

## Устойчивость течения жидкости у деформирующихся поверхностей, в трубах и каналах

Н.Н.Кизилова<sup>1</sup>, М.Хамадиш<sup>2</sup>

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

*<sup>2</sup>Ecole Centrale de Lyon, France*

Приведен обзор экспериментальных и теоретических результатов, посвященных абсолютной и конвективной неустойчивости течений вязкой жидкости у деформирующихся поверхностей, в трубах и каналах с податливыми стенками. Неустойчивость проявляется в схлопывании трубки, снижении расхода, осцилляциях стенки, генерации шумов и, в конечном итоге, разрушении системы. Представлены результаты исследования устойчивости течений жидкости в многослойных изотропных и анизотропных вязкоупругих трубках при различных условиях на внешней поверхности. Показано, что при разных значениях параметров имеется одна или несколько абсолютно неустойчивых жидкостных мод. За счет подбора вязких и упругих коэффициентов и толщин отдельных слоев можно повысить устойчивость наиболее неустойчивой моды и стабилизировать систему. В применении к трубкам технических устройств это дает возможность избежать потерь энергии, схлопывания трубки и генерации нежелательных шумов. В применении к кровеносным сосудам предложенные модели дают возможность проводить биомеханическую интерпретацию параметров звуков и колебаний стенок, регистрируемых в артериях и венах.

*2000 Mathematics Subject Classification 76D33, 76Z05, 74F10, 92C35.*

### Введение.

При течении жидкости у деформирующихся поверхностей тепломассообменных установок, в каналах и трубках технических устройств и в природных руслах наблюдаются различные физические явления, обусловленные взаимодействием потока с поверхностью. Как известно, ламинарное течение жидкости с увеличением скорости течения теряет устойчивость по отношению к малым возмущениям. При этом переход от ламинарного к турбулентному течению определяется числом Рейнольдса и происходит при превышении некоторого критического значения числа Рейнольдса  $Re > Re^*$ . При течении жидкости в жесткой длинной трубке кругового сечения нижнее значение  $Re^* \sim 2000$  [9], для трубки с 50% сужением просвета  $Re^* = 100 - 200$  [8], а для искривленных трубок  $Re^* \sim 6000$  [48].

При течении жидкости у податливых поверхностей взаимодействие потока с поверхностью приводит к ее деформациям и перемещениям, а также к изменениям параметров течения за счет обмена энергией на границе раздела жидкость-стенка. Экспериментальные исследования течений в трубках с внутренним гелевым покрытием показали, что  $Re^* \sim 600$ , причем значение  $Re^*$  зависит от параметров материала стенки и покрытия и вязкости жидкости [43]. На участках, где давление в трубке близко к значениям давления в окружающей среде  $P_{ext}$ , система становится неустойчивой и трубка начинает схлопываться. В результате развития неустойчивости появляются и нарастают высокочастотные осцилляции стенки, что ведет к образованию шумов, преждевременному износу поверхностей и, возможно, к разрушению устройства.

Различные проявления неустойчивостей имеются и в живой природе, например, при плавании водных животных. В серии экспериментов Крамера по обтеканию тела дельфина набегающим потоком была показана возможность снижения сопротивления за счет уменьшения напряжения трения, затягивания отрыва линий тока и турбулизации течения за счет свойств кожного покрова дельфина [44], [45]. Крамер предположил, что, подбирая вязкоупругие свойства стенки таким образом, чтобы коэффициент демпфирования соответствовал частоте наиболее неустойчивой волны Толлмина-Шлихтинга, можно добиться по крайней мере частичной диссипации этих волн, затягивая тем самым переход к турбулентному течению. Впоследствии эта гипотеза была подтверждена в серии теоретических работ [12], [19], [47]. Исследования плавания дельфинов привели к разработке специальных вязкоупругих покрытий, которые имитируют строение кожи дельфина и способствуют существенному снижению сопротивления обтекаемого тела. Крамер моделировал вязкоупругое покрытие набором параллельно соединенных упругих и демпфирующих элементов (Kramer-type coating) [22], [23], [33]. В первой же серии экспериментов использование предложенного им покрытия, имитирующего кожу дельфина, привело к снижению сопротивления на 57% при движении в морской воде со скоростью 18 м/с [44], [45].

В 1966 г. были опубликованы результаты экспериментов, подтверждающих возможность существенно снизить трение в турбулентном пограничном слое при обтекании потоком воздуха жестких поверхностей, покрытых слоем деформируемого материала. Однако в ходе целой серии проверок эти данные не подтвердились, и принципиальный вопрос о возможности разработки специальных податливых покрытий для использования в аэрокосмических приложениях долго оставался открытым, к тому же теоретические оценки параметров необходимых покрытий, получаемые на основе предлагаемых авторами моделей, зачастую не соответствовали реальным техническим материалам [31]. Следует отметить, что первые оценки и гипотезы относились лишь к возможности затянуть переход к турбулентному обтеканию и практически не рассматривали возможности снижения трения в турбулентном пограничном слое, которого можно добиться также за счет подбора вязкоупругих параметров

стенки, что было показано позже [14].

Первые успехи в исследовании закономерностей течений у деформирующихся стенок привели к лавине экспериментальных и теоретических работ по исследованию устойчивости течений жидкостей в трубках, включая турбулентные течения, детальные численные расчеты для разной геометрии, в сужающихся, расширяющихся и изогнутых трубках. Были исследованы условия возникновения абсолютной и конвективной неустойчивости, возможности перевести абсолютную неустойчивость в конвективную, параметрически взаимодействующие волны и коалесценция мод. Поскольку конвективно неустойчивая система может быть использована в качестве усилителя, а абсолютно неустойчивая – в качестве генератора, то исследование условий развития неустойчивости перспективно для разработки новых видов волноводов и усилителей, шумопоглощающих покрытий, для понимания процессов акустической сигнализации у животных. Все же, несмотря на очевидный прогресс в этой области, многие явления остаются недостаточно изученными. В данной работе представлен краткий обзор экспериментальных данных и основных теоретических результатов по устойчивости течений жидкости у деформирующихся поверхностей, их перспективных приложений и направлений дальнейших исследований, связанных с многослойными вязкоупругими поверхностями, включая функциональные градированные покрытия (functional graded coatings).

## 1. Течения у деформирующихся поверхностей

### 1.1. Экспериментальные данные.

Детальные экспериментальные исследования закономерностей обтекания тел потоком жидкости и перехода к турбулентному течению, включая визуализацию течений, измерения давлений и скоростей потока, трения на стенке активно проводились в 1960-1980 гг. (см. обзор литературы в [30], [31]). Изучались закономерности генерации волн на деформирующихся поверхностях [49], взаимодействие потока со стенкой и влияние вязкоупругих свойств стенки при развитом турбулентном течении [60], для течений, генерируемых вращающимся диском или турбиной [21], при наличии вторичных течений в искривленных трубках [33] и другие задачи. Экспериментальные исследования проводились с целью ответить на вопрос: можно ли при больших числах Рейнольдса за счет использования податливого слоя затян timer турбулизацию течения или заметно уменьшить трение в турбулентном погранслое? Поскольку взаимодействие потока с поверхностью приводит к деформациям последней, были разработаны экспериментальные методы ориентированные на измерение деформаций упругих поверхностей при динамических и импульсных воздействиях. Прямые измерения давлений в потоке [26], регистрация перемещений лазерного луча в специально разработанных оптических системах [29], [59], фотографическая регистрация изменений коэффициента преломления светового луча на участках с различными плотностями покрытия (shlieren

apparatus) использовались при исследовании деформаций резиновых, полимерных и гелевых покрытий в турбулентном потоке жидкости и газа.

### 1.2. Теоретические модели.

В работе [13] была предложена классификация волн в зависимости от соотношения между полной энергией  $E'$  возмущенной системы и энергией  $E$  системы в исходном (невозмущенном) состоянии. Для волн класса А выполнено соотношение  $E' < E$  и диссипация энергии в стенке дестабилизирует систему, а необратимый перенос энергии от потока к стенке – стабилизирует. Для волн класса В:  $E' > E$  и система дестабилизируется при передаче энергии от жидкости к стенке и стабилизируется за счет демпфирующих свойств материала стенки. Наконец, для волн класса С:  $E' = E$  и они относительно независимы от направления передачи энергии на границе жидкость-стенка. Для классов А и В осцилляции стенки могут иметь постоянную амплитуду при отсутствии диссипации энергии и других необратимых процессов [13]. Волны класса А представляют волны Толлмина-Шлихтинга, а волны класса В – неустойчивости типа флаттера бегущих волн (travelling wave flutter). Оба класса волн являются конвективно неустойчивыми, а класса С – абсолютно неустойчивыми.

Важные теоретические результаты получены при исследовании поверхностных волн в безграничном плоском слое упругодеформируемого материала, прикрепленного к жесткому слою [30]. Поверхностные волны рассматривались как линейная комбинация продольных и поперечных перемещений точек слоя. В декартовой системе координат, считая, что ось  $z$  расположена перпендикулярно к поверхности, уравнение движений стенки есть волновое уравнение для вектора перемещений  $\vec{u}$  [7]:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{u} \quad (1)$$

где  $c$  – скорость распространения волн, причем для поперечных и продольных волн  $c = c_\tau = \sqrt{G/\rho}$  и  $c = c_l = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$  соответственно,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  и  $G$  – коэффициенты Ламе.

Для исследования дисперсии поверхностных волн решения вида

$$\begin{aligned} u_x &= (A \operatorname{sh}(\alpha y) + B \operatorname{ch}(\alpha y)) e^{i(kx - \omega t)} \\ u_y &= (C \operatorname{sh}(\alpha y) + D \operatorname{ch}(\alpha y)) e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

подставлялись в (1) и из условий отсутствия нормальных и касательных напряжений на внешней поверхности  $y = 0$  и отсутствия перемещений на нижней поверхности  $y = -h$  деформируемого слоя получено дисперсионное соотношение, решение которого дает зависимости  $\zeta(kh)$  между безразмерными переменными  $\zeta = c_s/c_\tau$  и  $kh$ , где  $c_s$  – скорость распространения поверхностных волн,  $k$  – волновое число [30]. Зависимости  $\zeta(kh)$  монотонно убывающие и только одна из них достигает значений  $\zeta < 1$  при достаточно больших величинах  $kh$ , а именно  $\lim_{kh \rightarrow \infty} \zeta = 0.956$ . При этом  $c < c_\tau$ , что соответствует моде

Рэлея для упругого полубесконечного слоя. При любом заданном значении  $kh$  по мере увеличения  $\zeta$  степень взаимодействия потока со стенкой увеличивается. Если скорость течения жидкости у стенки  $v \ll c_\tau$ , то взаимодействие на поверхности раздела жидкость-стенка практически не проявляется, а при скоростях  $v \gg c_\tau$  оно существенно.

Обобщение задачи (1) на случай двухслойного упругого покрытия представлено в [27]. Рассматривался случай, когда внутренний слой (контактирующий с потоком жидкости) имеет на порядок меньшую толщину и на два порядка больший модуль упругости, чем внешний слой (расположенный между внутренним слоем и недеформируемой подложкой). Дисперсионные кривые для этого случая отличаются от соответствующих кривых для однослойного покрытия. Внутренний жесткий слой работает как плоская поверхность на упругом основании и для каждой из зависимостей  $\zeta(kh)$  изгибные деформации внутреннего слоя накладываются на соответствующие зависимости для упругодеформируемого внешнего слоя [30]. Наличие вязкости у материала покрытия существенно влияет на распространение возмущений в системе и определяется безразмерным параметром  $\tau c/h$ , где  $c$  – скорость сдвиговых волн,  $\tau$  – время релаксации материала [27].

## 2. ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ И ТРУБАХ.

### 2.1. Экспериментальные данные.

Первой работой, посвященной исследованиям закономерностей течения жидкости через деформирующиеся трубки, считается публикация 1969 г. [25], однако в литературе имеются упоминания об экспериментальных исследованиях колебаний стенки сонной артерии лошади известным анатомом Антонио Вальсальвой еще в 1824 г. В 1840 г. французский врач и механик Жан Луи Мари Пуазейль открыл известный закон, связывающий объемный расход  $Q$  и перепад давления  $\delta P = P_1 - P_2$  при течении жидкости по трубке, проводя эксперименты в том числе и с отрезками податливых кровеносных сосудов. Для физиологии представляет огромный интерес исследование течений в тонкостенных трубках, для которых существуют области очень малой устойчивости по отношению к деформациям стенки. Такие трубки не способны сохранять свою форму и сплющиваются, если давление  $P_{ext}$  в окружающей среде превышает некоторое критическое значение  $P_{ext}^*$ , так что на некотором участке трансмуральное давление  $P_{tm} = P - P_{ext}$ , где  $P$  – давление в трубке, становится отрицательным. При потере устойчивости сечение трубки из кругового становится эллиптическим, затем сплюснутым гантелеобразным и, наконец, полностью схлопывается, причем как для перехода от эллиптического к сплюснутому сечению, так и наоборот, требуются относительно небольшие изменения  $P_{ext}$  или давления в трубке. Наиболее известными являются эксперименты Старлинга с соавторами (1912 г.), целью которых было исследование влияния сопротивления системных артерий (постнагрузка) на работу сердца в помощью простого наглядного эксперимента [54]. Предло-

женная модель получила название резистора Старлинга (рис.1а). Внутри камеры на двух жестких кольцах монтируется отрезок кровеносного сосуда или тонкостенная трубка из резины, латекса или силикона. Затем через трубку за счет перепада давления  $P_1 - P_2$  прокачивается жидкость с контролируемым объемным расходом  $Q$ , а давление воздуха в камере поддерживается на некотором уровне  $P_{ext}$ . В экспериментах Старлинга давление  $P_1$  отождествлялось с давлением на выходе из левого желудочка сердца, а увеличение сопротивления трубки достигалось за счет увеличения  $P_{ext}$ .

В ходе экспериментов с резистором Старлинга при течении жидкости с заданным значением  $Re$  из диапазона  $Re = 10^2 - 10^4$  перепад давления  $\delta P$  увеличивается путем увеличения  $P_1$  или уменьшения  $P_2$ , причем в зависимости от используемого способа наблюдаются два феномена. Монотонное уменьшение  $P_2$  и поддержание  $P_1 - P_{ext} = const$  приводит за счет развития неустойчивости к нелинейной зависимости  $Q(\delta P)$  и ограничению максимальных значений  $Q$ , которые удается получить в ходе эксперимента (flow limitation). При увеличении  $P_1$  расход нелинейным образом возрастает и наблюдается ограничение максимальных значений  $P_1 - P_2$  (pressure drop limitation). Типичная экспериментальная зависимость  $\delta P(Q)$  приведена на рис.1б. На всем протяжении участка I сечение трубки имеет гантелеобразную форму. По мере роста  $\delta P$  площадь просвета «гантели» монотонно увеличивается, способствуя возрастанию  $Q$ . На участке II область схлопывания имеется на нижнем конце трубки (где давление меньше). На этом участке расход снижается с ростом  $\delta P$  (flow limitation). На участке III трубка расправлена, ее сечение имеет форму круга, а расход монотонно растет по мере увеличения  $\delta P$  (область устойчивости).

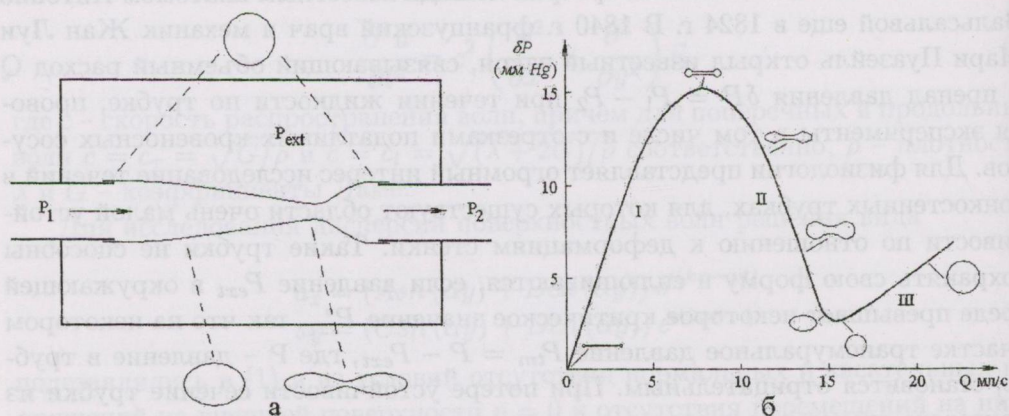


Рис.1. Схема резистора Старлинга (а) и регистрируемая в экспериментах зависимость  $\delta P(Q)$  (б).

При определенных режимах течения возникают автоколебания стенки, амплитуда и частота которых зависят от значений  $Q$ ,  $P_2$ , толщины и модуля Юнга материала стенки [41] и варьируют в диапазоне от нескольких до сотен Герц [16], [17]. Наличие разных мод, каждая из которых обладает своим

частотным диапазоном, и переходы между различными динамическим режимами ведут к сложной нелинейной динамике системы.

При исследовании механики дыхания и влияния параметров стенок дыхательных путей на зависимости давление-расход через резистор Старлинга прокачивается воздух. При этом существенным фактором становится инерция стенки, эффект ограничения потока сопровождается генерацией высокочастотных шумов. Таким образом, на основе результатов экспериментальных наблюдений можно выделить автоколебания – относительно низкочастотные колебания стенки, на которых практически не сказывается инерция стенки, и флаттер – высокочастотные колебания стенки, для которых инерция последней является определяющим параметром [32].

Визуализация вихревых структур и измерение параметров потока жидкости через схлопывающуюся трубку проводились методами окрашивания струй, с помощью термоанемометрических пленок, а также лазерной Допплеровской флоуметрии [18]. Вниз по течению от схлопывающегося участка трубки обнаружены тонкие струи, разделяющие области возвратных течений, причем структура течения сильно зависит от  $P_{ext}$  и материала трубки.

Течение крови по артериям и венам, движение воздуха в дыхательных путях и течения многих других биологических жидкостей по податливым сосудам происходят при условиях, когда  $P_{ext} > P_{ext}^*$ , например, в венах, расположенных выше уровня сердца и вне черепной коробки [20]. Синхронные измерения падения давления и скорости кровотока показали, что схлопывание яремных вен способствует эффективному транспорту крови в области, расположенные выше уровня сердца. Особенно наглядно важность схлопывания вен для прокачивания крови показана для кровоснабжения мозга животных с длинной шеей (жирафов) [56]. По мере продвижения крови против направления силы тяжести давление в сосуде  $P$  уменьшается и достигает значений  $P < P_{ext}$ , после чего сосуд неосесимметричным образом схлопывается за счет внешнего давления, причем в критической области  $P_{ext} \approx P$  при периодическом течении крови генерируются осцилляции стенки, амплитуда которых может быть сравнима с радиусом сосуда. Колебания звуковой частоты легко прослушиваются непосредственно над артериями или венами с помощью фонендоскопа. Возникающие над венами шумы принято разделять на невинные и патологические, однако до сих пор не существует надежных механизмов их распознавания.

При горизонтальном положении человека давление в брюшной полости несколько выше атмосферного, а в грудной клетке – ниже атмосферного, поэтому вены, по которым кровь движется из брюшного отдела в грудной, испытывают коллапс [10]. Поскольку давление в грудной клетке периодически меняется в ходе дыхательных движений, картина схлопывания вен довольно сложна. Было показано, что коллапс системных вен может способствовать увеличению перепада давления и наполнению предсердий во время периода расслабления (диастолы). Доставка венозной крови к сердцу по схлопывающимся венам определяется давлением на верхнем (капиллярном) конце и

степенью схлопывания и, таким образом, не зависит от давления в грудной полости, пока оно остается на субатмосферном уровне. При увеличении давления выше атмосферного  $P > P_{atm}$  схлопывание не происходит и давление в венах равно давлению в правом предсердии, что ведет к снижению возврата венозной крови в камеры сердца. Периодическая компрессия вен нижних конечностей используется в медицине для предотвращения тромбоза глубоких вен после хирургических операций.

Развитие неустойчивости и автоколебания стенки могут служить механизмов образования звуков Короткова, которые возникают в пережатой манжетой плечевой артерии при общепринятом методе измерения артериального давления [11]. Схлопывание мышечных артерий при периодическом сокращении окружающих их мышц и сгибании суставов способствует прокачиванию крови. Коронарные артерии, расположенные в толще сердечной мышцы, пережимаются при сокращении сердца (в систолу) и расправляются при его расслаблении (в диастолу), обеспечивая таким образом кровоснабжение самого сердца в период диастолы. Развитие неустойчивости и схлопывание сосудов может играть важную роль в перераспределения крови к внутренним органам (ауторегуляция) [61]. Индуцированный потоком коллапс артерии вниз по течению за атеросклеротической бляшкой (участок сужения сосуда) и связанные с этим большие колебания давления могут способствовать разрушению бляшки, отрыва образовавшегося тромба и последующей закупорки нижележащих малых сосудов, что особенно опасно для сосудов головного мозга [46], [62].

При форсированном выдохе развивается коллапс дыхательных путей, особенно в верхних долях легких. Неустойчивости, связанные с движением воздуха в трахее при различных диаметрах голосовой щели приводят к генерации звуков животными и речи человека в весьма разных диапазонах частот, и исследование механизмов их генерации крайне важно для клинической диагностики, исследовании способов коммуникации в сообществах, разработки синтезаторов звуков. Недостаточно изучены причины осиплости, потери речи, храпа, коррекция которых требует детального понимания соответствующих физических механизмов. Распознавание хрипов, прослушиваемых при движении воздуха в дыхательных путях, также составляет актуальную задачу современной медицинской диагностики. Голосовой аппарат может моделироваться в виде системы податливых трубок, диаметры которых управляются напряжением голосовых мышц. Пение птиц связано с осцилляциями сложной системы податливых мембран в потоке воздуха, причем параметры регистрируемых звуков показывают, что голосовой аппарат проявляет свойства нелинейной динамической системы.

Сравнительно недавно были обнаружены волны давления, которые распространяются по цереброспинальной жидкости вдоль позвоночного столба и играют важную роль в функционировании нервной системы. Волна возбуждения (нервный импульс), распространяющаяся вдоль длинного отростка нервной клетки (аксона), сопровождается волной механической деформации,

которая приводит, в частности, к перистальтическому прокачиванию жидкости вдоль аксона. Таким образом, примеры распространения волн в заполненных жидкостью деформируемых трубках, представлены в живой природе на самых разных масштабных уровнях.

В различных технических устройствах также необходимо прокачивать вязкие и вязкоупругие жидкости по податливым трубкам с заданной скоростью или расходом. Здесь неустойчивость течения также может приводить к ограничению потока (flow limitation), осцилляциям стенок и появлению нежелательных шумов. В трубках массообменных устройств, которые используются для очистки, гомогенизации или разделения смесей и взвесей, а также в устройствах, на деформирующихся стенках которых протекают химические реакции или массообмен, умеренные колебания стенки могут приводить к перемешиванию смеси и ускорению скорости химических реакций, и, следовательно, желательны, однако в таких случаях амплитуда и частота колебаний должны контролироваться.

Таким образом, развитие неустойчивости, схлопывание трубок и проводящих путей наблюдается в самых разных технических и физиологических системах и требует тщательного изучения. Экспериментальные исследования течений в схлопывающихся трубках связаны с измерениями зависимости давление-расход при различных значениях  $P_{ext}$ , регистрацией последовательных изменений формы схлопывающейся трубки и параметров, при которых возникают высокочастотные осцилляции стенки трубки.

## 2.2. Теоретические модели.

Разработка исторически первых моделей стационарного и волнового течения жидкости по податливым трубкам связана с исследованием распространения пульсовых волн в артериях. Важными вехами стали модели Пуазейля и Франка, комбинация которых лежит в основе простейшей *нульмерной модели* течения в схлопывающихся трубках. Последовательное соединение жесткой (а), податливой (b) и еще одной жесткой (с) трубки предложено в качестве модели резистора Старлинга [10], [41], [57]. Закон сохранения массы и реологическое соотношение для трубки b имеют вид (модель Франка):

$$\frac{dV_b}{dt} = Q_{a,b} - Q_{b,c}, \quad \frac{dV_b}{dt} = C_b(\tilde{P}_b) \frac{d\tilde{P}_b}{dt} \quad (2)$$

где  $\tilde{P}_b = P_b - P_{ext}$ ,  $V_b$  и  $P_b$  — объем и давление,  $Q_{a,b}$  и  $Q_{b,c}$  — приток и отток жидкости в трубке b,  $C_b = dV_b/d\tilde{P}_b$  — податливость трубки.

Течение по жестким трубкам а и с считается Пуазейлевским, так что величины  $Q_{a,b}$  и  $Q_{b,c}$  выражаются через перепады давлений  $P_{in} - P$  и  $P - P_{out}$  соответственно, где  $P_{in}$  и  $P_{out}$  — давления на входе и выходе из системы. Из (2) после подстановки в дифференциальное уравнение всех зависимостей можно получить нелинейное уравнение, описывающее осцилляции объема трубки  $V_b$ . В литературе представлены модели, которые сводятся к нелинейным уравнениям 2–3-го [15], [25], [63] и 5-го [41] порядков и описывают сложные

режимы связанных осцилляций давления, расхода и площади сечения трубки. Подбором параметров удается добиться качественного соответствия динамических режимов системы данным экспериментов, однако количественные оценки приводят зачастую к существенным погрешностям. Кроме того, нульмерные модели не описывают распространение волн и не могут прояснить механизмы развития неустойчивостей.

*Одномерная модель* для исследования устойчивости течений вязкой жидкости через деформирующуюся трубку была впервые предложена в [53]. Уравнения модели включают закон сохранения массы и импульсов для осредненных по сечению трубки значений продольной скорости  $U$  и давления  $P$  в жидкости:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(SU)}{\partial x} = 0, \quad \rho_f \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \tau \quad (3)$$

где  $\tau$  – вязкое напряжение на стенке трубки на единицу длины,  $\rho_f$  – плотность жидкости. Рассматривались случаи, когда

$$\tau = \tau(S, U) \quad (4)$$

что соответствует диссипации за счет трения на стенке трубки, а также

$$\tau = (\chi - 1)\rho U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (5)$$

что отвечает потерям на трение в области сепарации потока, причем  $\chi = 1$  в области, где течение развито, и  $0 < \chi < 1$  и  $\partial U / \partial x < 0$  – на участке за схлопнувшейся трубкой, где имеется область вторичных течений [24].

Замыкающее соотношение для задачи (3)  $P = P(S)$  определяется на основе данных экспериментов, например, в виде [53]:

$$P = \frac{Gh_0}{R_0} \left( 1 - \left( \frac{S_0}{S} \right)^2 \right)$$

где  $G$  – модуль сдвига материала,  $R$ ,  $S$  и  $h$  – внутренний радиус, площадь просвета и толщина стенки трубки, а индекс 0 относится к состоянию, когда  $P_{tm} = 0$ . В общем случае реологическое соотношение  $P = P(S)$  представляется нелинейной зависимостью и описывает ситуации, когда  $S > S_0$  при  $P > P_{ext}$  и  $S \leq S_0$  при  $P < P_{ext}$ . Для кровеносных сосудов аппроксимация экспериментальных кривых дает зависимость [57]:

$$P(S) = k_1 \left( 1 - \left( \frac{S_0}{S} \right)^{3/2} \right) \quad \text{при } S < S_0 \quad P(S) = k_2 \left( \frac{S}{S_0} - 1 \right) \quad \text{при } S > S_0$$

где  $k_{1,2}$  – эмпирические коэффициенты. На участке, где трубка спадается,  $dS/dx$  меняет знак. На участке схлопывания трубка фактически образована двумя плоскими натянутыми мембранами, кривизна которых пропорцио-

нальна  $d^2S/dx^2$ , и соответствующая добавка к давлению может быть учтена в виде [57]:

$$P = P_{ext} + P(S) - T \frac{d^2S}{dx^2}$$

Связь давления и окружного натяжения  $T$  вводилась также в виде линейной зависимости  $T = PR$  [53]. Для случая продольного закрепления наружной стенки трубки к окружающей среде, что соответствует реальным условиям в артериях и венах, имеется экспериментальная зависимость, справедливая для случаев как малых, так и конечных деформаций стенки [53]:

$$T = Gh_0 \left( \frac{R}{R_0} - \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \right)$$

В реологическое соотношение могут быть также включены слагаемые, отвечающие за вязкоупругость материала, изгибную жесткость и инерцию стенки, которые оказывают существенное влияние на устойчивость течения [32]. При  $T = 0$  уравнения (3) совпадают с уравнениями течений сжимаемого газа и мелкой воды, поэтому известные для них особенности распространения волн малой амплитуды, переходы от суб- к надкритическим режимам, определяемые параметрами стенки и значениями  $P_{ext}$ , будут проявляться и в течениях по податливым трубкам.

В конечном итоге квазиодномерная задача, представленная законами сохранения (3) и замыкающим соотношением  $P = P(S, T(S))$  представляет гиперболическую систему, и решение ее может быть найдено в виде суперпозиции бегущих волн, а устойчивость изучена путем исследования особенностей распространения малых возмущений стационарного решения [10], [53], [57]. В результате таких исследований было показано, что вязкость играет существенную роль в развитии неустойчивости как для ламинарного, так и для турбулентного течений, а нелинейные эффекты, связанные с большой амплитудой колебаний стенки, не настолько важны для течений в податливых трубках, как в случае аналогичных задач газовой динамики и уравнений мелкой воды [53]. Введение продольного натяжения  $T$  в (3) позволяет использовать все четыре граничных условия (для площадей просвета и скоростей) на концах трубки. Введение диссипации в виде (4) или (5) позволяет получить решения в виде автоколебаний в широком диапазоне частот. Учет продольных и окружных натяжений приводит к появлению новой длинноволновой флаттерной моды [65].

Нормальные моды задач (3), (4) и (3), (5) характеризуются дискретным набором длин волн на схлопнувшемся участке с переменной площадью сечения, а взаимодействие этих мод проявляется в виде сложной динамической картины, которая качественно соответствует многочисленным экспериментальным наблюдениям [16], [24], [32]. При этом количественное соответствие одномерных моделей данным экспериментов остается неудовлетвори-

тельным, поскольку распределение трения на стенке, зависимость параметров потока от поперечной координаты, особенно при наличии сепарации потока в области за схлопнувшимся участком трубки, а также обобщенная зависимость  $P = P(S, T(S))$  между осредненными по сечению трубки величинами не позволяют описать реальную диссипацию энергии в стенке и на поверхности раздела жидкость-стенка, а также волны Толлмина-Шлихтинга и флаттер бегущих волн [22], [23], поэтому, начиная с 1980-х, были исследованы различные плоские задачи.

Одна из наиболее известных *двумерных математических моделей* была предложена в [55]. Одна стенка плоского канала снабжена вставкой (DE) в виде натянутой мембраны, а течение жидкости на входе в канал имеет параболический профиль скорости (рис.2). Система уравнений задачи и граничные условия имеют вид [50]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0, \quad \rho_f \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu_f \Delta \vec{v}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \kappa T - \sigma_n - P_{ext}, \\ x=0: \quad v_x &= \frac{4v_{max}}{H^2} (H-y)y, \quad v_y = 0 \\ (0 \leq x \leq L, y=0) \cup (0 \leq x \leq L_1, y=H) \cup \\ &\cup (L_1 + L_2 \leq x \leq L, y=H): \quad v_x = 0, \quad v_y = 0 \\ (L_1 \leq x \leq L_1 + L_2, y=h(t,x)): \quad \vec{v} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \quad \sigma_\tau = -\frac{\partial T}{\partial s}, \\ \sigma_n &= P_{ext} - Th_x' \left( 1 + (h_x')^2 \right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $|AB| = L$ ,  $|CD| = L_1$ ,  $|EF| = L_3$ ,  $L_2 = L - L_1 - L_3$ ,  $T$  и  $\kappa = \partial\phi/\partial s$  – натяжение и кривизна мембраны,  $s$  – координата, отсчитываемая вдоль мембраны,  $\phi$  – угол, образованный касательной к мембране и осью  $OX$  (рис.2),  $\rho = \rho_s/\rho_f$ ,  $\rho_s$  – плотность мембраны,  $\mu_f$  – вязкость жидкости,  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  – нормальные и касательные напряжения на мембране.

Представленная модель позволяет избежать расчетных проблем, возникающих для аналогичной задачи в трехмерной постановке, и при этом исследовать разные режимы течений, вызывающих экспериментально наблюдаемые явления flow limitation и автоколебания стенки. Решение задачи (6) при разных граничных условиях и некоторых вариациях уравнения импульсов для мембраны проводилось методом конечных элементов [50]. Детальное компьютерное моделирование показало, что однозначной корреляции между эффектом flow limitation и автоколебаниями мембраны не существует. При условиях, когда  $Q_{max}$  ограничено, может реализоваться как устойчивый, так и неустойчивый режимы течения. Неустойчивость параболического стационар-

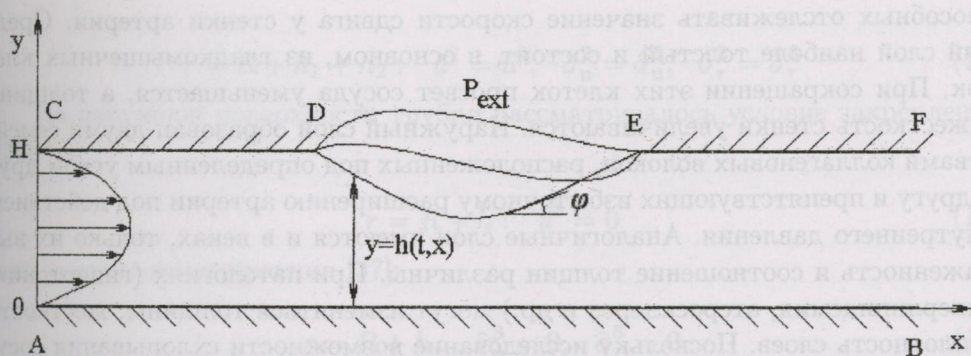


Рис.2. Течение жидкости в плоском канале со вставкой в виде натянутой мембраны.

ного течения развивается при определенных наборах параметров мембраны. Если мембрана втянута, но ограничения потока еще нет, могут реализовываться устойчивые течения. Таким образом, задача об устойчивости течения в двумерной постановке демонстрирует сложный динамический характер и наличие целого набора взаимодействующих неустойчивых мод [32], [50], [57].

Полная постановка задачи об устойчивости течений жидкости в схлопывающихся трубках включает в себя трехмерные уравнения Навье-Стокса, уравнения для конечных перемещений упругой (вязкоупругой) стенки, условия на границе раздела жидкость-стенка и условия на внешней поверхности трубки. Решение такой задачи возможно лишь численными методами, требует значительных вычислительных мощностей и детальной информации о геометрии и механических свойствах материала стенки. В силу этого огромное число теоретических работ посвящено разработке более простых моделей, адекватно описывающих физические явления и не противоречащих экспериментальным данным. Оказалось, что квазиодномерная модель распространения плоских волн в вязкой жидкости ( $\tau = 0$ ) в совокупности с моделями теории оболочек для стенки позволяет удовлетворительно описать основные закономерности распределения объемного кровотока и давления, распространения и отражения волн в артериях [10], [48], [51], [52], [66]. Это связано с тем, что в норме  $P > P_{ext}$  и артерия остается расправленной в течение всего цикла сердечного сокращения. Однако в целом ряде практических случаев, а также для патологически измененных кровеносных сосудов требуется исследовать задачу в полной трехмерной постановке.

### 3. Течение жидкости по многослойным трубкам.

Исследование этого класса задач также связано с проблемами устойчивости течения крови по кровеносным сосудам, которые в действительности являются многослойными вязкоупругими трубками. Внутренний слой сосудов — это тонкий монослой клеток, обладающих механочувствительностью и

способных отслеживать значение скорости сдвига у стенки артерии. Средний слой наиболее толстый и состоит, в основном, из гладкомышечных клеток. При сокращении этих клеток просвет сосуда уменьшается, а толщина и жесткость стенки увеличиваются. Наружный слой образован двумя семействами коллагеновых волокон, расположенных под определенным углом друг к другу и препятствующих избыточному расширению артерии под действием внутреннего давления. Аналогичные слои имеются и в венах, только их выраженность и соотношение толщин различны. При патологиях (гипертония, гиперлипидемия, атеросклероз и др.) могут изменяться толщины, жесткость и плотность слоев. Поскольку исследование возможности схлопывания сосудов, механизмов генерации нормальных и патологических шумов и биомеханическая интерпретация кривых осцилляции просвета  $S(t)$  или диаметра  $D(t)$  сосуда крайне важны для ранней диагностики сердечно-сосудистых патологий, то математическому моделированию многослойной сосудистой стенки уделяется большое внимание [28], [38], [39], [40], [58], [64], [67].

Результаты детальных исследований устойчивости течений жидкости в трехслойных вязкоупругих трубках при разных граничных условиях приведены в [2]–[6], [36], [37], [42]. Рассматривалось осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по толстостенной трубке кругового сечения. Внутренний радиус и длина трубки  $R$  и  $L$ , а толщины слоев  $h_{1,2,3}$ , причем  $h_1 + h_2 + h_3 = h$ , а нумерация слоев направлена от внутреннего к наружному. Материал стенки считался линейно вязкоупругим несжимаемым. Основная система уравнений представлена условиями несжимаемости и уравнениями движения жидкости и отдельных слоев:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \rho_f \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\sigma} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^j = 0, \quad \rho_s^j \frac{\partial^2 \vec{u}^j}{\partial t^2} = -\nabla p^j + \nabla \cdot \hat{\sigma}^j \quad (8)$$

где  $\vec{v}$  и  $\vec{u}^j$  – скорость движения жидкости и перемещение  $j$ -го слоя стенки,  $\rho_f$  и  $\rho_s^j$  – плотности жидкости и  $j$ -го слоя стенки,  $p$  и  $p^j$  – гидростатические давления,  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\sigma}^j$  – тензоры вязких напряжений жидкости и стенки,  $j = 1-3$ .

Решения задач (7) и (8) связаны посредством граничных условий на поверхности раздела жидкость-стенка. Граничные условия для (7) и (8) включают условия осевой симметрии и ограниченности скорости на оси трубки, условия непрерывности нормальной и тангенциальной компонент скорости и напряжений на внутренней поверхности трубки; и условия непрерывности перемещений и напряжений на поверхностях раздела слоев стенки соответственно:

$$r = R: \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}^1}{\partial t}, \quad \hat{\sigma}_n^1 = \hat{\sigma}_n \quad (9)$$

$$r = R + h_1: \quad \vec{u}^1 = \vec{u}^2, \quad \hat{\sigma}_n^1 = \hat{\sigma}_n^2, \quad \hat{\sigma}_\tau^1 = \hat{\sigma}_\tau^2 \quad (10)$$

$$r = R + h_1 + h_2 : \bar{u}^2 = \bar{u}^3, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \hat{\sigma}_n^3, \quad \hat{\sigma}_\tau^2 = \hat{\sigma}_\tau^3 \quad (11)$$

На наружной поверхности трубки рассматривалось условие закрепления [36]:

$$r = R + h : \bar{u}^3 = 0 \quad (12)$$

или условие ненагружения [37]:

$$r = R + h : \hat{\sigma}_n^3 = 0, \quad \hat{\sigma}_\tau^3 = 0 \quad (13)$$

Для стенки принималась модель Фойхта вязкоупругого твердого анизотропного материала [36]:

$$\bar{\sigma}_i^j = A_{ik}^j \varepsilon_k^j + \mu_s^j \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_i^j \quad (14)$$

где  $\bar{\sigma}^{jT} = (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})$  – вектор напряжений,  $\bar{\varepsilon}^{jT} = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta})$  – вектор деформаций,  $A_{ik}^j$  – матрица упругости,  $\mu_s^j$  – вязкости материалов слоев.

Поскольку стенки кровеносных сосудов обладают тангенсальной изотропией, причем плоскость изотропии есть плоскость  $z\theta$ , а значения модулей упругости, сдвига и коэффициентов Пуассона как стенок артерий и вен, так и их отдельных слоев измерялись в экспериментах и приведены в литературе (см., например, [28], [38], [40], [64], [67]), то исследовался случай когда

$$(A_{ik}^j)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_2^j} & \frac{-\nu_2^j}{E_2^j} & \frac{-\nu_2^j}{E_2^j} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_2^j}{E_2^j} & \frac{1}{E_1^j} & \frac{-\nu_1^j}{E_1^j} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_2^j}{E_2^j} & \frac{-\nu_1^j}{E_1^j} & \frac{1}{E_1^j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_2^j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_1^j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_1^j} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Случай изотропного материала  $E_1^j = E_2^j = E^j$ ,  $\nu_1^j = \nu_2^j = \nu^j$ ,  $G_1^j = G_2^j = G^j$ ,  $G^j = E^j/2/(1 + \nu^j)$  рассматривался в [3]. Кроме этого, исследовалась обобщенная модель Кельвина-Фойхта [2], [4]:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^j \frac{\delta^k}{\delta t^k}\right) \left(\rho_s^j \frac{\partial^2 \bar{u}^j}{\partial t^2} + \nabla p_s^j\right) = 2G^j \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^j \frac{\delta^k}{\delta t^k}\right) \Delta \bar{u}^j \quad (15)$$

где  $\lambda_{1k}^j$ ,  $\lambda_{2k}^j$  – реологические коэффициенты. В этом случае условие закрепления (12) сохраняет свою форму, а условие ненагружения (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^1 \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^2 \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(p_s^3 - 2G^3 \frac{\partial u_r^3}{\partial r}\right) = 0 \\ & \left(1 + \sum_{k=1}^{m_1} \lambda_{1k}^1 \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{m_2} \lambda_{2k}^2 \frac{\partial^k}{\partial t^k}\right) \left(\frac{\partial u_r^3}{\partial x} + \frac{\partial u_x^3}{\partial r}\right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Исследовалась задача о распространении малых возмущений в многослойной трубке [2], [3]. Анализ дисперсионного уравнения показал, что для многослойной трубки можно выделить две медленные жидкостные и ряд более быстрых стеночных мод (моды Юнга и Ламба соответственно) [5]. Взаимодействие жидкости с многослойной стенкой приводит к сложной волновой картине. С одной стороны, это затрудняет анализ параметров волн давления, регистрируемых в кровеносных сосудах, а с другой стороны дает возможность создавать трубки с требуемыми демпфирующими свойствами за счет выбора вязкоупругих параметров материалов слоев. Устойчивость развитого стационарного течения (течения Пуазейля) по многослойной трубке исследовалась в [36], [37]. Решение задач (7)–(10) и (7)–(9), (11) разыскивалось в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}', \quad p = p_p + p', \quad \vec{u} = \vec{u}', \quad p_s^j = p_s^{j'} \quad (17)$$

где индекс  $p$  относится к течению Пуазейля, а штрихом обозначены малые возмущения, которые вводились в виде нормальных мод:

$$\begin{aligned} (v_j', p_f') &= (v_j^*, p_f^*) e^{st+ikz+in\theta}, \\ (u_j', p_s^{j'}) &= (u_j^*, p_s^{j*}) e^{st+ikz+in\theta} \end{aligned} \quad (18)$$

где  $v_j^*$ ,  $u_j^*$ ,  $p_f^*$ ,  $p_s^{j*}$  – амплитуды соответствующих возмущений,  $s = s_r + is_i$ ,  $k = k_r + ik_i$ ,  $s_i$  – частота,  $k_r$  – волновое число,  $s_r$  и  $k_i$  – инкременты абсолютной и конвективной неустойчивости, которые определяют нарастание амплитуды возмущения со временем и по мере распространения волны вверх и вниз по течению соответственно.

После подстановки (17)–(18) в (7)–(10) и (7)–(9), (11) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений, решение которой было найдено для случая осесимметричных возмущений  $n = 0$ ,  $v_\theta^* = 0$ ,  $u_\theta^{j*} = 0$  при условии закрепления [36] и условии ненагружения [37] внешней поверхности трубки. Для трансверсально изотропного материала решение задачи определялось следующим набором безразмерных величин:  $H_j = h_j/R$ ,  $\rho^j = \rho_s^j/\rho_f$ ,  $\mu^j = \mu_s^j/\mu_f$ ,  $\Xi_{1,2}^j = E_{1,2}^j/G$ ,  $\Gamma_{1,2}^j = G_{1,2}^j/G$ ,  $\nu_{1,2}^j$ ,  $j = 1-3$ ,  $Re = \rho_f V R/\mu_f$ ,  $\Lambda = (\rho_f V_{max}^2/G)^{1/2} = V_{max}/V$ ,  $V = (G/\rho_f)^{1/2}$  – характерная скорость,  $G$  – характерное значение модуля сдвига,  $V_{max}$  – скорость жидкости на оси трубки для Пуазейлевского течения.

Поскольку общее число различных комбинаций указанных параметров огромно, отдельно исследовалось влияние модулей упругости, вязкости, толщин слоев, числа Рейнольдса и безразмерного параметра  $\Lambda$ , который равен

отношению сил инерции жидкости и упругих сил в стенке и, таким образом, определяет степень взаимодействия жидкость-стенка. При расчетах использовались значения плотностей, толщин, вязких и упругих коэффициентов материала слоев, которые соответствовали стенкам кровеносных сосудов, а также некоторым техническим материалам (резины, гели, композиты).

#### 4. Устойчивость стационарного течения жидкости в многослойной трубке при условии закрепления стенки.

Результаты расчетов собственных значений задачи в плоскостях  $(s_r, s_i)$  и  $(k_i, k_r)$  (плоскости Лапласа и Фурье) представлены на рис.3а,б для сравнения поведения изотропной и трансверсально изотропной трехслойной стенки. Моды, расположенные вблизи действительной оси  $s_r$ , являются жидкостными, а вдоль мнимой оси  $s_i$  – стеночными. Если рассмотреть решение задачи об устойчивости цилиндрического столба жидкости при  $Re \ll 1$  с условием прилипания к неподвижной поверхности на границе, то на рис.3а останутся только устойчивые жидкостные моды с  $s_i = 0$ ,  $s_r < 0$ , а решение задачи об устойчивости пустой цилиндрической оболочки даст стеночные моды, расположенные вдоль мнимой оси ( $s_r = 0$ ) и соответствующие широкому диапазону частот [1]. Количество и плотность распределения мод на плоскости  $(s_r, s_i)$  зависят от параметров  $\Lambda$  и  $Re$ . При наличии взаимодействия жидкости со стенкой моды располагаются все дальше от осей  $s_r$  и  $s_i$ . В соответствии с (18) моды, расположенные в верхней и нижней частях плоскости Фурье ( $k_i > 0$  и  $k_i < 0$ ), соответствуют возмущениям, распространяющимся вниз и вверх по течению от источника возмущений.

Для изотропной трубки имеется одна абсолютно неустойчивая жидкостная мода и два семейства устойчивых стеночных мод (обозначены знаком "+" на рис.3а). При увеличении модуля Юнга материала в радиальном направлении неустойчивая жидкостная мода сохраняется, но инкремент неустойчивости несколько уменьшается. При этом появляются несколько дополнительных неустойчивых стеночных мод с очень малыми инкрементами неустойчивости. Интересно отметить, что моды, соответствующие увеличению модуля Юнга в окружном и в радиальном направлениях, практически совпадают, и на изменение параметров мод влияет увеличение жесткости материала в целом, вне зависимости от направления, по крайней мере, в исследованном диапазоне значений параметров.

На плоскости  $(k_i, k_r)$  собственные значения системы образуют для изотропной трубки четыре ветви (отмечены знаком "+"), две из которых соответствуют длинным (меньшие значения  $k_r$ ), а две другие – относительно коротким (большие значения  $k_r$ ) волнам (рис.3б). В случае трансверсально изотропной трубки все ветви (отмечены знаком  $\odot$  на рис.3б) сдвигаются по направлению к области коротких волн. В реальных условиях трубки имеют конечную длину и закреплены на концах, что накладывает ограничения на распространение длинных волн, поэтому моды с  $k_r \rightarrow 0$  в кровеносных

сосудах и трубках технических устройств невозможны.

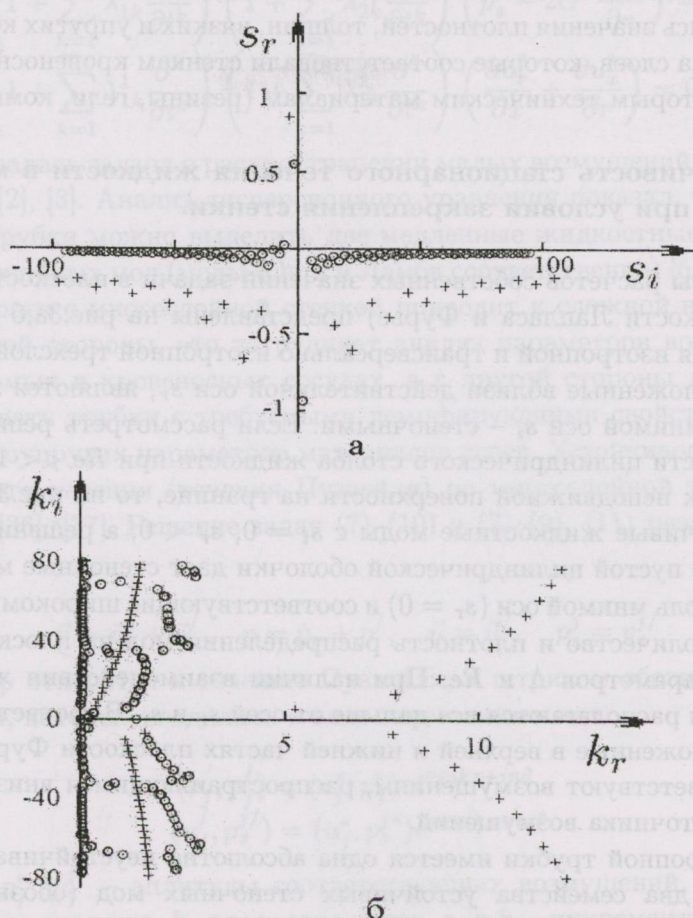


Рис.3. Распределение значений  $(s_r, s_i)$  (а) и  $(k_i, k_r)$  (б) для: трехслойной трубки из изотропного материала при  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.02, 0.04, 0.04\}$ ,  $\rho^j = 1$ ,  $Re = 10$ ,  $\Gamma^j = 1$ ,  $\Xi_1^j = 2$  (+) и для трансверсально изотропного материала при  $\Xi_2^j = 2\Gamma^j$ ,  $\Xi_1^j = 20\Gamma^j$ ,  $\Gamma^j = 0.1$ ,  $\nu_{1,2}^j = 0.1$  (o).

На рис.4а,б представлены результаты расчетов, выполненных для трехслойной трубки, состоящей из изотропных слоев с разными модулями упругости. Увеличение жесткости внутреннего слоя ведет при достаточно малых значениях  $Re$  к стабилизации системы (единственная абсолютно неустойчивая жидкостная мода становится устойчивой). Для всех случаев на плоскости  $(s_r, s_i)$  имеются два семейства устойчивых стеночных мод, однако при увеличении жесткости наружного слоя при наличии достаточно податливых внутреннего и среднего слоев появляются две неустойчивые стеночные моды с малыми значениями  $s_r$  (рис.4а). На плоскости  $(k_i, k_r)$  также присутствуют четыре ветви, причем увеличение жесткости любого из слоев трубки приводит к сдвигу этих ветвей в область длинноволновых мод. Особенно заметен

этот сдвиг при увеличении жесткости наружного слоя. Таким образом, путем подбора типа анизотропии и вязкоупругих коэффициентов материала слоев можно стабилизировать неустойчивую жидкостную моду и сдвинуть допустимые системой моды в область длинных волн, например, до значений  $\lambda > L$ , которые при условии закрепления трубки на концах недопустимы.

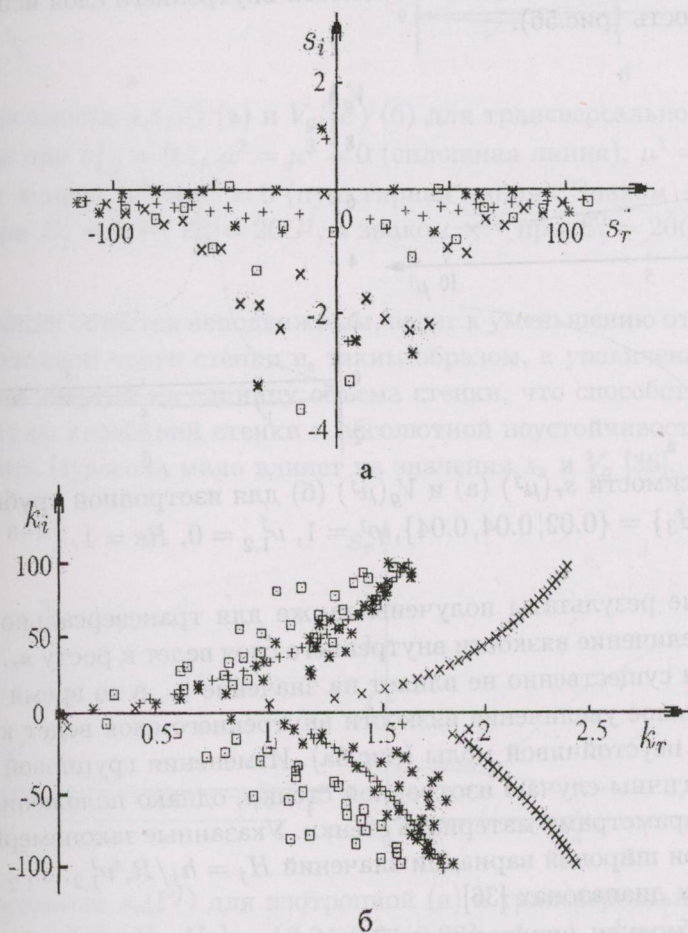


Рис.4. Распределение значений  $(s_r, s_i)$  (а) и  $(k_i, k_r)$  (б) для случая трубки из однородного изотропного упругого материала при  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.02, 0.04, 0.04\}$ ,  $\rho^j = 1$ ,  $Re = 10$ ,  $\{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3\} = \{1, 1, 1\}$  (+),  $\{20, 1, 1\}$  (x),  $\{1, 20, 1\}$  (\*),  $\{1, 1, 20\}$  (□).

Для исследования возможности стабилизации системы за счет адекватного выбора свойств материала стенки рассчитывались также безразмерная групповая скорость  $V_g$  и инкремент  $s_r$  самой неустойчивой моды (моды, которая при данных параметрах системы имеет наибольшее положительное значение  $s_r$ ). Расчеты показали, что изменение вязкости материала одного из слоев ведет к изменениям значений  $s_r$  и  $V_g$  самой неустойчивой моды. Для многослойной изотропной трубки изменение вязкости материала внутреннего

и наружного слоев не приводит к стабилизации в большом диапазоне значений  $\mu^{1,3}$ , если внутренний слой остается упругим. Для упругого внутреннего и внешнего слоя и вязкоупругого внутреннего можно стабилизировать неустойчивую моду уже при относительно небольших значениях вязкости внутреннего слоя (рис.5а), причем значение  $s_r$  остается положительным с ростом  $\mu^2$ . Существенные изменения с ростом вязкости внутреннего слоя испытывает и групповая скорость (рис.5б).

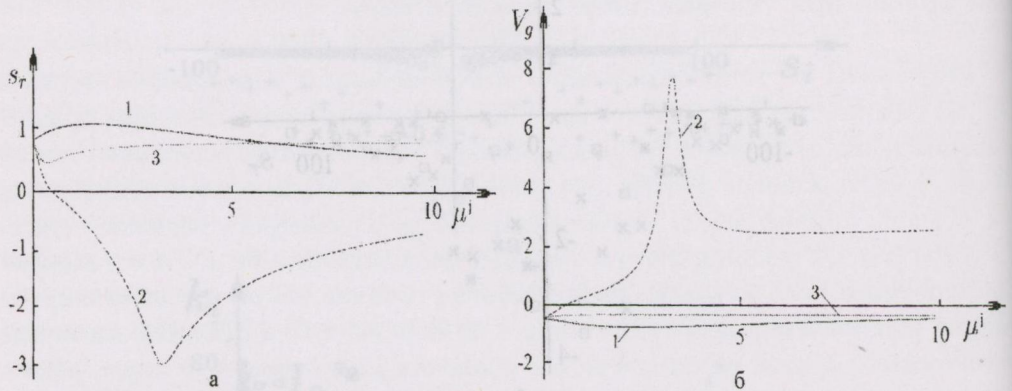


Рис.5. Зависимости  $s_r(\mu^j)$  (а) и  $V_g(\mu^j)$  (б) для изотропной трубки при  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.02, 0.04, 0.04\}$ ,  $\rho^j = 1$ ,  $\nu_{1,2}^j = 0$ ,  $Re = 1$ ,  $\Gamma^{1-3} = 1$ .

Аналогичные результаты получены также для трансверсально изотропной трубки. Увеличение вязкости внутреннего слоя ведет к росту  $s_r$ . Вязкость наружного слоя существенно не влияет на значение  $s_r$ , в то время как относительно небольшое увеличение вязкости внутреннего слоя ведет к стабилизации наиболее неустойчивой моды (рис.6а). Изменения групповой скорости при этом аналогичны случаю изотропной стенки, однако положение пика  $V_g$  определяется параметрами материала стенки. Указанные закономерности были выявлены при широкой вариации значений  $H_j = h_j/R$ ,  $\nu_{1,2}^j$ ,  $\Xi_{1,2}^j = E_{1,2}^j/G$  в исследованных диапазонах [36].

Увеличение модуля упругости материала внутреннего и среднего слоев при неизменной вязкости (как для упругих, так и для упруговязких материалов) ведет к стабилизации системы, причем наиболее существенные изменения происходят при увеличении жесткости внутреннего слоя (рис.7а), так как при этом взаимодействие жидкости со стенкой на внутренней поверхности уменьшается и при  $\Xi_1^j \rightarrow \inf$  задача соответствует течению в жесткой трубке, которое при достаточно малых числах Рейнольдса устойчиво. Увеличение жесткости внешнего слоя, наоборот, увеличивает неустойчивость наименее устойчивой моды, причем этот факт выявлен и для трансверсально изотропной стенки в широком диапазоне значений параметров материалов слоев (рис.7б). Поскольку развитие неустойчивости и возникающие при этом осцилляции стенки связаны с обменом энергией между жидкостью и стенкой [34], [35], то увеличение жесткости наружного слоя, который в силу усло-

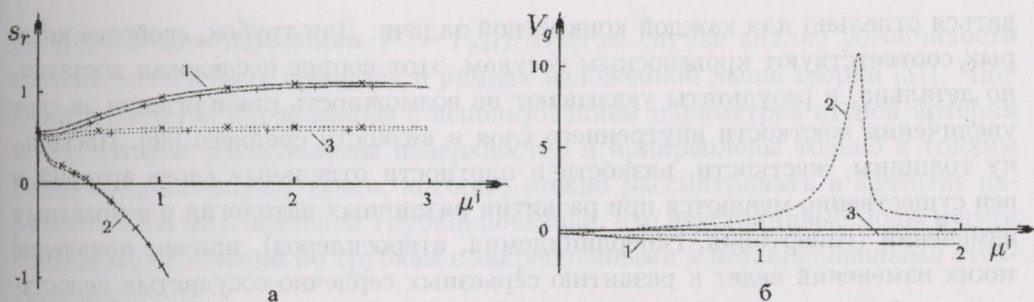


Рис.6. Зависимости  $s_r(\mu^j)$  (а) и  $V_g(\mu^j)$  (б) для трансверсально изотропной трубки при  $\nu_{1,2}^j = 0.1, \mu^2 = \mu^3 = 0$  (сплошная линия),  $\mu^1 = \mu^3 = 0$  (штриховая линия),  $\mu^1 = \mu^2 = 0$  (пунктирная линия). Знаком + обозначены значения при  $E_1^j = 2G^j, E_2^j = 20G^j$ , а знаком x - при  $E_1^j = 20G^j, E_2^j = 2G^j$ .

вий закрепления остается неподвижным, ведет к уменьшению относительного объема податливой части стенки и, таким образом, к увеличению плотности передаваемой энергии на единицу объема стенки, что способствует увеличению амплитуды колебаний стенки и абсолютной неустойчивости. Изменение коэффициента Пуассона мало влияет на значения  $s_r$  и  $V_g$  [36].

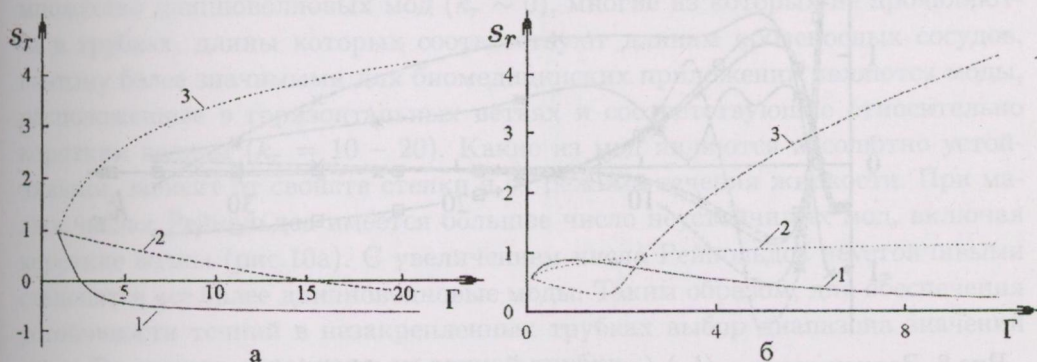


Рис.7. Зависимость  $s_r(\Gamma^j)$  для изотропной (а) и трансверсально изотропной (б) трубки при  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.04, 0.04, 0.02\}, \rho^j = 1, \nu_1^j = \nu_2^j = 0, Re = 5, \Gamma_{1,2}^j = \Xi_{1,2}^j/2 = \Gamma$ . Кривые  $j=1,2,3$  соответствуют случаям, когда значение  $\Gamma^j$  соответствующего слоя изменяется, а для двух остальных слоев  $\Gamma^j = 1$ .

На рис.8 представлена зависимость инкремента неустойчивости (сплошные линии) и безразмерной групповой скорости (пунктирные линии) от волнового числа  $k_r$ . Для многослойной анизотропной трубки спектр возможных колебаний весьма сложен, поэтому стабилизация коротко- и длинноволновых неустойчивых мод представляет собой непростую задачу. Некоторые моды удастся стабилизировать путем увеличения вязкости или жесткости материала отдельных слоев, но при этом могут стать неустойчивыми ранее устойчивые моды. Таким образом, вопрос о подборе параметров трубки, которые приведут к стабилизации (или дестабилизации) системы, должен рассматри-

ваться отдельно для каждой конкретной задачи. Для трубок, свойства которых соответствуют кровеносным сосудам, этот вопрос исследован достаточно детально, и результаты указывают на возможность стабилизации за счет увеличения жесткости внутреннего слоя и вязкости среднего [36]. Поскольку толщины, жесткости, вязкости и плотности отдельных слоев артерий и вен существенно меняются при развитии различных патологий и возрастных изменений (гипертония, гиперлипидемия, атеросклероз), причем появление таких изменений ведет к развитию серьезных сердечно-сосудистых недостаточностей, исследование устойчивости течений крови в сосудах с измененными свойствами отдельных слоев является весьма актуальным. Для трубок технических устройств проведены аналогичные расчеты, которые также показали возможность стабилизации системы при различных режимах течения и свойствах стенки [37]. Эффективным методом выбора стратегии воздействия на устойчивость является оценка изменений групповой скорости  $V_g$  и инкремента  $s_r$  наиболее неустойчивой моды [36], [37], [42].

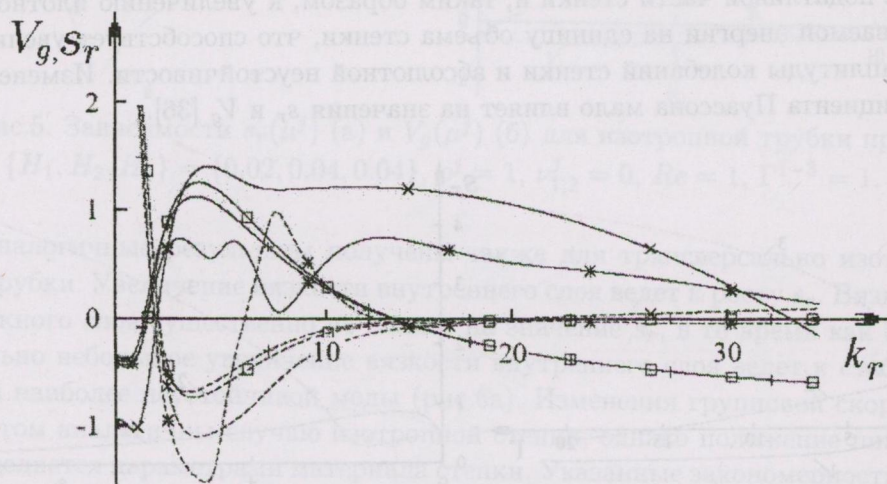


Рис.8. Зависимости  $s_r(k_T)$  (сплошные линии) и  $V_g(k_T)$  (штриховые линии) для изотропной стенки при  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.08, 0.14, 0.18\}$ ,  $\rho^j = 1$ ,  $Re = 10$ ,  $\Lambda = 10$ ,  $\nu_{1,2}^j = 0$ ,  $\Xi^j = 2\Gamma^j$  и для наборов значений  $\{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3\} = \{1, 1, 1\}$  (+),  $\{5, 1, 1\}$  (x),  $\{1, 5, 1\}$  (\*),  $\{1, 1, 5\}$  (□).

##### 5. Устойчивость стационарного течения жидкости в многослойной трубке при условии ненагружения.

В случае ненагруженной стенки при определенном перепаде давлений  $P - P_{ext}$  трубка начинает схлопываться, деформации ее стенок при этом не малы  $u_r^j \sim R$ , поэтому линеаризованная задача (7)–(9), (11) для трубки кругового сечения может быть использована только при достаточно больших значениях  $P_{tm}$  или на начальных стадиях схлопывания, когда сечение трубки еще остается круговым (до значений  $P_{tm}^*$ , которые отвечают так называемым

расправляющим давлениям  $P = P_{ext}$ ). В этом случае анализ устойчивости системы может быть проведен в рамках изложенной выше теории [37]. Численные расчеты, проведенные с использованием параметров стенок артерий и вен, которые расположены поверхностно и прикреплены только к тонким слоям соединительной ткани, которые можно рассматривать в качестве наружного слоя многослойной трубки, показали, что неустойчивые моды и пути стабилизации течений по трубкам с закрепленными и незакрепленными стенками различны.

На рис. 9а,б представлены собственные значения задачи в плоскостях  $(s_r, s_i)$  и  $(k_i, k_r)$ . Перемещения незакрепленной стенки в большей степени определяются движением жидкости и ее взаимодействием со стенкой, поэтому большинство мод системы являются жидкостными (рис. 9а) в отличие от случая закрепленной стенки (рис. 3а). Во всех исследованных случаях имеется хотя бы одна неустойчивая жидкостная мода с  $s_r > 0$ , множество устойчивых жидкостных и несколько устойчивых стеночных мод, причем указанная закономерность наблюдается и для неосесимметричных возмущений (по крайней мере до  $n = 1 - 4$ ). На плоскости  $(k_i, k_r)$  собственные значения также образуют несколько семейств (рис. 9б), однако спектр колебаний менее сложен по сравнению со случаем закрепленной стенки (рис. 3б). Имеется множество длинноволновых мод ( $k_r \sim 0$ ), многие из которых не проявляются в трубках, длины которых соответствуют длинам кровеносных сосудов, поэтому более значимыми для биомедицинских приложений являются моды, расположенные в горизонтальных ветвях и соответствующие относительно коротким волнам ( $k_r = 10 - 20$ ). Какие из мод являются абсолютно устойчивыми, зависит от свойств стенки и от режима течения жидкости. При малых числах Рейнольдса имеется большое число неустойчивых мод, включая короткие волны (рис. 10а). С увеличением числа Рейнольдса неустойчивыми становятся все более длинноволновые моды. Таким образом, для обеспечения устойчивости течений в незакрепленных трубках выбор диапазона значений числа  $Re$  должен определяться длиной трубки.

Увеличение вязкости внутреннего слоя ведет к некоторому увеличению, а среднего и наружного слоев - к незначительному уменьшению  $s_r$ , однако наиболее неустойчивая мода по-прежнему остается абсолютно неустойчивой. Заметим, что увеличение вязкости внутреннего слоя несколько увеличивает  $s_r$  также и в случае условий закрепления (рис. 6а). Влияние модуля упругости материала слоев на инкремент неустойчивости в данном случае неоднозначно. Для некоторых наборов параметров удалось стабилизировать течение за счет увеличения жесткости внутреннего слоя, а в других случаях - наружного слоя [37]. Таким образом, увеличение модуля упругости внутреннего слоя стабилизирует систему и при условии закрепления, и при условии ненагружения (по крайней мере, пока сечение трубки остается круговым). В отличие от случая закрепленной стенки, при условии ненагружения систему можно стабилизировать путем увеличения модуля сдвига материала наружного слоя. Для анизотропного материала стенки при некоторых значениях  $\Gamma_{1,2}^{1-3}$  группо-

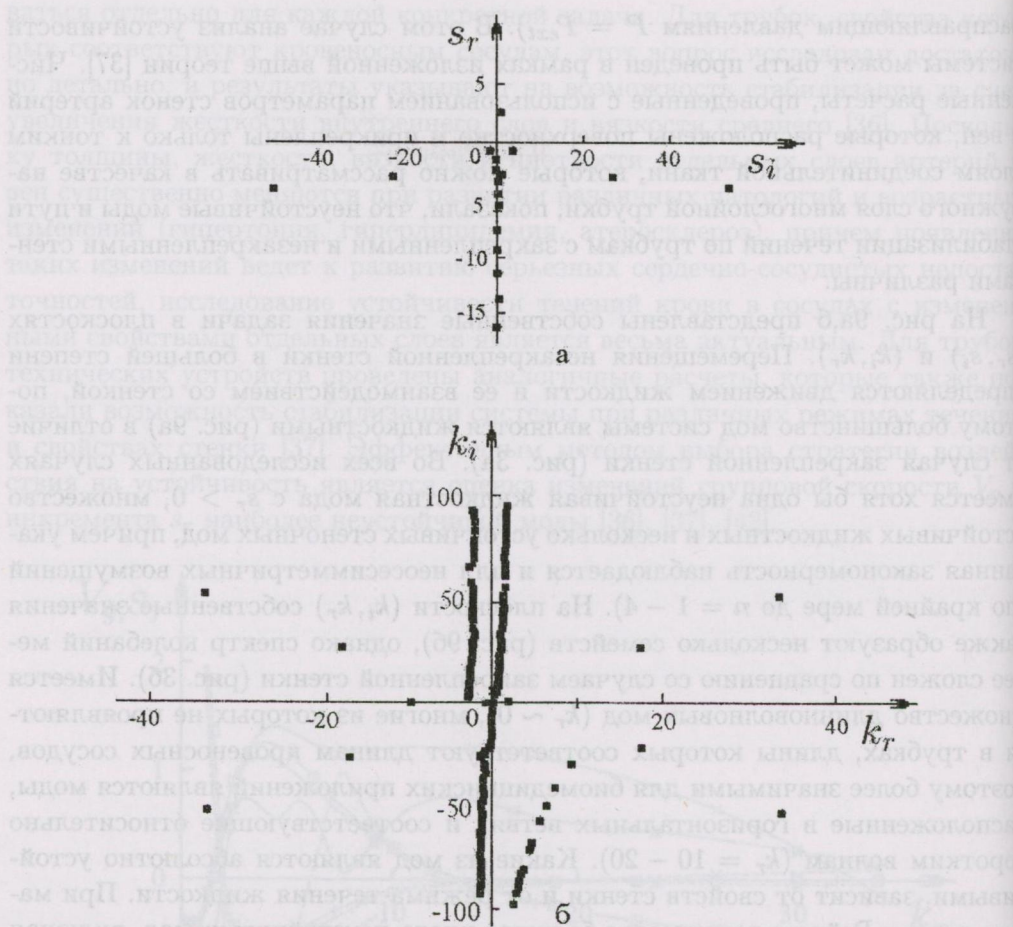


Рис.9. Распределение значений  $(s_r, s_i)$  при  $k = 2.5$  (а) и  $(k_i, k_r)$  при  $s = 2i$  (б) при  $Re = 100$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $\Xi_{1,2}^j = 2\Gamma_{1,2}^j = 2\Gamma$ ,  $\rho^j = 1$ ,  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.02, 0.04, 0.04\}$ ,  $\mu^j = 0$ ,  $\nu_{1,2}^j = 0.4$ ,  $n = 0$ .

вая скорость равна нулю, что соответствует абсолютной неустойчивости [36], [37]. Полученные результаты позволяют для заданной геометрии и условий течения подобрать режим течения, состав и структуру многослойной стенки, чтобы обеспечить устойчивость или требуемую неустойчивость системы (если контролируемые осцилляции стенки способствуют перемешиванию, насыщению, химическим реакциям в жидкости).

### Закключение

Устойчивость течений жидкостей и газов в деформирующихся трубках составляет предмет интенсивных экспериментальных и теоретических исследований на протяжении более полувека, и интерес к теме связан, в первую очередь, с важностью связанных с потерей устойчивости феноменов в физиологических течениях, а также с возможностью технических приложений

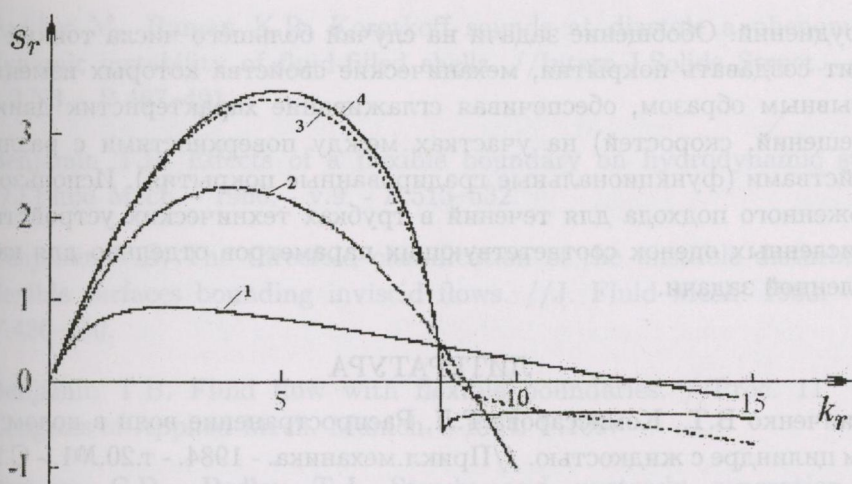


Рис.10. Зависимость  $s_r(k_r)$  для изотропной стенки при  $\{H_1, H_2, H_3\} = \{0.02, 0.04, 0.04\}$ ,  $\rho^j = 1$ ,  $Re = 10$ ,  $\Lambda = 10$ ,  $\nu_{1,2}^j = 0$ ,  $E^j = 2\Gamma^j = 2$ . Кривые 1-4 соответствуют значениям  $Re = 1; 10; 100; 800$ .

и контроля за устойчивостью течений. Многие важнейшие аспекты развития неустойчивости, возможности стабилизации системы, снижения потерь энергии на трение и затягивания перехода к турбулентному течению были исследованы, а результаты нашли воплощение в биомедицинских и технических приложениях. В силу сложности задачи большинство исследований выполнено на редуцированных одно- и двумерных моделях путем численных расчетов или асимптотическими методами и, таким образом, охватывает лишь некоторый узкий диапазон режимов течений и параметров системы. Например, для многослойных анизотропных вязкоупругих материалов число наборов параметров может достигать полусотни.

Необходимы дальнейшие исследования, в первую очередь трехмерных задач об обтекании тел с заданной геометрией и течений в схлопывающихся трубках и каналах переменного сечения с неоднородными стенками, что особенно важно для анализа физиологических течений в патологически измененных сосудах. Существенный прогресс в биомедицинской измерительной технике (магниторезонансная компьютерная томография, ультразвуковое сканирование) позволяет проводить визуализацию трехмерных течений крови по сосудам и других биожидкостей по проводящим путям, регистрировать смещения стенок сосудов и возникающие при развитии неустойчивостей шумы.

Использование многослойных вязкоупругих покрытий дает возможность стабилизировать систему при разных режимах течения. По крайней мере, это удастся сделать для материалов, свойства которых близки к свойствам стенок кровеносных сосудов. Поскольку искусственные материалы для создания заменителей сосудов разработаны и широко используются в медицине, то создание из них соответствующих многослойных конструкций не представля-

ет затруднений. Обобщение задачи на случай большего числа тонких слоев позволит создавать покрытия, механические свойства которых изменяются непрерывным образом, обеспечивая сглаживание характеристик движения (перемещений, скоростей) на участках между поверхностями с различными свойствами (функциональные градированные покрытия). Использование предложенного подхода для течений в трубках технических устройств требует численных оценок соответствующих параметров отдельно для каждой поставленной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Распространение волн в полой упругой цилиндрической оболочке с жидкостью. //Прикл.механика. - 1984. - т.20,№1. - С.21-26
2. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала. //Известия РАН. МЖГ. - 2006. - №3.- С.125-139.
3. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в многослойных толстостенных анизотропных вязкоупругих трубках при разных условиях закрепления. //Сборник избранных трудов Четвертых Поляховских чтений. Санкт-Петербург. - 2006. - С.374-383.
4. Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в многослойных анизотропных трубках и диагностический анализ пульсовых колебаний диаметра артерий. //Труды X Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону:Изд-во ООО «ЦВВР». - 2006. - С.157-161.
5. Кизилова Н.Н. Дисперсия волн в многослойных толстостенных трубках из вязкоупругого материала. //Акустический симпозиум КОНСОНАНС. Тезисы докладов. Киев. - 2007. С.19.
6. Кизилова Н.Н. Устойчивость течений вязкой жидкости в многослойных вязкоупругих трубках. //Всеросс. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды", посвященная памяти акад.Л.И. Седова. Тезисы докл. М. - 2007. - С.81-82.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.:Наука. - 1987. - 246с.
8. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрин Н.Х. Реология крови. М.:Медицина. - 1982. 272с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.:Наука. - 1970. - 904с.
10. Педли Т.Дж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. Пер. с англ. М.:Мир. - 1983. - 400с.

11. Anliker M., Raman K.R. Korotkoff sounds at diastole a phenomenon of dynamic instability of fluid-filled shells. //Intern.J.Solids Struct. - 1966. - v.2,N3. - P.467-491.
12. Benjamin T.B. Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. //J.Fluid Mech. - 1960. - v.9. - P.513-532.
13. Benjamin T.B. The threefold classification of the unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. //J. Fluid Mech. 1963. - v.16. - P.436-450.
14. Benjamin T.B. Fluid flow with flexible boundaries. //Proc. 11<sup>th</sup> Intern. Congress of Applied Mech. Munich. - 1964. P.109.
15. Bertram C.D., Pedley T.J. Steady and unsteady separation in an approximately two-dimansional indented channel. //J.Fluid Mech. - 1983. - v.130. - P.315-345.
16. Bertram C. Unstable equilibrium behavior in collapsible tubes. //J.Biomech. - 1986. - v.19. - P.61-69.
17. Bertram C.D., Raymond C.J., Pedley T.J. Mapping of instabilities for flow through collapsible tubes differering length. //J.Fluids Struct. - 1990. - v.4. - P.125-153.
18. Bertram C.D., de Tuesta G.D., Nugent A.H. Laser-Doppler measurements of velocities just downstream of a collapsible tube during flow-induces oscillations. //J.Biomech.Eng. Trans. ASME. - 2001. - v.123. - P.493-499.
19. Betchov K. Simplified analysis of boundary-layer oscillations. //J.Ship Res. - 1960. - v.4. - P.37-51.
20. Brecher G.A. Venous return. N.-Y. - 1956. - 178p.
21. Carpenter P.W., Thomas P.J. Rotating flows over compliant walls. //Flow past highly compliant boundaries and in collapsible tubes. Kluwer Acad.Publ. - 2001. - P.167-189.
22. Carpenter P.W., Garrad A.D. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. I. Tollmien-Schlichting instabilities. //J.Fluid Mech. - 1985. - v. 155. - P.465-510.
23. Carpenter P.W., Garrad A.D. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. II. Flow-induced surface instabilities. //J.Fluid Mech. - 1986. - v. 170. - P.199-232.
24. Cancelli C., Pedley T.J. A separated-flow model for collapsible-tube oscillations. //J.Fluid.Meh. - 1985. - V.157. - P.375-404.

25. Conrad W.A. Pressure-flow relationships in collapsible tubes. //IEEE Trans.Biomed.Eng. - 1969. - V.16,N4. - P.284-295.
26. Dinkelacker A., Hessel M., Meier G.E.A., Schewe G. Investigation of pressure fluctuations beneath a turbulent boundary layer by means of an optical method. //Phys.Fluids. - 1977. - v.20. - P.216.
27. Duncan J.H. The response of a two-layer elastic coating to pressure disturbances from a turbulent boundary layer. //Fluid-structure interaction and aerodynamic damping. Dowell E.H., Au-Yang M.K. (eds.) N.-Y.:ASME - 1985. - P.1-42.
28. Fung Y.C., Liu S.Q. Determination of the mechanical properties of the different layers of blood vessels in vivo. // Proc.Nat.Acad.Sci. USA. - 1995. - v.92,N6. - P.2169-2173.
29. Gad-el-Hak M. The response of a two-layer compliant coating to a turbulent boundary layer. //Bull.Am.Phys.Soc. - 1984. - v.29. - P.1514.
30. Gad-el-Hak M. On the interaction of compliant coatings with boundary-layer flows. //J.Fluid Mech. - 1984. - v.140. - P.257-280.
31. Gad-el-Hak M. Boundary layer interactions with compliant coatings: an overview. //Appl.Mech.Rev. - 1986. - v.39,N4. - P.511-523.
32. Grotberg J.B., Jensen O.E. Biofluid mechanics in flexible tubes //Annu.Rev.Fluid Mech. - 2004. - v.36. - P.121-147.
33. Ghaus A., Bottaro A. Instabilities of the flow in a curved channel with compliant walls. //Proc. R. Soc. Ser.A. - 2007. - v.463. - P.2201-2222.
34. Hamadiche M., Gad-el-Hak M. Temporal Stability of Flow Through Viscoelastic Tubes. //J. Fluids Structures. - 2002. - v.16,N3. - P.331-359.
35. Hamadiche M., Gad-el-Hak M. Spatiotemporal stability of flow through collapsible, viscoelastic tubes. //AIAA J. - 2004. - v.42,N4. - P.772-786.
36. Hamadiche M., Kizilova N.N. Temporal and spatial instabilities of the flow in the blood vessels as multi-layered compliant tubes. //Intern.J.Dynam.Fluids - 2005. - Vol.1,N1. - P.1-23.
37. Hamadiche M., Kizilova N. Flow interaction with composite wall. //ASME Conference "Pressure Vessels and Piping". Vancouver. - 2006. - PVP2006-ICPVT11-93880.
38. Holzapfel G.A., Gasser Th.C., Ogden R.W. Comparison of a Multi-Layer Structural Model for Arterial Walls With a Fung-Type Model, and Issues of Material Stability. //Trans. ASME. - 2004. - v.126,N4. - P.264-275

39. Humphrey J. D. Mechanics of the Arterial Wall: Review and Directions. //Crit. Rev. Biomed. Eng. - 1995. - v.23. - P.1-162.
40. Johnson M., Tarbell J.M. A Biphasic, Anisotropic Model of the Aortic Wall. //Trans. ASME. - 2001. - v.123.N2. - P.52-57.
41. Katz A.I., Chen Y., Moreno A.H. Flow through a collapsible tube (experimental analysis and mathematical model). //Biophys.J. - 1969. - v.9,N10. - P.1261-1279.
42. Kizilova N., Hamadiche M. Stability Analysis of Blood Flow in Multilayered Viscoelastic Tubes. //Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin. - 2005. - Suppl.1. - P.165-166.
43. Krindel P., Silberberg A. Flow Through Gel-Walled Tubes //J.Coll.Interface Sci. - 1979. - v.71. - P.39-50.
44. Kramer M.O. Boundary layer stabilization by distributed damping. //J.Aero.Sci. - 1957. - v.24. - P.459-460.
45. Kramer M.O. Boundary layer stabilization by distributed damping. //J.Amer.Soc.Nav.Eng. - 1960. - v.72. - P.25-33.
46. Ku D.N. Blood flow in arteries. //Annu. Rev. Fluid Mech. - 1997. - v.29. - P.399-434.
47. Landhall M.T. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. //J.Fluid Mech. - 1962. - v.13. - P.609.
48. Lighthill M.J. Physiological fluid dynamics. //J.Fluid Mech. - 1972. V.52. - P.475-497.
49. Lucey A.D., Peake N. Wave excitation on flexible walls in the presence of a fluid flow. //Flow past highly compliant boundaries and in collapsible tubes. Kluwer Acad.Publ. - 2001. - P.119-145.
50. Luo X.Y., Pedley T.J. Multiple solutions and flow limitation in collapsible channel flows. //J.Fluid.Mech. - 2000. - v.420. - P.301-324.
51. McDonald D.A. Blood flow in arteries. Baltimore:Williams and Wilkins. - 1974. - 480 p.
52. Milnor W.R.Hemodynamics. Baltimore: Williams and Wilkins. - 1989. - 408 p.
53. Olsen J.H., Shapiro A.H. Large-amplitude unsteady flow in liquid-filled elastic tubes. //J.Fluid Mech. - 1967. - v.29,N3. - P.513-538.

54. Patterson S.W., Starling E.H. On the mechanical factors which determine the output of fluid through collapsible tubes. //Amer.J.Physiol. - 1914. - V.48. P.357-379.
55. Pedley T.J. Longitudinal tension variation in collapsible channels - a new mechanism for the breakdown of steady flow. //Trans.ASME. - 1992. - v.114 - P.60-67.
56. Pedley T.J., Brook B.S., Seymour R.S. Blood pressure and flow rate in the giraffe jugular vein. //Phil. Transact. Royal Soc. London. Ser. B. - 1996. v.351. - P.855-866.
57. Pedley T.J., Luo X.Y. Modelling flow and oscillations in collapsible tubes //Theor.Comput.Fluid Dyn. - 1998. - v.10. - P.277-294.
58. Rachev A., Hayashi K. Theoretical study of the effects of vascular smooth muscle contraction on strain and stress distributions in arteries //Ann.Biomed.Eng. - 1999. - v.27. - P.459-468.
59. Rathsam A.D., Mastny G.F., Phillips T.E., Reischmann M.M. Laser/optical system for measuring microscopic motion on compliant materials in turbulent boundary layers. //Proc.8<sup>th</sup> biennial symp. on turbulence. Zakin J.L. Patterson J.K. (eds.) Univ. of Missouri. 1983. - P.30.
60. Rempfter D., Parsons L. Theoretical approaches to the effect of wall compliance on turbulent flow. //Flow past highly compliant boundaries and in collapsible tubes. Kluwer Acad.Publ. - 2001. - P.231-251.
61. Rodbard S. Flow through collapsible tubes: augmented flow produced by resistance at the outlet. //Circulation. - 1955. - v.11,N2. - P.280-287.
62. Rodbard S. Dynamics of blood flow in stenotic lesions. //Amer.Heart J. - 1966. - v.72,N5. - P.698-704.
63. Schoendorfer D.W., Shapiro A.H. The collapsible tube as a prosthetic vocal source. //Proc. San Diego Biomed. Symp. - 1977. - v.16. - P.349-356.
64. Vito R.P., Dixon S.A. Blood vessel constitutive models - 1995-2002 //Ann.Rev.Biomed.Eng. - 2003. - v.5. - P.413-439.
65. Walsh C. Flutter in one-dimensional collapsible tubes. //J. Fluids Struct. - 1995. - v.9. - P.393-408.
66. Womersley J.R. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. /Tech.Report TR-56-614. - 1957.
67. Zhou J., Fung Y. C. The degree of nonlinearity and anisotropy of blood vessel elasticity. //Proc.Nat.Acad.Sci.USA. - 1997. - v.94,N12. - P.255-260.

## Собственные значения оператора ангармонического осциллятора

В.В. Флоринский

*Белгородский государственный университет*

При помощи метода Линдштедта-Пуанкаре получен спектр ангармонического осциллятора четвертой, шестой и восьмой степени нелинейности. Для решения этого задания разработана компьютерная программа. Полученная формула спектра осциллятора четвертой степени нелинейности полностью совпадает с аналогичной формулой, полученной методом квантовых нормальных форм.

*2000 Mathematics Subject Classification* 42A70.

Многие задачи в атомной, молекулярной и ядерной физике допускают достаточно точное, но менее трудоемкое решение при описании их уравнениями классической механики с последующим квантованием [1]. К таким задачам относятся, например, столкновения атомов и молекул [2, 3], ридберговские состояния атомов и молекул, рассеяние тяжелых ионов, ядерные модели [4, 5]. Этот подход носит название полуклассического в отличие от квазиклассического или ВКБ-приближения, которое также приводит к классическим уравнениям, исходя из уравнения Шредингера. В связи с наличием динамического хаоса в классических системах [6] в последнее время возродился интерес к проблеме их квантования. Это приводит к необходимости одновременного исследования классического гамильтониана и его квантового аналога. В настоящей работе рассматривается одно из уравнений, которые в 1918 г. были предложены Дюффингом, и получили широкое распространение как тест для проверки различных приближенных методов [7], а также имеют самостоятельное значение при описании некоторых систем в квантовой механике.

В работе ставится задача найти аналитическое решение уравнения Дюффинга в виде рядов по степеням параметра нелинейности методом Линдштедта-Пуанкаре [8] и на основе найденных решений получить приближенную формулу для спектра его квантового аналога, а также сравнить полученные результаты с имеющимися в литературе.

Рассмотрим гамильтониан ангармонического осциллятора

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \alpha x^\mu, \quad (1)$$

где  $x$  – пространственная координата,  $\alpha$  – малый параметр ( $\alpha \ll 1$ ),  $\mu$  – степень нелинейности ( $\mu = 4, 6, 8$ ).

Ставится задача найти собственные значения оператора (1), т.е. все значения постоянной  $E$ , удовлетворяющие уравнению Шредингера:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (2)$$

в котором  $\psi(x)$  – собственные функции оператора (1), лежащие в пространстве  $L_2$ .

Поставленную задачу будем решать в полуклассическом подходе: рассмотрим классический аналог оператора (1) – гамильтонову функцию:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \alpha x^\mu. \quad (3)$$

Уравнения движения системы (3) легко свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$x'' + x + \mu\alpha x^{\mu-1} = 0, \quad x''(\tau) = \frac{d^2x}{d\tau^2}. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) находим методом Линдштедта-Пуанкаре, предварительно введя новую временную переменную  $t$  по формуле:

$$\tau = (1 + \alpha\omega_1 + \alpha^2\omega_2 + \dots + \alpha^n\omega_n + \dots)t, \quad (5)$$

где  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$  – постоянные, выбрав которые соответствующим образом, можно исключить из решения секулярные члены. При этом само решение ищется в виде степенного разложения по малому параметру

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \alpha x_1(\tau) + \alpha^2 x_2(\tau) + \dots + \alpha^n x_n(\tau) + \dots \quad (6)$$

Сделав замену (5) в уравнении (4), подставив в него разложение (6), и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\alpha$ , например для  $\mu = 4$  получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= -2\omega_1 \ddot{x}_0 - 4x_0^3, \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= -2\omega_1 \ddot{x}_1 - (\omega_1^2 - 2\omega_0) \ddot{x}_0 - 12x_0^2 x_1, \\ \ddot{x}_3 + x_3 &= -2\omega_1 \ddot{x}_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_0) \ddot{x}_1 - 2(\omega_3 + \omega_1\omega_2) \ddot{x}_0 - 12(x_0 x_1^2 + x_0^2 x_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя последовательно систему (7), найдем неизвестные функции разложения (6). Например, решение в третьем порядке по  $\alpha$  для случая  $\mu = 4$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 x(t) = & A \cos(t - t_0) + \alpha \left( A \cos(t - t_0) + \frac{1}{8} A^3 \cos(3(t - t_0)) \right) + \\
 & + \alpha^2 \left( A \cos(t - t_0) + \left( -\frac{21}{64} A^5 + \frac{3}{8} A^3 \right) \cos(3(t - t_0)) \right) + \\
 & + \alpha^3 \left( A \cos(t - t_0) + \left( \frac{471}{512} A^7 - \frac{105}{64} A^5 + \frac{3}{4} A^3 \right) \cos(3(t - t_0)) + \right. \\
 & \left. + \left( -\frac{43}{512} A^7 + \frac{5}{64} A^5 \right) \cos(5(t - t_0)) + \frac{1}{512} A^7 \cos(7(t - t_0)) \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

При этом постоянные  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  равны

$$\omega_1 = \frac{3}{2} A^2 \alpha, \quad \omega_2 = \frac{3}{16} A^2 \alpha^2 (5A^2 - 16), \quad \omega_3 = \frac{3}{128} A^2 \alpha^3 (41A^4 - 160A^2 + 192). \tag{9}$$

Поскольку решение ищется в виде ряда, возникает естественный вопрос о его сходимости. Можно показать, что ряды вида (6), а также ряды, полученные дифференцированием (6) (в том числе и неоднократно), сходятся абсолютно и равномерно на некотором отрезке, если на этом отрезке функции  $x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau), \dots$  непрерывны, имеют непрерывные производные (до некоторого порядка) и образуют монотонную последовательность. Очевидно, ряд с частичной суммой (8) удовлетворяет всем перечисленным условиям.

Произвольные постоянные  $A$  и  $t_0$ , входящие в решение (8), имеют физический смысл:  $A$  — амплитуда колебаний системы (1),  $t_0$  — начальная фаза, поэтому без ограничения общности можно положить  $t_0 = 0$ .

Амплитуду можно выразить через  $E$  — полную энергию системы. В точках поворота кинетическая энергия системы равна нулю, поэтому ее полная энергия будет равна потенциальной. Приравняв потенциальную функцию системы к полной энергии  $E$ , и разрешив полученное уравнение методом итераций, получим

$$A^2 = 2E - \alpha(4E + 9E^2) + \alpha^2 \left( 2E + 18E^2 + \frac{623}{8} E^3 \right) - \alpha^3 \left( 9E^2 + \frac{623}{4} E^3 + \frac{6608}{9} E^4 \right). \tag{10}$$

Для нахождения спектра оператора (1), воспользуемся известным условием квантования, которое запишем в виде:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{4}} (x'(\tau))^2 d\tau = n + \frac{1}{2}, \tag{11}$$

где  $T$  — период движения системы,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Подставляя в (11) решение (8), предварительно вернув его к старой переменной  $\tau$ , получим уравнение, из которого выразим  $E$  итерационным способом. В седьмом порядке по параметру  $\alpha$  для случая  $\mu = 4$  получен спектр

оператора (1) в виде формулы

$$\begin{aligned}
 E_n = & n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha \left( n^2 + n + \frac{1}{4} \right) - \frac{51}{8}\alpha^2 \left( \frac{3}{2}n^3 + n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \right) + \\
 & + \frac{375}{16}\alpha^3 \left( n^4 + 2n^3 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{16} \right) - \frac{10689}{2048}\alpha^4 (32n^5 + 48n^4 + \\
 & + 48n^3 + 24n^2 + 6n + 1) + \alpha^5 \left( \frac{87549}{64}n^6 + \frac{262647}{64}n^5 + \frac{1313235}{256}n^4 + \right. \\
 & + \frac{437745}{128}n^3 + \frac{1313235}{1024}n^2 + \frac{262647}{1024}n + \frac{87549}{4096} \left. \right) - \alpha^6 \left( \frac{3132399}{256}n^7 + \right. \\
 & + \frac{21926793}{512}n^6 + \frac{65780379}{1024}n^5 + \frac{109633965}{2048}n^4 + \frac{109633965}{4096}n^3 + \\
 & + \frac{65780379}{8192}n^2 + \frac{21926793}{16384}n + \frac{3132399}{32768} \left. \right) + \alpha^7 \left( \frac{238225977}{2048}n^8 + \right. \\
 & + \frac{238225977}{512}n^7 + \frac{1667581839}{2048}n^6 + \frac{1667581839}{2048}n^5 + \frac{8337909195}{16384}n^4 + \\
 & + \frac{1667581839}{8192}n^3 + \frac{1667581839}{32768}n^2 + \frac{238225977}{32768}n + \left. \frac{238225977}{524288} \right).
 \end{aligned}$$

Для решения поставленной задачи описанным выше методом была написана компьютерная программа, которая позволяет получать выражение спектра оператора (1) с любой степенью нелинейности  $\mu$  в произвольном порядке по малому параметру  $\alpha$ .

Полученные результаты хорошо согласуются с имеющимися в литературе. Формула (12) полностью совпадает (по крайней мере до седьмого порядка по  $\alpha$  включительно) с аналогичной формулой, приведенной в [13] и полученной методом квантовых нормальных форм. Кроме того, в работе [14] эта задача решалась численно.

Сравнение результатов приведено в следующих таблицах.

Таблица 1. ( $\mu = 4$ ,  $\alpha = 0.001$ )

| № | $E(12)$     | $E_{exact}$ | %        | №  | $E(12)$     | $E_{exact}$ | %        |
|---|-------------|-------------|----------|----|-------------|-------------|----------|
| 0 | 1.000748940 | 1.000748692 | 0.000025 | 6  | 13.12449936 | 13.06316358 | 0.467338 |
| 1 | 3.006721550 | 3.003739748 | 0.099171 | 7  | 15.16531238 | 15.08358659 | 0.538899 |
| 2 | 5.018619018 | 5.009711872 | 0.177482 | 8  | 17.21177462 | 17.10745779 | 0.606078 |
| 3 | 7.036392596 | 7.018652592 | 0.252118 | 9  | 19.26384411 | 19.13395549 | 0.674261 |
| 4 | 9.059994656 | 9.030549566 | 0.325001 | 10 | 21.32147996 | 21.16333811 | 0.741702 |
| 5 | 11.08937870 | 11.04539059 | 0.396669 |    |             |             |          |

Таблица 2. ( $\mu = 6, 8, \alpha = 0.001$ )

| № | $E(12), \mu = 6$ | $E_{exact}$ | %      | № | $E(12), \mu = 8$ | $E_{exact}$ | %      |
|---|------------------|-------------|--------|---|------------------|-------------|--------|
| 0 | 1.000747570      | 1.001848815 | 0.1099 | 0 | 1.000748941      | 1.005857514 | 0,5078 |
| 1 | 3.006684820      | 3.012780960 | 0.2023 | 1 | 3.006721546      | 3.047977747 | 1,3526 |
| 2 | 5.018450144      | 5.044799925 | 0.5223 | 2 | 5.018618986      | 5.190981366 | 3,3204 |
| 3 | 7.03532388       | 7.110092855 | 1.051  |   |                  |             |        |

В первом столбце указан номер собственного значения, во втором – соответствующее значение, полученное по формуле (12), в третьем – значение из работы [14], в четвертом – относительное отклонение в процентах. Как видно из таблиц, наблюдается хорошее согласие результатов, по крайней мере, для нижайших уровней.

В данной работе получено классическое решение уравнения Дюффинга в аналитическом виде на основе метода Линдштедта-Пуанкаре для произвольного порядка по параметру нелинейности с помощью разработанной для этой цели компьютерной программы LINDA. С помощью этой же программы проведено квантование уравнения Дюффинга и получена аналитическая формула для спектра, которая удовлетворительно согласуется с численными значениями энергии, приведенными в работе [14]. Интересно отметить, что реализованный подход дает точно такую же формулу для энергетического спектра, как и метод квантовых нормальных форм [13], по крайней мере до седьмого порядка по параметру включительно.

Преимущества предложенного метода перед другими состоят в том, что он позволяет получить решение уравнения (4) в виде ряда, сходимость которого легко показать. При этом погрешность, допускаемая при замене ряда его частичной суммой, не превосходит первого отброшенного члена. Кроме того, описанный подход допускает программную реализацию, что позволяет получать аналитическую формулу для спектра с любой заданной точностью, ограничиваясь возможностями компьютера. Данный метод обладает также универсальностью: степень нелинейности, точность решения и малый параметр являются входными параметрами программы, меняя которые можно с легкостью получать решения других аналогичных задач. В дальнейшем планируется модифицировать предложенный подход для потенциалов с двумя минимумами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М. Лекции по атомной механике. – Харьков-Киев: ГНТИ, 1934. – 312 с.
2. Воронин А. И., Ошеров В. И. Динамика молекулярных реакций. - М.: Наука, 1990. – 424 с.

3. Miller W. H. Semiclassical theory of atom-diatom collisions: Path integral and the classical S-matrix // *J. Chem. Phys.*, 1970. – Vol. 53, No. 5. – P. 1949–1957.
4. Ридберговские состояния атомов и молекул: Пер. с англ. под ред. Р. Стебинса и Ф. Даннинга. – М.: Мир, 1985. – 496 с.
5. Буреева А.А., Лисица В.С. Возмущенный атом. – М.: ИздАТ, 1997. – 464 с.
6. Штокман Х.Ю. Квантовый хаос. – М.: Физматлит, 2004. – 374 с.
7. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Наука, 1976. – 456 с.
8. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассические приближения для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 292 с.
9. Aldaya V., Guerrero J. Canonical coherent states for the relativistic harmonic oscillator // *J. Math. Phys.* – 2003. – Vol. 44.
10. Gaeta G., Levi D., Mancinelli R. Asymptotic symmetries of difference equations on a lattice // *J. Nonlin. Math. Phys.* – 2005. – Vol. 12. – P. 2137–2146.
11. Borisov D.I. On the spectrum of a Schroedinger operator perturbed by a fast oscillating potential // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2006. – Vol. 139 No. 1. – P. 6243–6322.
12. Fyodorov Yan V., Sommers H-J., Williams Ian. The density of stationary points in a high-dimensional random energy landscape and the onset of glassy behaviour // *JETP Letters*. – 2007. – Vol. 85. – P. 261–266.
13. Ali M. K. The quantum normal form and its eigenvalues // *J. Math. Phys.* – 1985. – Vol. 26, No. 10. – P. 2565–2572.
14. Banerjee K., Bhatnagar S.P., Choudhry V. and Kanwal S.S. // *Proc. R. Soc. Lond.* – 1978. – A360. – 575.

## Generalized coordinate-free triangular form: global controllability and feedback triangulation

S.S. Pavlichkov

*V.N. Karazin Kharkov National University*

We investigate a new class of nonlinear control systems of O.D.E. which are not feedback linearizable in general. Our class is a generalization of the well-known feedback linearizable systems (the Jakubczyk-Respondek-Hunt-Su-Meyer criterion), and moreover it is a generalization of the triangular (or pure-feedback) forms studied before. We describe our "generalized triangular form" in coordinate-free terms of certain nested integrable distributions. Furthermore, our conditions are the global analog of the Jakubczyk-Respondek-Hunt-Su-Meyer conditions. Therefore, the problem of the feedback equivalence of a system to our generalized triangular form is solved globally in the whole state space by the definition of our class. We apply a specific procedure, which can be called "backstepping" (following the terminology of the standard adaptive control theory for strict-feedback forms), and solve the problem of global controllability for our class. Our "backstepping algorithm", in turn, is based on the construction of a certain discontinuous feedback law. We propose to treat our class as a new canonical form which is a nonlinear global analog of the Brunovsky canonical form on the one hand, and which is a global and coordinate-free generalization of the triangular form on the other hand.

*2000 Mathematics Subject Classification* 93C10, 93B10, 93B11, 93B05, 93B52.

### 1. Introduction

One of the most important problems in the nonlinear control theory is the problem of classification of nonlinear control systems of O.D.E., i.e., that of finding the transformation of a nonlinear control system into its simplest canonical form along with finding such canonical forms by using some invariants which do not depend on the choice of local coordinates. Beginning with [6],[5], a complete theory of feedback linearization was created – [2], [3], [15], [18] etc. However, even some simple mechanical systems do not necessarily satisfy the Respondek-Jakubczyk-Hunt-Su-Meyer conditions; in addition, the concept of feedback linearization is

essentially local. This inspired many authors to further investigations and attempts to generalize the feedback linearization theory.

One possible approach, which is very popular and has various applications is the concept of differential flatness [4]. However, this notion is as local as the concept of feedback linearization, and moreover no general criterion of differential flatness like that of feedback linearization has been obtained.

Another way is to deal with the triangular, or pure-feedback form instead of the linear canonical forms [1, 2, 8, 11, 12, 16, 17, 19, 22, 23]. Triangular systems were introduced (Korobov) in [8] as early as 1973 (i.e., even before [6],[5]) as the first example of nonlinear systems which are feedback linearizable. Nevertheless a triangular system

$$\begin{cases} \dot{z}_i = f_i(z_1, \dots, z_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1; \\ \dot{z}_n = f_n(z_1, \dots, z_n, v); \end{cases}$$

is feedback linearizable only in the so-called "regular" case, i.e., when the conditions of regularity  $|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}| \neq 0, i=1, \dots, n$  hold; otherwise (the "singular case") the system does not satisfy the Respondek-Jakubczyk-Hunt-Su-Meyer conditions and, therefore, is not feedback linearizable. The singular case was investigated by Respondek in 1986 (see [17]), and by Celikovsky and Nijmeijer in 1996 (see [1]). In these works, the triangular systems are studied under the assumption that the set of the regular points is open and dense in the whole state space, however. This is not true even for some simple examples (see, for instance system (10) from the current paper).

That is why, we want to find and to investigate a generalization, of the triangular form, which contains all the previous triangular forms studied before (including the singular case) on the one hand, and which can be investigated globally (including the problems of controllability, stabilization, feedback equivalence, etc.) on the other hand. We offered such a generalization in [13] (see also [16]), and solved completely the problem of global robust controllability for this class (moreover, the controls constructed were actually closed-loop to some extent). However, the problem of global equivalence of a control system to a system from [13] remained open. In this work, we introduce a generalization of the triangular systems considered in [13], in global coordinate free terms. The main goal of the current paper is to prove that our generalized triangular form is globally controllable.

In the future, we want to investigate in more detail the relationship between the triangular form from [13] and the class from the current paper. As we can see from example 3.1, the class of "generalized triangular form" is wider than that from [13]. On the other hand, the construction of example 3.1 is based on triangular system (10). To what extent our generalized triangular form can be reduced to the triangular form in the singular case remains an open question.

### 2. Notation and Preliminaries

Let  $\mathcal{M}$  be a smooth manifold of dimension  $n$ , and  $x \mapsto v(x)$  be a smooth vector field on  $\mathcal{M}$ . In general,  $v(\cdot)$  can be defined on some open subset of  $\mathcal{M}$  only; next we denote this subset by  $\mathcal{D}_v$ . Let  $x^0$  be in  $\mathcal{M}$ . By  $I \ni t \mapsto \Phi_v^t(x^0)$  we denote the (maximal) integral curve  $t \mapsto x(t)$  of  $\dot{x} = v(x)$  with  $x(0) = x^0$ . Of course, for each  $t \in I$  the map  $x \mapsto \Phi_v^t(x)$  is (at least) a diffeomorphism of some neighborhood of  $x^0$  onto some neighborhood of  $\Phi_v^t(x^0)$  (and, if, for some  $s \in I$ ,  $\Phi_v^s(x)$  is well-defined for all  $x \in \mathcal{D}_v$ , then  $x \mapsto \Phi_v^s(x)$  is a global diffeomorphism of  $\mathcal{D}_v$  onto  $\mathcal{D}_v$ )

For every fixed  $t \in I$ , every  $x$  in a neighborhood of  $x^0$ , and every  $\xi \in T\mathcal{M}_x$  by  $(\Phi_v^t)_* \xi$  we denote the image of  $\xi$  under the tangent map of the diffeomorphism  $y \mapsto \Phi_v^t(y)$  at point  $x$ . (Actually,  $(\Phi_v^t)_* \xi$  depends on two arguments  $\xi$  and  $x$ , and we should write  $(\Phi_v^t)_*(x, \xi)$ , in general, but in our case it will be always clear at which point  $x \in \mathcal{M}$  we consider the tangent map, which is why we write  $(\Phi_v^t)_* \xi$  without any ambiguity.)

In addition, if  $V$  is a vector space, then, for  $A \subset V$ , and  $B \subset V$ , we denote by  $A + B$  the set  $\{x + y \mid x \in A, y \in B\}$  (in our situation  $V$  will be  $T\mathcal{M}_x$  for some smooth manifold  $\mathcal{M}$  and some  $x \in \mathcal{M}$ ).

If  $\Delta(\cdot)$  is a smooth integrable distribution on  $\mathcal{M}$ , (which means that the dimension  $\dim \Delta(x)$  equals  $k \leq n$  for some fixed  $k = 1, \dots, n$ , and for all  $x \in \mathcal{M}$ , and  $\Delta(\cdot)$  is involutive at each point  $x \in \mathcal{M}$ ) then, for each  $x^0 \in \mathcal{M}$ , we can consider its orbit (see [21]), or the maximal integral manifold  $\mathcal{M}_\Delta(x^0)$  defined as the set of all points  $y \in \mathcal{M}$  given by

$$y = (\Phi_{v_1}^{t_1} \circ \Phi_{v_2}^{t_2} \circ \dots \circ \Phi_{v_N}^{t_N})(x^0) \tag{1}$$

with arbitrary  $N \geq 1$ , arbitrary  $t_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , and arbitrary smooth vector fields  $v_i(\cdot)$  such that, for every  $i = 1, \dots, N$ , and every  $x \in \mathcal{D}_{v_i}$  we have  $v_i(x) \in \Delta(x)$ . Also we will use a more brief form of (1):

$$y = \Phi_v^T(x^0) \quad \text{with } T = (t_1, \dots, t_N), \quad v = (v_1, \dots, v_N). \tag{2}$$

By  $\Phi_v^{-T}(\cdot)$  we denote the inverse diffeomorphism, i.e.  $(\Phi_{v_N}^{-t_N} \circ \Phi_{v_{N-1}}^{-t_{N-1}} \circ \dots \circ \Phi_{v_1}^{-t_1})(\cdot)$

We write by definition  $v(\cdot) \in \Delta(\cdot)$  iff  $v(x) \in \Delta(x)$  for each  $x \in \mathcal{D}_v$ . Let us recall that, if  $v(\cdot)$ , and  $w(\cdot)$  are smooth vector fields defined on some open subset  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ , then by  $[v, w](\cdot)$  we denote their Lie bracket defined (in any coordinates) as  $[v, w](x) = \frac{\partial w}{\partial x} v - \frac{\partial v}{\partial x} w$ . Finally, for  $A \subset \mathcal{M}$ , we denote by  $\bar{A}$  the closure of  $A$  in  $\mathcal{M}$ .

### 3. Main Result

We consider a control system

$$\dot{x} = a(x) + \beta(x, u)b(x) \tag{3}$$

with states  $x \in \mathcal{M}$ , and controls  $u \in \mathbf{R}^1$ , where  $\mathcal{M}$  is a simply connected, smooth,  $n$ -dimensional manifold,  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$ , are smooth vector fields (of class  $C^{n+1}$  at

least) on  $\mathcal{M}$ , and  $\beta(\cdot, \cdot)$  is a smooth (of class  $C^{n+1}$ ) scalar function on  $\mathcal{M}$  of class  $C^\infty$ . Next we suppose that  $\mathcal{M} = \mathbf{R}^n$  just to make the arguments clearer, however our technique works for arbitrary simply connected manifold  $\mathcal{M}$ . We assume that  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$ , and  $\beta(\cdot, \cdot)$  satisfy the following conditions

(A) For each  $x \in \mathcal{M}$ , we have  $b(x) \neq 0$ , and  $\beta(x, \mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1$ . In other words, the set  $\Delta_0(x) := \{\beta(x, u)b(x) \mid u \in \mathbf{R}^1\}$  is a 1-dimensional subspace of  $T\mathcal{M}_x = \mathbf{R}^n$  for each  $x \in \mathcal{M}$ .

(Of course, the distribution  $x \mapsto \Delta_0(x)$  is integrable in the whole  $\mathcal{M}$ , and, for each  $x^0 \in \mathcal{M}$ , the corresponding maximal integral manifold of  $\Delta_0(\cdot)$  is the (maximal) trajectory  $t \mapsto \Phi_b^t(x^0)$ ).

(B) Let  $k$  be in  $\{1, \dots, n-1\}$ . Assume that the distribution  $\mathcal{M} \ni x \mapsto \Delta_{k-1}(x) \subset T\mathcal{M}_x = \mathbf{R}^n$  is already constructed: for  $k=1$ , see condition (A), for  $k \geq 1$ , we define  $\Delta_k(\cdot)$  by induction as below. Then:

(B1) We require that  $x \mapsto \Delta_{k-1}(x)$  is of rank  $k$  for every  $x \in \mathcal{M}$ , and is involutive at each  $x \in \mathcal{M}$ .

(B2) Given  $x^0 \in \mathcal{M}$ , by  $\Delta_k(x^0)$  denote the set

$$\Delta_k(x^0) := \Delta_{k-1}(x^0) + \{(\Phi_v^T)_* a(\Phi_v^{-T}(x^0)) - a(x^0) \mid \forall N \geq 1 \quad \forall T = (t_1, \dots, t_N)\}$$

$$\forall v(\cdot) = (v_1(\cdot), \dots, v_N(\cdot)) \text{ such that } v_i(x) \in \Delta_{k-1}(x) \text{ for all } x \in \mathcal{D}_{v_i}, i=1, \dots, N \} \quad (4)$$

We require that, for each  $x^0 \in \mathcal{M}$ , the set  $\Delta_k(x^0)$  is a  $(k+1)$ -dimensional subspace of  $T\mathcal{M}_{x^0} = \mathbf{R}^n$  and that the distribution  $x \mapsto \Delta_k(x)$  is involutive (for all  $k = 0, \dots, n-1$ , as we mentioned before)

We emphasize that, for each fixed  $x^0$ , we obtain  $\Delta_k(x^0)$  in (4) by taking all admissible  $v_i(\cdot)$  from  $\Delta_{k-1}$  (i.e., along the maximal integral manifold  $\mathcal{M}_{\Delta_{k-1}}(x^0)$  defined in (1)).

Let us remark that conditions (A), (B1), (B2) are global analog of the Jakubczyk-Respondek-Hunt-Su-Meyer the conditions from [5], [6].

If a smooth system  $\dot{x} = f(x, u)$  is locally feedback equivalent to the triangular form, then (see [9])  $f(\cdot, \cdot)$  have (locally!) the form (3):  $f(x, u) = a(x) + \beta(x, u)b(x)$  with some smooth vector fields  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$ , such that  $b(x) \neq 0$  and with some smooth scalar function  $\beta(\cdot, \cdot)$ , regardless of whether this triangular form satisfies the regularity conditions  $|\frac{\partial g_i}{\partial z_{i+1}}| \neq 0$ , or we deal with the singular case.

Furthermore, any triangular system

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u); & x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^1 \end{cases} \quad (5)$$

such that  $f_i$  are smooth, and  $f_i(x_1, \dots, x_i, \mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1$ , for all  $i = 1, \dots, n$  and all  $(x_1, \dots, x_i) \in \mathbf{R}^i$  (see [10, 13]) satisfies our conditions (A), (B1), (B2)

Conversely, assume that system (3) satisfies (A), (B1), (B2). Pick any  $x^0 \in \mathcal{M}$ , and let  $\zeta = \varphi(x) : U(x^0) \subset \mathcal{M} \rightarrow V(\varphi(x^0)) \subset \mathbf{R}^n$  ( $\zeta_i = \varphi_i(x)$ ,  $i=1, \dots, n$ ) be a diffeomorphism of a neighborhood  $U(x^0)$  of  $x^0$  onto a neighborhood  $V(\varphi(x^0))$  of  $\varphi(x^0)$ .

**Definition 3.1** We say that coordinates  $\zeta_i$  are **canonical** for system (3), or the map  $x \mapsto \zeta = \varphi(x)$  defines canonical coordinates for system (3) (or canonical coordinates for the corresponding sequence of nested regular integrable distributions  $\Delta_0(\cdot), \dots, \Delta_{n-1}(\cdot)$  in  $U(x^0)$ ), iff, for each  $k = 0, \dots, n-2$ , the set  $\varphi^{-1}(D_k)$  with

$$D_k := \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in V(\varphi(x^0)) \mid \zeta_i = \text{const}, i = 1, \dots, n-k-1\}$$

is an integral manifold of  $\Delta_k$  in  $U(x^0)$ .

In other words, coordinates  $y_i = \varphi_i(x)$   $i = 1, \dots, n$ , are canonical for system (3) in  $U(x^0)$  with small enough  $U(x^0)$ , iff

$$\Delta_k(x) = \{\xi \in T\mathcal{M}_x = \mathbf{R}^n \mid \langle \nabla \varphi_i(x), \xi \rangle = 0, i = 1, \dots, n-k-1\}, k = 0, 1, \dots, n-2.$$

**Remark 3.1** It is easy to prove that, if coordinates  $\zeta_i = \varphi_i(x)$  are canonical for (3) in a neighborhood of some  $x^0 \in \mathcal{M}$ , then, (**locally!**) in some neighborhood of  $x^0$ , this change of coordinates  $\zeta_i = \varphi_i(x)$  brings the dynamics of (3) to the following triangular form

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n-2} \\ \dot{\zeta}_{n-1} \\ \dot{\zeta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \vdots \\ f_{n-2}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \\ f_{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ f_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \end{pmatrix} + \tilde{\beta}(\zeta, u) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \end{pmatrix} \quad (6)$$

where  $g_n(\zeta) \neq 0$  in some neighborhood of  $\varphi(x^0)$  (but, of course the conditions of regularity  $|\frac{\partial f_i}{\partial \zeta_{i+1}}| \neq 0$  do not hold, in general). However, this is true only locally, as we can learn from the following example.

**Example 3.1** Consider the vector fields  $v_1(\cdot)$  and  $v_2(\cdot)$  in  $\mathbf{R}^2$  given by  $v_1(x) = (\cos x_1, -\sin x_1)^T$ , and  $v_2(x) = (\sin x_1, \cos x_1)^T$ . Put  $x_N^0 = (\pi N, 0) \in \mathbf{R}^2$  for all  $N \in \mathbf{Z}$ . For each  $N \in \mathbf{Z}$ , the map given by  $\mathbf{R}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto (\Phi_{v_2}^{z_2} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_N^0)$  is a diffeomorphism of  $\mathbf{R}^2$  onto  $]\pi(N-1), \pi(N+1)[ \times \mathbf{R}$  (we do not solve the corresponding differential equations explicitly just because the solution can not be written out as a combination of standard functions). Fix any  $z_1 > 0$ . Denote by  $A(z_1) \in \mathbf{R}^2$  the intersection of the trajectory  $z_2 \mapsto (\Phi_{v_2}^{z_2} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_0^0)$  with  $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbf{R}$ ; then from the symmetry of the curve  $z_2 \mapsto (\Phi_{v_2}^{z_2} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_0^0)$  w.r.t.  $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbf{R}$  we obtain that there is a unique solution  $(\tilde{z}_2(z_1), \tilde{z}_1(z_1))$  of  $(\Phi_{v_2}^{\tilde{z}_2(z_1)} \circ \Phi_{v_1}^{\tilde{z}_1(z_1)})(x_0^0) = \Phi_{v_1}^{\tilde{z}_1(z_1)}(x_1^0)$  w.r.t.  $(\tilde{z}_2(z_1), \tilde{z}_1(z_1))$ ;

$$\tilde{z}_1(z_1) = z_1; \quad A(z_1) = \left( \Phi_{v_2}^{\frac{\tilde{z}_2(z_1)}{2}} \circ \Phi_{v_1}^{z_1} \right) (x_0^0); \quad (7)$$

and there is a unique solution  $(z_2^*(z_1), z_1^*(z_1))$  of the nonlinear equation  $(\Phi_{v_2}^{z_2^*(z_1)} \circ \Phi_{v_1}^{z_1^*(z_1)})(x_1^0) = \Phi_{v_1}^{z_1^*(z_1)}(x_0^0)$  w.r.t.  $(z_2^*(z_1), z_1^*(z_1))$ , and

$$z_1^*(z_1) = z_1; \quad z_2^*(z_1) = -\tilde{z}_1(z_1); \quad A(z_1) = \left( \Phi_{v_2}^{\frac{z_2^*(z_1)}{2}} \circ \Phi_{v_1}^{z_1} \right) (x_1^0); \quad (8)$$

(in addition, the image of the curve  $\mathbf{R} \ni z_2 \mapsto (\Phi_{v_2}^{z_2} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_1^0)$  coincides with the image of  $\mathbf{R} \ni z_2 \mapsto (\Phi_{v_2}^{z_2} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_0^0)$ ).

Similarly, for any fixed  $z_1 < 0$ , there is a unique solution  $(\hat{z}_2(z_1), \hat{z}_1(z_1))$  of the equation  $(\Phi_{v_2}^{\hat{z}_2(z_1)} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_0^0) = \Phi_{v_1}^{\hat{z}_1(z_1)}(x_{-1}^0)$  w.r.t.  $(\hat{z}_2, \hat{z}_1)$  and

$$\hat{z}_1(z_1) = z_1; \quad \hat{z}_2(z_1) = \tilde{z}_2(-z_1) \quad (9)$$

(Of course, for  $z_1 < 0$ , and for the left half-plane, we could write the equalities which are similar to (8), but we omit that).

By definition, we put

$$\psi(z_1) = \begin{cases} \hat{z}_2(z_1) & \text{if } z_1 < 0 \\ +\infty & \text{if } z_1 = 0 \\ \tilde{z}_2(z_1) & \text{if } z_1 > 0 \end{cases} : \mathbf{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

and consider the triangular system

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2), \quad \dot{z}_2 = u \quad (10)$$

with states  $(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$  and controls  $u \in \mathbf{R}^1$ , where  $f_1(z_1, z_2)$  is given by

$$f_1(z_1, z_2) = \begin{cases} z_2^5 \sin z_2 & \text{if } z_2 \leq 0 \\ 0 & \text{if } 0 < z_2 \leq \psi(z_1) \\ (z_2 - \psi(z_1))^5 \sin(z_2 - \psi(z_1)) & \text{if } z_2 > \psi(z_1) \end{cases}$$

for all  $(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$  (if  $z_1 = 0$ , then  $\psi(z_1) = +\infty$ , and  $f_1(0, z_2) = 0$  for all  $z_2 \geq 0$ , by definition). By definition, put

$$f(z) := [f_1(z_1, z_2), 0]^T, \quad g(z) := [0, 1]^T,$$

$$\phi_N(z) = (\Phi_{v_2}^{z_2} \circ \Phi_{v_1}^{z_1})(x_N^0), \quad \text{for all } z = (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2,$$

and, in  $]-\pi, \pi[ \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}_x^2$ , define the vector fields  $A(\cdot)$  and  $B(\cdot)$  by  $A = (\phi_0)_* f$ ,  $B = (\phi_0)_* g$ . Then the system

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u \quad (11)$$

is well-defined in  $]-\pi, \pi[ \times \mathbf{R}$ , and satisfies conditions (A), (B1), (B2). Finally using the maps  $\phi_1(\cdot)$ ,  $\phi_{-1}(\cdot)$ , and the above-mentioned symmetry (see (7), (8), (9)) we can easily extend vector fields  $A(\cdot)$  and  $B(\cdot)$  onto  $]-2\pi, +2\pi[ \times \mathbf{R}$ , then onto  $]-3\pi, +3\pi[ \times \mathbf{R}$ , and eventually onto  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  so that (A), (B1), (B2) hold in  $\mathbf{R}^2$ . Of course, system (11) is not globally feedback equivalent to a triangular system of form (6) in the whole  $\mathbf{R}^2$  (for instance, because it is globally equivalent to (10) in  $]-\pi, \pi[ \times \mathbf{R}^2$ ). On the other hand, system (11) satisfies conditions (A), (B1), (B2) in the whole  $\mathbf{R}^2$  by the construction. Our main result is as follows.

**Theorem 3.1** Assume that vector fields  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  and function  $\beta(\cdot, \cdot)$  are of class  $C^{n+1}$ , and satisfy conditions (A), (B1), (B2). Then system (3) is globally controllable (in the whole  $\mathcal{M}$ ) in any time  $[t_0, T]$ .

The goal of this paper is to prove theorem 3.1.

### 4. The reduction of the main result to a "backstepping" procedure

As we see from example 3.1, system (3) is not globally feedback equivalent to a system from [13] in general, which is why the technique developed in [16] and in [12],[13] should be at least revised essentially. However, if we want to follow this pattern, we must first pick a point  $(x^*, u^*) \in \mathcal{M} \times \mathbf{R}^1$  around which system (3) is regular, and (locally!) feedback linearizable. Using conditions (A), and (B), we easily get the existence of a point  $x^* \in \mathcal{M}$  such that

$$\{b(x), [a, b](x), \dots, (ad_a^{i-1}b)(x)\} \text{ is a basis of } \Delta_{i-1}(x) \text{ for all } x \in W(x^*), 1 \leq i \leq n \tag{12}$$

for some neighborhood  $W(x^*)$  of  $x^*$  in  $\mathcal{M}$ .

Pick any  $t_1 \in ]t_0, T[$ . In order to prove theorem 3.1, it suffices to show that we can steer any initial state  $x^0$  into  $x^*$  in time  $J := [t_0, t_1]$ , and that we can steer  $x^*$  into any terminal state  $x^T$  in time  $I := [t_1, T]$  w.r.t.(3). Next, we prove the second statement only, the proof of the first one being similar. This statement, in turn, follows from the following theorem 4.1, which can be considered as a certain "backstepping algorithm".

**Theorem 4.1** *Let  $p$  be in  $\{1, \dots, n-1\}$ . Assume that for every  $x^T \in \mathcal{M}$ , there exists a curve  $t \mapsto z(t)$  of class  $C^1(I; \mathcal{M})$ , and there exists a map  $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x)) \in \mathbf{R}^n$  of class  $C^1$  defined in some neighborhood  $E \subset I \times \mathcal{M}$  of the curve  $\{(t, z(t)) \in I \times \mathcal{M} \mid t \in I\}$  such that:*

1) *for each fixed  $t \in I$ , the map  $x \mapsto (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$  defines canonical coordinates for system (3) in the corresponding neighborhood  $E_t := \{x \in \mathcal{M} \mid (t, x) \in E\}$  of  $z(t) \in \mathcal{M}$ .*

2)  *$z(\cdot)$ , and  $\varphi(\cdot, \cdot)$  satisfy the equalities*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i(t, z(t))}{\partial x} \dot{z}(t) &= \frac{\partial \varphi_i(t, z(t))}{\partial x} a(z(t)), & i = 1, \dots, p-1, t \in I; \\ \frac{d\varphi_i(t, z(t))}{dt} &= 0, & i = 1, \dots, n, t \in I; \end{aligned} \tag{13}$$

(For  $p=1$ , the first group of equalities is empty by definition, i.e., (13) has the form  $\frac{d\varphi_i(t, z(t))}{dt} = 0, i = 1, \dots, n, t \in I$ )

3)  *$z(t_1) = x^*, z(T) = x^T$ , and  $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t_1, x^*) \dot{z}(t_1) = \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t_1, x^*) a(x^*)$ .*

Then, for every  $x^T \in \mathcal{M}$ , there exist a curve  $t \mapsto y(t)$  of class  $C^1(I, \mathcal{M})$ , and a map  $(t, x) \mapsto \psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x)) \in \mathbf{R}^n$  of class  $C^1$  defined in some neighborhood  $G \subset I \times \mathcal{M}$  of the curve  $\{(t, y(t)) \in I \times \mathcal{M} \mid t \in I\}$  such that

4) *For each fixed  $t \in I$ , the map  $x \mapsto (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x))$  defines canonical coordinates for system (3) in the neighborhood  $G_t := \{x \in \mathcal{M} \mid (t, x) \in G\}$  of  $y(t) \in \mathcal{M}$ .*

5)  *$y(\cdot)$  and  $\psi(\cdot, \cdot)$  satisfy the equalities*

$$\frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} a(y(t)), \quad i = 1, \dots, p, t \in I;$$

$$\frac{d\psi_i(t, y(t))}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in I; \quad (14)$$

6)  $y(t_1) = x^*$ ,  $y(T) = x^T$ , and  $\frac{\partial \psi_{p+1}}{\partial x}(t_1, x^*) \dot{y}(t_1) = \frac{\partial \psi_{p+1}}{\partial x}(t_1, x^*) a(x^*)$

Let us show that theorem 4.1 implies theorem 3.1. Indeed, for  $p = 1$ , the construction of  $z(\cdot)$ , and  $\varphi(\cdot, \cdot)$  such that conditions 1), 2), 3) of theorem 4.1 hold is straightforward. Let  $\zeta = \tilde{\varphi}(x)$  ( $\zeta_i = \tilde{\varphi}_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) be any canonical coordinates for system (3) in a neighborhood of  $x^*$ , and let (6) be the dynamics of (3) in the coordinates  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ . Given an arbitrary  $x^T \in \mathcal{M}$ , pick any  $z(\cdot) \in C^1(I; \mathcal{M})$  such that  $z(t_1) = x^*$ ,  $z(T) = x^T$ . Since the definition of the Lie derivative does not depend on local coordinates, the condition  $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x}(t_1, x^*) \dot{z}(t_1) = \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x}(t_1, x^*) a(x^*)$  is equivalent to the equality  $\dot{\zeta}_1(t_1) = f_1(\tilde{\zeta}_1^*, \tilde{\zeta}_2^*)$  (where  $\zeta(t) = \tilde{\varphi}(z(t))$ ,  $\zeta_i(t) := \tilde{\varphi}_i(z(t))$ ,  $\tilde{\zeta}_i^* = \tilde{\varphi}_i(x^*)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), and does not depend on the choice of canonical coordinates around  $x^*$ . Therefore, we can easily choose  $z(\cdot) \in C^1(I; \mathcal{M})$  such that the condition  $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x}(t_1, x^*) \dot{z}(t_1) = \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x}(t_1, x^*) a(x^*)$  holds along with the equalities  $z(t_1) = x^*$ ,  $z(T) = x^T$  from the very beginning. Then  $z(\cdot)$  satisfies condition 3) with  $p=1$  for every function  $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) \in \mathbf{R}^n$  defined in a neighborhood of  $\{(t, z(t)) \mid t \in I\}$ , and satisfying conditions 1), 2) of theorem 4.1. In order to construct  $\varphi(\cdot, \cdot)$ , consider vector fields  $v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot)$  on  $\mathcal{M}$  such that  $\Delta_i(x) = \text{span}\{v_{n-i}(x), v_{n-i+1}(x), \dots, v_n(x)\}$  for all  $x \in \mathcal{M}$ ,  $i=0, \dots, n-1$ . (Since  $\mathcal{M}$  is simply connected, it is orientable as well as  $\Delta_i(\cdot)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , and such vector fields do exist). Then, for each  $\xi \in \mathcal{M}$ , the map  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto \left( \Phi_{v_n}^{t_n} \circ \Phi_{v_{n-1}}^{t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_{v_1}^{t_1} \right) (\xi)$  is a diffeomorphism of some (small) neighborhoods  $\mathcal{B}_\xi(0)$  and  $U(\xi)$  of  $0 \in \mathbf{R}^n$  and  $\xi \in \mathcal{M}$  respectively. Let  $x \mapsto \phi(\xi, x)$  ( $t_i = \phi_i(\xi, x)$ ,  $i=1, \dots, n$ ) be the inverse diffeomorphism of  $U(\xi)$  onto  $\mathcal{B}_\xi(0)$ . For any fixed  $(t_1^0, \dots, t_n^0)$ , the map  $(t_{i+1}, \dots, t_n) \mapsto \left( \Phi_{v_n}^{t_n} \circ \Phi_{v_{n-1}}^{t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_{v_{i+1}}^{t_{i+1}} \circ \Phi_{v_i}^{t_i^0} \circ \dots \circ \Phi_{v_1}^{t_1^0} \right) (\xi)$  defines the integral manifold of the distribution  $\Delta_{n-i-1}(\cdot)$  in  $U(\xi)$ ,  $i=1, \dots, n-1$ . Therefore, for every fixed  $\xi \in \mathcal{M}$ , the map  $x \mapsto \phi(\xi, x)$  ( $t_i = \phi_i(\xi, x)$ ,  $i=1, \dots, n$ ) defines canonical coordinates  $(t_1, \dots, t_n)$  for system (3) in some neighborhood  $U(\xi)$  of  $\xi$ . Taking into account that  $\phi(\xi, \xi) = 0$  for all  $x \in \mathcal{M}$ , we obtain that the map  $x \mapsto \varphi(t, x)$  defined by  $\varphi(t, x) = \phi(z(t), x)$  in some neighborhood of  $\{(t, z(t)) \mid t \in I\}$  and the curve  $z(\cdot) \in C^1(I; \mathcal{M})$  satisfy conditions 1), 2), 3) of theorem 4.1 with  $p=1$ .

Then, using theorem 4.1, and induction over  $p = 1, 2, \dots, n-1$ , we get the existence of a curve  $y(\cdot) \in C^1(I; \mathcal{M})$  and a map  $x \mapsto \psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x)) \in \mathbf{R}^n$  of class  $C^1$  in a neighborhood  $G \subset I \times \mathcal{M}$  of  $\{(t, y(t)) \mid t \in I\}$  such that conditions 4), 5), 6) of theorem 4.1 hold with  $p=n-1$ , which implies, in particular that  $y(t_1) = x^*$ ,  $y(T) = x^T$ , and

$$\frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} a(y(t)), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t \in I; \quad (15)$$

Since  $(\psi_1(t, \cdot), \dots, \psi_n(t, \cdot))$  are canonical coordinates in some neighborhood of  $y(t)$

for each  $t \in I$ , we obtain from condition (A):

$$\frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} b(y(t)) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \psi_n(t, y(t))}{\partial x} b(y(t)) \neq 0, \quad \text{for all } t \in I \tag{16}$$

Therefore, (15) implies that

$$\frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} (a(y(t)) + \beta(y(t), u(t))b(y(t))), \quad t \in I$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad \text{for each } u(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^1)$$

Then using a modification of the well-known Filippov lemma, condition (A), and (16) (a similar argument can be found in [10]), we get the existence of  $u(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^1)$  such that

$$\frac{\partial \psi_n(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi_n(t, y(t))}{\partial x} (a(y(t)) + \beta(y(t), u(t))b(y(t))), \quad \text{a. e. on } I,$$

which yields

$$\frac{\partial \psi(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi(t, y(t))}{\partial x} (a(y(t)) + \beta(y(t), u(t))b(y(t))), \quad \text{a. e. on } I$$

Since the Jakoby matrix  $\frac{\partial \psi(t, y(t))}{\partial x}$  is invertible for every  $t \in I$ , the last equality is equivalent to

$$\dot{y}(t) = a(y(t)) + \beta(y(t), u(t))b(y(t)), \quad \text{a. e. on } I.$$

Therefore,  $u(\cdot)$  steers  $x^*$  into  $x^T$  in time  $I = [t_1, T]$  w.r.t (3). The proof of the fact that  $x^0$  can be steered into  $x^*$  in time  $J = [t_0, t_1]$  is similar. Thus our main goal is to prove theorem 4.1.

### 5. Proof of theorem 4.1

Next we always treat  $\mathcal{M}$  as  $\mathbf{R}^n$ , and always write  $\mathbf{R}^n$  instead of  $\mathcal{M}$  just to simplify the notation, and to make the arguments clearer. For each  $\varepsilon > 0$ , each  $\zeta \in \mathbf{R}^p$ , and each  $x \in \mathbf{R}^n$ , we denote by  $B_\varepsilon(\zeta)$ , and  $\Omega_\varepsilon(x)$  the open balls in  $\mathbf{R}^p$  and in  $\mathbf{R}^n$  respectively given by  $B_\varepsilon(\zeta) := \{\bar{\zeta} \in \mathbf{R}^p \mid |\bar{\zeta} - \zeta| < \varepsilon\}$ ;  $\Omega_\varepsilon(x) := \{\bar{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\bar{x} - x| < \varepsilon\}$ , where  $|\cdot|$  is the standard norm generated by the standard scalar products of  $\mathbf{R}^p$  and  $\mathbf{R}^n$  respectively.

Take an arbitrary  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ , and an arbitrary  $x^T \in \mathbf{R}^n$ . Assume that a curve  $z(\cdot) \in C^1(I; \mathbf{R}^n)$ , and a map  $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x)) \in \mathbf{R}^n$ , which is of class  $C^1$  in some neighborhood  $E \subset I \times \mathbf{R}^n$  of the set  $\{(t, z(t)) \in I \times \mathbf{R}^n \mid t \in I\}$ , satisfy conditions 1), 2), 3) of theorem 4.1. Let  $\zeta = \phi(x)$  ( $\zeta_i = \phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) be some fixed canonical coordinates for system (3) in some small neighborhood  $U(x^*) \subset W(x^*)$  of  $x^*$ , where  $W(x^*)$  is defined in (12) (for

instance, we may put  $\phi(x) := \varphi(t_1, x)$  - see conditions 1), 3) of theorem 4.1) and let (6) be the dynamics of (3) in the local coordinates  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  (in the neighborhood  $U(x^*)$ ). Choose  $\bar{\sigma} > 0$  ( $\bar{\sigma} < T - t_1$ ) such that  $z(t) \in U(x^*)$  for all  $t \in [t_1, t_1 + \bar{\sigma}]$ , and put by definition  $D := \phi(U(x^*))$ ;  $\zeta^* := \phi(x^*)$ ;  $\zeta_i^* := \phi_i(x^*)$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $\zeta_i^*(t) := \phi(z(t))$ ,  $\zeta_i^*(t) := \phi_i(z(t))$ ,  $i=1, \dots, n$ , for all  $t \in [t_1, t_1 + \bar{\sigma}]$ .

Without loss of generality, we assume that

$$D = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{R}^n \mid |\zeta_k| < \sigma_k, k = 1, \dots, n\}$$

with some  $\sigma_k > 0$ ,  $k=1, \dots, n$ , and that every integral manifold of each  $\Delta_i(\cdot)$  ( $i=0, \dots, n-2$ ) in  $D = \phi(U(x^*))$  is equal to

$$\{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{R}^n \mid \zeta_k = \zeta_k^0, k = 1, \dots, n-i-1; |\zeta_k| < \sigma_k, k = n-i, \dots, n\}$$

with some  $\zeta_k^0$ ,  $k=1, \dots, n-i-1$  such that  $|\zeta_k^0| < \sigma_k$ .

By the construction (see conditions 2), and 3) of theorem 4.1), we have

$$\dot{\zeta}_i^*(t) = f_i(\zeta_1^*(t), \dots, \zeta_{i+1}^*(t)), \quad i = 1, \dots, p-1; \quad t \in [t_1, t_1 + \bar{\sigma}]$$

$$\zeta_i^*(t_1) = \zeta_i^*, \quad i = 1, \dots, n; \quad \dot{\zeta}_p^*(t_1) = f_p(\zeta_1^*, \dots, \zeta_p^*, \zeta_{p+1}^*).$$

In addition (see (12)),

$$\frac{\partial f_p}{\partial \zeta_{p+1}}(\zeta_1^*, \dots, \zeta_p^*, \zeta_{p+1}^*) \neq 0.$$

Therefore, there is  $\sigma \in ]0, \bar{\sigma}[$  and  $w(\cdot) \in C([t_1, t_1 + \sigma]; \mathbf{R}^1)$  such that  $w(t_1) = \zeta_{p+1}^*$  and

$$|w(t)| < \sigma_{p+1}, \text{ i.e., } (\zeta_1^*(t), \dots, \zeta_p^*(t), w(t), \zeta_{p+2}^*(t), \dots, \zeta_n^*(t)) \in D \text{ for all } t \in [t_1, t_1 + \sigma] \quad (17)$$

and

$$\dot{\zeta}_p^*(t) = f_p(\zeta_1^*(t), \dots, \zeta_p^*(t), w(t)), \quad t \in [t_1, t_1 + \sigma] \quad (18)$$

For any  $\tilde{\zeta}_{p+1}(\cdot) \in C([t_1, t_1 + \sigma]; \mathbf{R}^1)$  such that

$$|\tilde{\zeta}_{p+1}(t)| < \sigma_{p+1}, \text{ i.e., } \{(\zeta_1, \dots, \zeta_p, \tilde{\zeta}_{p+1}(t), \zeta_{p+2}^*(t), \dots, \zeta_n^*(t)) \mid \zeta_i \in \mathbf{R}^1, i=1, \dots, p\} \cap D \neq \emptyset$$

for all  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ , we denote by  $t \mapsto \eta(t, \tilde{\zeta}_{p+1}(\cdot))$  the (maximal) trajectory of the  $p$ -dimensional control system

$$\dot{\zeta}_i(t) = f_i(\zeta_1(t), \dots, \zeta_{i+1}(t)), \quad i = 1, \dots, p; \quad t \in [t_1, t_1 + \sigma] \quad (19)$$

(with states  $(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ ) with the control  $\zeta_{p+1}(\cdot) = \tilde{\zeta}_{p+1}(\cdot)$ , and with the initial condition  $\zeta_i(t_1) = \zeta_i^*$ ,  $i=1, \dots, p$ .

Since  $|\frac{\partial f_i}{\partial \zeta_{i+1}}| \neq 0$ ,  $i=1, \dots, n$  in  $D$  (see (12)), the linearization of (19) around  $(\zeta_1^*(\cdot), \dots, \zeta_p^*(\cdot), w(\cdot))$  given by

$$\dot{\chi}_i(t) = \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}(\zeta_1^*(t), \dots, \zeta_{i+1}^*(t)) \chi_j(t), \quad i = 1, \dots, p; \quad t \in [t_1, t_1 + \sigma] \quad (20)$$

4.1), with states  $(\chi_1, \dots, \chi_p) \in \mathbf{R}^p$  and controls  $\chi_{p+1} \in \mathbf{R}^1$  is completely controllable; therefore there exist  $p$  controls  $w_i(\cdot) \in C^1([t_1, t_1 + \sigma]; \mathbf{R}^1)$ ,  $i=1, \dots, p$  such that

(C<sub>1</sub>)  $\dot{w}_i(t_1) = w_i(t_1) = w_i(t_1 + \sigma) = \dot{w}_i(t_1 + \sigma) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ;

(C<sub>2</sub>) Each control  $w_i(\cdot)$  steers  $0 \in \mathbf{R}^p$  into  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^p$  (the  $i$ -th unit vector of the standard basis in  $\mathbf{R}^p$ ) in time  $I$  w.r.t. (20).

For every  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ , we define  $w_\lambda(\cdot)$  by  $w_\lambda(t) := w(t) + \sum_{j=1}^p \lambda_j w_j(t)$ ,  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ . Then  $w_\lambda(\cdot)|_{\lambda=0} = w(\cdot)$ ;  $\eta(t, w(\cdot)) = (\zeta_1^*(t), \dots, \zeta_p^*(t))$ , for all  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ , and, therefore, the trajectory  $t \mapsto \eta(t, w_\lambda(\cdot))$  is well-defined on  $[t_1, t_1 + \sigma]$  for all  $\lambda$  from some small neighborhood of  $0 \in \mathbf{R}^p$ ;  $(\eta(t, w_\lambda(\cdot)), w_\lambda(t), \zeta_{p+2}^*(t), \dots, \zeta_n^*(t)) \in D$  for all  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ , and all  $\lambda$  in this neighborhood of  $0 \in \mathbf{R}^p$ ; and the map  $\lambda \mapsto F(\lambda)$  given by  $F(\lambda) := \eta(t_1 + \sigma, w_\lambda(\cdot))$  is well-defined in this neighborhood of  $\lambda = 0 \in \mathbf{R}^p$ .

Furthermore, from (C<sub>2</sub>), we get:  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^p$  (the  $i$ -th unit vector of the standard canonical basis in  $\mathbf{R}^p$ ); then, there is  $\varepsilon > 0$  such that the map  $\lambda \mapsto F(\lambda)$  is a well-defined diffeomorphism of  $B_\varepsilon(0)$  onto some open neighborhood of  $\eta(t_1 + \sigma, w(\cdot)) = (\zeta_1^*(t_1 + \sigma), \dots, \zeta_p^*(t_1 + \sigma))$ . Then there is  $\varepsilon_1 > 0$  such that

$$\overline{B_{\varepsilon_1}(\eta(t_1 + \sigma, w(\cdot)))} \subset F(B_\varepsilon(0)) \quad \text{and} \quad \overline{\Omega_{\varepsilon_1}(\zeta^*(t_1 + \sigma))} \subset D.$$

Without loss of generality, we may assume that  $\varepsilon > 0$ , and  $\varepsilon_1 > 0$  are small enough and satisfy the condition:

$$|\alpha \zeta_{p+1}^*(t) + (1 - \alpha)w_\lambda(t) + \xi_{p+1}| < \sigma_{p+1}, \quad \text{whenever } |\lambda| < \varepsilon, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$|\xi_{p+1}| < \varepsilon_1, \quad t \in [t_1, t_1 + \sigma] \tag{21}$$

Fix any  $\varepsilon_2 > 0$  such that

$$\overline{\Omega_{\varepsilon_2}(z(t))} \subset E_t \quad \text{for all } t \in I, \tag{22}$$

where  $E_t$  was defined in condition 1) of theorem 4.1, and

$$\phi(\overline{\Omega_{\varepsilon_2}(z(t_1 + \sigma))}) \subset \Omega_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(\zeta^*(t_1 + \sigma)) \tag{23}$$

**Lemma 5.1** *There are a curve  $y(\cdot) \in C^1([t_1 + \sigma, T], \mathbf{R}^n)$ , and a map  $(t, x) \mapsto \psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x)) \in \mathbf{R}^n$  of class  $C^1$  defined in some neighborhood  $\tilde{G} \subset [t_1 + \sigma, T] \times \mathbf{R}^n$  of the curve  $\{(t, x) \in [t_1 + \sigma, T] \times \mathbf{R}^n \mid x = y(t), t \in [t_1 + \sigma, T]\}$  such that*

1) *For each fixed  $t \in [t_1 + \sigma, T]$ , the map  $x \mapsto (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x))$  defines canonical coordinates for system (3) in the neighborhood  $\tilde{G}_t := \{x \in \mathbf{R}^n \mid (t, x) \in \tilde{G}\}$  of  $y(t)$ .*

2)  *$y(\cdot)$  and  $\psi(\cdot, \cdot)$  satisfy the equalities*

$$\frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi_i(t, y(t))}{\partial x} a(y(t)), \quad i = 1, \dots, p, \quad t \in [t_1 + \sigma, T];$$

$$\frac{d\psi_i(t, y(t))}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [t_1 + \sigma, T];$$

$$3) y(T) = x^T, \text{ and } y(t_1 + \sigma) \in \overline{\Omega_{\varepsilon_2}(z(t_1 + \sigma))}.$$

The proof of lemma 5.1 is given below in section 6. (Of course, it is based on condition (B), and on definition 3.1).

Let us assume that lemma 5.1 is already proved. This allows us to complete the proof of theorem 4.1 as follows. Put

$$\hat{\zeta}(t) := \phi(y(t)), \quad \hat{\zeta}_i(t) := \phi_i(y(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [t_1 + \sigma, t_1 + \hat{\sigma}], \quad (24)$$

where  $\hat{\sigma} \in ]\sigma, \bar{\sigma}]$  is such that  $y(t) \in U(x^*)$ , whenever  $t \in [t_1 + \sigma, t_1 + \hat{\sigma}]$ . Then, we obtain from (23) and from condition 3) of lemma 5.1

$$\hat{\zeta}(t_1 + \sigma) \in \Omega_{\frac{\varepsilon_2}{2}}(\zeta^*(t_1 + \sigma)). \quad (25)$$

Using (21), and the standard argument based on the Gronwall-Bellmann lemma and on the Brouwer fixed point theorem - see [14] (and [12], [13] for our case) we get the existence of a control  $\hat{w}(\cdot)$  of class  $C^1([t_1, t_1 + \sigma]; \mathbf{R}^1)$ , ( $|\hat{w}(t)| < \sigma_{p+1}$ ,  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ , whereas the norm  $\|\hat{w}(\cdot) - w(\cdot)\|_{L^1([t_1, t_1 + \sigma]; \mathbf{R}^1)}$  should be small enough) such that

$$(C_3) \quad \hat{w}(t_1) = \zeta_{p+1}^*, \quad \frac{d\hat{w}}{dt}(t_1) = f_{p+1}(\zeta_1^*, \dots, \zeta_p^*, \zeta_{p+1}^*, \zeta_{p+2}^*), \quad \hat{w}(t_1 + \sigma) = \hat{\zeta}_{p+1}(t_1 + \sigma), \\ \frac{d\hat{w}}{dt}(t_1 + \sigma) = \frac{d\hat{\zeta}_{p+1}}{dt}(t_1 + \sigma).$$

(C<sub>4</sub>) The map  $\lambda \mapsto \hat{F}(\lambda) := \eta(t_1 + \sigma, \hat{w}(\cdot) + \sum_{j=1}^p \lambda_j w_j(\cdot))$  is well-defined for all  $\lambda \in B_\varepsilon(0)$ , and  $\overline{B_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(\eta(t_1 + \sigma, w(\cdot)))} \subset \hat{F}(B_\varepsilon(0))$ .

Then we obtain from condition (C<sub>4</sub>) and from (25) (see [12], [13]) that there exists  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$  in  $B_\varepsilon(0)$  such that  $(\hat{\zeta}_1(t_1 + \sigma), \dots, \hat{\zeta}_p(t_1 + \sigma)) = \eta(t_1 + \sigma, \hat{w}_{\lambda^*}(\cdot))$  where  $\hat{w}_{\lambda^*}(\cdot)$  is given by  $\hat{w}_{\lambda^*}(t) := \hat{w}(t) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* w_j(t)$ ,  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ . Let us define  $y(t)$ , and  $\bar{\zeta}(t) := \phi(y(t))$  on  $[t_1, t_1 + \sigma]$  as follows: by definition, put

$$(\bar{\zeta}_1(t), \dots, \bar{\zeta}_p(t)) := \eta(t, \hat{w}_{\lambda^*}(\cdot)), \quad \bar{\zeta}_{p+1}(t) := \hat{w}_{\lambda^*}(t), \quad t \in [t_1, t_1 + \sigma]; \quad (26)$$

in addition, let  $\bar{\zeta}_{p+2}(\cdot), \dots, \bar{\zeta}_n(\cdot)$  be any functions from  $C^1([t_1, t_1 + \sigma]; \mathbf{R}^1)$  such that

$$\bar{\zeta}_i(t_1 + \sigma) = \hat{\zeta}_i(t_1 + \sigma), \quad \frac{d\bar{\zeta}_i}{dt}(t_1 + \sigma) = \frac{d\hat{\zeta}_i}{dt}(t_1 + \sigma), \quad i = p+2, \dots, n, \quad (27)$$

$$\bar{\zeta}_i(t_1) = \zeta_i^*, \quad i = p+2, \dots, n, \quad (28)$$

and such that

$$|\bar{\zeta}_i(t)| < \sigma_i, \quad i = p+2, \dots, n, \text{ i.e., } (\bar{\zeta}_1(t), \dots, \bar{\zeta}_n(t)) \in D \text{ for all } t \in [t_1, t_1 + \sigma], \quad (29)$$

and then put:

$$\bar{\zeta}(t) := (\bar{\zeta}_1(t), \dots, \bar{\zeta}_n(t)), \quad y(t) := \phi^{-1}(\bar{\zeta}(t)), \quad \text{for all } t \in [t_1, t_1 + \sigma] \quad (30)$$

Thus, we have constructed  $y(\cdot)$  of class  $C^1(I; \mathbf{R}^1)$  such that conditions 4), 5), 6) of theorem 4.1 hold with every canonical coordinate functions  $\psi_j(t, y)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Indeed, the inclusion  $y(\cdot) \in C^1(I; \mathbf{R}^n)$  follows from (24), from (30), and from (27), (26) (in addition, we take into account that

$$\bar{\zeta}_{p+1}(t_1 + \sigma) = \hat{\zeta}_{p+1}(t_1 + \sigma), \quad \frac{d\bar{\zeta}_{p+1}}{dt}(t_1 + \sigma) = \frac{d\hat{\zeta}_{p+1}}{dt}(t_1 + \sigma)$$

by (C<sub>1</sub>), (C<sub>3</sub>), and by (26), and that

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\zeta}_i}{dt}(t_1 + \sigma) &= f_i(\hat{\zeta}_1(t_1 + \sigma), \dots, \hat{\zeta}_{i+1}(t_1 + \sigma)) = f_i(\bar{\zeta}_1(t_1 + \sigma), \dots, \bar{\zeta}_{i+1}(t_1 + \sigma)) = \\ &= \frac{d\bar{\zeta}_i}{dt}(t_1 + \sigma), \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

by the construction). Conditions 4), and 5) of theorem 4.1 follow from conditions 1), and 2) of lemma 5.1 respectively (by the construction, (14) is true for all  $t \in [t_1, t_1 + \sigma]$ , and we can easily construct the appropriate  $\psi(t, x)$  for all  $t \in I$  following the argument from section 4). The equality  $y(T) = x^T$  follows from condition 3) of lemma 5.1; the equality  $y(t_1) = x^*$  follows from the definition of  $\bar{\zeta}(\cdot)$ : indeed, by the definition of  $\eta(t, v(\cdot))$ , we have

$$(\bar{\zeta}_1(t_1), \dots, \bar{\zeta}_p(t_1)) = \eta(t_1, \hat{w}_{\lambda^*}(\cdot)) = (\zeta_1^*, \dots, \zeta_p^*);$$

conditions (C<sub>3</sub>), and (C<sub>1</sub>) yield  $\bar{\zeta}_{p+1}(t_1) = \hat{w}_{\lambda^*}(t_1) = \zeta_{p+1}^*$ ; taking into account (28), we obtain  $\bar{\zeta}(t_1) = (\zeta_1^*, \dots, \zeta_n^*) = \zeta^*$ , which yields:  $y(t_1) = \phi^{-1}(\bar{\zeta}(t_1)) = \phi^{-1}(\zeta^*) = x^*$ .

Finally, we obtain from (C<sub>3</sub>), and from (C<sub>1</sub>)

$$\frac{d\hat{w}_{\lambda^*}}{dt}(t_1) = f_{p+1}(\zeta_1^*, \dots, \zeta_p^*, \zeta_{p+1}^*, \zeta_{p+2}^*),$$

which yields:  $\frac{\partial \psi_{p+1}}{\partial x}(t_1, x^*) \dot{y}(t_1) = \frac{\partial \psi_{p+1}}{\partial x}(t_1, x^*) a(x^*)$  (because the definition of the Lie derivative does not depend on coordinates). Therefore,  $y(\cdot)$ , and  $\psi(\cdot, \cdot)$  satisfy condition 6) of theorem 4.1 as well. The proof of theorem 4.1 is complete.

### 6. Proof of lemma 5.1

Consider the following control system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(t, x(t)) a(x(t)), & j=1, \dots, p-1, \quad t \in I, \quad (t, x) \in E; \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) = v(t); & t \in I, \quad (t, x) \in E \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) = 0, & j=p+1, \dots, n, \quad t \in I, \quad (t, x) \in E; \end{cases} \quad (31)$$

(If  $p = 1$ , then the first row is empty by definition) with states  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $(t, x) \in E$ , and controls  $v \in \mathbf{R}^1$ . Since the Jakoby matrix  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x)$  is invertible for all  $(t, x) \in E$  (see condition 1) of theorem 4.1), we can rewrite (31) in its standard form

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), v(t)), \quad t \in I, \quad (t, x) \in E, \quad (32)$$

where  $F(\cdot, \cdot, \cdot)$  is given by

$$F(t, x, v) = \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) a(x) \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial x}(t, x) a(x) \\ v - \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x) \\ - \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial t}(t, x) \\ \dots \\ - \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(t, x) \end{pmatrix} \quad (33)$$

Given  $(\tau, \tilde{x}) \in E$  and  $v(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^1)$ , denote by  $t \mapsto x(t, \tau, \tilde{x}, v(\cdot))$  the maximal trajectory of system (31) with the control  $v(\cdot)$  and with the initial condition  $x(\tau, \tau, \tilde{x}, v(\cdot)) = \tilde{x}$  (of course,  $(t, x(t, \tau, \tilde{x}, v(\cdot))) \in E$  for all admissible  $t$ ). In addition, if  $v = v(t, x)$  is a feedback control, which can be time-varying, and even discontinuous, defined in some open subset  $\tilde{E} \subset E$ , in general, and if  $(\tau, \tilde{x}) \in \tilde{E}$ , then we denote by  $t \mapsto x(t, \tau, \tilde{x}, v(\cdot, \cdot))$  the (maximal) trajectory of (31) such that  $x(\tau, \tau, \tilde{x}, v(\cdot, \cdot)) = \tilde{x}$  as well (if this trajectory is well-defined). From conditions 2) and 3) of theorem 4.1, it follows that

$$z(t) = x(t, T, x^T, v_0(\cdot)) \quad \text{for all } t \in I, \quad (34)$$

with

$$v_0(t) := 0, \quad t \in I, \quad (35)$$

and then, using the Gronwall-Bellmann lemma, we get the existence of  $\delta > 0$  such that the trajectory  $t \mapsto x(t, T, x^T, v(\cdot))$  of system (32) is well-defined for all  $t \in I$ , and

$$(t, x(t, T, x^T, v(\cdot))) \in E \quad \text{and} \quad |x(t, T, x^T, v(\cdot)) - z(t)| < \frac{\varepsilon_2}{2}$$

$$\text{for all } t \in I, \quad \text{whenever } \|v(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L_\infty(I; \mathbf{R}^1)} < \delta \quad (36)$$

for every  $v(\cdot) \in L_\infty(I; \mathbf{R}^1)$  where  $\varepsilon_2 > 0$  was defined in (23).

By definition, put:

$$\mathcal{T} := \{(t, x) \in I \times \mathbf{R}^n \mid t \in I; |x - z(t)| \leq \varepsilon_2\}. \quad (37)$$

**Lemma 6.1** *There exist a curve  $x(\cdot) \in C(I; \mathbf{R}^n)$ , a finite sequence of open sets  $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^N$  of the form  $\mathcal{T}_i = ]\tau_i - \alpha_i, \tau_i + \alpha_i[ \times \Omega_{\beta_i}(x_i)$  with some  $(\tau_i, x_i) \in \mathcal{T}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , a finite sequence of numbers  $\tau_i^*$  in  $[t_1, T]$ ,  $i = 1, \dots, N+1$ ,  $N$  finite sequences of vector fields  $\nu_i = \{\nu_i^k(\cdot)\}_{k=1}^{k_i}$  each of which belongs to  $\Delta_{n-p-1}(\cdot)$  (i.e.  $\nu_i^k(\cdot) \in \Delta_{n-p-1}(\cdot)$ ,  $k=1, \dots, k_i$ ,  $i=1, \dots, N$ ), and  $N$  finite sequences of numbers  $\mu_i = \{\mu_i^k\}_{k=1}^{k_i}$ ,  $\mu_i^k \geq 0$ ,  $k=1, \dots, k_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , such that*

- 1)  $\overline{\Omega_{\beta_i}(x_i)} \subset \mathcal{D}_{\nu_i^1}$ ,  $k = 1, \dots, k_i$ ;  $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{T}_i \subset E$ ,  $i=1, \dots, N$
- 2)  $\tau_1^* = T > \tau_2^* > \dots > \tau_N^* > \tau_{N+1}^* = t_1$ ;  $x(T) = x^T$ ; and  $(t, x(t)) \in \mathcal{T}_i$ , whenever  $t \in [\tau_{i+1}^*, \tau_i^*]$ ,  $i=1, \dots, N$

3) For every  $i=1, \dots, N$ , and every  $t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$ ,  $\dot{x}(t)$  is well-defined, and

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(t, x(t))a(x(t)), \quad j=1, \dots, p-1, \quad t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[, \quad i=1, \dots, N, \tag{38}$$

$$(33) \quad \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) = v_i(t, x(t)), \quad t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[, \quad i=1, \dots, N, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) = 0, \quad j=p+1, \dots, n, \quad t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[, \quad i=1, \dots, N, \tag{40}$$

where  $v_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  are given by

$$v_i(t, x) = \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x) (\Phi_{\nu_i}^{\mu_i})_* a(\Phi_{\nu_i}^{-\mu_i}(x)) \quad \text{for all } (t, x) \in \mathcal{J}_i, \quad i=1, \dots, N \tag{41}$$

and satisfy the conditions

$$|v_i(t, x)| < \delta \quad \text{for each } (t, x) \in \mathcal{J}_i, \quad i=1, \dots, N \tag{42}$$

with  $\delta$  defined in (36).

(According to the definition of the diffeomorphisms  $\Phi_{\nu_i}^{\mu_i}(\cdot)$  and  $\Phi_{\nu_i}^{-\mu_i}(\cdot)$  for finite sequences  $\nu_i = \{\nu_i^k(\cdot)\}_{k=1}^{k_i}$ ,  $\mu_i = \{\mu_i^k\}_{k=1}^{k_i}$  which was given in section 2, we

$$(34) \quad \text{have: } \Phi_{\nu_i}^{-\mu_i} = \Phi_{\nu_i^{k_i}}^{-\mu_i^{k_i}} \circ \dots \circ \Phi_{\nu_i^1}^{-\mu_i^1}; \quad \Phi_{\nu_i}^{\mu_i} = \Phi_{\nu_i^1}^{\mu_i^1} \circ \dots \circ \Phi_{\nu_i^{k_i}}^{\mu_i^{k_i}} \tag{35}$$

First we assume that lemma 6.1 is already proved, and prove lemma 5.1. The proof of lemma 6.1, in turn, is based on condition (B) for system (3) and is given in Appendix (we point out that it is a modification of the proofs of lemmas 3.4, and 3.1.1 from [13]; in particular, condition (B) allows us to find  $v_i(t, x)$  given by (41), and satisfying (42)). Let  $x(\cdot)$  be a curve from lemma 6.1. To make the proof of lemma 5.1 clearer, we assume that  $k_i = 1$ ;  $i = 1, \dots, N$ , i.e. each sequence  $\mu_i = \{\mu_i^k\}_{k=1}^{k_i}$  and  $\nu_i = \{\nu_i^k(\cdot)\}_{k=1}^{k_i}$  consists of one element only, and then, to simplify the notation, we put  $\mu_i := \mu_i^1$ ,  $\nu_i(\cdot) := \nu_i^1(\cdot)$  (however, we will explain how we can adjust our construction in the general case)

Put  $v(t) := v_i(t, x(t))$ ,  $t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Then,  $v(\cdot)$  is a piecewise continuous open-loop control. Combining (42), and (36), and taking into account (38)-(40), and condition 2) of lemma 6.1, we get

$$(37) \quad |x(t) - z(t)| < \frac{\varepsilon_2}{2} \quad \text{for all } t \in I \tag{43}$$

Let  $N_0$  in  $\{1, \dots, N\}$  be such that  $\tau_{N_0+1}^* \leq t_1 + \sigma < \tau_{N_0}^*$ . Without loss of generality, we assume that  $\tau_{N_0+1}^* = t_1 + \sigma$ ; otherwise, with slight abuse of notation, we put by definition  $\tau_{N_0+1}^* := t_1 + \sigma$ , whereas  $\tau_i^*$ ,  $i=1, \dots, N_0$  are the same (the terminal point of the curve  $y(\cdot)$  mentioned in lemma 5.1 is  $t_1 + \sigma$ , and, therefore, we should deal with  $[t_1 + \sigma, T]$  instead of  $[t_1, T]$  in this section).

Take any  $\varepsilon_3 > 0$  such that  $\varepsilon_3 < \frac{\varepsilon_2}{2}$ . For any  $\tau \leq t$  in  $[t_1 + \sigma, T]$ , we define:

$$\Gamma_\tau^T = \{(s, z) \in [\tau, t] \times \mathbf{R}^n \mid s \in [\tau, t]; \quad |z - x(t)| < \varepsilon_3\}; \quad \Gamma := \Gamma_{t_1 + \sigma}^T \tag{44}$$

By the construction,  $(\tau_{i+1}^*, x(\tau_{i+1}^*)) \in \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, N_0-1$ ; therefore  $\varepsilon_3$  in  $]0, \frac{\varepsilon_2}{2}[$  can be chosen such that  $\Gamma$  in (44) satisfies the conditions

$$\bar{\Gamma}_{\tau_1^*}^{\tau_1^*} \subset \mathcal{T}_1; \quad \bar{\Gamma}_{\tau_{i+1}^*}^{\tau_{i+1}^*} \subset \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N_0 - 1; \quad \bar{\Gamma}_{\tau_{N_0+1}^*}^{\tau_{N_0+1}^*} \subset \mathcal{T}_{N_0}; \quad (45)$$

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \mathcal{T}_i. \quad (46)$$

Put  $\sigma^0 := \min\{\frac{\tau_i^* - \tau_{i+1}^*}{2}, 1 \leq i \leq N_0\}$ . Then, there exists  $M > 0$  such that, for every sequence  $\varkappa = \{\sigma_i\}_{i=1}^{N_0+1}$  satisfying the conditions  $0 < \sigma_i < \sigma^0$ ,  $i=1, \dots, N_0+1$ , there are a smooth time-varying vector field  $\nu_\varkappa(t, \cdot)$ ,  $t \in [t_1 + \sigma, T]$ , and a smooth function  $\mu_\varkappa(\cdot) \in C^\infty([t_1 + \sigma; T]; [0, +\infty[)$  such that

$$\mu_\varkappa(T) = \mu_\varkappa(t_1 + \sigma) = 0; \quad \text{and} \quad \mu_\varkappa(t) = \mu_i,$$

$$\text{whenever } t \in [\tau_{i+1}^* + \sigma_{i+1}, \tau_i^* - \sigma_i], \quad i = 1, \dots, N_0; \quad (47)$$

$$\nu_\varkappa(t, \cdot) \in \Delta_{n-p-1}(\cdot), \quad \text{whenever } t \in [t_1 + \sigma, T]; \quad (48)$$

$$\nu_\varkappa(t, x) = \nu_i(x), \quad \text{whenever } x \in \mathcal{D}_{\nu_i}, \quad t \in [\tau_{i+1}^* + \sigma_{i+1}, \tau_i^* - \sigma_i], \quad i = 1, \dots, N_0, \quad (49)$$

and such that the feedback control  $v_\varkappa(t, x)$  given by

$$v_\varkappa(t, x) = \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x) \left( \Phi_{\nu_\varkappa(t)}^{\mu_\varkappa(t)} \right)_* a \left( \Phi_{\nu_\varkappa(t)}^{-\mu_\varkappa(t)}(x) \right) \quad (50)$$

satisfies the condition

$$\max\{|F(t, x, v_\varkappa(t, x))| \mid t \in [t_1 + \sigma; T]; \quad x \in \overline{\Omega_{\varepsilon_3}(x(t))}\} \leq M, \quad (51)$$

where  $M$  is given by

$$M := \max\{|F(t, x, v)| \mid v = \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x) \left( \Phi_{\nu_i}^{\mu_i} \right)_* a \left( \Phi_{\nu_i}^{-\mu_i}(x) \right), \quad (t, x) \in \bar{\mathcal{T}}_i, \quad 0 \leq \mu \leq \mu_i; \quad i = 1, \dots, N_0\}. \quad (52)$$

For instance, given  $\varkappa = \{\sigma_i\}_{i=1}^{N_0+1}$  with small enough  $\sigma_i \in ]0, \sigma^0[$ , take any functions  $\lambda_i(\cdot) \in C^\infty([t_1 + \sigma, T]; \mathbf{R})$ ,  $i = 1, \dots, N_0$ , and  $\lambda(\cdot) \in C^\infty([t_1 + \sigma, T]; \mathbf{R})$  such that

$$\sum_{i=1}^{N_0} \lambda_i(t) = 1, \quad \text{and} \quad \lambda_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad \text{for all } t \in [t_1 + \sigma, T];$$

$$\lambda_i(t) = 1, \quad \text{whenever } t \in [\tau_{i+1}^* + \frac{\sigma_{i+1}}{2}, \tau_i^* - \frac{\sigma_i}{2}], \quad i = 2, \dots, N_0 - 1; \quad \lambda_1(t) = 1,$$

$$\text{whenever } t \in [\tau_2^* + \frac{\sigma_2}{2}, \tau_1^*]; \quad \lambda_{N_0}(t) = 1 \quad \text{whenever } t \in [\tau_{N_0+1}^*, \tau_{N_0}^* - \frac{\sigma_{N_0}}{2}];$$

$$\lambda_i(t) + \lambda_{i+1}(t) = 1, \quad \text{whenever } t \in [\tau_{i+1}^* - \frac{\sigma_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}^* + \frac{\sigma_{i+1}}{2}], \quad i = 1, \dots, N_0 - 1;$$

$$\lambda(t) = 1 \quad \text{whenever } t \in \bigcup_{i=1}^{N_0} [\tau_{i+1}^* + \sigma_{i+1}, \tau_i^* - \sigma_i];$$

$$0 \leq \lambda(t) \leq 1 \quad \text{whenever } t \in [t_1 + \sigma, T];$$

$$\lambda(t) = 0 \quad \text{whenever } t \in \bigcup_{i=1}^{N_0-1} [\tau_{i+1}^* - \frac{\sigma_{i+1}}{2}, \tau_{i+1}^* + \frac{\sigma_{i+1}}{2}];$$

$$\lambda(T) = \lambda(t_1 + \sigma) = 0.$$

Then  $\mu_{\kappa}(\cdot)$  and  $\nu_{\kappa}(\cdot, \cdot)$  given by  $\mu_{\kappa}(t) = \sum_{i=1}^{N_0} \mu_i \lambda_i(t) \lambda(t)$  and  $\nu_{\kappa}(t, x) = \sum_{i=1}^{N_0} \lambda_i(t) \nu_i(x)$ ,  $t \in [t_1 + \sigma, T]$ ,  $x \in \mathcal{D}_{\nu_i}$  satisfy (47)-(52).

Let us remark that our vector field  $\nu_{\kappa}(t)$  is actually time-varying only around the moments of switching  $\tau_i^*$ , which allows us to construct the smooth feedback control (50). If each  $\nu_i$  were a sequence of vector fields  $\{\nu_i^k(\cdot)\}_{k=1}^{k_i}$ , we would have to take into account each switching from  $\nu_i^k(\cdot)$  to  $\nu_i^{k+1}(\cdot)$ . The above-mentioned convex combinations would become more complicated, but the idea would be the same.

To simplify the notation, put  $\nu_{\kappa}(t) := \nu_{\kappa}(t, \cdot)$ .

**Lemma 6.2** *There exists  $\kappa = \{\sigma_i\}_{i=1}^{N_0+1}$  with small enough  $\sigma_i$ ,  $0 < \sigma_i < \sigma^0$ ,  $i=1, \dots, N_0+1$  such that the corresponding trajectory  $t \rightarrow x_{\kappa}(t) := x(t, T, x^T, \nu_{\kappa}(\cdot, \cdot))$  of system (31) with the (smooth) feedback control  $\nu_{\kappa}(\cdot, \cdot)$  given by (50) and with the "initial" condition  $x_{\kappa}(T) = x^T$  is well-defined for all  $t \in [t_1 + \sigma, T]$ , and satisfies the condition*

$$|x_{\kappa}(t) - x(t)| < \varepsilon_3 \quad \text{for all } t \in [t_1 + \sigma, T] \tag{53}$$

(which implies  $(t, x_{\kappa}(t)) \in \Gamma$ , whenever  $t \in [t_1 + \sigma, T]$ ).

To prove lemma 6.2, we just note that

$$x_{\kappa}(t) = x(t, T, x^T, \nu_{\kappa}(\cdot, \cdot)) \quad \text{and} \quad x(t) = x(t, T, x^T, v(\cdot, \cdot)), \quad \text{for all } t \in [t_1 + \sigma, T]$$

and  $\nu_{\kappa}(t, x) = v(t, x)$ , whenever  $t \in \bigcup_{i=1}^{N_0} [\tau_{i+1}^* + \sigma_{i+1}, \tau_i^* - \sigma_i]$ ,  $x \in \Omega_{\varepsilon_3}(x(t))$ , where

$$v(t, x) := v_i(t, x), \quad \text{whenever } \tau_{i+1}^* < t \leq \tau_i^*, \quad (t, x) \in \mathcal{J}_i, \quad i = 1, \dots, N_0, \tag{54}$$

with  $v_i(t, x)$  defined in (41). In addition,

$$\max\{|F(t, x, \nu_{\kappa}(t, x))| \mid t \in [t_1 + \sigma, T], \quad x \in \overline{\Omega_{\varepsilon_3}(x(t))}\} \leq M;$$

$$\max\{|F(t, x, v(t, x))| \mid t \in [t_1 + \sigma, T], \quad x \in \overline{\Omega_{\varepsilon_3}(x(t))}\} \leq M;$$

Therefore, if  $\sigma_i > 0$  are small enough, then  $t \rightarrow x_{\kappa}(t)$  is well-defined on  $[t_1 + \sigma, T]$ , and  $\|x_{\kappa}(\cdot) - x(\cdot)\|_{C(I; \mathbb{R}^n)}$  is small enough, which can be proved by the standard argument based on the Gronwall-Bellmann lemma. Lemma 6.2 is proved.

Finally, we put:  $\mu(t) := \mu_x(t)$ ,  $\nu(t) := \nu_x(t)$ ,  $t \in [t_1 + \sigma, T]$ , with  $\mu_x(t)$ ,  $\nu_x(t)$  from lemma 6.2, and

$$y(t) := \Phi_{\nu(t)}^{-\mu(t)}(x_x(t)), \quad \text{whenever } t \in [t_1 + \sigma, T] \quad (55)$$

$$\tilde{\psi}_j(t, y) := \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y)), \quad j=1, \dots, p, \quad \text{whenever } y \in \Phi_{\nu(t)}^{-\mu(t)}(\Omega_{\varepsilon_3}(x_x(t))). \quad (56)$$

Let us show that  $y(\cdot)$  defined by (55) satisfies conditions 1), 2), 3) of lemma 5.1. Indeed, since  $x_x(t) = \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t))$ , we obtain from (55), and from (31):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}}{\partial t} \right) (y(t)) + \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)} \right)_* \dot{y}(t) \right) = \\ & = \frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))}{\partial x} a(\Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t))), \quad j=1, \dots, p-1, \quad t \in [t_1 + \sigma, T] \end{aligned} \quad (57)$$

By the construction,  $\nu(t) \in \Delta_{n-p-1}$ , for all  $t$ ; therefore

$$\frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y))}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y)}{\partial t} \right) = 0 \quad j=1, \dots, p \quad (58)$$

for every admissible  $y$  and  $t$ . In addition, from (A), (B) it follows that

$$a \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)) \right) - \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)} \right)_* a(y(t)) \in \Delta_{n-p}(\Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))$$

Therefore, we get from (57), (58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))}{\partial x} \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)} \right)_* \dot{y}(t) &= \frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))}{\partial x} \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)} \right)_* a(y(t)), \\ & j=1, \dots, p-1, \quad t \in [t_1 + \sigma, T]. \end{aligned}$$

Combining this with (58), (31), (50), (55) we obtain that the last equality holds for  $j=p$  as well. On the other hand, by the definition of  $\tilde{\psi}_j(t, y)$ , the obtained equalities

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))}{\partial x} \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)} \right)_* \dot{y}(t) &= \frac{\partial \varphi_j(t, \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)}(y(t)))}{\partial x} \left( \Phi_{\nu(t)}^{\mu(t)} \right)_* a(y(t)), \\ & j=1, \dots, p, \quad t \in [t_1 + \sigma, T] \end{aligned}$$

are equivalent to

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_j(t, y(t))}{\partial y} \dot{y}(t) = \frac{\partial \tilde{\psi}_j(t, y(t))}{\partial y} a(y(t)), \quad j=1, \dots, p. \quad (59)$$

Finally, by the construction,  $\mu(T)=0$ , which yields  $y(T)=\Phi_{\nu(T)}^{-\mu(T)}(x_{\kappa}(T))=x_{\kappa}(T)=x^T$ , and  $\mu(t_1+\sigma)=0$ , which yields:  $y(t_1+\sigma) = \Phi_{\nu(t_1+\sigma)}^{-\mu(t_1+\sigma)}(x_{\kappa}(t_1+\sigma)) = x_{\kappa}(t_1+\sigma)$ .

Combining this with (43) and (53), we obtain:  $y(t_1+\sigma) \in \Omega_{\varepsilon_2}(z(t_1+\sigma))$ , which yields condition 3) of lemma 5.1. Let  $(t, x) \mapsto \psi(t, x) = (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x)) \in \mathbf{R}^n$  be any map of class  $C^1$  defined in some neighborhood  $\tilde{G} \subset [t_1+\sigma, T] \times \mathbf{R}^n$  of the set  $\{(t, x) \in [t_1+\sigma, T] \times \mathbf{R}^n \mid x=y(t), t \in [t_1+\sigma, T]\}$  such that, for every fixed  $t \in I$ , we have  $\psi(t, y(t))=0$ , and the map  $x \mapsto (\psi_1(t, x), \dots, \psi_n(t, x))$  defines canonical coordinates for system (3) in the neighborhood  $\tilde{G}_t := \{z \in \mathbf{R}^n \mid (t, z) \in \tilde{G}\}$  of  $y(t)$ . (Since  $y(\cdot)$  is already defined, we can easily pick such a map following the same pattern as that proposed in section 4 when proving theorem 3.1 as a corollary of theorem 4.1. For this, we should consider the map  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\Phi_{\omega_n}^{t_n} \circ \Phi_{\omega_{n-1}}^{t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_{\omega_1}^{t_1})(y(t))$  for each fixed  $t \in [t_1+\sigma, T]$ , where  $\omega_i(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, n$  are any vector fields on  $\mathbf{R}^n$  such that  $\Delta_i(x) = \text{span}\{\omega_{n-i}(x), \omega_{n-i+1}(x), \dots, \omega_n(x)\}$  for all  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $i=0, \dots, n-1$ . This map is a local diffeomorphism in some neighborhood of  $t_i=0$ ,  $i=1, \dots, n$ , and the inverse map  $x \mapsto \psi(t, x)$  defines canonical coordinates in a neighborhood of  $y(t)$  for every fixed  $t \in [t_1+\sigma, T]$ , and satisfies the condition  $\psi(t, y(t)) = 0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in [t_1+\sigma, T]$ ). Then, since the definition of the Lie derivative is coordinate-free, we obtain from (59)

$$\frac{\partial \psi_j(t, y(t))}{\partial x} \dot{y}(t) = \frac{\partial \psi_j(t, y(t))}{\partial x} a(y(t)), \quad j = 1, \dots, p, \quad t \in [t_1+\sigma, T]$$

$$\frac{d\psi_j(t, y(t))}{dt} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad t \in [t_1+\sigma, T]$$

which yields conditions 1), and 2) of lemma 5.1.

Thus  $y(\cdot)$ , and  $\psi(\cdot, \cdot) = (\psi_1(\cdot, \cdot), \dots, \psi_n(\cdot, \cdot))$  satisfy conditions 1), 2), 3) of lemma 5.1. The proof of lemma 5.1 is complete.

## 7. Appendix

### 7.1 Proof of lemma 6.1

>From conditions (A),(B) it follows that for each  $(t, x)$  in  $\mathcal{T} = \{(t, x) \mid t \in I, |x-z(t)| \leq \varepsilon_2\}$  (see (37)) there exist a smooth vector field  $\nu_{t,x}(\cdot) \in \Delta_{n-p-1}(\cdot)$ , and a point  $y = \Phi_{\nu_{t,x}}^{-\mu_{t,x}}(x)$  with some  $\mu_{t,x} \geq 0$  such that

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x) (\Phi_{\nu_{t,x}}^{\mu_{t,x}})_* a(\Phi_{\nu_{t,x}}^{-\mu_{t,x}}(x)) = 0.$$

(Actually, there is a finite sequence  $\nu_{t,x}$  of vector fields from  $\Delta_{n-p-1}(\cdot)$  and the corresponding sequence, of nonnegative numbers, which we denote by  $\mu_{t,x}$ , satisfying the above-mentioned equality, as in the formulation of lemma 6.1. However, to make the arguments clearer, we again assume (without loss of generality) that each of these sequences consists on one element only, then we

denote these elements by  $\nu_{t,x}$ , and  $\mu_{t,x}$  respectively. The proof for the general case is the same). Let  $\mathcal{T}_{t,x}$  be an open set of the form  $\mathcal{T}_{t,x} = ]t-\alpha, t+\alpha[ \times \Omega_\beta(x)$  with some  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  such that for its closure  $\bar{\mathcal{T}}_{t,x} = [t-\alpha, t+\alpha] \times \bar{\Omega}_\beta(x)$  we get  $\Phi_{\nu_{t,x}}^{-\mu}(\bar{\Omega}_\beta(x)) \subset \mathcal{D}_{\nu_{t,x}}$  for all  $\mu \in [0, \mu_{t,x}]$ , and

$$\left| \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(s, z) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(s, z) (\Phi_{\nu_{t,x}}^{\mu_{t,x}})_* a(\Phi_{\nu_{t,x}}^{-\mu_{t,x}}(z)) \right| < \delta \quad \text{for all } (s, z) \in \bar{\mathcal{T}}_{t,x}, \quad (60)$$

where  $\delta$  is defined in (36). Since  $\mathcal{T} \subset \bigcup_{(t,x) \in \mathcal{T}} \mathcal{T}_{t,x}$ , and  $\mathcal{T}$  is a compact set, there

exists a finite open subcovering  $\{\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_{t_r, x_r}\}_{r=1}^{r_0}$  such that  $\mathcal{T} \subset \bigcup_{r=1}^{r_0} \mathcal{T}_r$ . To simplify the notation, we put by definition:

$$\mathcal{T}_r := \mathcal{T}_{t_r, x_r}, \quad \nu_r(\cdot) := \nu_{t_r, x_r}(\cdot), \quad \mu_r := \mu_{t_r, x_r}, \quad y_r := \Phi_{\nu_r}^{-\mu_r}(x_r), \quad r=1, \dots, r_0. \quad (61)$$

Then

$$\left| \frac{\partial \varphi_p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}(t, x) (\Phi_{\nu_r}^{\mu_r})_* a(\Phi_{\nu_r}^{-\mu_r}(x)) \right| < \delta \quad \text{for all } (t, x) \in \bar{\mathcal{T}}_r \quad (62)$$

By definition, put:

$$L := \frac{1}{2(M+1)}, \quad \text{where } M := \max\left\{ |F(t, x, v)| \mid v = \frac{\partial \varphi_p(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_p(t, x)}{\partial x} (\Phi_{\nu_r}^{\mu_r})_* a(\Phi_{\nu_r}^{-\mu_r}(x)), \right. \\ \left. (t, x) \in \bar{\mathcal{T}}_r, 0 \leq \mu \leq \mu_i, i=1, \dots, r_0 \right\} \quad (63)$$

Given any  $(t, x)$  in  $\bigcup_{r=1}^{r_0} \mathcal{T}_r$ , define  $\theta_{t,x}(\cdot)$  and  $\tau_{t,x}(\cdot)$  as follows

$$\theta_{t,x}(z) := t + \alpha_{t,x}^0 - L|z - x|; \quad \tau_{t,x}(z) := t - \alpha_{t,x}^0 + L|z - x| \quad \text{for all } z \in \mathbf{R}^n,$$

where  $\alpha_{t,x}^0 > 0$  is a small positive number such that for each set

$$S_{t,x} := \{(s, z) \in I \times \mathbf{R}^n \mid \tau_{t,x}(z) < s < \theta_{t,x}(z)\}$$

there is  $r = r(t, x) \in \{1, \dots, r_0\}$  such that  $S_{t,x} \subset \mathcal{T}_{r(t,x)}$ . Since  $\mathcal{T} \subset \bigcup_{(t,x) \in \mathcal{T}} S_{t,x}$ , and  $\mathcal{T}$

is compact, there is a finite open covering  $\{S_{t_m, x_m}\}_{m=1}^{m_0}$  of  $\mathcal{T}$ :  $\mathcal{T} \subset \bigcup_{m=1}^{m_0} S_{t_m, x_m}$ .

Again, in order to simplify the notation, we put

$$\theta_m(\cdot) = \theta_{t_m, x_m}(\cdot); \quad \tau_m := \tau_{t_m, x_m}(\cdot); \quad S_m := \{(s, z) \in I \times \mathbf{R}^n \mid \tau_m(z) \leq s \leq \theta_m(z)\};$$

$$\mathcal{T}_m := \mathcal{T}_{r(m)}; \quad \nu_m(\cdot) := \nu_{r(m)}(\cdot); \quad \mu_m := \mu_{r(m)}; \quad z_m := x_{r(m)} \quad (64)$$

Thus, from now on, we deal with notation (64), and notation (61) is no longer valid. Let us remark that each  $\theta_m(\cdot)$  and each  $\tau_m(\cdot)$  satisfy the global Lipschitz condition

$$\forall y \in \mathbf{R}^n \quad \forall z \in \mathbf{R}^n \quad |\tau_j(y) - \tau_j(z)| \leq L|y - z|; \quad |\theta_j(y) - \theta_j(z)| \leq L|y - z|, \quad j=1, \dots, m_0.$$

Let  $\Xi$  be the system of all the sets given by

$$\Sigma_{\Theta(\cdot), \vartheta(\cdot), A_\Theta, A_\vartheta} := \{(s, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \mid \vartheta(z) \leq s \leq \Theta(z)\} \setminus \{(s, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \mid (s = \vartheta(z), z \in A_\vartheta) \text{ or } (s = \Theta(z), z \in A_\Theta)\} \quad (65)$$

where  $\Theta(\cdot), \vartheta(\cdot)$  range over the set of all the functions of class  $C(\mathbf{R}^n; I)$  such that

$$|\Theta(y) - \Theta(z)| \leq L|y - z| \quad \text{and} \quad |\vartheta(y) - \vartheta(z)| \leq L|y - z|, \quad \text{for all } y \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}^n, \quad (66)$$

(with  $L$  from (63)) and  $A_\Theta \subset \mathbf{R}^n, A_\vartheta \subset \mathbf{R}^n$ , range over the set of all subsets of  $\mathbf{R}^n$ .

Note that, if  $\vartheta_j(\cdot), j=1, \dots, N$ , are some functions of  $\mathbf{R}^n$  to  $\mathbf{R}$  such that

$$\forall y \in \mathbf{R}^n \quad \forall z \in \mathbf{R}^n \quad |\vartheta_j(y) - \vartheta_j(z)| \leq L|y - z|, \quad j = 1, \dots, N,$$

then, for each  $y \in \mathbf{R}^n$  and each  $z \in \mathbf{R}^n$ , we obtain:

$$|\max_{1 \leq j \leq N} \vartheta_j(y) - \max_{1 \leq j \leq N} \vartheta_j(z)| \leq L|y - z| \quad \text{and} \quad |\min_{1 \leq j \leq N} \vartheta_j(y) - \min_{1 \leq j \leq N} \vartheta_j(z)| \leq L|y - z|$$

Therefore, it is easy to prove that  $\Xi$  satisfies the following conditions: (a)  $\emptyset \in \Xi$ ; (b) for each  $\Sigma' \in \Xi$ , and each  $\Sigma'' \in \Xi$ , we have  $\Sigma' \cap \Sigma'' \in \Xi$ ; and (c), for every  $\Sigma \in \Xi$ , and every  $\Sigma_1 \in \Xi$ , if  $\Sigma_1 \subset \Sigma$ , then there exists a finite sequence  $\{\Sigma_q\}_{q=2}^{q_0} \subset \Xi$  of sets from

$\Xi$  such that  $\Sigma = \bigcup_{q=1}^{q_0} \Sigma_q$ , and  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$  for all  $i \neq j, \{i, j\} \subset \{1, \dots, q_0\}$ . (In other

words,  $\Xi$  is a "semiring" of sets - see [7]). Since every  $S_m, m=1, \dots, m_0$  is an element of  $\Xi$ , we there exists a finite sequence  $\{\Sigma_l\}_{l=1}^{l_0}$  of sets  $\Sigma_l = \Sigma_{\Theta_l(\cdot), \vartheta_l(\cdot), A_{\Theta_l}, A_{\vartheta_l}} \in \Xi$  (see (65), (66)) such that first,  $\Sigma_{l'} \cap \Sigma_{l''} = \emptyset$  for all  $l' \neq l''$  in  $\{1, \dots, l_0\}$ ; second,

$\mathcal{T} \subset \bigcup_{l=1}^{l_0} \Sigma_l = \bigcup_{m=1}^{m_0} S_m$ ; and, third, for each  $l \in \{1, \dots, l_0\}$  there is  $m(l) \in \{1, \dots, m_0\}$  such that  $\Sigma_l \subset S_{m(l)}$ .

For each  $l \in \{1, \dots, l_0\}$ , we define the feedback control  $v_l(t, x)$  in  $\mathcal{T}_{m(l)}$  as follows

$$v_l(t, x) = \frac{\partial \varphi_p(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_p(t, x)}{\partial x} \left( \Phi_{\nu_{m(l)}}^{\mu_{m(l)}} \right)_* a \left( \Phi_{\nu_{m(l)}}^{-\mu_{m(l)}}(x) \right) \quad \text{whenever } (t, x) \in \mathcal{T}_{m(l)}, \quad (67)$$

and then we define the following (discontinuous!) feedback control  $v = v(t, x)$  in

$$\Sigma := \bigcup_{l=1}^{l_0} \Sigma_l \text{ for system (31)}$$

$$v(t, x) := v_l(t, x) \quad \text{whenever } (t, x) \in \Sigma_l, \quad l = 1, \dots, l_0. \quad (68)$$

Then, the following auxiliary statement holds.

**Lemma 7.1** *There are a unique trajectory  $x(\cdot) \in C(I; \mathbf{R}^n)$  of system (31) with the feedback law  $v = v(t, x)$  given by (68), and with the initial condition  $x(T) = x^T$ , a unique finite sequence of indices  $\{l_j\}_{j=1}^N \subset \{1, \dots, l_0\}$  and a unique*

sequence  $T = \tau_1^* > \tau_2^* > \dots > \tau_N^* > \tau_{N+1}^* = t_1$  such that  $l_i \neq l_j$  for all  $i \neq j$  in  $\{1, \dots, N\}$  and

1)  $\dot{x}(\cdot)$  is defined and continuous at each  $t$  in  $I \setminus \{\tau_2^*, \dots, \tau_N^*\}$  and

$$(t, x(t)) \in \mathcal{T} \quad \text{and} \quad |v(t, x(t))| < \delta \quad (69)$$

for all  $t \in I$ .

2) For every  $j=1, \dots, N$  we obtain

$$(t, x(t)) \in \Sigma_{l_j}; \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t), v(t, x(t))) \quad \text{for all } t \in ]\tau_{j+1}^*, \tau_j^*[ \quad (70)$$

$$\tau_j^* = \Theta_{l_j}(z(\tau_j^*)); \quad \tau_{j+1}^* = \vartheta_{l_j}(z(\tau_{j+1}^*)); \quad (71)$$

where  $F$  is defined in (33), and  $\Theta_l(\cdot)$ ,  $\vartheta_l(\cdot)$  are given in the definition of  $\Sigma_l$ .

*Proof of lemma 7.1* To prove lemma 7.1, we need to modify a specific auxiliary argument proposed in [13, 16]. We will prove the existence and the uniqueness of  $x(\cdot)$  and  $\{\Sigma_{l_i}\}_{i=1}^N$  by the induction on  $i=1, \dots, N$ . Also, we will prove (by induction on  $i=1, \dots, N$ ) that  $x(\cdot)$  and that  $(t, x) \mapsto s_l(t, x)$  and  $(t, x) \mapsto t_l(t, x)$ , given by

$$s_l(t, x) = t - \vartheta_l(x), \quad t_l(t, x) = t - \Theta_l(x), \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \quad (72)$$

satisfy the conditions

$$\begin{aligned} \frac{3(t-\tau)}{2} &\geq s_l(t, x(t)) - s_l(\tau, x(\tau)) \geq \frac{t-\tau}{2}; & \frac{3(t-\tau)}{2} &\geq t_l(t, x(t)) - t_l(\tau, x(\tau)) \geq \\ &\geq \frac{t-\tau}{2} & \text{for all } t > \tau, \quad \{t, \tau\} &\subset [\tau_i^*, T], \quad l = 1, \dots, l_0. \end{aligned} \quad (73)$$

For  $i=1$ , define:  $\tau_i^* = \tau_1^* = T$ . At this stage, we have empty set of  $l_j$ ,  $\Sigma_{l_j}$ , and empty set of equalities (70), (71), (73),  $j=1, \dots, i-1$ , and the algorithm for getting  $l_1$ ,  $\Sigma_{l_1}$ , and  $\tau_2^*$  is the same as in the general case  $i \geq 1$ , which we consider now.

Assume that, for some  $i \geq 1$ , there are a unique sequence  $\{l_j\}_{j=1}^{i-1}$  (for  $i=1$ , the sequence is empty - see the previous paragraph) such that  $l_j \neq l_q$  for all  $j \neq q$  in  $\{1, \dots, i-1\}$ , a unique sequence  $T = \tau_1^* > \tau_2^* > \dots > \tau_i^* \geq t_1$ , and a trajectory  $x(\cdot) \in C([\tau_i^*, T]; \mathbf{R}^n)$  such that (69), (73) hold for all  $t \in [\tau_i^*, T]$ ; and (70), (71) hold for all  $j=1, \dots, i-1$ ;  $\dot{x}(\cdot)$  being well-defined and continuous on  $[\tau_i^*, T] \setminus \{\tau_2^*, \dots, \tau_i^*\}$  (again, for  $i=1$ , we have empty set of equalities (70), (71), (73), and (69) is trivial).

If  $\tau_i^* = t_1$ , the proof is complete, therefore assume that  $\tau_i^* > t_1$ . By the induction hypothesis,  $(\tau_i^*, x(\tau_i^*)) \in \mathcal{T}$ ; then, since  $\mathcal{T} \subset \text{int} \left( \bigcup_{l=1}^{l_0} \Sigma_l \right)$  by the construction,

there is  $\alpha_0 > 0$  such that  $(\tau_i^* - s, x(\tau_i^*)) \in \bigcup_{l=1}^{l_0} \Sigma_l$  for all  $s \in ]0, \alpha_0]$ . Since  $\Sigma_{l'} \cap \Sigma_{l''} = \emptyset$  for all  $l' \neq l''$ , there are a unique  $l_i \in \{1, \dots, l_0\}$  and a unique  $\bar{\tau} \in [t_1, \tau_i^*[$  such that  $]\bar{\tau}, \tau_i^*[\times \{x(\tau_i^*)\} \subset \Sigma_{l_i}$ , and  $\bar{\tau} = \vartheta_{l_i}(x(\tau_i^*))$ ,  $\tau_i^* = \Theta_{l_i}(x(\tau_i^*))$ . Since  $v_{l_i}(\cdot, \cdot)$  is well-defined in  $\mathcal{T}_{m(l_i)}$  (see (67)), and  $(\tau_i^*, x(\tau_i^*)) \in \Sigma_{l_i} \subset \mathcal{T}_{m(l_i)}$ , the trajectory  $t \mapsto x(t, \tau_i^*, x(\tau_i^*), v_{l_i}(\cdot, \cdot))$  is well-defined on some maximal  $]\bar{s}, \tau_i^*]$  such that

$x(t, \tau_i^*, x(\tau_i^*), v_{l_i}(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{T}_{m(l_i)}$  for all  $t \in ]\bar{s}, \tau_i^*[$ . Put:  $x_{l_i}(t) := x(t, \tau_i^*, x(\tau_i^*), v_{l_i}(\cdot, \cdot))$  for  $t \in ]\bar{s}, \tau_i^*[$ . Note that from (33), (63), (66) (and from the inclusions  $\Sigma_l \in \Xi$ ,  $l=1, \dots, l_0$ ) it follows that, for every  $l' \in \{1, \dots, l_0\}$  such that  $(\tau_i^*, x(\tau_i^*)) \in \mathcal{T}_{m(l')}$  the trajectory  $t \mapsto x_{l'}(t) := x(t, \tau_i^*, x(\tau_i^*), v_{l'}(\cdot, \cdot))$  satisfies the conditions

$$\frac{3(t - \tau)}{2} \geq s_l(t, x_{l'}(t)) - s_l(\tau, x_{l'}(\tau)) \geq \frac{(t - \tau)}{2}$$

$$\frac{3(t - \tau)}{2} \geq t_l(t, x_{l'}(t)) - t_l(\tau, x_{l'}(\tau)) \geq \frac{(t - \tau)}{2}, \quad t > \tau, \quad l = 1, \dots, l_0 \quad (74)$$

In particular, (74) holds for  $l' = l_i$  and for all  $t, \tau$  in  $]\bar{s}, \tau_i^*[$ , then  $t \mapsto s_l(t, x_{l_i}(t))$  and  $t \mapsto t_l(t, x_{l_i}(t))$  are strictly increasing on  $]\bar{s}, \tau_i^*[$ . By the induction hypothesis (see (71) for  $j=1, \dots, i-1$ ), we obtain:  $t_l(\tau_i^*, x(\tau_i^*)) = 0, s_l(\tau_i^*, x(\tau_i^*)) > 0$ . Since  $s_l(t, x) > 0$ , and  $t_l(t, x) < 0$  are equivalent to  $t > \vartheta_l(x)$  and  $t < \Theta_l(x)$  respectively, we obtain that  $(t, x(t, \tau_i^*, x(\tau_i^*), v_{l_i}(\cdot, \cdot)))$  belongs to  $\Sigma_{l_i}$  for all  $t \in ]\tau_i^* - \alpha_0, \tau_i^*[$  with some  $\alpha_0 > 0$ , and moreover there is a unique  $\tau_{i+1}^* \in ]\bar{s}, \tau_i^*[$  such that  $t_{l_i}(t, x_{l_i}(t)) < 0, s_{l_i}(t, x_{l_i}(t)) > 0$  for all  $t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$ , and  $t_{l_i}(t, x_{l_i}(t)) < 0, s_{l_i}(t, x_{l_i}(t)) < 0$  for all  $t \in ]\bar{s}, \tau_{i+1}^*[$ , which yields

$$(t, x_{l_i}(t)) \in \Sigma_{l_i}, \quad \dot{x}_{l_i}(t) = F(t, x_{l_i}(t), v_{l_i}(t, x_{l_i}(t))) \quad \text{for all } t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[ \quad (75)$$

$$(t, x_{l_i}(t)) \notin \Sigma_{l_i} \quad \text{for all } t \in ]\bar{s}, \tau_{i+1}^*[ \quad (76)$$

Taking into account that  $x_{l_i}(\tau_i^*) = x(\tau_i^*)$  by the construction, we obtain from (75) and from the induction hypothesis that our  $l_i, \Sigma_{l_i}, \tau_{i+1}^*$ , and  $x(t)$  given by  $x(t) := x_{l_i}(t)$  for all  $t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$  satisfy (69)-(71), and (73) for all  $j = 1, \dots, i-1, i$ .

The uniqueness of  $l_i, \Sigma_{l_i}, \tau_{i+1}^*$ , and  $x(\cdot)$  on  $]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$  such that (75) holds with some  $\tau_{i+1}^*$  ( $\tau_{i+1}^* < \tau_i^*$ ) follows from (74), which is true for each  $l'$  in  $\{1, \dots, l_0\}$  such that  $(\tau_i^*, x(\tau_i^*)) \in \mathcal{T}_{m(l')}$ . Indeed, if there are  $l' \neq l_i$  in  $\{1, \dots, l_0\}$ ,  $\bar{\tau}_{i+1}^* < \tau_i^*$ , and  $\bar{x}(\cdot) \in C(]\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_i^*]; \mathbf{R}^n) \cap C^1(]\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_i^*]; \mathbf{R}^n)$  such that

$$\bar{x}(\tau_i^*) = x(\tau_i^*); \quad \bar{x}(t) \in \Sigma_{l'} \quad \text{for all } t \in ]\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_i^*[$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = F(t, \bar{x}(t), v(t, \bar{x}(t))) = F(t, \bar{x}(t), v_{l'}(t, \bar{x}(t))), \quad t \in ]\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_i^*[$$

$$\vartheta_{l'}(\bar{\tau}_{i+1}^*, \bar{x}(\bar{\tau}_{i+1}^*)) = \bar{\tau}_{i+1}^*, \quad (77)$$

then we get from (74) and from the definition of  $l_i : s_{l_i}(t, \bar{x}(t)) > 0, t_{l_i}(t, \bar{x}(t)) < 0$  for  $t \in ]\bar{\tau}, \tau_i^*[$  with some  $\bar{\tau} \in ]\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_i^*[$ , which yields:  $(t, \bar{x}(t)) \in \Sigma_{l'} \cap \Sigma_{l_i}$  for all  $t \in ]\bar{\tau}, \tau_i^*[$ . Since  $\Sigma_{l'} \cap \Sigma_{l_i} = \emptyset$  for each  $l' \neq l_i$ , we obtain that  $l' = l_i$ , which proves the uniqueness of  $l_i$  and of  $\Sigma_{l_i}$ . This, in turn, implies that  $\bar{x}(t) = x(t)$  for all  $t \in ]\hat{\tau}, \tau_i^*[$ , where  $\hat{\tau} := \max\{\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_{i+1}^*\}$ . The function  $s_{l_i}(t) = t - \vartheta_{l_i}(t, x(t))$  is strictly increasing on  $]\bar{\tau}_{i+1}^*, \tau_i^*] \cup ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*]$ ; therefore, from the equalities  $\vartheta_{l_i}(\bar{\tau}_{i+1}^*, \bar{x}(\bar{\tau}_{i+1}^*)) = \bar{\tau}_{i+1}^*, \vartheta_{l_i}(\tau_{i+1}^*, x(\tau_{i+1}^*)) = \tau_{i+1}^*$ , it follows that  $\hat{\tau} = \bar{\tau}_{i+1}^* = \tau_{i+1}^*$ , which proves the uniqueness of  $\tau_{i+1}^*$ , and the uniqueness of  $x(\cdot)$  on  $]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$ . Let us remark that  $(t, x(t)) \in \mathcal{T}$  for all  $t \in ]\tau_{i+1}^*, \tau_i^*[$ , which follows from

the inclusion  $(t, x(t)) \in \mathcal{T}$  for  $t \in [\tau_i^*, T]$  (see the induction assumption) and from the choice of  $\delta$  (see (36), (60)). Finally, (73), and (74) with  $l' = l$  yield

$$\begin{aligned} \frac{3(t-\tau)}{2} \geq s_l(t, x(t)) - s_l(\tau, x(\tau)) &\geq \frac{(t-\tau)}{2}; & \frac{3(t-\tau)}{2} \geq t_l(t, x(t)) - t_l(\tau, x(\tau)) &\geq \\ &\geq \frac{(t-\tau)}{2} & \text{for all } t > \tau, \{t, \tau\} \subset [\tau_{i+1}^*, T], & l = 1, \dots, l_0, \end{aligned}$$

which implies that  $s_{l_i}(t, x(t)) > 0 > s_{l_j}(t, x(t))$ ,  $j=1, \dots, i-1$ , and therefore  $l_i \neq l_j$  for all  $j=1, \dots, i-1$ ; hence  $l_j \neq l_q$  for all  $q \neq j$ ,  $\{q, j\} \subset \{1, \dots, i\}$ . The construction of  $\Sigma_{l_j}$ ,  $\tau_{j+1}^*$ , and  $x(t)$ ,  $t \in [\tau_{j+1}^*, \tau_j^*]$  is complete.

Thus, we obtain by the induction sequences  $\{l_j\}$ ,  $\{\Sigma_j\}$ ,  $\tau_j^*$ , and the trajectory  $x(\cdot)$  of system (31) with the feedback control  $v=v(t, x)$  given by (68) such that  $x(T)=x^T$ ,  $\tau_{j+1}^* < \tau_j^*$ ;  $l_i \neq l_j$  for all  $i \neq j$ , and (69)-(71) hold for all  $j=1, 2, \dots$ . If  $\tau_{i+1}^* = t_1$  for some  $i \in \mathbf{N}$ , we put  $N:=i$ , and the proof of lemma 7.1 is complete. Otherwise, sequences  $\{\tau_i^*\}$ , and  $\{l_i\}$  are infinite, which is impossible because  $\{l_i\} \subset \{1, \dots, l_0\}$  and  $l_i \neq l_j$ , whenever  $i \neq j$ . The proof of lemma 7.1. is complete.

Finally, we put  $\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{m(l_i)}$ , and  $v_i(t, x) := v_{l_i}(t, x)$ , for all  $(t, x) \in \mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{m(l_i)}$ ,  $i=1, \dots, N$ . Then we obtain from lemma 7.1 that our sequences of  $\mathcal{T}_i$  and  $v_i(\cdot, \cdot)$  satisfy all the conditions of lemma 6.1. The proof of lemma 6.1. is complete.

**Acknowledgement.** The author discussed this work with Professor Jimmie Lawson during his one week visit to the Department of Mathematics, Louisiana State University in July 2005. The author is grateful to Professor Jimmie Lawson for fruitful discussions, for having organized the visit, and for warm hospitality.

## REFERENCES

1. Celikovsky S., Nijmeijer H. Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case // Systems and Control Letters. – 1996. – **27**. – P. 135–144.
2. Cheng D., Isidori A., Respondek W., Tarn T.J. Exact linearization of nonlinear systems with outputs // Math. Syst. Theory. – 1988. – **21**. – P. 63–83.
3. D'Andrea B., Levine J. C.A.D. for nonlinear systems decoupling, perturbations rejection and feedback linearization with applications to the dynamic control of a robot arm // Algebraic and Geom. Meth. Nonlinear Control Theory. M. Fliess and M. Hazewinkel eds. (Reidel, Dordrecht). – 1986. – P. 545–572.
4. Fliess M., Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples // Int. J. Control. – 1995. – **61**. – P. 1327–1361.
5. Hunt L.R., Su R., Meyer G., Global transformations of nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1983. – **28**. – P. 24–31.

6. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bull. Acad. Sci. Polonaise Ser. Sci. Math. – 1980. – **28**. – P. 517–522.
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of Theory of Functions and Functional Analysis. – M.: Nauka, 1989. – 624 P.
8. Korobov V.I. Controllability and stability of some nonlinear systems // Differential Equations. – 1973. – **9**. – P. 614–619.
9. Korobov V.I. Reduction of the controllability problem to a boundary problem // Differential Equations. – 1976. – **12**. – P. 1310–1312.
10. Korobov V. I., Pavlichkov S. S. Controllability of the triangular systems that are not equivalent to the canonical systems // Vestnik Kharkovskogo Natsional'nogo Universiteta. Ser. Matematika, Prikladnaya Matematika i Mechanika. – 2000. – **475**. – P. 323–329.
11. Korobov V. I., Pavlichkov S. S., Schmidt W. H. The controllability problem for certain nonlinear integro-differential Volterra systems // Optimization. – 2001. – **50**. – P. 155–186.
12. Korobov V. I., Pavlichkov S. S., Schmidt W. H. Global robust controllability of the triangular integro-differential Volterra systems // J. of Math. Anal. Appl. – 2005. – **309**. – P. 743–760.
13. Korobov V. I., Pavlichkov S.S. Global properties of the triangular systems in the singular case // submitted. The preliminary version is available at ArXiv math.OC/0509064
14. Lee A.B., Marcus L. Foundations of the optimal control theory. – M.: Nauka, 1972. – 576 p.
15. Marino R. Feedback linearization techniques in robotics and power systems // Algebraic and Geom. Meth. in Nonlinear Contr. Theory. M. Fliess and M. Hazewinkel eds. (Reidel, Dordrecht). – 1986. – P. 523–543.
16. Pavlichkov S. S. The complete controllability of some classes of triangular systems which are not reducible to the canonical form. Kharkov: PhD Thesis, Manuscript, V.N. Karazin Kharkov National Univ., 2001.
17. Respondek W. Global aspects of linearization, equivalence to polynomial forms and decomposition of nonlinear control systems // Algebraic and Geom. Meth. in Nonlinear Control Theory. M. Fliess and M. Hazewinkel eds. (Reidel, Dordrecht). – 1986. – P. 257–284.
18. Singh S.N., Bossart T.C. Exact feedback linearization and control of space station using CMG // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1993. – **38**. – P. 184–187.

19. Sklyar G.M., Sklyar K.V., Ignatovich S. Yu. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class  $C^1$  // Syst. Contr. Lett. - 2005. - **54**. - P. 1097-1108.
20. Sternberg S. Lectures on differential geometry. - M.: Mir, 1970. - 412 P.
21. Sussmann H.J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc. - 1973. - **180**. - P. 171-188.
22. Tsiniias J. A theorem on global stabilization of nonlinear systems by linear feedback // Syst. Contr. Lett. - 1991. - **17**. - P. 357-362.
23. Tsiniias J. Partial-state global stabilization for general triangular systems // Syst. Contr. Lett. - 1995. - **24**. - P. 139-145.
24. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Upravlyaemost' nelineinikh sistem i sintez algoritmov upravleniya // Dokl. AN SSSR. Ser. Kibernetika i teoriya regulirovaniya. - 1981. - **258**. - P. 805-809.