t) \equiv 0$ и потому $\bar{u}(x, t) \equiv 0$. С другой стороны, нетривиальное ограниченное 0-решение можно, аналогично предыдущим теоремам, найти в виде $\bar{u}(x, t) = \exp\{i(x, \sigma_0)\} \bar{h}(t)$, $\bar{h}(t) \not\equiv 0$, $\bar{h}(0) = 0$, $\Delta(\sigma_0) = 0$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 5. Пусть система (1) вырождена. Тогда она имеет нетривиальные 0-решения класса $M < \exp\{c|x|^{p_0}\}$, $c < 0$.

Доказательство. Обозначив $\bar{v}(\sigma, t)$ преобразование Фурье искомого 0-решения, получим систему (20). Ее решение можно записать в виде $\bar{v}(\sigma, t) = E(P(-i\sigma), t) \sum_j Q_j(-i\sigma) \bar{v}(\sigma, t_j)$, где вектор-функция $\bar{v}_0(\sigma) = (\bar{v}(\sigma, t_1), \dots, \bar{v}(\sigma, t_q))$ является решением системы

$$[E - \tilde{G}(-\sigma)] \bar{v}_0(\sigma) = 0. \quad (21)$$

Поскольку $\det [E - \tilde{G}(-\sigma)] \equiv \Delta(-\sigma) \equiv 0$, то система (21) имеет нетривиальное решение $\bar{v}_0(\sigma)$, которое мы можем выбрать в виде $\bar{v}_0(\sigma) = \varphi(\sigma) \bar{w}_0(\sigma)$; компоненты $\bar{w}_0(s)$ — миноры матрицы $E - \tilde{G}(-s)$, т. е. целые функции $s \in \mathbb{C}^n$ порядка не выше p_0 конечного типа. Выбрав $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \in S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, $\alpha = p_0^{-1}$, $\beta = 1 - \alpha$, A — достаточно малым, B — достаточно большим, получим, что компоненты векторов $\bar{v}_0(\sigma)$ и $\bar{v}(\sigma, t)$ принадлежат пространству $S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1}$ при некоторых $A_1 > A$ и $B_1 > 0$. Тогда $0 \not\equiv \bar{u}(x, t) \in S_{\beta}^{\alpha}$, т. е. входит в класс $M < \exp\{c|x|^{p_0}\}$ при некотором $c < 0$.

2. Корректность. В случае задачи Коши для систем линейных уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами важную роль играет класс систем, корректных по И. Г. Петровскому. В 1937 г. И. Г. Петровским был найден критерий (условие А) корректной разрешимости задачи Коши в классе ограниченных функций; позже было установлено, что для систем этого класса имеет место также корректная разрешимость задачи Коши в классе (конечно гладких) функций степенного роста [8]. Ниже указывается аналогичный (по свойствам разрешимости задачи Коши) класс систем с сосредоточенными элементами вида (1).

Задача Коши (1), (2) называется корректно разрешимой в пространстве $M_q < f >$, если существует число l (зависящее от q) такое, что при любой $\bar{u}_0(x) \in M_l < f >$ эта задача имеет решение $\bar{u}(x, t) \in M_q < f >$, причем

$$\sup_{[0, T]} \|\bar{u}(x, t)\|_{f, q} \leq C \|\bar{u}_0\|_{f, l}.$$

Теорема 6. Пусть выполнены следующие условия:

$$1. \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \leq C_1, \sigma \in \mathbf{R}^n, C_1 > 0, j = \overline{1, N}, \quad (22)$$

$\lambda_j(\sigma)$ — характеристические корни матрицы $P(i\sigma)$;

$$2. |\Delta(\sigma + i\tau)| \geq c_2 (1 + |\sigma|)^r \text{ при } |\tau| \leq C_3 (1 + |\sigma|)^p, \\ r, p \in \mathbf{R}, C_2, C_3 > 0. \quad (23)$$

Тогда задача Коши (1)–(2) при любом $q > 0$ корректно разрешима в пространстве $M_q < (1 + |x|)^\gamma >$, $\gamma \in \mathbf{R}$ — любое.*

Доказательство. Пусть сначала $\bar{u}_0(x)$ — финитная достаточно гладкая вектор-функция: $\bar{u}_0(x) \in C_0^l(K)$, $K = \{x : |x| \leq 1\}$. После преобразования Фурье из (1), (2) получим

$$\bar{v}_i(\sigma, t) = P(-i\sigma) \bar{v}(\sigma, t) + \sum_j Q_j(-i\sigma) \bar{v}(\sigma, t_j), \quad (24)$$

$$\bar{v}(\sigma, 0) = \bar{v}_0(\sigma). \quad (25)$$

Далее, аналогично приведенному выше решению уравнения (17) получим

$$\bar{v}(\sigma, t) = R(\sigma, t) \bar{v}_0(\sigma); \quad (26)$$

$$R(\sigma, t) = \exp \{tP(-i\sigma)\} + E(P(-i\sigma), t)r(\sigma)\Delta^{-1}(\sigma),$$

где $r(\sigma)$ — полином от переменных $Q_j(-i\sigma)$, $\exp \{t_j P(-i\sigma)\}$ и $E(P(-i\sigma), t_j)$, $j = \overline{1, q}$.

Условия 1 и 2 теоремы влекут выполнение оценок

$$|D_\sigma^\alpha R(\sigma, t)| \leq C_\alpha (1 + |\sigma|)^{l_\alpha}, l_\alpha, C_\alpha > 0, \sigma \in \mathbf{R}^n, \quad (27)$$

* При $\gamma = 0$ получаем корректную разрешимость в классе ограниченных функций.

l_α зависит от r , ρ и $|\alpha|$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — любой мультииндекс. Оценки (27) нетрудно получить с помощью формулы Коши, учитывая аналогичность функции $R(\sigma + i\tau, t)$ в области $|\tau| \leq C_3 \times (1 + |\sigma|)^\rho$ и оценок (22), (23). Далее, функция $\bar{v}_0(\sigma) = F\{\bar{u}_0 \times (x)\}$, $\bar{u}_0 \in C_0^l(K)$ при любом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ удовлетворяет оценке

$$|D^\alpha \bar{v}_0(\sigma)| \leq C_{1\alpha} \|\bar{u}_0\|_{1,l} (1 + |\sigma|)^{-l}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \quad (28)$$

Для соответствующего решения $\bar{v}(\sigma, t)$ задачи (24), (25), согласно (26)—(28), справедливо неравенство

$$|D_\sigma^\alpha \bar{v}(\sigma, t)| \leq C_{2\alpha} \|\bar{u}_0\|_{1,l} (1 + |\sigma|)^{h_\alpha},$$

где $h_\alpha > 0$ зависит от r , ρ , $|\alpha|$ и l ; $h_\alpha \rightarrow -\infty$ при $l \rightarrow +\infty$. Отсюда нетрудно получить оценку

$$|D_x^\alpha \bar{u}(x, t)| \leq C_{3\alpha} \|\bar{u}_0\|_{1,l} (1 + |x|)^{-h}, \quad (29)$$

справедливую при любом $h > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, если только $l > l_0(\alpha, h, r, \rho)$; постоянная $C_{3\alpha}$ не зависит от u_0 .

Пусть теперь $\bar{u}_0 \in M_l < f >$, $f = (1 + |x|)^l$. Используя разложение единицы (для единообразия при любом γ , хотя при $\gamma < -n$ в этом нет необходимости), представим $\bar{u}_0(x)$ в виде

$$\bar{u}_0(x) = \sum_\nu \bar{u}_{0\nu}(x - \nu), \quad \bar{u}_{0\nu}(x) = \bar{u}_0(x + \nu) e(x),$$

$$e(x) \in C_0^\infty(K), \quad \sum_\nu e(x - \nu) \equiv 1.$$

Оценив с помощью (29) решение $\bar{u}_\nu(x, t)$ задачи (1)—(2) с начальной функцией $\bar{u}_{0\nu}(x) \in C_0^l(K)$, а затем, суммируя по ν , получаем требуемое.

Отметим в заключение, что условие 1 теоремы 6 означает корректность по И. Г. Петровскому системы (6). Условие 2 этой теоремы не может выполняться для почти вырожденной задачи. Результат теоремы (6) также не имеет места в этом случае ввиду наличия нетривиальных ограниченных 0-решений. Зато условие 2 автоматически выполняется для любой невырожденной задачи положительного типа ($e \equiv r = \rho = 0$). Итак, имеет место

Следствие. Если система 6 корректна по И. Г. Петровскому, а система (1) является невырожденной положительного типа, то задача (1), (2) корректно разрешима в пространстве $M_q < (1 + |x|)^l >$ при любых $q > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Список литературы: 1. Искандеров А. Д. О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа.— Докл. АН СССР, 1971, 199, № 6, с. 1237—1240. 2. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 1, с. 103—

109. 3. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для одного класса нагруженных уравнений.— Усп. мат. наук, 1979, 34, вып. 1, с. 221—227. 4. Борок В. М., Житомирский Я. И. О принципе Гольмгрена в абстрактной задаче Коши для нагруженных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 9, с. 775—777. 5. Борок В. М. Приведение системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к каноническому виду.— Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, с. 13—16. 6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с. 7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши.— Усп. мат. наук, 1953, вып. 6, с. 3—54. 8. Шилов Г. Е. Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Усп. мат. наук, 1955, 10, вып. 4, с. 89—100.

Поступила 4 ноября 1979 г.

УДК 519.9+575.1

Ю. И. Л Ю Б И Ч, д-р физ.-мат. наук

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ БЕРНШТЕЙНОВСКИХ АЛГЕБР

Бернштейновские алгебры возникли в связи с одной проблемой С. Н. Бернштейна [1—3], относящейся к математической теории наследственности. Еще до получения формального статуса они зарекомендовали себя в качестве адекватного аппарата [4, 5]. Формальное определение было дано П. Холгейтом [6] в качестве алгебраического эквивалента, введенного нами [7] понятия бернштейновского квадратичного оператора. В [6] содержится некоторая классификация бернштейновских алгебр в размерностях* $n \leq 4$, однако там нет классификации с точностью до изоморфизма. Эта задача не только при $n \leq 4$, но и в некоторых более общих ситуациях решается в настоящей статье. Задача во всем классе бернштейновских алгебр содержит в качестве подзадач классификацию произвольных квадратичных отображений одного пространства в другое и произвольных линейных операторных пучков.

Отметим, что некоторые общие свойства бернштейновских алгебр были фактически установлены еще в [7] и затем преведены на алгебраический язык в [8]**. Для удобства читателя мы вновь изложим их здесь с полными доказательствами. Отметим также, что основные теоремы работы [3] С. Н. Бернштейна удалось передоказать средствами теории бернштейновских алгебр [9—10].

1. Барические алгебры. Пусть A — коммутативная неассоциативная n -мерная алгебра над полем k ($\text{char } k \neq 2$), $s: A \rightarrow k$ — ненулевой гомоморфизм. Объект (A, s) называется барической алгеброй (B -алгеброй), s — ее весом [11].

* При $n = 3$ это — некоторая трансформация списка С. Н. Бернштейна [3].

** В [8] содержится также ряд результатов, новых по сравнению с [7].

Пример. Пусть T — линейный оператор в n -мерном пространстве (над k), s -линейная форма ($s \neq 0$), $T^*s = s$. Определим умножение

$$xy = \frac{1}{2} \{s(y)Tx + s(x)Ty\}. \quad (1.1)$$

Тогда $s(xy) = s(x)s(y)$, и мы получаем B -алгебру A_{Ts} , порождаемую оператором T и формой s . B -алгебра $A_{1,s}$ (1 — единичный оператор, s — любая линейная форма $\neq 0$) называется единичной. В единичной B -алгебре

$$xy = \frac{1}{2} \{s(y)x + s(x)y\}. \quad (1.2)$$

Если $T = s \otimes e$, где s — любая линейная форма $\neq 0$, e — любой вектор, такой, что $s(e) = 1$, то получаем

$$xy = s(x)s(y)e. \quad (1.3)$$

B -алгебра $A_{s \otimes e, s}$ называется константой.

Пусть (A, s) — B -алгебра. Если $A_1 \subset A$ — подалгебра, такая, что $s|_{A_1} \neq 0$, то (A_1, s) — B -алгебра. Ее (а также просто A_1) естественно называть B -подалгеброй для (A, s) . Примером может служить (E, s) , где E — любое подпространство $\supset A^2$. Очевидно, $s|_{A^2} \neq 0$, так как $s(x^2) = s^2(x)$.

Если $I \subset A$ — идеал, такой, что $s|_I = 0$, то он называется B -идеалом. Наибольшим B -идеалом является баридеал $\text{Ker } s$. B -идеалом является также аннулятор $\text{Ann } A = \{x | xz = 0 \ (z \in A)\}$.

Для любого B -идеала I гомоморфизм s естественно переносится на факторалгебру A/I , в результате чего возникает B -факторалгебра $(A/I, s)$.

Линейная форма f на A называется инвариантной, если выполняется тождество

$$f(xy) = \frac{1}{2} \{s(y)f(x) + s(x)f(y)\}. \quad (1.4)$$

Инвариантные линейные формы образуют подпространство $I \subset A^*$. Очевидно, $s \in I$, так что $\dim I \geq 1$. В константной B -алгебре только формы, пропорциональные s , инвариантны, т. е. $\dim I = 1$. В единичной B -алгебре все линейные формы инвариантны, т. е. $\dim I = n$. В любой B -алгебре аннулятор $I^\perp = \{x | x \in A, f(x) = 0 \ (f \in I)\}$ является B -идеалом, причем

$$\text{Ann } A \subset I^\perp \quad (1.5).$$

B -факторалгебра $(A/I^\perp)$ — единичная в силу (1.4). B -алгебры, для которых в (1.5) достигается равенство, называются консервативными. Они играют существенную роль в приложениях (см. [4, 5, 9, 10]).

Теорема 1.1 Следующие свойства B -алгебры эквивалентны: 1) B -алгебра консервативна; 2) произведение xy зависит только от значений инвариантных линейных форм на множителях x, y

(т. е. от классов, которым принадлежит x и y по модулю $I^\perp$); 3) выполняется тождество

$$x^2y = s(x)xy \quad (1.6).$$

Доказательство. Очевидно, 1) $\Rightarrow$ 2). Далее, 2) $\Rightarrow$ 3), ибо $x^2 \equiv s(x)x \pmod{I^\perp}$. Наконец, пусть выполнено 3). Тогда $x^2 - s(x)x \in \text{Апп } A$ для всех x . Поэтому, если $f \in (\text{Апп } A)^\perp$, то $f(x^2) = s(x)f(x)$, откуда $f \in I$. Таким образом, $(\text{Апп } A)^\perp \subset I$, что вместе с (1.5) влечет консервативность B -алгебры.

Следствие. B -алгебра $A_{T,s}$ консервативна тогда и только тогда, когда $T^2 = T$, т. е. T — проектор.

В частности, консервативны все константные алгебры и единичная алгебра.

Введем еще понятие исчезающей линейной формы, как такой, что $g(x^2) = 0$ ($x \in A$), т. е. $g|A^2 = 0$. Такие формы образуют в A^* подпространство $N = (A^2)^\perp$. Отметим, что $N \cap I = 0$. Поэтому $\dim N + \dim I \leq h$. Можно доказать, что, если $\dim N + \dim I = 0$, то $A = A_{T,s}$, где T — проектор.

Рассмотрим гомоморфизмы B -алгебр. Пусть (A, s) и (A_1, s_1) — две B -алгебры. Если $h: A \rightarrow A_1$ — такой гомоморфизм алгебр, что $h^*s_1 = s$, то он называется B -гомоморфизмом и обозначается: $h: (A, s) \rightarrow (A_1, s_1)$. Примеры: вложение B -подалгебры в B -алгебру, естественный гомоморфизм B -алгебры в B -факторалгебру.

Очевидно, B -алгебры и B -гомоморфизмы образуют категорию.

Биективный B -гомоморфизм называется B -изоморфизмом. При этом h^{-1} также является B -изоморфизмом. Две B -алгебры (A, s) и (A_1, s_1) называются B изоморфными (что обозначается обычным знаком $\approx$), если существует B -изоморфизм одной на другую.

Теорема 1.2. Для любого B -гомоморфизма $h: (A, s) \rightarrow (A_1, s_1)$ образ $\text{Im } h$ является B -подалгеброй в (A_1, s_1) , а ядро $\text{Ker } h$ — B -идеалом в (A, s) . Имеет место естественный B -изоморфизм

$$(\text{Im } h, s_1) \approx (A/\text{Ker } h, s). \quad (1.7)$$

Доказательство проводится непосредственно.

2. Бернштейновские алгебры. Начиная с этого параграфа, основным полем служит R или C .

B -алгебра (A, s) называется бернштейновской или стационарной*, если в ней выполняется тождество

$$(x^2)^2 = s^2(x)x^2. \quad (2.1)$$

Пример 1. Любая консервативная B -алгебра — бернштейновская. Действительно, из (1.6) следует, что $x^3 = s(x)x^2$, а тогда вторичное применение (1.6) (при $y = x^2$) дает (2.1).

В дальнейшем мы увидим, что далеко не все бернштейновские алгебры консервативны.

* Ввиду связи этих алгебр с принципом стационарности (см. [6, 7]).

Пример 2. B -алгебра $A_{T,s}$ — бернштейновская тогда и только тогда, когда $T^2 = T$. Все такие алгебры консервативны согласно следствию теоремы 1.1.

Класс бернштейновских алгебр, очевидно, замкнут относительно переходов к B -подалгебрам и B -факторалгебрам, а значит — к образам B -гомоморфизмов. B -алгебра, B -изоморфная бернштейновской — бернштейновская.

Лемма 2.1. *В бернштейновской алгебре (A, s) не существует гомоморфизмов в основное поле, отличных от s и 0 .*

Доказательство. Если σ — такой гомоморфизм, то из (2.1) $\sigma^4(x) = s^2(x) \sigma^2(x)$, откуда при $\sigma \neq 0$ получается $\sigma = \pm s$. Но $(-s)$ не является гомоморфизмом (по умножению).

Следствие. Если (A, s) и (A_1, s_1) — бернштейновские алгебры, то любой гомоморфизм алгебр $A \xrightarrow{h} A_1$ такой, что $\text{Im } h \not\subseteq \text{Ker } s_1$ является B -гомоморфизмом. В частности, любой изоморфизм алгебр A и A_1 является B -изоморфизмом.

Заметим теперь, что в любой бернштейновской алгебре, (A, s) существуют нулевые идемпотенты.

Лемма 2.2. *Формула $e = x^2(s(x) = 1)$ (2.2) дает общий вид ненулевых идемпотентов.*

Доказательство. При выполнении (2.2) $e^2 = e$ в силу (2.1). Обратно, пусть $e^2 = e \neq 0$. Тогда $s^2(e) = s(e)$, откуда $s(e) = 1$ или $s(e) = 0$. Последний случай отпадает, так как при $s(e) = 0$ получается $(e^2)^2 = 0$, т. е. $e = 0$. Тем самым имеет место (2.2) при $s(e) = 0$.

Следствие. Множество ненулевых идемпотентов является связным подмножеством гиперплоскости $s(x) = 1$.

Выберем какой-нибудь идемпотент $e \neq 0$. Любой вектор $x \in A$ однозначно представляется в виде $x = \sigma e + y$, где σ — скаляр, при этом $\sigma = s(x)$. Подставляя в (2.1) и сравнивая коэффициенты при степенях σ , получаем систему тождеств, эквивалентную (2.1):

$$2e(2ey) = 2ey, 2ey^2 + (2ey)^2 = y^2 \quad (2.3); \quad (2ey)y^2 = 0, (y^2)^2 = 0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим в связи с этим оператор L_e , действующий в баридае $\text{Ker } s$ по формуле $L_e y = 2ey$.

Лемма 2.3. L_e — проектор; $\text{rg } L_e$ не зависит от e .

Доказательство. Первое тождество (2.3) означает, что $L_e^2 = L_e$, т. е. L_e — проектор. Но тогда $\text{rg } L_e = \text{sr } L_e$ — непрерывная целочисленная функция от e на связном множестве. Следовательно, $\text{rg } L_e = \text{const}$.

В дальнейшем мы фиксируем e и полагаем $L_e \equiv L$. Число $m = \text{rg } L + 1$ называется рангом, $\delta = \text{def } L$ — дефектом, пара (m, δ) — типом бернштейновской алгебры. Очевидно, $1 \leq m \leq n$, $0 \leq \delta \leq n - 1$, $m + \delta = n = \dim A$. Тип — основной, но еще довольно грубый вариант изоморфизма бернштейновских алгебр.

В B -алгебре $A_{T,s}$ ненулевые идемпотенты — это неподвижные точки оператора T ($Te = e$), нормированные так, что $s(e) = 1$.

При любом e здесь $L = T | \text{Ker } s$ (т. е. L не зависит от e), $m = \text{rg } T$, $\delta = \text{def } T$. В частности, единичная алгебра имеет тип $(n, 0)$, а константная — $(1, n-1)$. Этими примерами данные типы исчерпываются.

Теорема 2.1. Типу $(n, 0)$ принадлежит только единичная алгебра, типу $(1, n-1)$ только константные.

Доказательство. Если $m = n$, то $L = 1$, т. е. $2ey = y$ ($y \in \text{Ker } s$). Но тогда из (2.3) $y^2 = 0$, откуда $x^2 = (s(x)e + y)^2 = s(x)x$ и алгебра — единичная. Если $m = 1$, то $L = 0$, т. е. $2ey = 0$ ($y \in \text{Ker } s$).

Но тогда из (2.3) опять следует $y^2 = 0$, откуда $x^2 = s^2(x)e$ и алгебра — константная.

Следствие. В размерностях $n \leq 2$ не существует бернштейновских алгебр, отличных от единичной и константных.

Расщепим теперь баридеал проектором $L: \text{Ker } s = U \dot{+} V \times \times (U = \text{Im } L, V = \text{Ker } L)$.

Лемма 2.4. $U^2 \subset V$, $V^2 \subset U$, $UV \subset U$.

Доказательство. Из (2.3) имеем $L(y^2) + (Ly)^2 = y^2$. (2.5) Отсюда, если $Ly = y$, то $L(y^2) = 0$, т. е. $U^2 \subset V$. Далее, в силу (2.5) $L(y_1y_2) + (Ly_1)(Ly_2) = y_1y_2$ ($y_1, y_2 \in \text{Ker } s$) и, если $Ly_2 = 0$, то $L(y_1y_2) = y_1y_2$, т. е. $(\text{Ker } s)V \subset U$, откуда $V^2 \subset U$, $UV \subset U$.

Установим теперь основную теорему о строении бернштейновских алгебр. Будем исходить из разложения $A = \text{Lin}(e) \dot{+} U \dot{+} \dot{+} V$. (2.6)

Теорема 2.2. Если в соответствии с (2.6) $x = se \dot{+} u \dot{+} v$, (2.7) то $x^2 = s^2e \dot{+} (su + 2uv + v^2) \dot{+} u^2$ (2.8). При этом выполняются тождества $u^3 = 0$, $u(uv) = 0$, $uv^2 = 0$ (2.9) и $(u^2)^2 = 0$, $(uv)u^2 = 0$, $v^2u = 0$, $(uv)^2 = 0$. (2.10).

Доказательство. Так как $e^2 = e$, $2eu = u$, $2ev = 0$, то из (2.7) возведением в квадрат и группировкой, согласованной с леммой 2.4, получается (2.8). Далее, подставляя $y = \alpha u + \beta v$ (α, β — скаляры) в первое тождество (2.4), получаем $\alpha^2 u^3 + + 2\alpha\beta u(uv) + \beta^2 uv^2 = 0$, откуда следует (2.9). Аналогично этому из второго тождества (2.4) следует два первых тождества (2.10) и, кроме того, $v^2 u^2 + (uv)^2 = 0$. Но по лемме 2.2 $V^2 U^2 \subset UV \subset \subset U$, $(UV)^2 \subset U^2 \subset V$. Так как $U \cap V = 0$, то $v^2 u^2 = 0$, $(uv)^2 = 0$.

Теорема 2.2 обращается: если в алгебре A задан идемпотент $e \neq 0$ и $A = \text{Lin}(e) \dot{+} U \dot{+} V$, где U, V — подпространства, такие, что имеет место формула (2.8) и тождества (2.9), то (A, s) — бернштейновская алгебра, в которой U, V играют прежнюю роль.

Следствие. Инвариантные линейные формы зависят только от s, u (т. е. $V \subset I^\perp$); исчезающие линейные формы зависят только от v (т. е. $\text{Lin}(e) \dot{+} U \subset N^\perp$).

Доказательство. Пусть $f \in I$. Тождество $f(x^2) = s(x)f(x)$

в силу (2.7), (2.8) записывается в виде $s^2f(e) + sf(u) + f(u + v)^2 = s^2f(e) + sf(u + v)$. Отсюда $f(u) = f(u + v)$, т. е. $f(v) = 0$.

Пусть $g \in N$. Тождество $g(x^2) = 0$, в силу (2.8) записывается в виде $s^2g(e) + sg(u) + g((u + v)^2) = 0$. Отсюда $g(e) = 0$, $g(u) = 0$.

Из последнего следствия вытекают оценки размерностей подпространств инвариантных и исчезающих линейных форм: $\dim I \leq m$, $\dim N \leq \delta$ (2.11).

Бернштейновская алгебра, в которой $\dim I = m$, т. е. $V = I^\perp$, называется правильной. Бернштейновская алгебра называется исключительной, если $\dim N = \delta$, т. е. $\text{Lin}(e) \dot{+} U = N^\perp$. Для правильности алгебры необходимо и достаточно, чтобы $UV = 0$, $V^2 = 0$, для исключительности — чтобы $U^2 = 0$. Таким образом, в правильной алгебре формула (2.8) принимает вид $x^2 = s^2e \dot{+} su \dot{+} u^2$, (2.12) в исключительной — $x^2 = s^2e \dot{+} (su + 2uv + v^2)$ (2.13).

Тождества (2.9), (2.10) в этих случаях выполняются автоматически в том смысле, что (2.12) определяет правильную алгебру при любом квадратичном отображении $u \rightarrow u^2$, а (2.13) определяет исключительную алгебру при любом квадратичном отображении $v \rightarrow v^2$ и любом билинейном отображении $(u, v) \rightarrow uv$.

Пересечение классов правильных и исключительных алгебр есть $\{A_{T,s}\}$ ($T^2 = T$). Сюда входят, в частности, константные алгебры и единичная алгебра.

Теорема 2.3. *Для того чтобы бернштейновская алгебра была правильной, необходимо и достаточно, чтобы она была консервативной.*

Для доказательства заметим, что в любой бернштейновской алгебре (A, s) $\text{Ann } A \subset V \subset I^\perp$ (2.14). Действительно, если $y \in \text{Ann } A$, то $y^2 = 0$, откуда $s(y) = 0$ и, далее $Ly = 2ey = 0$, т. е. $y \in V$. Таким образом, $\text{Ann } A \subset V$. Включение $V \subset I^\perp$ содержится в следствии теоремы 2.2.

Если теперь алгебра правильна, то $I^\perp = V$ и в силу (2.12) $\text{Ann } A = V$, т. е. $\text{Ann } A = I^\perp$, что означает консервативность. Обратно, если $\text{Ann } A = I^\perp$, то в силу (2.14) $V = I^\perp$, т. е. алгебра правильна.

Замечание. Равенство $\text{Ann } A = V$ также является критерием правильности. Таким образом, в правильной алгебре подпространство V не зависит от идемпотента e .

В размерностях $n \leq 4$ каждая бернштейновская алгебра правильна или исключительна. Это вытекает из следующей более общей теоремы.

Теорема 2.4. *Каждая бернштейновская алгебра типа (m, δ) , где $m \leq 2$ и $\delta \leq 1$, правильна или исключительна.*

Доказательство. Для $\delta = 0$ или $m = 1$ это вытекает из теоремы 2.1. Пусть $\delta = 1$. Тогда (2.8) принимает вид

$$x^2 = s^2e \dot{+} (su + v_1Bu + v_1^2a) \dot{+} \varphi(u)v^0,$$

где $a \in U$, $v^0 \in V$ ($v^0 \neq 0$), v_1 — координата в V относительно базиса $\{v^0\}$, $B: U \rightarrow U$ — линейный оператор, φ — квадратичная форма. Из тождества $\varphi(u)Bu = 0$, $\varphi(u)a = 0$ следует, что, если алгебра — неисклЮчительная, т. е. $\varphi \neq 0$, то $B = 0$, $a = 0$, и алгебра правильна.

Пусть $m = 2$. Тогда (2.8) принимает вид

$$x^2 = s^2e + (su_1 + u_1\theta(v) + \psi(v))u^0 + u_1^2b,$$

где $u^0 \in U$ ($u^0 \neq 0$), $b \in V$, u_1 — координата в U относительно базиса $\{u^0\}$, θ — линейная форма, ψ — квадратичная форма на V . Из тождеств $\theta(v)b = 0$, $\psi(v)b = 0$ следует, что, если алгебра — неисклЮчительная, т. е. $b \neq 0$, то $\theta = 0$, $\psi = 0$, и алгебра правильна.

Пример. Пусть (s, u_1, u_2, v_1, v_2) — система координат в R^5 . Квадратичное отображение $(s^2, su_1, su_2 + u_1v_2, u_1^2, 0)$ задает бернштейновскую алгебру типа (3.2), неправильную и неисклЮчительную.

3. Классификация бернштейновских алгебр типа (m, δ) при $m \leq 2$ или $\delta \leq 1$.

Основным инструментом для нас будет теорема 2.2, устанавливающая «стандартную форму» бернштейновской алгебры. Очевидно, две бернштейновские алгебры, имеющие одинаковую стандартную форму, изоморфны, и обратно.

Для единичной алгебры стандартная форма: $x^2 = s^2e + su \times (V = 0)$. Таким образом, имеет место

Теорема 3.1. Все бернштейновские алгебры типа $(n, 0)$ изоморфны.

Для константной алгебры стандартная форма: $x^2 = s^2e$ ($U = 0$). Таким образом, имеет место

Теорема 3.2. Все бернштейновские алгебры типа $(1, n - 1)$ изоморфны.

Этими теоремами исчерпываются, в частности, случаи $n = 1, 2$ (тривиальные и сами по себе). Далее мы считаем $n \geq 3$.

Мы будем классифицировать бернштейновские алгебры путем приведения к каноническому виду на основе стандартной формы (2.8). При этом удобно пользоваться системой координат $(s, u_1, \dots, u_{m-1}, v_1, \dots, v_\delta)$, в которой $\{u_i\}^{m-1}$ — координаты в U , аннулирующие $\text{Lin}(e) + V$, а $\{v_j\}_1^\delta$ — координаты в V , аннулирующие $\text{Lin}(e) + U$.

Координаты вектора x^2 будем обозначать s', u'_i, v'_j . Так как всегда

$$s' = s^2, \quad (3.1)$$

то это уравнение мы будем опускать.

В качестве основного поля примем C , отчасти для определенности, а отчасти — для получения законченных результатов.

Теорема 3.3. Любая бернштейновская алгебра типа $(2, n-2)$ изоморфна одной и только одной из канонических алгебр:

I. $u'_1 = su_1, v'_1 = u_1^2, v'_j = 0 \quad (2 \leq j \leq n-2);$

II. $u'_1 = su_1 + R(u_1, v_1, \dots, v_{n-2}), v'_j = 0 \quad (1 \leq j \leq n-2),$

где R — одна из следующих форм: 1) 0; 2) $\sum_{1 \leq i < r} v_i^2 \quad (r=1, \dots, n-2);$

3) $u_1 v_1$; 4) $u_1 v_1 + \sum_{1 \leq j < r} v_j^2$; 5) $u_1 v_1 + v_1 v_2$; 6) $u_1 v_1 + v_1 v_2 + \sum_{3 \leq j < r} v_j^2$.

Очевидно, в случаях 4), 5) должно быть $n \geq 4$, а в случае 6) $n \geq 5$. Таким образом, при $n = 3$ имеем

Следствие. Любая трехмерная бернштейновская алгебра изоморфна одной и только одной из шести канонических алгебр:

a) $u'_1 = su_1, u'_2 = su_2, b) v'_1 = 0, v'_2 = 0, c) u'_1 = su_1, v'_1 = u_1^2,$

d) $u'_1 = su_1, v'_1 = 0, e) u'_1 = su_1 + v_1^2, v'_1 = 0, f) u'_1 = su_1 + u_1 v_1, v'_1 = 0.$

Алгебра a) — единичная, тип $(3, 0)$, b) — константная, тип $(1, 2)$, остальные алгебры — типа $(2, 1)$, причем c) — правильная неисключительная, d) — правильная исключительная (т. е. порождается двумерным проектором) e) и f) — неправильные исключительные. Алгебры e) и f) неизоморфны, так как в случае e) все квадратичные формы вида $\omega(y^2) \quad (y \in \text{Ker } s, \omega \in A^*)$, пропорциональны v_1^2 , т. е. их ранг ≤ 1 , в то время как в случае f) имеется форма $u_1 v_1$ ранга 2.

Доказательство теоремы 3.3 мы начнем со стандартной формы

$$u'_1 = su_1 + u_1 \theta(v) + \psi(v), v'_j = \omega_j u_1^2 \quad (1 \leq j \leq n-2), \quad (3.2)$$

где $\theta(v)$ — линейная форма; $\psi(v)$ — квадратичная форма; $v = (v_1, \dots, v_{n-2})$ — некоторые коэффициенты.

По теореме 2.4. алгебра правильная или исключительная. Если алгебра правильная и неисключительная, то $\theta = 0, \psi = 0, \Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-2}) \neq 0$. Заменяя координаты в V так, чтобы в новых координатах $\Omega = (1, 0, \dots, 0)$, приходим к I.

Если алгебра исключительная, то $\Omega = 0$. Если она к тому же и правильная, то $\theta = 0, \psi = 0$ и мы имеем случай II, 1).

Пусть алгебра исключительная и неправильная. Тогда имеются следующие возможности.

2) $\theta = 0, \psi \neq 0$. Тогда квадратичную форму достаточно привести к сумме квадратов.

3) $\theta \neq 0, \psi = 0$. Тогда в V можно выбрать координаты так, чтобы $\theta(v) = v$

Пусть теперь $\theta \neq 0, \psi \neq 0$. Будем сразу считать, что

$$\psi(v) = \sum_{j=1}^r v_j^2 \quad (1 \leq r \leq n-2). \quad (3.3)$$

После этого будем пользоваться группой $O(V)$ преобразований координат в V , сохраняющих (3.3). Общий вид таких преобразований есть

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где T_{11} — ортогональная матрица r -го порядка; T_{22} — невырожденная матрица; T_{21} — любая (все матрицы комплексны). Блочная форма (3.4) соответствует прямому разложению $V = V^{(1)} \dot{+} V^{(2)}$. Введем в подпространствах $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ стандартные скалярные произведения.

Тогда $\psi(v) = (v^{(1)}, v^{(2)})$, $\theta(v) = (\theta^{(1)}, v^{(1)}) + (\theta^{(2)}, v^{(2)})$ ($v = v^{(1)} \dot{+} v^{(2)}$), где $\theta^{(1)} \in V^{(1)}$, $\theta^{(2)} \in V^{(2)}$. Под действием (3.4) пара $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ преобразуется в пару

$$\tilde{\theta}^{(1)} = \theta^{(1)}T_{11} + \theta^{(2)}T_{21}, \quad \tilde{\theta}^{(2)} = \theta^{(2)}T_{22}.$$

Рассмотрим следующую серию возможностей.

4) Пусть $\theta^{(2)} = 0$, $(\theta^{(1)}, \theta^{(1)}) \neq 0$. С помощью «масштабного» преобразования $u_1 \rightarrow \alpha^2 u_1$, $v \rightarrow \alpha v$ ($\alpha = (\theta^{(1)}, \theta^{(1)})^{-1}$) можно добиться, чтобы было $(\theta^{(1)}, \theta^{(1)}) = 1$. После этого можно выбрать ортогональную матрицу T_{11} так, чтобы $\tilde{\theta}^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$. Полагая $T_{21} = 0$, $T_{22} = 1$, получаем

$$\tilde{u}_1' = s\tilde{u}_1 + \tilde{u}_1\tilde{v}_1 + \sum_{j=1}^r \tilde{v}_j^2.$$

Сделаем еще одно преобразование:

$$\hat{u}_1 = s - \tilde{u}_1 - \tilde{v}_1, \quad \hat{v}_1 = \tilde{v}_1, \quad \hat{v}_j = i\tilde{v}_j \quad (2 \leq j \leq n-2).$$

Тогда

$$\hat{u}_1' = s^2 - \tilde{u}_1' = s^2 - (s + \tilde{v}_1)\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1^2 - \sum_{j=2}^r \tilde{v}_j^2.$$

Но $s^2 - (s + \tilde{v}_1)\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1^2 = s^2 - (s + \hat{v}_1)(s - \hat{v}_1 - \hat{u}_1) - \hat{v}_1^2 = \hat{s}\hat{u}_1 + \hat{u}_1\hat{v}_1$, а $\tilde{v}_j^2 = -v_j^2$ ($2 \leq j \leq n-2$). Окончательно $\hat{u}_1' = \hat{s}\hat{u}_1 + \hat{u}_1 \times \times \hat{v}_1 + \sum_{j=2}^r \hat{v}_j^2$.

При $r = 1$ мы получаем то же, что в случае (3), при $r > 1$ возникает новый канонический вид.

5. Пусть $\theta^{(2)} = 0$, $(\theta^{(1)}, \theta^{(1)}) = 0$ (но $\theta^{(1)} \neq 0$, так как $\theta \neq 0$). Тогда необходимо $r \geq 2$. Пусть $r = 2$, так что $u_1' = su_1 + u_1(\theta_1^{(1)}v_1 + \theta_2^{(2)}v_2) + v_1^2 + v_2^2$. Поскольку $\theta_1^{(2)} = \pm i\theta_1^{(1)}$, то

$$u_1' = su_1 + \theta_1^{(1)}u_1(v_1 \pm iv_2) + v_1^2 + v_2^2.$$

Полагая $\tilde{v}_1 = v_1 \pm iv_2$, $\tilde{v}_2 = v_1 \mp iv_2$ и убирая $\theta_1^{(1)}$ при помощи масштабного преобразования, получаем требуемый в случае 5) результат.

б) Пусть $\theta^{(2)} = 0$ ($\theta^{(1)}, \theta^{(1)} = 0$), но $r > 2$. Тогда можно выбрать ортогональную матрицу T_{11} так, чтобы $\tilde{\theta}^{(1)} = (1, i, 0, \dots, 0)$. Полагая $T_{21} = 0$, $T_{22} = 1$ и действуя затем как в предыдущем случае, получаем требуемый результат.

Пусть, наконец, $\theta^{(2)} \neq 0$. Тогда можно выбрать T_{22} так, чтобы $\tilde{\theta}^{(2)} = (1, 0, \dots, 0)$. Положим $T_{11} = 1$ и выберем T_{21} так, чтобы $\theta^{(2)} T_{21} = \theta^{(1)}$. Тогда $\theta^{(1)} = 0$. В новых координатах $\theta(v) = \tilde{v}_{r+1}$. Получаем $R = u_1 v_{r+1} + \sum_{1 \leq j < r} v_j^2$, что лишь нумерацией координат отличается от случая 4).

Все варианты исчерпаны. Остается доказать, что полученные канонические алгебры попарно неизоморфны. Это касается только алгебр II, 2) — 6), неправильных исключительных. Случаи I и II, 1) отличаются от 2) — 6) правильностью, а между собой — неисклительностью первой алгебры и исклительностью второй.

Рассмотрим преобразование координат $\tilde{u}_1 = \alpha s + \beta u_1 + g(v)$ (3.5)
 $\tilde{v}_k = \alpha s + b u_1 + \sum_{j=1}^{n-2} c_{kj} v_j$ ($1 \leq k \leq n-2$) (3.6), сохраняющее стандартную форму (в (3.5) g — некоторая линейная форма). Координата s не преобразуется в силу следствия леммы 2.1. Так как $\tilde{v}'_k = 0$ ($1 \leq k \leq n-2$), $\tilde{v}'_j = 0$ ($1 \leq j \leq n-2$), то $a = 0$, $b = 0$. Следовательно, $\beta \neq 0$ (иначе преобразование вырождается). Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \alpha s^2 + \beta (s u_1 + u_1 \theta(v) + \psi(v)) = \tilde{s} u_1 + \tilde{u}_1 \theta(v) - \\ &- s(\alpha \theta(v) + g(v) + (\beta \psi(v) - g(v) \theta(v))). \end{aligned}$$

Для сохранения стандартной формы должно быть $g(v) = -\alpha \theta(v)$.

При этом $\tilde{\theta}(\tilde{v}) = \theta(v)$, $\tilde{\psi}(\tilde{v}) = \beta \psi(v) + \alpha \theta^2(v)$ (3.7). Эти формулы показывают, что случай 2) ($\theta = 0$) не может быть преобразован ни в один из остальных ($\theta = v_1$).

Объединим формально случай 3) с серией 4), полагая $\sum_{2 \leq j < r} = 0$ при $r = 1$. Точно так же 5) объединяется с серией 6) за счет соглашения $\sum_{3 \leq j < r} = 0$ при $r = 2$.

Если преобразование сохраняет канонический вид, относящийся к одному из случаев (4, 6), то $\tilde{v}_1 = v_1$ и $\tilde{\psi}(\tilde{v}) = \beta \psi(v) + \alpha v_1^2$.

Покажем, что 4) не может преобразоваться в 6), т. е. невозможно тождество вида

$$\alpha v_1^2 + \beta \sum_{j=2}^r v_j^2 = v_1 \tilde{v}_2 + \sum_{k=3}^p \tilde{v}_k^2. \quad (3.8)$$

Заметим, что $\rho = r + 1$, так как при $\alpha = 0$ ранг левой части (3.8) равен $r - 1$, а правой — $(\rho - 2)$. Подставляя в (3.8) $\tilde{v}_k = c_k v_1 + \omega_k$ ($k = 2, \dots, r + 1$), где ω_k — линейные формы от $v_2, \dots, v_{n-2}$, получаем из сравнения коэффициентов при v_1 :

$$\omega_2 + 2 \sum_{k=3}^{r+1} c_k \omega_k = 0.$$

Это противоречит линейной независимости форм $\tilde{v}_1 = (v_1), \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{r+1}$. Теорема 3.3 доказана.

Перейдем к классификации бернштейновских алгебр типа $(n - 1, 1)$. Стандартная форма теперь такова: $u' = su + v_1 B u + v_1^2 a$, $v_1 = \varphi(u)$ (3.9). Здесь $a \in U$, $B: U \rightarrow U$ — линейный оператор, $\varphi(u)$ — квадратичная форма. При этом, если $\varphi \neq 0$, то $B = 0$, $a = 0$. Преобразуем координаты:

$$\tilde{u} = Tu + sp + v_1 q, \quad \tilde{v}_1 = \alpha^{-1} v_1$$

($p, q \in U$, T — невырожденное линейное преобразование, $\alpha \neq 0$ — скаляр). Получим:

$$\begin{aligned} \tilde{u}' &= s\tilde{u} + \alpha \tilde{v}_1 T B T^{-1} u + \alpha^2 \tilde{v}_1^2 (Ta - T B T^{-1} q) - \\ &- \alpha s \tilde{v}_1 (q + T B T^{-1} p) + \varphi(u) \tilde{q}; \quad \tilde{v}_1' = \alpha^{-1} \varphi(u) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(подразумевается, что вместо u подставлено его выражение:

$u = T^{-1} \tilde{u} - s T^{-1} p - \alpha^{-1} \tilde{v}_1 T^{-1} q$). Для сохранения стандартной формы должно быть $q = -T B T^{-1} p$ (3.11) и $\varphi(u) q = 0$. Поэтому, если $\varphi \neq 0$, то $q = 0$, а если $\varphi = 0$, то остается лишь связь (3.11).

Из (3.10) следует, что инварианты оператора B под действием группы $\Gamma = GL(U) \times C^*$ (т. е. при преобразованиях $B \rightarrow \alpha T B T^{-1}$) являются инвариантами бернштейновской алгебры типа $(n - 1, 1)$. Назовем алгебру невырожденной, если она правильна ($B = 0$, $a = 0$) или если оператор B невырожден. Ради простоты формулировки мы ограничимся классификацией невырожденных алгебр. Очевидно, дело сведется к классификации невырожденных линейных операторов (матриц) относительно группы GL , т. е. к жордановой нормальной форме. Для учета действия множителя α и перестановок ограничимся жордановыми матрицами, у которых в левом верхнем углу стоит 1, диагональ упорядочена по убыв-

ванию модулей, при равных модулях — по возрастанию аргументов (в пределах $[0, 2\pi]$), а в пределах одного собственного значения — по возрастанию порядков жордановых клеток. Такие жордановы матрицы будем называть нормированными.

Теорема 3.4. Любая невырожденная бернштейновская алгебра типа $(n-1, 1)$ изоморфна одной и только одной из канонических алгебр:

$$\text{I. } u' = su, v'_1 = \sum_{k=1}^r u_k^2 \quad (r = 0, 1, \dots, n-2);$$

II. $u' = su + v_1 Cu, v'_1$, где C — нормированная жорданова матрица.

Доказательство. Если алгебра правильна, то $B=0$, $a=0$. Приводя квадратичную форму φ к сумме квадратов, получаем I.

Пусть алгебра исключительна и неправильна. Тогда $\varphi=0$. Преобразуем B в нормированную жорданову матрицу C действием группы Γ . Кроме того, положим $q = BT^{-1}a$, $p = -TB^{-1}T^{-1}BT^{-1}a$. Тогда будет удовлетворено условие (3.11), а в (3.10) останется лишь $su + \tilde{v}_1 Cu$.

Единственность канонической формы здесь очевидна. Теорема доказана.

Проведем на основе теорем 3.3 и 3.4 классификацию бернштейновских алгебр размерности $n=4$.

Теорема 3.5. Любая четырехмерная бернштейновская алгебра изоморфна одной и только одной из канонических алгебр, перечисляемых ниже ($s' = s^2$ во всех случаях).

Тип $(4,0)$: $u'_k = 8u_k$ ($1 \leq k \leq 3$) (единичная).

Тип $(1,3)$: $v'_k = 0$ ($1 \leq k \leq 3$) (константные).

Тип $(2,2)$: 1) $u'_1 = su_1, v'_1 = u_1^2, v'_2 = 0$ (правильная неискл. чительная),

2) $u'_1 = su_1, v'_1 = u_1^2, v'_2 = 0$ (правильная, исключительная),

3) $u'_1 = su_1 + R, v'_1 = 0, v'_2 = 0$, где R — одна из следующих форм: а) 0, б) v_1^2 , в) $v_1^2 + v_2^2$, г) $u_1 v_1$, е) $u_1 v_1 + v_2^2$, ф) $u_1 v_1 + v_1 v_2$ (неправильные исключительные).

Тип $(3,1)$: 1) $u'_1 = su_1, u'_2 = su_2, v'_1 = u_1^2$ или $= u_1^2 + u_2^2$ (правильные неискл. чительные),

2) $u'_2 = su_1, u'_2 = su_2, u'_1 = 0$ (правильная, исключительная),

3) $u'_1 = su_1 + u_1 v_1, u'_2 = su_2 + \lambda u_2 v_1, v'_1 = 0$ ($|\lambda| \leq 1$) или $u'_1 = su_1 + u_1 v_1 + v_1^2, u'_2 = su_2 + u_2 v_1$ (неправильные исключительные, невырожденные),

4) $u'_1 = su_1 + K, u'_2 = su_2 + R_2, v'_1 = 0$, где (R_1, R_2) — одна из следующих пар форм: а) $(0, u_2 v_1)$, б) $(v_1^2, u_2 v_1)$, в) $(u_2 v_1, 0)$, г) $(u_2 v_1, v_1^2)$, е) $(u_2 v_1 + v_1^2, 0)$, ф) $(v_1^2, 0)$ (неправильные исключительные, вырожденные).

Доказательство. Нуждается в рассмотрении только ситуация вырожденной исключительной неправильной алгебры. В этом случае можно привести B действием группы Γ к виду

$$c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

После этого T можно выбирать из централизатора матрицы C ($TCT^{-1} + C$), а параметр α становится неэффективным. Орбита вектора a при этом такова: $Ta + (TCT^{-1})p = Ta + C^2p$ (в силу (3.10) и (3.11)).

В первом из случаев (3.12) $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ($\alpha, \beta \neq 0$), и за счет выбора T и p можно сделать $a = (1, 0)$, если только $a \neq 0$. Это дает канонические формы а), б).

Во втором из случаев (3.12) $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ($\alpha \neq 0$). Орбита вектора a есть Ta , так как $C^2 = 0$. Поэтому можно получить $a = 0$ или $a = (0, 1)$, или $a = (1, 0)$. Это дает канонические формы в), д), е).

Наконец, если $C = 0$, то T — произвольная невырожденная, и так как теперь $a \neq 0$ (иначе алгебра правильная), можно сделать $a = (1, 0)$, что дает каноническую форму ф).

Единственность канонической формы очевидна. Теорема доказана.

В отличие от трехмерного случая при $n = 4$ появляется континуум попарно неизоморфных алгебр. Это — алгебры типа (3.1) с диагонализуемым невырожденным оператором B . Классифицирующим инвариантом для них является отношение собственных значений (с точностью до нумерации).

4. Препятствия к классификации в целом. Покажем, что задача классификации бернштейновских алгебр в целом содержит в качестве подзадач классификацию произвольных квадратичных отображений одного пространства в другое и классификацию произвольных линейных операторных пучков.

Рассмотрим классификацию правильных алгебр. В стандартной форме $x^2 = s^2e + su + Qu$ (3.13), где $Q: U \rightarrow V$ — квадратичное отображение ($Qu = u^2$), причем Q может быть выбрано любым. Очевидно, если имеются две такие алгебры и соответствующие квадратичные отображения эквивалентны (относительно независимых преобразований координат в U и V , т. е. относительно естественного действия группы $CL(U) \times C, L(V)$), то алгебры изоморфны. Обратно, пусть две правильные алгебры изоморфны. Отождествляя их, получаем две стандартные формы одной и той же алгебры, скажем (3.13), и $x^2 = \tilde{s}^2e + \tilde{s}\tilde{u} + \tilde{Q}\tilde{u}$ (3.14).

Требуется доказать эквивалентность отображений Q и $\tilde{Q}$. Поскольку алгебра правильная, то $\tilde{V} = V = \text{Апп } A$. Рассмотрим

оператор $P = L_{\sim} | U$ ($L_{\sim} u = 2eu$). Он устанавливает изоморфизм пространств U и $\tilde{U}$, так как он действует из U в $\tilde{U}$, $\dim U = \dim \tilde{U}$ и $\text{Ker } L_{\sim} \cap U = \tilde{V} \cap U = V \cap U = 0$. Очевидно, $Pu \equiv u \pmod{\text{Ann } A}$. Следовательно, $(Pu)^2 = u^2$, т. е. $\tilde{Q}Pu = Qu$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь исключительные алгебры, допускающие стандартную форму $x^2 = s^2 e + \left(su + \sum_{i=1}^{\delta} v_i B_i u \right)$, (3.15)

где $B_i: U \rightarrow U$ ($1 \leq i \leq \delta$) — линейные операторы. Эти операторы могут быть любыми. Очевидно, если имеются две такие алгебры и соответствующие линейные операторные пучки эквивалентны относительно $GL(u) \times GL(V)$, то алгебры изоморфны. Обратно, пусть в алгебре, кроме (3.15), имеется еще одна такая же стандартная форма: $x^2 = s^2 \tilde{e} + \left(s\tilde{u} + \sum_{i=1}^{\delta} \tilde{v}_i B_i \tilde{u} \right)$. (3.16)

Из (3.15) и (3.16) при $s = 0$ следует $\sum_{i=1}^{\delta} \tilde{v}_i B_i \tilde{u} = \sum_{i=1}^{\delta} v_i B_i u$. (3.17)

Связь между u, v и $\tilde{u}, \tilde{v}$ устанавливается равенством $u + v = \tilde{u} + \tilde{v}$. При этом $\tilde{u} = Pu$, где $P = L_{\sim} | u$ по-прежнему изоморфно отображает U на $\tilde{U}$, ибо $\text{Ker } L_{\sim} \cap U \subset \tilde{V} \cap A^2 = 0$. Вместе с

тем система форм $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\delta}$ линейно эквивалентна системе $v_1, \dots, v_{\delta}$, так как обе являются базисами пространства $N = (A^2)^{\perp}$ исчезающих линейных форм.

Список литературы: 1. Bernstein S. Demonstration mathematique de la loi d'heredite de Mendel.—C. R. Ac. Sci. (Paris), 1923, 177, p. 528—531. 2. Bernstein S. Principe de stationarite et generalisation de la loi de Mendel.—C. R. Ac. Sci. (Paris), 1923, 177, p. 581—584. 3. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности.—Учен. зап. науч. исслед. каф. Украины. Отд. мат., 1924, вып. 1, с. 83—115. 4. Любич Ю. И. К математической теории наследственности.—Докл. АН СССР, 1973, 209. № 5, с. 1028—1030. 5. Любич Ю. И. Двухуровневые бернштейновские популяции.—Мат. сб., 1974, 95(137), № 4, с. 606—628. 6. Holdate P. Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle.—Journ. Lond. Math. Soc., 1975, 9, № 4, p. 613—624. 7. Любич Ю. И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций.—Усп. мат. наук, 1971, т. XXVI, вып. 5 (161), с. 57—116. 8. Любич Ю. И. Бернштейновские алгебры.—Усп. мат. наук, 1980, т. XXXII, вып. 6 (198), с. 261—262. 9. Любич Ю. И. Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о необходимости закона Менделя.—Вестн. Харьк. ун-та, 1976, № 134. Математика и механика, вып. 41, с. 85—88. 10. Любич Ю. И. Алгебраическое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна о двух числах типах.—Вестн. Харьк. ун-та, 1979, № 177. Математика и механика, вып. 44, с. 86—94. 11. Etherington I. M. H. Genetic algebras.—Proc. Roy. Soc. Edn., 1939, A 59, p. 242—258.

Поступила 6 июня 1979 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Харьковскому Математическому обществу — 100 лет	3
Марченко В. А., Островский И. В. Аппроксимация периодических потенциалов конечноразрывными	4
Тарапов И. Е., Пацегин Н. Ф. Нелинейные волны в проводящей намагничивающейся жидкости	40
Коробов В. И. Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений	59
Гавриляко В. М. О синтезе ограниченного управления в задаче управляемости	73
Горин Е. А. Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов	77
Петренко В. П. О росте голоморфных кривых	105
Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для эволюционных систем линейных уравнений с сосредоточенными элементами	115
Любич Ю. И. Классификация некоторых типов бернштейновских алгебр	124

ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 205

Прикладная математика и механика

Выпуск 45

Редактор З. Н. Щегельская
Художественный редактор В. Б. Мартыняк
Технический редактор Л. Т. Момот
Корректор Л. П. Пипенко

Сдано в набор 19.05.80. Подп. в печать 14.08.80. БЦ 09378.
Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать
8,75 усл. печ. л. 9,7 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 874.
Зак. 0-203. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете
издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3,
ул. Университетская, 16.

Харьковская книжная фабрика «Коммунист» республиканского
производственного объединения «Полиграфкинг» Госкомиздата
УССР, 310012, Харьков-12, ул. Энгельса, 11.

УДК 517.9

Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными. Марченко В. А., Островский И. В.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа, Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 4—40.

Рассматриваются операторы Хилла, порожденные дифференциальной операцией $L = -(d^2/dx^2) + v(x)$ с вещественным периодическим потенциалом $v(x) = v(x + \pi) \in L_2[0, \pi]$. Получены оценки скорости аппроксимации в метрике $L^2[0, \pi]$ потенциала $v(x)$ потенциалами, для которых соответствующий оператор Хилла имеет лишь конечное число лакун в спектре.

Список лит.: 9 назв.

УДК 538.3-538.4

Нелинейные волны в проводящей намагничивающейся жидкости. Тарапов И. Е., Пацегон Н. Ф.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 40—59.

Учет неоднородности намагничивания несжимаемой проводящей жидкости позволяет выявить ряд качественно новых особенностей течений такой жидкости, которые не учитываются обычной магнитогидродинамической моделью.

УДК 517.977.1

Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений. Коробов В. И.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 59—73.

Для управляемой системы $\dot{x} = f(x, u)$, $u \in \Omega \subset E_r$ рассматривается задача о нахождении управления $u(x) \in \Omega$, переводящего произвольную точку x_0 в фиксированную точку x_1 за конечное время. Задача решается с помощью функции управляемости $\theta(x)$. Дается один из способов построения этой функции. Аналогичный подход предлагается и к решению задачи о построении управления $u(x)$, переводящего произвольную точку x_0 в фиксированную точку x_1 в силу системы $\dot{x} = f(x, u(x), v(t, x))$, где $v(t, x)$ — неизвестная функция со значениями Ω_1 .

Список лит.: 11 назв.

УДК 517.977.1

О синтезе ограниченного управления в задаче управляемости. Гавриляко В. М.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 73—77.

Статья является продолжением работы В. И. Коробова (РЖМат, 1979, 12Б320). Рассмотрена задача синтеза управлений для системы вида $\dot{x} = f(x, u)$, $u \in M \subset R_m$, $x \in R_n$ за конечное время $t \leq T(x_0)$, а также для ее дискретного аналога. Оценивается шаг дискретности, позволяющий для любого $\nu > 0$ осуществить дискретный синтез за время $t \leq T(x_0) + \nu$.

Список лит.: 5 назв.

УДК 519.

Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов. Горин Е. А.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 77—105.

Обзор результатов, связанных с обобщениями неравенства Бернштейна для производной тригонометрического полинома. Кратко прослеживается история вопроса и приложения. Описывается классическая схема, связанная с мажорантами и приводящая к поточечным неравенствам на вещественной оси. Большая часть статьи посвящена эрмитовым операторам в банаховом пространстве (эрмитовым элементам банаховых алгебр), соотношениям между нормами и спектральными радиусами, изометрическим представлениям. Связи между этими подходами к неравенствам бернштейновского типа цементирует понятие положительно определенной функции. Имеется ряд новых результатов, предлагаются задачи.

Список лит.: 54 назв.

УДК 517.5

О росте голоморфных кривых. Петренко В. П.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 105—115.

В статье изучаются рост голоморфных отображений $f: C \rightarrow M$, где M — компактное комплексное многообразие. Введено понятие величины отклонения голоморфного отображения относительно дивизора D на M . Получена точная оценка для величины отклонения в случае, когда отображение f имеет конечный нижний порядок. Кроме этого в работе вводится понятие протяжения голоморфного отображения $f: C \rightarrow M$ и получена оценка снизу для протяжения через величину положительного отклонения.

Список лит.: 10 назв.

УДК 517. 944

Задача Коши для эволюционных систем линейных уравнений с сосредоточенными элементами. Борок В. М., Житомирский Я. И.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 115—124.

Устанавливаются точные классы единственности, а также условия корректной разрешимости задачи Коши в классах функций степенного роста для систем линейных уравнений с частными производными, связывающих значение искомой функции и ее производных в произвольный и фиксированные моменты времени.

Список лит.: 8 назв.

УДК 519.9 + 575.1

Классификация некоторых типов бернштейновских алгебр. Любич Ю. И.—Вестн. Харьк. ун-та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.—Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980, с. 124—138.

Решается задача классификации с точностью до изоморфизма для n -мерных бернштейновских алгебр типов $(n-1, 1)$ и $(2, n-2)$. Полученные результаты охватывают все алгебры размерностей $n \leq 4$. Показано также, что задача классификации бернштейновских алгебр в целом содержит в качестве подзадач классификацию произвольных квадратичных отображений одного линейного пространства в другое и произвольных линейных операторных пучков.

Список лит.: 11 назв.

207 C/O - 1