

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЕ С ПАРАТАКТИЧЕСКИМИ ПОВОРОТАМИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. Лейбин

Известно, что аналитической функции комплексного переменного $\omega = f(z)$, где $z = x_1 + ix_2$, $\omega = x_3 + ix_4$, $i = \sqrt{-1}$, соответствует в четырехмерном пространстве двумерная поверхность F^2 , имеющая в декартовых координатах x_1, x_2, x_3, x_4 уравнения:

$$x_3 = u(x_1, x_2), \quad x_4 = v(x_1, x_2),$$

причем функции u и v удовлетворяют известным условиям Коши-Римана. Поверхность F^2 называется аналитической [1]; ее свойства впервые были изучены К. Коммерелем [2] и Л. П. Эйзенхартом [3, 4]. Поверхность F^2 , соответствующая функции f , находится во взаимно однозначном соответствии с римановыми поверхностями функций f и f^{-1} , что дало Коммерелю повод назвать поверхность F^2 тоже «поверхностью Римана». Это соответствие устанавливается ортогональным проектированием поверхности F^2 на координатные плоскости (x_1, x_2) и (x_3, x_4) , т. е. на плоскости комплексных переменных z и ω .

В настоящей статье для поверхности F^2 дается чисто геометрическая характеристика, находящаяся в тесной связи с некоторыми свойствами паратактических поворотов четырехмерного евклидова пространства. Эти повороты, фактически открытые еще Л. Эйлером, весьма удобно описываются при помощи кватернионов (см., напр., [6—9], [10] — стр. 495); некоторые свойства их инвариантных плоскостей рассмотрены в § 1. Указанная в теореме 1 геометрическая характеристика поверхности F^2 оказывается эквивалентной условиям Коши-Римана, и поэтому отображение плоскости (x_1, x_2) на плоскость (x_3, x_4) при помощи поверхности F^2 (аналогичное отображению оси x на ось y при помощи кривой — графика функции $y = f(x)$ с действительными x и y) является аналитической функцией.

§ 1. О паратактических поворотах четырехмерного пространства

1°. В четырехмерном евклидовом пространстве E^4 введем декартову прямоугольную систему координат с началом O и ортами осей

e_1, e_2, e_3, e_4 . Всякий вектор $p = \sum_{\alpha=1}^4 p_\alpha e_\alpha = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ будем запи-

сывать в виде кватерниона:

$$p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k. \quad (1)$$

Тем самым для векторов в E^4 , наряду со скалярным умножением

$$(p, q) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4, \quad (2)$$

вводится гиперкомплексное умножение, которое будем записывать без скобок:

$$pq = p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 - p_4 q_4 + (p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_4 - p_4 q_3) i + \\ + (p_1 q_3 - p_2 q_4 + p_3 q_1 + p_4 q_2) j + (p_1 q_4 + p_2 q_3 - p_3 q_2 + p_4 q_1) k. \quad (3)$$

В частности, согласно формуле (1), орты координатных осей являются единичными кватернионами:

$$e_1 = 1, e_2 = i, e_3 = j, e_4 = k,$$

причем для них имеется две известные таблицы умножения: скалярного, согласно (2):

$$(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta; \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

и кватернионного, согласно (3):

$$e_1 e_\alpha = e_\alpha e_1 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4); \quad e_2 e_2 = e_3 e_3 = e_4 e_4 = -e_1; \\ e_2 e_3 = e_4, \quad e_3 e_4 = e_2, \quad e_4 e_2 = e_3; \quad e_3 e_2 = -e_4, \quad e_4 e_3 = -e_2, \quad e_2 e_4 = -e_3.$$

Длина $|p|$ вектора p может быть вычислена при помощи обоих видов умножения:

$$|p| = \sqrt{(p, p)} = \sqrt{p \bar{p}} = \sqrt{\bar{p} p} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2},$$

где $\bar{p} = p_1 - p_2 i - p_3 j - p_4 k$ есть кватернион, сопряженный с p .

С помощью формул (2) и (3) легко вывести следующие формулы:

$$(sp, q) = (p, \bar{s}q); \quad (ps, q) = (p, q\bar{s}). \quad (4)$$

Мы будем также применять обозначение

$$V(p) = p - p_1 = p_2 i + p_3 j + p_4 k^*. \quad (5)$$

2°. Пусть R^4 есть векторное линейное пространство евклидова точечного пространства E^4 , т. е. совокупность всех свободных векторов пространства E^4 ; удобнее всего будет представлять себе векторы R^4 как радиусы-векторы точек M в E^4 . Через R^m мы будем обозначать m -мерные линейные подпространства R^4 ($0 \leq m < 4$).

Как известно (см., например, [6—10]), всякое ортогональное преобразование R^4 (или поворот E^4 вокруг начала) может быть представлено формулой

$$p' = apb,$$

где a и b — единичные векторы, $|a| = |b| = 1$; это представление единственно с точностью до одновременного изменения знаков векторов a и b .

* Название для $V(p)$ «векторная часть кватерниона» [5] для нас неприемлемо: оно звучало бы как «векторная часть вектора».

В тех случаях, когда $a=1$ или $b=1$, поворот будет *паратактическим*; эти повороты имеют вид:

$$p' = ap \quad (6)$$

или

$$p' = pa. \quad (7)$$

При паратактических поворотах (см., например, [10], стр. 91, 495) инвариантной является каждая плоскость R_p^2 , проходящая через векторы p и p' . (Эти векторы коллинеарны только в двух случаях: если $a=1$, и преобразования (6) и (7) суть тождества, и если $a=-1$, и преобразования (6) и (7) являются симметрией относительно начала; в обоих случаях инвариантны все плоскости R^4).

Все векторы R^4 поворачиваются преобразованием (6) или (7) на один и тот же угол, который легко вычисляется при помощи формулы (4); положив $|p|=1$, для (6) получаем:

$$\cos(\widehat{p, p'}) = (p, p') = (p, ap) = (pp, a) = (e_1, a) = a_1; \quad (8)$$

тот же результат получим и для преобразования (7). Из этой формулы следует, что в случае $a_1 = 0$, т. е. когда $a = V(a)$ все векторы R^4 поворачиваются преобразованием (6) или (7) на прямой угол (при $a_1 = 0$ матрицы обоих преобразований кососимметрические).

Преобразования, обратные преобразованиям (6) и (7), соответственно, имеют вид:

$$p' = \bar{a}p \text{ и } p' = p\bar{a};$$

они имеют, очевидно, те же самые инвариантные плоскости, что и преобразования (6) и (7). Поэтому векторы p , ap и $\bar{a}p$ компланарны, также как и векторы p , pa и $p\bar{a}$.

В отличие от произвольной плоскости R^2 пространства R^4 мы будем обозначать плоскость инвариантную относительно (6) через R^2 , инвариантную относительно (7) — через $\bar{R}^2$.

3°. Семейство $\{R^2\}$ всех плоскостей R^2 обладает следующими свойствами.

1) Каждая плоскость R^2 вполне определяется одним лежащим в ней вектором p и не зависит от выбора в ней этого вектора. (Доказательство элементарно: достаточно взять вектор $q = ap + \beta p'$ и показать, что вектор $q' = aq$ также является линейной комбинацией векторов p и p'). Отсюда следует:

2) Семейство $\{R^2\}$ содержит ∞^2 плоскостей; всякие две плоскости семейства имеют общим только нулевой вектор (т. е. в E^4 — только одну общую точку — начало).

3) Всякие две плоскости из $\{R^2\}$ равнонаклонны. Это значит, что угол φ между вектором, лежащим в одной из этих плоскостей, и его ортогональной проекцией на другую плоскость один и тот же для всех векторов, лежащих в этих плоскостях.

В самом деле, пусть векторы p и q определяют плоскости R_p и R_q и пусть q есть ортогональная проекция p на R_q , так что

$$p = q - s; (s, q) = (s, aq) = (s, \bar{a}q) = 0.$$

Выполняя преобразование (6), получим

$$ap = aq - as;$$

при помощи формулы (4) найдем:

$$(as, aq) = (\bar{a}as, q) = (s, q) = 0; (as, q) = (s, \bar{a}q) = 0,$$

т. е. вектор as также перпендикулярен R_q^2 и, следовательно, вектор aq также является ортогональной проекцией вектора ap на R_q^2 ;

угол же $\widehat{(ap, aq)} = \widehat{(p, q)}$, так как (6) есть движение.

Это доказательство непригодно в случае, когда векторы p и q перпендикулярны и, следовательно, q перпендикулярен плоскости R_p^2 . Но тогда $(p, q) = 0$ и $(ap, q) = 0$, откуда, по формуле (4) или из того, что (6) есть движение, следует, что $(ap, aq) = 0$ и $(p, aq) = 0$, т. е. что вектор aq также перпендикулярен R_p^2 , и плоскости R_p^2 и $\tilde{R}_q^2$ взаимно вполне ортогональны.

Таким образом, в семействе $\{R^2\}$ для каждой плоскости R_p^2 есть равнонаклонная к ней плоскость R_q^2 под любым углом наклона в пределах $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. (Если угол между векторами p и q тупой, то угол между p и $-q$ острый, но $R_{-q}^2 \equiv R_q^2$).

4) Ортогональное проектирование плоскостей из $\{R^2\}$ друг на друга есть преобразование подобия с коэффициентом подобия θ , лежащим в пределах $0 \leq \theta < 1$. Это следует непосредственно из свойства 3 и формулы (8): равнобедренный треугольник со сторонами p и ap проектируется в подобный треугольник со сторонами q и aq ; $\theta = 0$ в случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

4°. Всеми свойствами, перечисленными в п. 3°, обладает также и семейство $\{\tilde{R}^2\}$ плоскостей, инвариантных относительно поворота (7).

Рассмотрим оба семейства $\{R^2\}$ и $\{\tilde{R}^2\}$ вместе. Очевидно, что в R^4 каждый вектор p определяет две проходящие через него плоскости R_p^2 и $\tilde{R}_p^2$, которые вообще различны вследствие некоммутативности умножения кватернионов. Выясним, можно ли и как нужно выбрать вектор p , чтобы обе плоскости R_p^2 и $\tilde{R}_p^2$ слились в одну.

Согласно п. 3°, оба преобразования (6) и (7) поворачивают вектор p на один и тот же угол; кроме того, векторы ap , p и $\bar{a}p$ в случае (6) и pa , p и $p\bar{a}$ в случае (7) компланарны. Поэтому, чтобы плоскости R_p^2 и $\tilde{R}_p^2$ слились, вектор p должен удовлетворять либо равенству

$$pa = ap, \quad (9)$$

либо равенству

$$pa = \bar{a}p. \quad (10)$$

С помощью формулы (3) нетрудно найти, что равенство (9) выполняется в том и только в том случае, если

$$p_2 : p_3 : p_4 = a_2 : a_3 : a_4,$$

т. е. если векторы $V(p)$ и $V(a)$ коллинеарны. На компоненту p_1 равенство (9) не налагает никаких условий. Поэтому вектор p может быть взят в виде:

$$p = p_1 + \lambda V(a) = \mu + \lambda a, \quad (11)$$

где p_1 , λ и μ — произвольные вещественные числа.

Плоскость R_p^2 , определенная таким вектором, проходит через векторы e_1 и a . В самом деле, всякий вектор плоскости R_p^2 можно записать в виде

$$q = \alpha p + \beta a p = (\alpha + \beta a) p = (\alpha + \beta a)(p_1 + \lambda V(a)).$$

Если взять $\beta = -\lambda$ и $\alpha = p_1 + \lambda a_1$, то будет $q = \bar{p}p = |p|^2 e_1$, т. е. вектор e_1 лежит в R_p^2 ; вектор же $a = a e_1$ и поэтому также лежит в R_p^2 . В качестве базиса плоскости R_p^2 можно взять эти два вектора, e_1 и a (этот базис нормированный), или векторы e_1 и $V(a)$ (этот базис ортогональный), самую плоскость удобно обозначить через R_{1a}^2 .

Равенство (10) эквивалентно таким условиям:

$$p_1 = 0, (V(a), V(p)) = a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 = 0,$$

откуда следует, что вектор p должен быть перпендикулярен векторам e_1 и a , а значит, и плоскости R_{1a}^2 .

5°. Итак, если $a = \pm 1$, существует только две плоскости, инвариантные относительно обоих поворотов (6) и (7); одна из них R_{1a}^2 проходит через векторы e_1 и a , другая ей вполне ортогональна. Все остальные плоскости семейств $\{R^2\}$ и $\{\tilde{R}^2\}$ равнонаклонны к ним.

Выберем новую систему координат: вектор e_1 оставим неизменным, а вектор e_2 возьмем в направлении вектора $V(a)$. Тогда сам вращающий вектор a в новой системе координат будет таким:

$$a = a_1 + a_2 i \quad (a_3 = a_4 = 0).$$

Плоскость R_{1a}^2 станет теперь координатной плоскостью R_{12}^2 в пространстве R^4 (или E_{12}^2 в E^4), вторая инвариантная относительно (6) и (7) плоскость станет координатной плоскостью R_{34}^2 (или E_{34}^2) с базисными векторами e_3 и e_4 . Для определения всего семейства $\{R^2\}$ или $\{\tilde{R}^2\}$ теперь достаточно взять вектор $a = i$; всякая плоскость R_p^2 будет

иметь базис, состоящий из векторов p и ip , а плоскость $\tilde{R}_p^2$ — базис из векторов p и pi . Если взять $|p| = 1$, то оба эти базиса будут ортонормированными.

Таким образом, в этой системе координат каждая плоскость R^2 вполне характеризуется тем, что вместе с каким-либо своим вектором p она содержит также вектор ip , а плоскость $\tilde{R}^2$ — тем, что вместе с вектором p она содержит вектор pi .

6°. В пространстве E^4 для каждой плоскости E^2 существует ∞^2 вполне параллельных ей плоскостей; все они имеют общие базисные векторы. Плоскости, вполне параллельные плоскостям R^2 ($\tilde{R}^2$), мы будем обозначать через E^2 ($\tilde{E}^2$). Если плоскость E^2 или $\tilde{E}^2$ проходит через начало координат, то она инвариантна относительно преобразования, соответственно, (6) или (7), которые в E^4 будут иметь вид

$$r' = ar, \quad r' = ra \quad (6'), (7')$$

(они, очевидно, содержат в себе формулы (6) и (7): $p = r_2 - r_1$).

Таким образом, множество $\{E^2\}$ содержит ∞^4 плоскостей E^2 и имеет $\{R^2\}$ своим подмножеством инвариантных плоскостей. Само множество $\{E^2\}$ инвариантно в целом, но его плоскости E^2 , не являющиеся R^2 , не инвариантны; преобразование (6') вращает такую плос-

кость вокруг вполне параллельной ей R^2 , сохраняя эту полную параллельность. Последнее утверждение легко доказывается, если рассмотреть вектор n — перпендикуляр, опущенный на плоскость E^2 из начала координат: вектор an также будет перпендикулярен плоскости E^2 , и поэтому конец вектора an не может лежать в плоскости E^2 в ее исходном положении. При преобразовании (6') плоскости E^2 меняются местами.

Из свойства 1 п. 3° и из п. 5° следует, что каждая плоскость E^2 вполне определяется двумя своими точками (любыми), или одной точкой и одним вектором, лежащими в ней. Через каждую прямую в E^4 проходит одна единственная плоскость E^2 .

Без изменений на плоскости E^2 распространяются свойства 3 и 4 п. 3°, причем для угла наклона φ двух плоскостей E^2 допустимым будет еще значение $\varphi = 0$ в случае их полной параллельности.

7°. Все сказанное в п. 6° относительно плоскостей E^2 справедливо и для плоскостей $\tilde{E}^2$ в связи с преобразованием (7').

Выясним теперь чисто геометрическое различие между плоскостями E^2 и $\tilde{E}^2$. Для этого снова выберем специфическую систему координат, описанную в п. 5°, в которой вращающий вектор a можно заменить на i , и возьмем две плоскости E_p^2 и $\tilde{E}_p^2$, проходящие через некоторую прямую с направляющим вектором p .

Возьмем в плоскостях E_p^2 и $\tilde{E}_p^2$ по вектору, соответственно,

$$s = s(t) = p \cos t + ip \sin t; \quad \tilde{s} = \tilde{s}(t) = p \cos t + pi \sin t,$$

которые отложим из какой-либо общей точки A этих плоскостей.

При $t=0$ $s = \tilde{s} = p$; при возрастании t векторы s и $\tilde{s}$ равномерно вращаются каждый в своей плоскости вокруг точки A .

Так как $ip = \{-p_2, p_1, -p_4, p_3\}$, а $pi = \{-p_2, p_1, p_4, -p_3\}$, то проекции векторов s и $\tilde{s}$ на координатные плоскости E_{12}^2 и E_{34}^2 имеют вид:

$$s_{12}(t) \equiv \tilde{s}_{12}(t) = \{p_1 \cos t - p_2 \sin t, p_2 \cos t + p_1 \sin t, 0, 0\};$$

$$s_{34}(t) = \{0, 0, p_3 \cos t - p_4 \sin t, p_4 \cos t + p_3 \sin t\};$$

$$\tilde{s}_{34}(t) = \{0, 0, p_3 \cos t + p_4 \sin t, p_4 \cos t - p_3 \sin t\}.$$

Мы видим, что проекции векторов s и $\tilde{s}$ на плоскость E_{12}^2 совпадают и, следовательно, вращаются в одну и ту же сторону (тоже равномерно), а проекции на плоскость E_{34}^2 равномерно вращаются в противоположных направлениях: $\tilde{s}_{34}(t) \equiv s_{34}(-t)$. Проекция вектора s вращается вокруг точек A_{12} и A_{34} — проекции точки A на плоскости E_{12}^2 и E_{34}^2 .

8°. Рассмотрим отображение друг на друга координатных плоскостей E_{12}^2 и E_{34}^2 , устанавливаемое при помощи плоскости E^2 в E^4 : точки M_{12} и M_{34} плоскостей E_{12}^2 и E_{34}^2 будем считать соответственными, если они являются ортогональными проекциями, соответственно, на E_{12}^2 и E_{34}^2 некоторой точки M плоскости E^2 . В общем случае это отображение, очевидно, является аффинным; оно вырождается при слабой или полной ортогональности (или параллельности) E^2 одной из плоскостей E_{12}^2 и E_{34}^2 . Из п. 7° и из свойства 4 п. 3° ясно,

что в случае, когда отображение устанавливается при помощи плоскости E_p^2 или $\tilde{E}_p^2$ общего положения, отображение будет подобием; если отображать E_{12}^2 на E_{34}^2 , т. е. $M_{34} = f(M_{12})$, то коэффициент θ подобия f будет таким:

$$\theta = |p_{34}| : |p_{12}| = \theta'' : \theta',$$

где $p_{12} = \{p_1, p_2, 0, 0\}$, $p_{34} = \{0, 0, p_3, p_4\}$ — проекции p на E_{12}^2 и E_{34}^2 ; при этом сама плоскость E_p^2 ($\tilde{E}_p^2$) отображается на обе координатные плоскости E_{12}^2 и E_{34}^2 подобно с коэффициентами подобия $\theta' = |p_{12}| : |p|$ и $\theta'' = |p_{34}| : |p|$.

Очевидно, $0 \leq \theta \leq \infty$; $\theta = 0$ при E_p^2 вполне параллельной E_{12}^2 ; $\theta = \infty$ при E_p^2 вполне ортогональной E_{12}^2 .

Будем считать направление вращения положительным в плоскости E_{12}^2 от вектора e_1 к вектору e_2 на наименьший угол, а в E_{34}^2 — от e_3 к e_4 . Из п. 7° следует, что отображение $M_{34} = f(M_{12})$ является подобием I рода (с сохранением направления вращения), если оно определяется плоскостью E^2 , и подобием II рода (с изменением направления вращения на противоположное), если оно определяется плоскостью $\tilde{E}^2$.

Заметим, что множества $\{E^2\}$ и $\{\tilde{E}^2\}$ совершенно равноправны: если принять в плоскости E_{34}^2 направление вращения положительным от e_4 к e_3 , то плоскости $\tilde{E}^2$ будут определять отображение подобия I рода, а E^2 — II рода.

9°. Легко убедиться (так же, как в п. 7°), что если в качестве вращающего вектора в (6') и (7') взять вектор $a = j$, то плоскости E^2 и $\tilde{E}^2$ будут равнонаклонны к координатным плоскостям E_{13}^2 и $\tilde{E}_{42}^2$, причем плоскости E^2 определяют (как в п. 8°) отображение подобия I рода, а $\tilde{E}^2$ — II рода, если направление вращения считать положительным в E_{13}^2 от e_1 к e_3 , а в E_{42}^2 — от e_4 к e_2 .

Наконец, если в (6') и (7') взять $a = k$, то плоскости E^2 ($\tilde{E}^2$) будут определять отображение подобия I (II) рода координатной плоскости E_{14}^2 на E_{23}^2 , если направление вращения считать положительным в E_{14}^2 от e_1 к e_4 , а в E_{23}^2 от e_2 к e_3 .

§ 2. Геометрическое определение аналитической функции

10°. Рассмотрим в E^4 некоторую двумерную поверхность F^2 , ортогонально проектирующуюся на плоскость E_{12}^2 в область G_{12} и на плоскость E_{34}^2 в область G_{34} ; пусть это проектирование устанавливает взаимно однозначное соответствие поверхности F^2 каждой из областей G_{12} и G_{34} . (Такие поверхности существуют: примером может служить плоскость E^2 , не параллельная ни E_{12}^2 , ни E_{34}^2). Каждая точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ поверхности F^2 проектируется на E_{12}^2 в точку $M_{12}(x_1, x_2, 0, 0)$ области G_{12} и на плоскость E_{34}^2 в точку $M_{34}(0, 0, x_3, x_4)$ области G_{34} . Тем самым устанавливается взаимно однозначное отображение $M_{34} = f(M_{12})$ области G_{12} на G_{34} , которое аналитически выра-

жается уравнениями поверхности F^2 :

$$x_3 = u(x_1, x_2), \quad x_4 = v(x_1, x_2). \quad (12)$$

Функции u и v мы будем считать дифференцируемыми и удовлетворяющими в области G_{12} условию

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0. \quad (13)$$

Таким образом, поверхность F^2 в каждой своей точке имеет касательную плоскость.

Теорема 1. Чтобы отображение $M_{34} = f(M_{12})$ было конформным I рода (т. е. с сохранением направления отсчета углов), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке поверхности F^2 выполнялось условие: если p — вектор, касательный к поверхности F^2 в данной точке M , то и вектор ip тоже должен быть касательным к F^2 в точке M .

Доказательство этой теоремы будет совершенно прозрачным, если точками M_{12} и M_{34} мы будем изображать комплексные числа

$$z = x_1 + ix_2 \quad \text{и} \quad w = x_3 + ix_4,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Отображение f тогда представляется функцией комплексного переменного

$$w = f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2), \quad (14)$$

и достаточно доказать, что выраженное в теореме 1 условие эквивалентно условиям Коши-Римана для функций u и v .

Запишем уравнение поверхности F^2 в векторной форме:

$$r = r(x_1, x_2) = \{x_1, x_2, u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)\} = x_1 + x_2 i + u j + v k. \quad (15)$$

В качестве касательного вектора естественно взять дифференциал:

$$p = dr = \{dx_1, dx_2, du, dv\}. \quad (16)$$

. Достаточность. Условие, выраженное в теореме, означает, что вектор $q = ip = idr$ является также дифференциалом функции (15). Обозначим дифференцирование в направлении вектора q символом δ ; тогда

$$\delta r = \{\delta x_1, \delta x_2, \delta u, \delta v\} = idr = -dx_2, dx_1, -dv, du\}. \quad (17)$$

Приравнявая первые две координаты, получаем:

$$\delta x_1 = -dx_2, \quad \delta x_2 = dx_1; \quad (18)$$

равенства (18) выражают ортогональность направлений дифференцирования d и δ в плоскости E_{12}^2 , т. е. в области G_{12} : $\frac{\delta x_2}{\delta x_1} = -\frac{dx_1}{dx_2}$. Эти направления являются ортогональными проекциями на E_{12}^2 направлений p и q .

Используя равенства (18), приравняем в (17) третьи координаты:

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \delta x_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 = -dv = \\ &= -\frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2, \end{aligned}$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)dx_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx_2 = 0. \quad (19)$$

Аналогично, приравнявая четвертые координаты, получим:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)dx_2 = 0. \quad (20)$$

Так как заведомо $|dz|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0$, то определитель системы уравнений (19) и (20) равен нулю:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 = 0,$$

откуда получаем уравнения Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}. \quad (21)$$

Так как условие теоремы 1 должно выполняться во всех точках поверхности F^2 , то условия (21) должны выполняться во всех точках области G_{12} , т. е. функция (14) будет аналитической во всей области G_{12} изменения комплексной переменной z .

Необходимость. Пусть функция (14) аналитическая, следовательно, отображение f конформно I рода, и условия (21) выполнены в каждой точке области G_{12} . Возьмем в какой-либо точке области G_{12} два взаимно перпендикулярных направления дифференцирования d и δ так, чтобы

$$\delta x_1 = -dx_2, \quad \delta x_2 = dx_1.$$

С помощью (21) легко докажем, что при этом $\delta u = -dv$, $\delta v = du$ и, следовательно, $\delta r = i dr$, т. е. условие теоремы выполнено.

11°. Совершенно так же доказывается

Теорема 2. Чтобы отображение $M_{34} = f(M_{12})$ было конформным II рода (т. е. с изменением направления отсчета углов), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке поверхности F^2 было выполнено условие: если p — вектор, касательный к поверхности F^2 в точке M , то и вектор pi должен быть касательным к F^2 в этой точке.

Теоремы 1 и 2 можно сформулировать так:

Чтобы отображение $M_{34} = f(M_{12})$ было конформным I (II) рода, необходимо и достаточно, чтобы все касательные плоскости поверхности F^2 принадлежали семейству плоскостей $\{E^2\}$ ($\{\tilde{E}^2\}$), инвариантному относительно паратактического поворота $r' = ir$ ($r' = ri$).

Таким образом, всякая поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы 1 — обозначим ее через F^2 , — геометрически задает некоторую аналитическую функцию комплексного переменного $w = f(z)$, а поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы 2 — обозначим ее через $\tilde{F}^2$, — функцию $w = \bar{f}(\bar{z})$, сопряженную некоторой аналитической функцией $\bar{f}$.

В частности, всякая плоскость E^2 является поверхностью типа F^2 и задает линейную функцию $w = Az + B$, где A и B — некоторые комплексные числа (Коммерель в [2] обнаружил это свойство у касательной и нормальной плоскостей в каждой точке поверхности F^2 ; очевидно, эти плоскости принадлежат множеству $\{E^2\}$), а всякая плоскость $\tilde{E}^2$, аналогично, задает функцию $w = A\bar{z} + B$.

Из теоремы 1 и свойств семейства $\{E^2\}$ (п. 6°) следует, что множество всех аналитических функций $\{f(z)\}$ инвариантно в целом относительно паратактических поворотов вида $r' = ar$, где $a = a_1 + a_2 i$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$ ($a_3 = a_4 = 0$). Аналогично, множество функций $\{f(\bar{z})\}$, где $f(z)$ — аналитическая функция, также инвариантно относительно поворотов $r' = ra$ с таким же вращающим вектором a .

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. М.—Л., Гостехиздат, 1948, § 13.
2. K. Kommerell. Riemannsche Flächen in ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Annalen, том 60, 1905, 548—596.
3. L. P. Eisenhart. Fundamental parametric representation of space curve. Ann. of Math., ser. II, XIII, 1911, 17—35.
4. L. P. Eisenhart. Minimal surfaces in Euclidean four-space. Amer. Journ., 34, 1912, 215—236.
5. Э. Чезаро. Элементарный учебник алгебраического анализа, ч. 1, М.—Л., 1936.
6. A. Hurwitz. Über die Zahlentheorie der Quaternionen. Gött. Nachr., 1896, 313—340, или Werke, II, 1938, 303—330.
7. A. Hurwitz. Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Berlin, 1919.
8. Д. О. Граве. Аналітична геометрія, Харків—Київ, 1933, стр. 296.
9. Ю. В. Линник. Кватернионы и числа Кэли. УМН, IV, вып. 5(33), 1949, стр. 49—98.
10. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии, М., Гостехиздат, 1955.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. И. Медяник

1. Введение

Настоящая статья посвящена исследованию ряда вопросов для замкнутых выпуклых поверхностей четырехмерного евклидова пространства, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие по параллельности внешних нормалей. Доказанные здесь теоремы являются обобщениями известных теорем единственности А. Д. Александрова для выпуклых поверхностей трехмерного пространства.

Напомним содержание обобщаемых теорем.

Будем говорить, что один многоугольник помещается в другом, если все точки первого принадлежат второму. Если, кроме того, многоугольники не равны, то будем говорить, что первый многоугольник помещается строго внутри второго.

Для выпуклых многоугольников с попарно параллельными сторонами А. Д. Александров доказал следующую теорему [1].

Теорема А. Если два выпуклых многоугольника нельзя поместить один в другом путем параллельного переноса, то разность длин их параллельных сторон меняет знак не менее четырех раз при обходе вокруг любого из этих многоугольников.

С помощью этой теоремы А. Д. Александров доказал теорему единственности для замкнутых выпуклых многогранников трехмерного евклидова пространства. Эта теорема утверждает, что не существует двух различных с точностью до параллельного переноса выпуклых многогранников с попарно параллельными гранями, если только грани с параллельными внешними нормальными не могут быть помещены одна строго внутри другой путем параллельного переноса [2].

В ряде дальнейших своих работ А. Д. Александров исследовал аналогичные вопросы для регулярных выпуклых поверхностей.

Он доказал, что не существует двух различных с точностью до параллельного переноса выпуклых тел с аналитическими опорными функциями, если только индикатрисы Дюпена в точках с параллельными внешними нормальными не помещаются одна строго внутри другой при совмещении этих точек параллельным переносом [3].

В работе [4] с помощью созданного им аппарата эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка А. Д. Александров снял требование аналитичности, заменив его требованием двухкратной дифференцируемости, но при этом появилось неко-

торое дополнительное условие, необходимое для строгой эллиптичности рассматриваемых уравнений.

2. Формулировка результатов

В п. 3 настоящей статьи обобщается теорема единственности А. Д. Александрова для замкнутых выпуклых многогранников. Как показывает пример, построенный А. В. Погореловым, эта теорема не допускает очевидного обобщения на случай четырехмерного пространства. Действительно, рассмотрим четырехмерный куб и параллелепипед. Пусть по двум измерениям ребра параллелепипеда длиннее ребра куба, а по двум остальным измерениям имеет место обратное. Нетрудно убедиться, что трехмерные грани этих многогранников не помещаются одна в другой. Но в то же время многогранники заведомо различны по построению. Поэтому не может быть и речи об их равенстве.

Если же потребовать непомещаемости строго внутри от всех пар двумерных граней, то теорема становится тривиальной, так как в этом случае из теоремы А. Д. Александрова следует равенство всех пар трехмерных граней. Так возникает вопрос о необходимом для равенства четырехмерных многогранников минимальном числе пар двумерных граней, которые удовлетворяли бы такому условию непомещаемости. Ответ на этот вопрос дает теорема 1.

Теорема 1. Пусть два замкнутых выпуклых четырехмерных многогранника с попарно параллельными гранями таковы, что некоторые пары параллельных двумерных граней удовлетворяют условию непомещаемости одной грани строго внутри другой. Если число таких пар превышает разность между числом двумерных и трехмерных граней, то многогранники равны и параллельно расположены.

То, что требование относительно числа пар минимальное, следует из рассмотренного выше примера А. В. Погорелова. Легко проверить, что для куба и параллелепипеда из этого примера число пар двумерных граней, удовлетворяющих условию теоремы, как раз равно разности между числом двумерных и трехмерных граней.

В п. 4 устанавливается, что теорема единственности А. Д. Александрова для выпуклых тел с аналитическими опорными функциями не допускает прямого обобщения на четырехмерный случай. Этот факт может показаться странным, если добавить, что А. В. Погорелов обобщил эту теорему на случай регулярных бесконечных выпуклых поверхностей n -мерного евклидова пространства [5]. Но пример, построенный в п. 4, убеждает нас в правильности сделанного вывода.

В п. 5 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $H(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — дважды дифференцируемая и положительно однородная первой степени функция. Если в каждой точке второй дифференциал функции H не имеет определенного знака и модули отношений любых его собственных значений (не считая тривиально равного нулю) ограничены сверху и снизу положительными числами, то H — линейная функция.

Так как главные кривизны поверхности являются собственными значениями второго дифференциала ее опорной функции [6], то из теоремы 2 непосредственно следует теорема 3.

Теорема 3. Пусть H' и H'' — дважды дифференцируемые опорные функции двух замкнутых выпуклых гиперповерхностей четырехмерного пространства. Пусть индикатрисы кривизны в точках с параллельными внешними нормальными не помещаются одна строго внутри другой при совмещении этих точек параллельным переносом. Если модули отношений любых разностей главных кривизн в соответствующих точках

ограничены сверху и снизу положительными числами, то поверхности равны и параллельно расположены.

Обе теоремы являются обобщением теорем А. Д. Александрова, доказанных им в работе [4]. При этом удалось перенести само доказательство этих теорем, сделав лишь незначительные изменения.

Определим в каждой точке гиперповерхности четырехмерного пространства двумерные индикатрисы кривизны как обычные индикатрисы Дюпена всевозможных нормальных сечений этой поверхности трехмерными плоскостями. В п. 6 доказывается теорема о двумерных индикатрисах.

Теорема 4. Если все двумерные индикатрисы кривизны двух дважды дифференцируемых замкнутых выпуклых гиперповерхностей четырехмерного пространства не помещаются одна строго внутри другой при совмещении параллельным переносом точек с параллельными внешними нормальными, то такие гиперповерхности равны и параллельно расположены.

3. Доказательство теоремы 1

Из условия теоремы следует, что между ребрами обоих многогранников существует взаимно однозначное соответствие. Отметим ребро знаком плюс, если оно длиннее ребра ему соответствующего, и знаком минус — в противном случае.

Рассмотрим произвольную трехмерную грань одного из многогранников. Обойдем вокруг некоторой его вершины, пересекая ребра, сходящиеся в ней. Если при обходе вокруг вершины мы переходим от ребра со знаком плюс к ребру со знаком минус или наоборот, то будем говорить, что имеет место перемена знака (неотмеченные ребра в расчет не принимаем).

Обозначим N_i число перемен знака при обходе вокруг всех вершин i -той грани. В монографии А. Д. Александрова [1] при доказательстве известной леммы Коши установлено, что

$$N_i \leq 4(\bar{v}_0^i - 2), \quad (1)$$

где $\bar{v}_0^i$ — число вершин грани, к которым подходят отмеченные ребра.

По принципу двойственности неравенство (1) можно записать иначе:

$$\bar{N}_i \leq 4(\bar{v}_2^i - 2), \quad (2)$$

где $\bar{N}_i$ — число перемен знака при обходе вокруг всех многоугольников, а $\bar{v}_2^i$ — число двумерных граней, инцидентных с отмеченными ребрами.

Но $\bar{v}_2^i = v_2^i - m^i$, где v_2^i — число всех двумерных граней, а m^i — число двумерных граней, которые не имеют отмеченных ребер.

Поэтому неравенство (2) примет вид

$$\bar{N}_i \leq 4(v_2^i - m^i - 2). \quad (3)$$

Просуммировав неравенства (3) по всем трехмерным граням, получим

$$N \leq 4(v_2 - v_3 - m), \quad (4)$$

где N — число перемен знака четырехмерного многогранника, v_2 и v_3 — числа двумерных и трехмерных граней, а m — число двумерных граней, не инцидентных ни с одним отмеченным ребром.

Из условия теоремы 1 на основании теоремы А заключаем, что

$$N > 4(v_2 - v_3 - m). \quad (5)$$

Противоречивость неравенств (4) и (5) доказывает теорему 1.

4. Построение примера

Теорема единственности А. Д. Александрова для выпуклых тел с аналитическими опорными функциями, содержание которой сообщалось в п. 1, является следствием его теоремы, утверждающей, что аналитическая опорная функция есть линейная функция, если ее второй дифференциал ни в одной точке не имеет определенного знака [3].

Оказывается, что прямое обобщение этой теоремы на случай четырехмерного пространства невозможно. Это доказывает следующий пример.

Рассмотрим функцию H , которая является разностью опорных функций H_2 и H_1 эллипсоида и сферы четырехмерного пространства:

$$H = H_2 - H_1 = \sqrt{\Sigma a_i^2 x_i^2} - a \sqrt{\Sigma x_i^2}.$$

Функция H — аналитическая. Для того, чтобы доказать невозможность указанного обобщения, мы покажем, что можно подобрать a , a_i так, что второй дифференциал функции H будет знакопеременной формой в каждой точке.

$$d^2H = \sum_{i,j} \left(\frac{a_i^2 H_2^2 \delta_j^i - a_i^2 a_j^2 x_i x_j}{H_2^3} - \frac{a^2 H_1^2 \delta_j^i - a^4 x_i x_j}{H_1^3} \right) dx_i dx_j.$$

В силу того, что функция H — положительно однородная первой степени, ограничимся рассмотрением d^2H на единичной сфере, для чего введем новые переменные ξ_i , удовлетворяющие условию $\Sigma \xi_i^2 = 1$. Тогда второй дифференциал функции примет вид

$$d^2H = \sum_{i,j} \left(\frac{H_2^2 (a_i^2 - a H_2) + (a H_2^3 - a_i^4) \xi_i^2}{H_2^3} d\xi_i^2 + \frac{2(a H_2^3 - a_i^2 a_j^2) \xi_i \xi_j}{H_2^3} d\xi_i d\xi_j \right). \quad (6)$$

Собственные значения d^2H — корни уравнения

$$|H_{ij} - \lambda \delta_j^i| = 0, \quad (7)$$

где

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\substack{x_i = \xi_i \\ x_j = \xi_j}}$$

Так как H_i — нулевой степени однородности, то $\Sigma H_{ik} x_k = 0$, откуда следует, что уравнение (7) — кубическое относительно λ .

Подставляя выражения для H_{ij} из (6) в уравнение (7), получаем:

$$\begin{aligned} H_2^5 \lambda^3 - \sum_i [\xi_i^2 (a H_2^3 - a_i^4) H_2^2 + \dots] \lambda^2 + \sum_{i,j} \left[-\frac{1}{2} \xi_i^2 \xi_j^2 a H_2^3 (a_i^2 - a_j^2)^2 + \dots \right] \lambda + \\ + \sum_{i,l,k} \left[\frac{1}{2} \xi_i^2 \xi_j^2 (a_k^2 - a H_2) (a_i^2 - a_j^2)^2 a H_2 + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Положив $\sum_i a_i^{2n} = A_{2n}$ и $\sum_i a_i^{2n} \xi_i^2 = H_{2n}$, после соответствующего суммирования уравнение (8) приводим к виду:

$$\begin{aligned} H_2^5 (\lambda + a)^3 - H_2^2 [A_2 H_2^2 - H_4] (\lambda + a)^2 + H_2 \left[H_6 - A_2 H_4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} H_2^2 (A_2^2 - A_4) \right] (\lambda + a) - \left[\frac{1}{6} H_2^2 A_2^3 - \frac{1}{2} H_2^2 A_2 A_4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} H_2^2 A_6 + \frac{1}{2} A_4 H_4 - \frac{1}{2} A_2^2 H_4 + A_2 H_6 - H_8 \right] = 0. \end{aligned}$$

Обозначая выражения в квадратных скобках соответственно через E , F и C , получим такой вид этого уравнения:

$$H_2^5 (\lambda + a)^3 - E H_2^2 (\lambda + a)^2 + F H_2 (\lambda + a) - C = 0. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} E &= \sum a_i^2 P_i \xi_i^2, \text{ где } P_i = \sum_{j \neq i} a_j^2, \\ F &= \sum a_i^2 M_i \xi_i^2, \text{ где } M_i = \sum_{(j \neq k) \neq i} a_j^2 a_k, \\ C &= \prod_i a_i^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим теперь

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2 - \varepsilon, \quad a_3^2 = a_4^2 = a^2 + \varepsilon, \quad (11)$$

где ε — положительное достаточно малое число.

Пользуясь (11), находим

$$H_2^2 = \sum a_i^2 \xi_i^2 = a^2 + \varepsilon x, \text{ где } |x| \leq 1. \quad (12)$$

По обобщенной формуле бинома Ньютона имеем

$$\begin{aligned} H_2^5 &= a^5 + \frac{\varepsilon x}{2a} - \frac{\varepsilon^2 x^2}{8a^3} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{16a^5}, \\ H_2^5 &= a^5 + \frac{5a^3 \varepsilon x}{2} + \frac{15a \varepsilon^2 x^2}{8} + \frac{5 \varepsilon^3 x^3}{16a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из равенств (10) и (11) следует

$$\begin{aligned} E &= 3a^4 + 2a^2 \varepsilon x - \varepsilon^2, \\ F &= 3a^6 + a^4 \varepsilon x - 3a^2 \varepsilon^2 - \varepsilon^3 x, \\ C &= a^8 - 2a^4 \varepsilon^2 + \varepsilon^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя все полученные выражения из (12), (13), (14) в уравнение (9), получим

$$\begin{aligned} (a^3 + \dots) \lambda^3 + \left(\frac{5a^2 \varepsilon x}{2} + \dots \right) \lambda^2 + \left[\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{x^2} \right) a \varepsilon^2 x^2 + \dots \right] \lambda + \\ + \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} \right) \varepsilon^3 x^3 + \dots \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

При достаточно малом ε корнями уравнения (15) являются

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{a} \left(1 - \frac{x}{2}\right); \quad \lambda_2 = -\frac{\varepsilon}{a} \left(1 + \frac{x}{2}\right); \quad \lambda_3 = -\frac{3\varepsilon x}{2a}.$$

Так как $|x| \leq 1$, то λ_1 и λ_2 всегда разных знаков. А это значит, что d^2H знакопеременная форма в каждой точке и, следовательно, наше утверждение доказано.

5. Доказательство теоремы 2

В силу сказанного в п. 2 нет никакой необходимости помещать здесь все доказательство. За всеми подробностями отсылаем к работе А. Д. Александрова [4]. Здесь мы только отметим основные пункты доказательства А. Д. Александрова, внося изменения, необходимые в четырехмерном случае.

1. Рассмотрим функцию $u(x_1, x_2, x_3) = H(x_1, x_2, x_3, 1)$. Обозначим K_i значения ее второго дифференциала. Не ограничивая общности, будем считать, что $K_1 \geq K_2 \geq K_3$.

Оказывается, что в каждой точке конечной части плоскости (x_1, x_2, x_3) или все K равны нулю или же среди них есть величины разных знаков, причем модули отношений любых двух собственных значений ограничены сверху и снизу положительными числами. Вследствие этого функция $u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет эллиптическому линейному дифференциальному уравнению в частных производных, которое в каждой точке путем поворота осей можно привести к одному из видов:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0, \text{ если } d^2u \equiv 0; \quad (16)$$

$$A|K_3|u_{x_1x_1} + |K_3|u_{x_2x_2} + (AK_1 + K_2)u_{x_3x_3} = 0, \text{ если } d^2u \neq 0,$$

где A — постоянная такая, что $AK_1 + K_2 > 0$. Такая постоянная существует в силу ограниченности снизу и сверху модулей отношений собственных значений K_i .

2. Рассмотрим теперь поверхность F , определяемую в прямоугольных координатах уравнением $u = u(x_1, x_2, x_3)$.

Путем поворота осей x_1, x_2, x_3 и добавления к H однородной линейной функции можно добиться того, чтобы для поверхности F выполнялись два условия:

а₁) всюду $u_{x_1} \geq 0$;

а₂) хотя бы в одной точке поверхность F касается плоскости $u = 0$.

3. Из п. 2 следует, что поверхность F касается плоскости $u = 0$ по некоторому множеству M , не сводящемуся к точке. Действительно, пусть P — граничная точка множества M . Тогда существует сходящаяся к P последовательность точек P_n , в каждой из которых второй дифференциал d^2u — знакопеременная форма. В точках P_n касательные плоскости разбивают поверхность на три области G_i . Но в точке P плоскость $u = 0$ разбивает F не более чем на две области, так как $u_{x_1} \geq 0$ и в точке P все $K_i = 0$. Поэтому, когда точки P_n сходятся к P , то одна из областей G_i в пределе целиком лежит в плоскости $u = 0$. Это и дает множество M , по которому F касается плоскости $u = 0$. Это множество может реализовать одну из трех возможностей:

а₁) существует не содержащаяся в M прямая l , параллельная оси x_1 и проходящая через его внутреннюю точку;

$a_2)$ такой прямой не существует. Но тогда M — бесконечное множество и, значит, существует двумерная полуплоскость, принадлежащая границе M , такая что по одну сторону от нее нет точек этого множества;

$a_3)$ множество M — вся плоскость $u = 0$.

4. В первых двух случаях существует бесконечный в одну сторону параллелепипед, внутри которого функция u не меняет знака. Но тогда существует также касающийся множества M шар, внутри которого u не меняет знака. Так как u удовлетворяет уравнению (16), то на основании теоремы А. Д. Александрова об эллиптических линейных дифференциальных уравнениях второго порядка (7) заключаем, что первые два случая невозможны.

В третьем случае не только $u = H(x_1, x_2, x_3, 1) \equiv 0$, но вообще $H(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$. А отсюда следует, что H — линейная функция.

6. Доказательство теоремы 4

Из определения двумерной индикатрисы гиперповерхности четырехмерного пространства следует, что всякая двумерная индикатриса является сечением индикатрисы кривизны поверхности двумерной плоскостью — касательной к соответствующему нормальному сечению поверхности. Поэтому условие теоремы эквивалентно непомещаемости строго внутри всех пар соответствующих двумерных сечений индикатрис Дюпена в точках с параллельными внешними нормальными. Другими словами, мы имеем два эллипсоида, соответствующие сечения которых не помещаются одно строго внутри другого при параллельном переносе. Но если два эллипсоида обладают таким свойством, то они равны и параллельно расположены. А отсюда следует, что исходные поверхности также равны и параллельно расположены.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. А. Д. Александров. Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках. Изв. АН ОМОН, сер. матем., № 4, 1937.
3. А. Д. Александров. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей, ДАН, 22, № 3, 1939.
4. А. Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VII. Вестник ЛГУ, № 7, 1960.
5. А. В. Погорелов. Одна общая теорема единственности для бесконечных выпуклых поверхностей. ДАН, 65, № 2, 1949.
6. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1935.
7. А. Д. Александров. Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка. Вестник ЛГУ, № 8, 1954.

О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ВЕКТОРОВ НА ГЛАДКИХ
ПОВЕРХНОСТЯХ

А. Д. Милка

В настоящей работе изучается процесс параллельного переноса векторов на гладких поверхностях n -мерного евклидова пространства. Этот вопрос в случае трехмерного пространства был рассмотрен Ю. Ф. Борисовым [3, 4].

Для изучения процесса параллельного переноса мы вводим в n -мерном пространстве некоторые понятия, являющиеся обобщением хорошо известных понятий трехмерного евклидова пространства. Этой задаче посвящена первая часть нашей работы, где выводятся также необходимые оценки.

Во второй части работы получены результаты, обобщающие на случай n -мерного евклидова пространства соответствующие результаты Ю. Ф. Борисова. Подобно тому как в работах [3, 4], мы определяем процесс параллельного переноса, выясняем условия сходимости этого процесса и вводим один специальный класс гладких поверхностей. При изучении поверхностей этого класса метод параллельного переноса векторов оказывается достаточно эффективным. Теоремы в этой части работы приводятся без доказательств. Мы ограничиваемся только необходимыми замечаниями, так как доказательства соответствующих теорем, данные Ю. Ф. Борисовым, с некоторыми изменениями распространяются на случай n -мерного пространства. Все рассмотрения проводятся в евклидовом пространстве некоторой фиксированной размерности n . Изучаемые поверхности предполагаются открытыми.

1. Операция разворачивания плоскостей

Возьмем две m -мерные плоскости P и $\bar{P}$. Пусть A — некоторая точка плоскости P , $e \in P$ — произвольный единичный вектор с началом в точке A , θ — угол между вектором e и его проекцией e' на плоскость $\bar{P}$. Будем рассматривать только такие пары плоскостей P и $\bar{P}$, для которых величина θ меньше $\pi/2$. Угол θ является аналитической функцией точки на m -мерной сфере, которую описывают концы всевозможных векторов e , выбираемых указанным образом. Экстремальные значения θ_i этой функции будем называть стационарными углами между плоскостями P и $\bar{P}$. Существует m стационарных углов θ_i ; соответствующие векторы e_i можно выбрать так, чтобы они образовали ортогональный базис в плоскости P .

Пусть $\bar{A}$ — некоторая точка плоскости $\bar{P}$. Перенесем параллельно векторы e_i так, чтобы их начала совпали с точкой $\bar{A}$. Обозначим

$\sigma_i \bar{e}_i$ — построенные векторы, где $\sigma_i = \cos \theta_i$. Системы векторов $\{e_i\}$ и $\{\bar{e}_i\}$ обладают свойствами

$$e_i e_j = \delta_{ij}, \quad e_i \bar{e}_j = \sigma_i \delta_{ij}, \quad \bar{e}_i \bar{e}_j = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, и взаимны, так как к ним можно прийти, выбирая плоскость $\bar{P}$ в качестве первой. Изложенные выше факты можно найти в книге П. А. Широкова [1].

Движение Ω пространства, совмещающее плоскость P с $\bar{P}$ и точку A с $\bar{A}$, будем называть разворачиванием, если для всех i $\Omega e_i = \bar{e}_i$. При этом будем говорить, что плоскость P_A разворачивается на плоскость $\bar{P}_A$.

Оператор Ω обладает следующими свойствами:

1. $x\Omega x > 0$, $x \in P$ и $x \neq 0$;
 2. $x\Omega y = y\Omega x$, $x \in P$ и $y \in P$.
- (Q)

Действительно, пусть $x = \sum_i \lambda_i e_i$, $y = \sum_i \mu_i e_i$. Тогда

$$x\Omega y = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j e_i \bar{e}_j = \sum_i \lambda_i \mu_i \sigma_i = y\Omega x,$$

$$x\Omega x = \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i > 0, \text{ если } x^2 = \sum_i \lambda_i^2 \neq 0.$$

Свойства (Q) вполне определяют разворачивание.

Теорема. Для того, чтобы движение $\tilde{\Omega}$ разворачивало плоскость P_A на плоскость $\bar{P}_A$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\tilde{\Omega}$ обладал свойствами (Q).

Доказательство. Необходимость установлена выше, докажем достаточность. Пусть движение $\tilde{\Omega}$ совмещает плоскость P_A с плоскостью $\bar{P}_A$ и точку A с $\bar{A}$, а оператор $\tilde{\Omega}$ обладает свойствами (Q).

Докажем, что движение $\tilde{\Omega}$ является разворачиванием, т. е. что $\tilde{\Omega}x = \Omega x$ для $x \in P$. Допустим противное. Тогда $\tilde{\Omega}x \neq \Omega x$ для $x \in P$. В плоскости P выделяются инвариантные двумерные плоскости для движения $\Omega^{-1}\tilde{\Omega}$, и найдется такая плоскость Δ , для которой $\tilde{\Omega}x \neq \Omega x$ при $x \in \Delta$. Пусть δ — пучок векторов в Δ , исходящих из точки A . Заметим, что не существует вектора $x \in P$, для которого $\tilde{\Omega}x = -\Omega x$, так как тогда $x\tilde{\Omega}x = -x\Omega x < 0$. Ориентации $\tilde{\Omega}\delta$ и $\Omega\delta$ должны совпадать. Иначе при вращении вектора $e \in \delta$ в плоскости Δ в определенном направлении векторы $\tilde{\Omega}e$ и Ωe будут вращаться в плоскости $\Omega\Delta$ в противоположных направлениях, и найдется вектор $u \in \delta$ такой, что $\tilde{\Omega}u = \Omega u$. Для вектора $v \in \delta$, ортогонального u , $-\tilde{\Omega}v = \Omega v$, что невозможно.

Пусть u, v — ортонормированный базис в δ и $\bar{u} = \Omega u$, $\bar{v} = \Omega v$ — базис в $\Omega\delta$. Так как $\tilde{\Omega}x \neq \Omega x$, ориентации $\tilde{\Omega}\delta$ и $\Omega\delta$ совпадают и $\tilde{\Omega}x \neq$

$\neq -\Omega x$ для $x \in \delta$, то существует константа τ ($0 < |\tau| < \pi$) такая, что для произвольного единичного вектора

$$x = u \cos \varphi + v \sin \varphi,$$

$$\tilde{\Omega}x = \bar{u} \cos(\varphi + \tau) + \bar{v} \sin(\varphi + \tau).$$

Обозначая $u\bar{u} = a$, $v\bar{v} = b$ и учитывая свойства оператора $\tilde{\Omega}$, находим, что для произвольной пары единичных векторов $x, y \in \delta$, справедливо соотношение

$$a[\cos \varphi \cos(\psi + \tau) - \cos(\varphi + \tau) \cos \psi] + b[\sin \varphi \sin(\psi + \tau) - \sin(\varphi + \tau) \sin \psi] = 0.$$

Дифференцируя дважды правую и левую части этого равенства сначала по φ , затем по ψ и учитывая полученное соотношение, находим, что

$$\cos(\omega - \tau) = \cos(\omega + \tau)$$

для произвольного числа ω . Однако, последнее равенство невозможно при $0 < |\tau| < \pi$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\tilde{\Omega}x = \Omega x$ для $x \in P$, и движение $\tilde{\Omega}$ является разворачиванием. Теорема доказана.

Пусть размерность плоскостей P и $\bar{P}$ больше двух. При разворачивании плоскости P на плоскость $\bar{P}$ каждая двумерная плоскость $\Delta \in P$ переходит в некоторую плоскость $\bar{\Delta} \in \bar{P}$. Из доказанной теоремы следует, что Δ разворачивается на $\bar{\Delta}$. Этот факт также является определяющим для разворачивания. Можно проверить, что оператор Ω обладает следующим свойством: на множестве единичных векторов с началом в точке A экстремальные значения величины $x\Omega x$ достигаются для векторов e_i .

Введем еще угол Θ между плоскостями P и $\bar{P}$ следующим равенством:

$$\Theta^2 = \sum_i \theta_i^2.$$

Установим некоторые оценки.

Лемма 1. Возьмем три m -мерные плоскости P_A , $\bar{P}_A$, $\tilde{P}_A$ и вектор $x \in P_A$. Пусть $\bar{\Theta}$, $\tilde{\Theta}$, Θ — углы между плоскостями P и $\bar{P}$, P и $\tilde{P}$, $\bar{P}$ и $\tilde{P}$ соответственно. Развернем плоскость P_A на $\bar{P}_A$, затем $\bar{P}_A$ — на $\tilde{P}_A$ и, наконец, $\tilde{P}_A$ — на P_A . При этом вектор x перейдет в некоторый вектор $y \in P_A$. Если каждый из углов Θ , $\bar{\Theta}$, $\tilde{\Theta}$ меньше $\pi/6$, то для угла γ между векторами x и y справедлива оценка

$$\gamma \leq 2\bar{\Theta}\tilde{\Theta}. \quad (\gamma)$$

Доказательство. Можно считать, что $A \equiv \bar{A} \equiv \tilde{A}$, а вектор x исходит из точки A . Выполнение указанных в лемме операций приводит к вращению $\tilde{\Omega}$ в плоскости P вокруг точки A . Обратимся к инвариантным двумерным плоскостям движения $\tilde{\Omega}$. Пусть Δ такая пло-

скость. Из условий леммы следует, что угол γ меньше $\pi/2$. Следовательно, ориентация плоскости Δ при движении $\tilde{\Omega}$ сохраняется. Поэтому достаточно оценить угол поворота векторов в плоскости Δ и учесть, что угол γ не превосходит максимального угла поворота векторов в инвариантных двумерных плоскостях движения $\tilde{\Omega}$.

При выполнении указанных в лемме разворачиваний плоскость Δ разворачивается на плоскость $\bar{\Delta} \in \bar{P}$, $\bar{\Delta}$ — на $\tilde{\Delta} \in \tilde{P}$, $\tilde{\Delta}$ — на Δ . Стационарные углы между каждой парой плоскостей из Δ , $\bar{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}$ меньше $\pi/6$. Пусть $u, v \in P$ — ортонормированная пара векторов. Первое разворачивание переводит эти векторы в некоторую пару векторов $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{P}$. Аналогично, разворачивая плоскость P на $\tilde{P}$, получим векторы $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{P}$. После разворачивания плоскости $\bar{P}$ на плоскость $\tilde{P}$ получим векторы

$$\begin{aligned} \tilde{u} \cos \gamma + \tilde{v} \sin \gamma, \\ -\tilde{u} \sin \gamma + \tilde{v} \cos \gamma, \end{aligned}$$

в которые переходит пара $\bar{u}, \bar{v}$. Пользуясь вторым свойством (Ω) разворачивания, находим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\bar{u} \tilde{v} - \bar{v} \tilde{u}}{\bar{u} \tilde{u} - \bar{v} \tilde{v}}, \quad (*)$$

причем, можем считать, что $\gamma \geq 0$.

Положение пары векторов $u, v \in P$ определяется угловым параметром φ . Дифференцируя по φ выражения $\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}$ и $\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v}$, убеждаемся, что они постоянны и поэтому равны $\cos \bar{\theta}_1 + \cos \bar{\theta}_2$ и $\cos \tilde{\theta}_1 + \cos \tilde{\theta}_2$ соответственно. Перейдем в оценке (γ) к эквивалентным величинам:

$$\gamma \sim \operatorname{tg} \gamma \sim \bar{u} \tilde{v} - \bar{v} \tilde{u},$$

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}_2^2 \sim \sin^2 \bar{\theta}_1 + \sin^2 \bar{\theta}_2 \sim 2 - \cos \bar{\theta}_1 - \cos \bar{\theta}_2 = 2 - \bar{u}\bar{u} - \bar{v}\bar{v},$$

$$\tilde{\theta}^2 \sim 2 - \tilde{u}\tilde{u} - \tilde{v}\tilde{v},$$

где мы учли, что $\bar{u}\tilde{u} + \bar{v}\tilde{v} > 1$.

Следовательно, при некотором ε можно записать

$$\varepsilon^2 (\bar{u} \tilde{v} - \bar{v} \tilde{u})^2 \leq (2 - \bar{u}\bar{u} - \bar{v}\bar{v}) (2 - \tilde{u}\tilde{u} - \tilde{v}\tilde{v}). \quad (1)$$

Мы установим, что это неравенство справедливо при $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Оценка (γ) получается так. Из неравенства (1) находим, учитывая выражение $(*)$ для $\operatorname{tg} \gamma$, в котором $\bar{u}\tilde{u} + \bar{v}\tilde{v} > 1$,

$$\gamma \leq 2 \bar{\theta}_m \tilde{\theta}_m,$$

где $\bar{\theta}_m = \max(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$, $\tilde{\theta}_m = \max(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$.

Правая часть полученного неравенства не уменьшится, если вместо величин $\bar{\theta}_m, \tilde{\theta}_m$ подставить соответствующие углы $\bar{\Theta}, \tilde{\Theta}$ между плоскостями P и $\bar{P}$, P и $\tilde{P}$. Тем самым устанавливается оценка (7).

Докажем неравенство (1). Будем считать, что векторы $u, v, \bar{u}, \dots$ находятся в шестимерном пространстве. Рассмотрим функцию

$$F(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{4} (\bar{u}\tilde{v} - \tilde{u}\bar{v})^2 - (2 - u\bar{u} - v\bar{v})(2 - u\tilde{u} - v\tilde{v})$$

на множестве векторов $(\bar{u}, \bar{v}, \tilde{u}, \tilde{v})$, заданном условиями

$$1'. \bar{u}^2 = \tilde{u}^2 = \bar{v}^2 = \tilde{v}^2 = 1, \quad \bar{u}\bar{v} = \tilde{u}\tilde{v} = 0,$$

$$u\bar{v} - v\bar{u} = u\tilde{v} - v\tilde{u} = 0;$$

$$2'. u\bar{u} + v\bar{v} \geq 0, \quad u\tilde{u} + v\tilde{v} \geq 0,$$

где векторы u, v фиксированы и $u^2 = v^2 = 1, uv = 0$.

Эти условия определяют ограниченное замкнутое множество D в 24-мерном пространстве E переменных координат векторов $\bar{u}, \bar{v}, \tilde{u}, \tilde{v}$. Функция F является аналитической функцией этих переменных и на множестве D достигает максимального значения. Чтобы убедиться в справедливости неравенства (1), достаточно проверить, что это значение неположительно.

Обозначим $\bar{u}\tilde{v} - \tilde{u}\bar{v} = 2\omega$, $2 - u\bar{u} - v\bar{v} = \omega_1$, $2 - u\tilde{u} - v\tilde{v} = \omega_2$.

Пусть $\tilde{D}$ — пересечение аналитических поверхностей в пространстве E , указанных условиями (1'). На общей части множества $\tilde{D}$ и поверхностей $u\bar{u} + v\bar{v} = 0$ и $u\tilde{u} + v\tilde{v} = 0$ функция F отрицательна. Таким образом нам достаточно убедиться в том, что F неположительна только на множестве $D = D_1 \cup D_2$,

где D_1 — часть множества $\tilde{D}$, лежащая в области пространства E , определенной условиями $u\bar{u} + v\bar{v} > 0, u\tilde{u} + v\tilde{v} > 0$;

D_2 — часть множества $\tilde{D}$, лежащая в области пространства E , определенной условиями $u\bar{u} + v\bar{v} = 0, u\tilde{u} + v\tilde{v} > 0$.

Исследуем функцию F в области D_1 . Для нахождения максимального значения F в этой области воспользуемся обычными методами анализа. Мы найдем точки, в которых функция F достигает экстремальных значений. Надо убедиться, что эти значения неположительны. Среди указанных точек мы можем выбрать только те, в которых ω, ω_1 и ω_2 отличны от нуля: если $\omega = 0$, то неравенство (1) тривиально, если $\omega_1 = 0$, то из условий (1') следует, что $u = \bar{u}, v = \bar{v}$ и $\omega = 0$. Можем также считать, что в выбранных точках соответствующие векторы $\bar{u}, \bar{v}, \tilde{u}, \tilde{v}$ вместе с u и v не лежат в трехмерном пространстве, так как и тогда неравенство (1) справедливо, в чем легко убедиться с помощью известной формулы сферической тригонометрии.

Пусть $A \in D_1$ — одна из выбранных точек, в которой функция F достигает экстремального значения. Приравняв нулю производные от

вспомогательной функции Лагранжа

$$\Phi = F + \frac{1}{2} \lambda \bar{u}^2 + \frac{1}{2} \nu \tilde{u}^2 + \frac{1}{2} l \bar{v}^2 + \frac{1}{2} n \tilde{v}^2 + r \bar{u} \bar{v} + t \tilde{u} \tilde{v} + \alpha (u \bar{v} - v \bar{u}) + \\ + \beta (u \tilde{v} - v \tilde{u})$$

в точке **A**, получим для скаляров $\lambda, \nu, \dots$ и векторов $\bar{u}, \bar{v}, \tilde{u}, \tilde{v}$ такие уравнения

$$\begin{aligned} \lambda \bar{u} + \omega_2 u + r \bar{v} - \alpha v + \omega \tilde{v} &= 0, \\ \omega_1 u + \nu \tilde{u} - \omega \bar{v} - \beta v + t \tilde{v} &= 0, \\ r \bar{u} + \alpha u - \omega \tilde{u} + l \bar{v} + \omega_2 v &= 0, \\ \omega \bar{u} + \beta u + t \tilde{u} + \omega_1 v + n \tilde{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим следующую матрицу:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & \omega_2 & 0 & r & -\alpha & \omega \\ 0 & \omega_1 & \nu & -\omega & -\beta & t \\ r & \alpha & -\omega & l & \omega_2 & 0 \\ \omega & \beta & t & 0 & \omega_1 & n \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Все определители третьего порядка этой матрицы равны нулю. В противном случае мы нашли бы, что три из векторов $u, v, \bar{u}, \dots$ выражаются линейно через три остальных вектора. Докажем, что по крайней мере в одной из пар λ и ν, l и n оба числа отличны от нуля. Для доказательства мы не будем выписывать соответствующих определителей, так как это проще проследить по самой матрице (3). Справедливы следующие заключения, где символ „ $\rightarrow$ “ соответствует выражению „если — то“, а символ „ $\leftrightarrow$ “ — выражению „тогда и только тогда“.

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \leftrightarrow \nu = 0 \\ l = 0 \leftrightarrow n = 0 \end{aligned} \rightarrow \omega_2 = \delta \omega_1 \rightarrow \omega = \delta t = -\delta t, \text{ что невозможно.}$$

Следовательно, λ и l не могут одновременно обратиться в нуль; если, например, $\lambda \neq 0$, то и $\nu \neq 0$. Будем считать, что λ и ν оба отличны от нуля. Выписывая часть определителей третьего порядка матрицы (3), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \lambda \nu \alpha + \lambda \omega \omega_1 - s \omega_2 &= 0, \\ \lambda \nu \beta - \nu \omega \omega_2 - s \omega_1 &= 0, \\ \lambda \nu \omega_2 - \lambda \beta \omega + s \alpha &= 0, \\ \lambda \nu \omega_1 - \nu \alpha \omega + s \beta &= 0, \\ \lambda t &= \nu r = s, \end{aligned}$$

исследуя которую, находим, что

$$r = t = 0, \quad \lambda \nu = \omega^2, \quad \nu \alpha + \omega \omega_1 = 0, \quad \nu \omega_2 - \beta \omega = 0.$$

Первые два уравнения из (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 \bar{u} + \nu \omega_2 u + \omega \omega_1 v + \nu \omega \tilde{v} &= 0, \\ \omega^2 \bar{v} + \nu \omega_2 v - \omega \omega_1 u - \nu \omega \tilde{u} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения на основании условий (1) дают четыре скалярных уравнения

$$2\omega^2 + \omega_1(2 - \omega_2) + 2\nu = 0,$$

$$2\omega^2 + \omega_2(2 - \omega_1) + 2\frac{1}{\nu}\omega = 0,$$

$$2\omega_1 + \nu(2 - \omega_2) = 0,$$

$$2\nu\omega_2 + \omega^2(2 - \omega_1) = 0.$$

Эта система уравнений противоречива, если предполагать, что ω , ω_1 и ω_2 отличны от нуля. Следовательно, других точек экстремума функции F в области D_1 , кроме исключенных ранее, не существует. А в указанных точках F неположительна.

Исследуя функцию F в области D_2 , будем идти тем же путем, что и в предыдущем случае. Пусть $A \in D_2$ — некоторая точка, в которой функция F достигает экстремума. Будем считать, что в этой точке ω и ω_2 отличны от нуля. По условию $\omega_1 = 2$. Выписывая вспомогательную функцию Лагранжа и приравняв нулю ее производные в точке A , получим систему векторных уравнений. Нетрудно заметить, что эта система отличается от уравнений (2) только тем, что, вместо ω_2 , в качестве коэффициента в ней будет стоять некоторое число a , быть может, равное нулю. Это число появляется вследствие добавления условия $uu + vv = 0$. Убедимся в том, что по крайней мере в одной из пар λ и ν , l и n оба числа отличны от нуля. Достаточно проверить это в случае, когда $a = 0$. Используя матрицу (3), получаем последовательно

$$\nu = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow r = 0 \rightarrow \omega\omega_1 = 0, \text{ что невозможно.}$$

Дальнейшие исследования приводят, как и в предыдущем случае, к системе уравнений для λ , ν , ..., ω_1 , ω , которая также оказывается противоречивой. Таким образом и на множестве D_2 экстремальные значения функции F неположительны. Учитывая, что функция F неположительна, если все входящие в нее векторы находятся в трехмерном пространстве, заключаем, что F неположительно всюду на множестве $\tilde{D}$. Тем самым доказано неравенство (1), а вместе и лемма 1.

Лемма 2. Пусть некоторый вектор $z \in P_A$ проектируется на плоскость $\overline{P_A}$ в вектор x , а при разворачивании первой плоскости на вторую переходит в некоторый вектор y . Если угол Θ между плоскостями P и $\overline{P}$ меньше $\arccos \frac{1}{4}$, то для угла α между векторами x и y справедлива оценка

$$\alpha \leq \Theta^2. \quad (\alpha)$$

Доказательство. Достаточно получить оценку (α) в том случае, когда стационарные углы θ_i между плоскостями P и $\overline{P}$ все различны и не равны нулю. Этого можно всегда добиться увеличением размерности пространства, в случае необходимости, и малым изменением положения плоскостей P и $\overline{P}$. Справедливость оценки (α) в общем случае будет следовать из непрерывности входящих в нее величин.

Пусть θ_i обладают указанным свойством. Можно считать, что $A \equiv \bar{A}$ и вектор z исходит из точки A . Произвольный единичный вектор $z \in P$ можно представить в виде

$$z = \sum_i \lambda_i e_i,$$

где e_i — введенные ранее векторы.

Имеем

$$x = \sum_i \lambda_i \sigma_i \bar{e}_i, \quad y = \sum_i \lambda_i \bar{e}_i,$$

$$\cos \alpha = \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i \left(\sum_i \lambda_i^2 \sigma_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Определим экстремальные значения угла α , рассматривая его как функцию координат λ_i на сфере $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. Пусть $e \in P$ — вектор, для которого $\cos \alpha$ экстремален. Приравнявая нулю производные от вспомогательной функции Лагранжа

$$\Phi = \cos \alpha - \mu \sum_i \lambda_i^2$$

и находя μ , получаем уравнения

$$\sigma_j^2 \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i - 2\sigma_j \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \lambda_i^2 \sigma_i = 0,$$

где j пробегает значения i , для которых координата λ_i отлична от нуля. Поскольку квадратное уравнение имеет не более двух различных корней, то из полученных уравнений следует, что вектор e имеет в точности две отличные от нуля координаты λ_i и λ_j и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\sigma_i - \sigma_j|}{2\sqrt{\sigma_i \sigma_j}}.$$

Отсюда получается оценка (α). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть y — проекция вектора $x \in P_A$ на плоскость $\bar{P}_A$, θ — угол между векторами x и y , φ_i — углы между x и e_i . Тогда

$$\sin \theta \geq \sin \theta_i |\cos \varphi_i|. \quad (*)$$

Доказательство. Можно считать, что $A \equiv \bar{A}$ и вектор x исходит из точки A . Пусть $x = \sum_i \lambda_i e_i$, $y = \sum_i \lambda_i \sigma_i \bar{e}_i$. Проекцией вектора $x - y$ на плоскость, определяемую векторами e_i и $\bar{e}_i$, является вектор $\lambda_i e_i - \lambda_i \sigma_i \bar{e}_i$. Длина этого вектора равна $\sin \theta_i |\cos \varphi_i|$ и не превосходит длины вектора $x - y$, равной $\sin \theta$. Это и выражает неравенство (*). Лемма доказана.

2. Параллельный перенос векторов на гладких поверхностях

Пусть F — гладкая m — мерная поверхность n — мерного евклидова пространства, a — вектор, касательный к поверхности F в некоторой точке A , P_B — m — мерная плоскость, касательная к поверхности F в точке B , a' — проекция вектора a на плоскость P_B . Переносим вектор a' параллельно, чтобы его начало совпало с точкой B , получим некоторый вектор b . Будем говорить, что вектор b получен параллельным переносом вектора a по системе точек $\{A, B\}$ поверхности F .

Пусть $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ — некоторая упорядоченная система точек поверхности F , a — вектор, касательный к поверхности F в точке A_1 . Перенесем параллельно вектор a в точку A_2 по системе точек $\{A_1, A_2\}$,

полученный вектор — в точку A_3 по системе точек $\{A_2, A_3\}$ и т. д. Этот процесс закончится построением некоторого вектора a_s , касательного к поверхности F в точке A_n . Будем говорить, что вектор a_s получен параллельным переносом вектора a по системе точек S поверхности F .

Под разбиением $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ некоторой кривой L будем понимать систему точек $A_i \in L$, упорядоченную по параметру этой кривой.

Определение. Пусть F — гладкая m -мерная поверхность n -мерного евклидова пространства, L — кривая на F с концами A и B , a — вектор, касательный к поверхности F в точке A , $S = \{A = A_1, A_2, \dots, A_n = B\}$ — разбиение кривой L , a_s — вектор, полученный параллельным переносом вектора a по системе точек S . Мы скажем, что вектор b , касательный к поверхности F в точке B , получен параллельным переносом вектора a вдоль кривой L , если

$$\begin{aligned} |b| &= |a|, \\ b &= \lim a_s, \end{aligned}$$

где предел берется по все более мелким разбиениям кривой L . В определении предполагается, что для данного вектора a вектор b существует. Если это обстоятельство имеет место для каждого вектора a , касательного к поверхности F в точке A , будем говорить, что процесс параллельного переноса векторов вдоль кривой L сходится.

Каковы же условия, которые обеспечивают сходимость процесса параллельного переноса векторов вдоль кривой?

Пусть P_{A_i} — касательная плоскость к поверхности в точке A_i ,

Θ_i — угол между плоскостями P_{A_i} и $P_{A_{i+1}}$.

Теорема 1. Для того, чтобы при произвольном векторе $a \in P_A$, существовал предел

$$\lim |a_s| = |a|,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim \sum_i \Theta_i^2 = 0, \quad (*)$$

где оба предела берутся по все более мелким разбиениям кривой L .

Доказательство этой теоремы основано на тех же соображениях, которыми пользовался Ю. Ф. Борисов. Небольшое отличие заключается в том, что при установлении необходимости условия (*) в плоскости P_A выбираются не 3, а $m + 1$ векторов, концы которых служат вершинами правильного симплекса с центром в точке A . При параллельном переносе этих векторов в точку B по системе S в каждом из промежуточных положений (точках A_i) устанавливаются оценки для углов Θ_i^2 ; в этих случаях используется лемма 3.

Теорема 1, однако, ничего не говорит о сходимости векторов a_s . По-видимому, эффективные необходимые и достаточные условия для этого можно установить только в трехмерном пространстве. Ю. Ф. Борисов пользовался при этом введенным им понятием ориентированной площади сферического изображения кривой. Все же в общем случае являются полезными следующие замечания. Развернем плоскость P_{A_1} на плоскость P_{A_2} , P_{A_2} — на P_{A_3} и т. д. При выполнении этих операций вектор $a \in P_A$ перейдет в некоторый вектор плоскости P_{A_2} , получен-

ный вектор — в некоторый вектор плоскости P_{A_s} и т. д. В результате придем к некоторому вектору $a^s \in P_B$. Будем говорить, что вектор a^s получен разворачиванием вектора a по системе точек S поверхности F . С помощью леммы 2 нетрудно установить, что при достаточно мелком разбиении S угол α между векторами a^s и a , имеет оценку

$$\alpha \leq \sum_i \theta_i^2.$$

Таким образом, если кривая L обладает свойством (*), то векторы a^s и a_s сходятся или расходятся одновременно; если вектор B получен параллельным переносом вектора a , то вектор a получается параллельным переносом вектора b вдоль кривой L .

Следуя Ю. Ф. Борисову, введем один специальный класс гладких поверхностей. Пусть $\{L\}$ — некоторое семейство спрямляемых кривых на гладкой поверхности F , L — произвольная кривая семейства, AB — отрезок кривой L , S_1 и S_2 — произвольные разбиения отрезка AB системами точек, включающими точки A и B , δ_{s_i} — максимальный из

диаметров отрезков кривой L , заключенных между соседними точками системы S_i . Выберем произвольный вектор $a \in P_A$ и построим соответствующие векторы $a_{s_i} \in P_B$. Мы скажем, что процесс параллельного переноса векторов равностепенно сходится на $\{L\}$, если для любого положительного ε существует положительное число δ такое, что

$$|a_{s_1} - a_{s_2}| < \varepsilon$$

как только $\delta_{s_i} < \delta$.

Определение. Гладкая поверхность F принадлежит классу поверхностей с равностепенной сходимостью процесса параллельного переноса, если в любой компактной области поверхности этот процесс сходится равностепенно на множестве кривых, длины которых ограничены в совокупности.

Будем называть спрямляемую кривую на поверхности F допустимой, если для любой пары ее точек угол между плоскостями, касательными к поверхности в этих точках, меньше $\pi/6$.

Пусть L — кривая с концами A и B на поверхности F , S — разбиение кривой L упорядоченной системой точек, включающей концы кривой, $a \in P_A$ — произвольный вектор, b — вектор, в который переходит вектор a при разворачивании плоскости P_A на P_B , γ_a — угол между векторами b и a^s . Обозначим

$$\Delta_s = \max_{a \in P_A} \gamma_a.$$

Теорема 2. Для того, чтобы гладкая поверхность принадлежала классу поверхностей с равностепенной сходимостью процесса параллельного переноса, необходимо и достаточно, чтобы для каждой компактной области G поверхности F существовала функция $f(t)$, определенная на полуоси $[0, \infty)$, неубывающая и равная нулю при $t=0$, такая, что

1. Для любой пары точек $A, B \in G$

$$\theta^2(A, B) \leq f[\rho_{AB}] \rho_{AB},$$

где $\Theta(A, B)$ — угол между плоскостями, касательными к поверхности F в точках A и B , ρ_{AB} — расстояние между точками A и B в метрике поверхности F ; точки A и B близкие в том смысле, что угол Θ определен.

2. Для любой допустимой кривой длины s , лежащей в области G , и любого ее разбиения S упорядоченной системой точек, включающей концы кривой

$$\Delta_s \leq f(s) s.$$

Пусть гладкая поверхность F принадлежит классу $C^{1, \alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$). Не трудно убедиться в том, что необходимое условие для этого заключается в следующем. Для каждой компактной области G поверхности F существует константа K_G такая, что для любой пары точек $A, B \in G$

$$\Theta(A, B) \leq K_G \rho_{AB}^\alpha,$$

где точки A, B таковы, что угол Θ определен.

Теорема 3. Поверхность F из класса $C^{1, \alpha}$ при $\alpha > \frac{1}{2}$ принадлежит классу поверхностей с равностепенной сходимостью процесса параллельного переноса. Если L — допустимая кривая длины s , лежащая в компактной области G поверхности F , S — произвольное разбиение кривой L , включающее концы кривой, то

$$\Delta_s \leq 8 K_G^2 m^{1-\alpha} s^{2\alpha},$$

где $m = [2^{2\alpha-1}]$.

Пусть F — гладкая поверхность, L — допустимая кривая на F с концами A и B , $S = \{A = A_1, A_2, \dots, A_n = B\}$ — разбиение кривой L , $a \in P_A$ — произвольный вектор. Разворачивая вектор a по системе точек $\{A_1, A_2, \dots, A_n, A_1\}$, получим некоторый вектор $a'_s \in P_A$. Преобразование плоскости P_A в себя по закону $a \rightarrow a'_s$ будет вращением вокруг точки A . Пусть Ω_s — оператор этого вращения. Если процесс параллельного переноса векторов вдоль кривой L сходится, то

$$a'_s \rightarrow a_L,$$

где предел берется по все более мелким разбиениям кривой L . Следовательно, оператор Ω_s сходится к некоторому оператору Ω_L . Очевидно, вектор $a_L = \Omega_L a$ переходит в вектор $b = \lim a_s$ при разворачивании плоскости P_A на P_B .

Теорема 4. На гладкой поверхности F , принадлежащей классу поверхностей с равностепенной сходимостью процесса параллельного переноса, любая геодезическая есть гладкая кривая.

Теорема 5. Пусть AB — дуга геодезической на поверхности F , принадлежащей классу поверхностей с равностепенной сходимостью процесса параллельного переноса, τ_A, τ_B — единичные касательные векторы в соответствующих точках дуги. Тогда вектор $\Omega_{AB} \tau_A$ переходит в вектор τ_B при разворачивании плоскости P_A в плоскость P_B .

Из этой теоремы следует, что касательный вектор геодезической при параллельном переносе его в любую точку этой геодезической переходит в касательный вектор. Кривые гладкой поверхности, обладающие этим свойством, можно назвать квазигеодезическими.

Теорема 6. Для каждой компактной области G поверхности F существует положительная функция $g(t)$, определенная на полуоси $[0, \infty)$ и равная нулю при $t=0$, такая, что для любой геодезической в области G длины меньше $g(x)$ угол между касательными векторами в ее концах меньше x .

Мы не приводим доказательств теорем 2—6. Если принять в этих доказательствах тот же порядок рассуждений, которому следует Ю. Ф. Борисов, то можно заметить следующее. Эти доказательства в большей части основаны на получении оценок некоторых углов. В трехмерном случае каждый такой угол, оказывается, равен ориентированной площади некоторой замкнутой сферической ломаной, вершинами которой служат сферические изображения точек, взятых на спрямляемой кривой гладкой поверхности (точки разбиений кривой).

Для получения оценки угла Ю. Ф. Борисов представляет указанную площадь как сумму площадей сферических треугольников. Площадь каждого такого треугольника оценивается известным образом через произведение длин двух его сторон. А длины этих сторон равны углам между нормальными в соответствующих точках поверхности. Получается необходимая оценка через углы между касательными плоскостями поверхности. В такой форме указанные операции вполне осуществимы и в общем случае. Необходимо только надлежащим образом ввести понятие угла между плоскостями и установить аналог оценки, которая в трехмерном пространстве получалась из формулы для площади сферического треугольника. Это нами сделано в первой части работы, вследствие чего нам остается только сослаться на доказательства Ю. Ф. Борисова [3, 4].

Доказательства последних трех теорем, кроме того, основаны на одном свойстве гладких поверхностей. Введем следующее понятие. Ориентированную ломаную, вписанную в гладкую поверхность F , будем называть нормальной, если при проектировании двух соседних звеньев ломаной на касательную плоскость к поверхности F в их общей вершине получаем одинаково направленные отрезки. Очевидно, соседние звенья нормальной ломаной, если они не лежат на одной прямой, определяют плоскость, перпендикулярную к поверхности F в общей вершине звеньев.

Теорема 7. Каждая пара достаточно близких точек гладкой поверхности F соединяется кратчайшей, допускающей приближение нормальными ломаными с концами в указанных точках.

Эта теорема доказана Ю. Ф. Борисовым в трехмерном пространстве [2]. Однако, проследив его доказательство, мы убедимся, что оно полностью, только с изменением некоторых терминов, применимо и в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Широков. Тензорное исчисление, ч. 1, ОНТИ, М.—Л., 1934.
2. Ю. Ф. Борисов. Об одном внешне геометрическом свойстве геодезических на гладких поверхностях. Вестник ЛГУ, № 19, 1956.
3. Ю. Ф. Борисов. Параллельный перенос на гладкой поверхности, I, Вестник ЛГУ, № 7, 1958.
4. Ю. Ф. Борисов. Параллельный перенос на гладкой поверхности, II, Вестник ЛГУ, № 19, 1958.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ

В. В. Михайлов

В настоящей статье определяется нижняя граница критической нагрузки тонкой конической оболочки, находящейся под действием продольного сжатия вдоль образующей. При этом применяется метод исследования А. В. Погорелова [1]—[3].

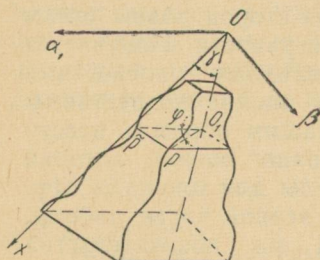


Рис. 1.

Рассмотрим усеченную коническую оболочку, по верхнему торцевому сечению которой приложена нагрузка интенсивности p . Так же как и в работах [1] — [3], предположим, что деформация срединной поверхности конической оболочки при переходе в закритическое упругое состояние представляет собой в основном геометрическое изгибание. В связи с этим, форму поверхности сжатой оболочки при такой деформации приближаем поверхностью изометричной исходной.

Обозначим через Z поверхность, изометричную круговому конусу. Подробное описание ее содержится в статье [4]. Поверхность Z имеет $2n$ плоскостей симметрии и состоит из $2n$ цилиндрических поверхностей с образующими, перпендикулярными этим плоскостям. Две соседние цилиндрические поверхности пересекаются по особой линии — ребру поверхности Z . Обозначим α_1 одну из плоскостей симметрии, γ_1 — пересечение поверхности Z с этой плоскостью. Введем прямоугольную систему координат (x, y, z) так, чтобы α_1 являлась плоскостью (x, y) и ось x была направлена по образующей конуса (рис. 1).

Пусть в этих координатах пересечение γ_1 задается уравнением

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x).$$

Тогда радиус-вектор ребра поверхности

$$r = \tilde{r} - \frac{\sin \varphi_1 \int_0^x \sqrt{1 + \tilde{y}'^2} dx + y \cos \gamma \sin \frac{\pi}{n} - x \sin \gamma \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \varphi_1 - \cos \frac{\pi}{n}}, \quad (1)$$

где $\tilde{r}$ — радиус — вектор кривой γ_1 , e_1 — единичный вектор прямой образующей, перпендикулярной плоскости α_1 , $2n$ — число

сторон многоугольника, получающегося в горизонтальном сечении поверхности Z , 2γ — угол конусности, $n^2 \gg 1$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{n} \sin \gamma$.

Заметим далее, что в прямоугольном треугольнике $\tilde{P}PO_1$ (рис. 1)

$$\operatorname{tg} \varphi < \frac{\pi}{n}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\frac{\tilde{y} + (s - x) \operatorname{tg} \gamma}{x \operatorname{tg} \gamma - \tilde{y}} < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} \cos \gamma \right)^2.$$

Положим

$$\tilde{y} = \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 y(x), \quad (2)$$

тогда $y(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{y + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \operatorname{tg} \gamma \int_0^x y'^2 dx}{x \operatorname{tg} \gamma - \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 y} < \frac{1}{2} \cos^2 \gamma. \quad (3)$$

В дальнейшем мы будем оперировать с функцией $y(x)$.

Найдем выражение для энергии деформации конической оболочки. Заметим при этом следующее: для того чтобы вычислить энергию всей оболочки, достаточно вычислить ее для части оболочки, заключенной между двумя соседними плоскостями симметрии, и результат умножить на $2n$.

В работе [1] А. В. Погорелов показал, что энергия упругой деформации оболочки допускает естественное деление на две части: U_γ и U_1 . U_γ — энергия, обусловленная сильным местным изгибом вдоль ребер; U_1 — энергия изгиба остальной части поверхности оболочки. Для вычисления энергии U_γ в [1] получено следующее выражение

$$U_\gamma = c E \delta^{\frac{5}{2}} \int k^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{5}{2}} ds. \quad (4)$$

Здесь k — кривизна ребра; θ — угол между соприкасающейся плоскостью ребра и касательной плоскостью к поверхности; интегрирование производится вдоль всего ребра; $c = 0,12$.

В рассматриваемом случае ребро задается уравнением (1) и для него

$$k = \frac{2n}{\pi \cos \gamma} |y''|, \quad \theta = \frac{\pi \cos \gamma}{2n}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{n \cos \gamma} \right)^2 y'^2}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), находим

$$U_\gamma = 2c \delta^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^3 \cos^2 \gamma \int_{r_0}^{r_1} |y'|^{\frac{1}{2}} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{n \cos \gamma} \right)^2 y'^2 \right] dx, \quad (6)$$

r_0, r_1 — расстояние по образующей от вершины конуса соответственно до верхнего и нижнего торцевых сечений.

Повторив рассуждения п. 2 § 4 работы [3], получим энергию U_1 в виде:

$$U_1 = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\pi}{n} \right)^3 \left[\left(\frac{\pi}{n} \right)^2 \sin \gamma \int_{r_0}^{r_1} x y''^2 dx + \frac{4\mu}{\sin \gamma} \int_{r_0}^{r_1} \frac{y y''}{x} dx + \frac{\mu}{\sin \gamma} y' \right]_{r_0}^{r_1}. \quad (7)$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости, δ — толщина оболочки.

Умножив (6), (7) на $2n$ и сложив результаты, получим энергию упругой деформации конической оболочки

$$U = \frac{E\delta^3}{6(1-\mu^2)} \left(\frac{\pi}{n} \right)^3 \left\{ \frac{\pi^2 \sin \gamma}{n} \int_{r_0}^{r_1} x y''^2 dx + \frac{4\mu n}{\sin \gamma} \int_{r_0}^{r_1} \frac{y y''}{x} dx + \frac{3cn(1-\mu^2) \cos^2 \gamma}{\frac{1}{\delta^2}} \int_{r_0}^{r_1} |y''|^{\frac{1}{2}} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{n \cos \gamma} \right)^2 y'^2 \right] dx + \frac{\mu n}{\sin \gamma} y' \right\}_{r_0}^{r_1}. \quad (8)$$

Сжатие оболочки вдоль образующей

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} \tilde{y}'^2 dx. \quad (9)$$

Функция $y(x)$ определяется из условия минимума выражения (8) для энергии упругой деформации при заданной степени сжатия $\bar{h}$. Если найти из такого условия функцию $y(x)$, то потенциальная энергия U станет определенной функцией от $\bar{h}$.

Уравнение равновесия оболочки имеет вид:

$$\frac{dA}{d\bar{h}} = \frac{dU}{d\bar{h}}, \quad (10)$$

где A — производимая внешней нагрузкой работа.

В нашем случае

$$A = 2\pi R \delta \bar{h} p$$

и уравнение (10) дает

$$2\pi R \delta p = \frac{dU}{d\bar{h}}. \quad (11)$$

Теперь задача об определении критической нагрузки сводится к отысканию минимума функционала U при связи (9) и налагаемых на функцию $y(x)$ граничных условиях

$$y'(r_0) = y'(r_1) = 0. \quad (12)$$

В связи с определением минимума U целесообразно в выражениях (8), (9) перейти к пределам интегрирования от 0 до 1 и сделать замену переменных

$$x = r_0 e^z, \quad y = r_0 \sin 2\gamma e^z u(z). \quad (13)$$

Относительно функции $u(z)$ предположим, что она периодическая с периодом b .

В новых переменных энергия упругой деформации (8) и сжатие (9) имеют вид:

$$U = \frac{EN\delta^3 \sin^2 2\gamma n}{6(1-\mu^2)b \sin \gamma} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \left(\frac{\pi \sin \gamma}{n}\right)^2 \int_0^1 u''^2 dz + \left(\frac{\pi \sin \gamma}{n}\right)^2 \int_0^1 u'^2 dz -$$

$$- 4\mu \int_0^1 u'^2 dz + \frac{3c(1-\mu^2)(e^{\frac{t}{2}}-1)}{2N} \left(\frac{r_0 \sin 2\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{\frac{zb}{2}} |u'' +$$

$$+ bu' |^{\frac{1}{2}} \left[1 + 2 \left(\frac{2\pi \sin \gamma}{nb} \right)^2 (u' + bu)^2 \right] dz \Big\}, \quad N = \frac{t}{b},$$

$$h = \int_0^1 u'^2 e^{zb} dz + b^2 u^2(0). \quad (15)$$

h — безразмерная величина сжатия

$$h = \frac{t}{e^t - 1} \left(\frac{n}{\pi} \right)^4 \frac{2b\bar{h}}{Nr_0 \sin^2 2\gamma}. \quad (16)$$

Уравнение равновесия оболочки теперь можно записать так:

$$p = \frac{E\delta}{6(1-\mu^2)R} \frac{4n^2\delta}{\pi^2 R} \frac{t}{e^t - 1} \frac{d}{dh} \left\{ \frac{1}{16\xi^2} \int_0^1 u''^2 dz + \left(\frac{\pi \sin \gamma}{n}\right)^2 \int_0^1 u'^2 dz - \right.$$

$$- \mu \int_0^1 u'^2 dz + \frac{3c\pi(1-\mu^2)(e^{\frac{t}{2}}-1)\xi}{4nt} \left(\frac{r_0 \sin 2\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 |u'' +$$

$$+ bu' |^{\frac{1}{2}} [1 + 2\xi^{-2} (u' + bu)^2] e^{\frac{zb}{2}} dz \Big\}, \quad \xi = \frac{nb}{2\pi \sin \gamma}.$$

Как видно из (17), p зависит от двух параметров n и ξ . Следуя предположению работы (2), будем допускать, что во все время закрытической деформации характер периодичности формы поверхности оболочки такой же, как и в момент потери устойчивости, то есть остаются неизменными значения параметров n и ξ , характеризующие периодичность. Как показано в статье Х. М. Муштары [5],

$$n = \sqrt[4]{\frac{12(1-\mu^2)}{2F(t)}} \left(\frac{r_0 \sin 2\gamma}{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad F(t) = \left[\frac{2t(1+\lambda^2)}{\lambda^2(e^{2t}-1)} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \xi = 1, \quad \lambda = \frac{\pi}{t}. \quad (18)$$

Подставив (18) в (17) и положив $\mu = 0,3$, имеем:

$$p = \frac{0,06E\delta t \cos \gamma}{(e^t - 1)F^2(t)R} \frac{d}{dh} \left[\frac{1}{16} \int_0^1 u''^2 dz - 0,3 \int_0^1 u'^2 dz + 0,24A_1(t) \int_0^1 |u'' + \right.$$

$$+ bu' |^{\frac{1}{2}} [1 + 2(u' + bu)^2] e^{\frac{zb}{2}} dz \Big], \quad (19)$$

где

$$A_1(t) = 2F(t) \frac{e^{\frac{t}{2}} - 1}{t}.$$

В (19), как и во всем дальнейшем изложении, опущены члены, имеющие порядок $\frac{1}{n^2}$.

График функции $u(z)$, реализующей минимум функционала U , будем приближать кривой, представляющей собой сопряжение парабол с прямолинейными отрезками. В качестве параметров, характеризующих эту кривую, возьмем a — значение второй производной $u(z)$ в точках параболической части кривой и величину α (рис. 2).

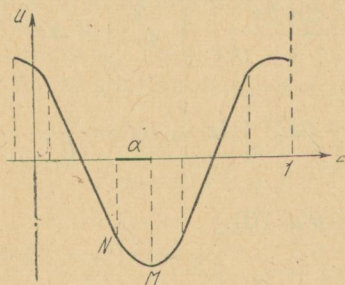


Рис. 2.

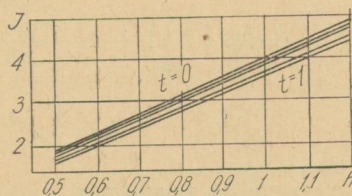


Рис. 3.

Интегралы, входящие в формулы (15), (19), выражаются через a и α следующим образом:

$$\int_0^1 u''^2 dz = 4a^2\alpha,$$

$$\int_0^1 |u'' + bu'|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{zb}{2}} dz = 4a^{\frac{1}{2}} \alpha, \quad (20)$$

$$\int_0^1 |u'' + bu'|^{\frac{1}{2}} (u' + bu)^2 e^{\frac{zb}{2}} dz = \frac{4}{3} a^{\frac{5}{2}} \alpha^3.$$

Подставляя (20) в (15) и (19), находим

$$p = \frac{0,06 E \delta t \cos \gamma}{(e^t - 1) F^2(t) R} \left[\frac{dI}{dh} - 0,3 \right], \quad (21)$$

где

$$I = 0,25 a^2 \alpha + 1,2 A_1(t) a^{\frac{1}{2}} \alpha + 0,8 A_1(t) a^{\frac{5}{2}} \alpha^3, \quad (22)$$

$$h = a^2 \alpha^2 \left(1 - \frac{8}{3} \alpha \right). \quad (23)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче. Определить минимум функции I при условии (23). Заметим, что параметры n и ξ были получены для коротких оболочек [5]. В дальнейшем рассматриваются оболочки короткие и малой конусности ($\gamma \leq 20^\circ$), для которых $t \leq 1$. Минимум значения I будем искать численным методом. В связи с этим найдем интервал допустимых значений для параметра α и относительного сжатия h . Если учесть, что $h > 0$, то из условия (23) $\alpha < \frac{3}{8}$. При оценке допустимых значений h воспользуемся неравенством (3) и получим $h < 1,3$.

Зафиксировав h и t , вычислим $\min I$ по параметру α .

Для всех допустимых значений h оказалось, что $\min I$ достигается при одном и том же $\alpha = 0,14-0,15$. Далее, по значениям $\frac{\min I}{\alpha}$ строим график

$$I(h) = \min I(\alpha, h)$$

для различных $t \leq 1$ (рис. 3).

Этот график дает возможность определить значения производной $\frac{dI}{dh}$, а вместе с ними и критические нагрузки $p(h)$, воспринимаемые оболочкой при относительном сжатии h .

Так как рассматриваются конические оболочки малой конусности, то для них примем замечание п. 2 § 5 работы [2] о том, что при переходе оболочки в закритическое упругое состояние воспринимаемая ею нагрузка $p(h)$ убывает с ростом h . Этот процесс останавливается, когда гребни рядом расположенных вмятин на поверхности оболочки достаточно близки. Таким образом, нижнюю критическую нагрузку надо определять из указанной близости гребней. В данном случае близость гребней характеризуется малостью величины:

$$\varepsilon = 1 - \frac{1 - 2\alpha}{1 - 2,667\alpha} h^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \approx 0,15.$$

При относительном сжатии $h = 1,2$, сближение ребер близко к нулю. Следовательно, нижнюю критическую нагрузку будем определять по величине $\frac{dI}{dh}$ для h близких к 1,2. Численный расчет показывает, что зависимость $\min I$ от h при h , отвечающих значительным сближениям ребер, практически линейная. Вычисленные коэффициенты наклона для различных t приведены в табл. 1.

Таблица 1

t	1	0,8	0,5	0,3	0
$\frac{dI}{dh}$	3,548	3,549	3,551	3,553	3,555

По формуле (21) найдем теперь значения нижней критической нагрузки конической оболочки (табл. 2). Полученные результаты дают возможность утверждать, что нижняя критическая нагрузка оболочки убывает при увеличении угла конусности γ и параметра t .

Таблица 2

$t \backslash \gamma$	1	0,8	0,5	0,3
20°	0,18	0,181	0,182	0,183
15°	0,185	0,186	0,187	0,188
10°	0,189	0,19	0,191	0,192

Наиболее значительными напряжениями в материале оболочки при закритической деформации являются напряжения от местного из-

гиба на гребнях. Как показано в [1], максимальные напряжения от местного изгиба определяются по формуле

$$\sigma = c' E \delta^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{3}{2}}.$$

Подставив (5) в (24), получим

$$\sigma = 3,6 \frac{E \delta}{R} F(t) \cos \gamma.$$

Отсюда следует, что полученной формулой (21) для нижней критической нагрузки конической оболочки можно пользоваться для расчета реальной оболочки в случае малой относительной толщины $\frac{\delta}{R}$.

В случае, когда $\gamma \rightarrow 0$, мы получаем формулу А. В. Погорелова для нижней критической нагрузки цилиндрических оболочек [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Харьков, 1960.
2. А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, I, Осевое сжатие, Харьков, 1962.
3. А. В. Погорелов. Цилиндрические оболочки при закритических деформациях, III, Кручение, Харьков, 1962.
4. В. И. Бабенко. О закритических деформациях конических оболочек, находящихся под внешним давлением и осевым сжатием (см. стр. 18 в этом номере).
5. Х. М. Муштари. Приближенное решение некоторых задач устойчивости тонкостенной конической оболочки кругового сечения. ПММ, вып. 3, т. VII, 1943.

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ МОНЖЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

М. А. Николаенко

Уравнение,

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \quad (1)$$

однородное степени $n > 1$ относительно дифференциалов, называют, по терминологии С. Ли [1], Монжевым уравнением.

Касательные к множеству κ интегральных кривых этого уравнения, проходящих через точку $M(x, y, z)$ пространства, образуют конус

$$\Omega(x, y, z, X-x, Y-y, Z-z) = 0 \quad (2)$$

С. Ли показал, что каждому Монжеву уравнению (1) соответствует дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (3)$$

и обратно.

В работах Д. М. Синцова [2] были выделены из общего множества κ интегральных кривых уравнения (1) аналоги асимптотическим линиям, линиям кривизны и геодезическим линиям классической теории поверхностей.

При этом, однако, имеет место известное расщепление их свойств, приводящее к тому, что существуют два типа линий кривизны — линии кривизны первого рода, огибающие направлений, соответствующих экстремальным значениям нормальной кривизны, и линии кривизны второго рода — интегральные кривые, вдоль которых нормали к конусам поля образуют развертывающуюся поверхность.

Точно так же геодезические линии первого рода служат экстремальными соответствующей вариационной задачи, а геодезические линии второго рода — интегральные кривые, вдоль которых главные нормали совпадают с нормальными к конусам поля.

Характеристики уравнения (3) являются также интегральными кривыми уравнения (1).

В настоящей статье выводится дифференциальное уравнение характеристик непосредственно по самому Монжеву уравнению.

Показывается, как, пользуясь этим дифференциальным уравнением характеристик, можно решать задачу о нахождении интегральной поверхности нелинейного дифференциального уравнения (3), проходящей через произвольно заданную кривую (задача Коши).

Распространяется понятие сопряженных направлений теории поверхностей на интегральные кривые Монжева уравнения.

Это понятие только в некотором смысле является аналогом обычно принятому. Оно существенно отличается от него тем, что в нашем случае устанавливается сопряженность между прямыми δx пучка, ле-

жащего в плоскости α , касательной к конусу, имеющему центром вершину этого конуса, и соприкасающимися плоскостями β интегральных кривых γ с общей касательной t — образующей конуса.

Доказывается теорема: соответствие между этими пучками проективно.

Исходя из введенной таким образом в многообразие Монжа сопряженности, получается другой, геометрический, вывод дифференциального уравнения характеристик Монжева уравнения.

Доказывается теорема, устанавливающая связь между характеристиками, геодезическими «кратчайшими» и геодезическими «прямейшими»: если интегральная кривая Монжева уравнения обладает двумя из трех свойств: 1° быть геодезической «кратчайшей», 2° быть геодезической «прямейшей», 3° быть характеристикой, то она обладает и третьим свойством.

1. Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (3) подчиняет каждой точке пространства $M(x, y, z)$ конус, огибаемый интегральными поверхностями, проходящими через M .

Чтобы этот конус совпал с конусом (2) Монжева уравнения (1), должно выполняться условие

$$\Omega_{x'} + p\Omega_{z'} = 0, \quad \Omega_{y'} + q\Omega_{z'} = 0. \quad (4)$$

Исключая x', y', z' из уравнений (1), (4) и из условия однородности

$$\Sigma x' \Omega_{x'} = 0, \quad (5)$$

получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (3), соответствующее Монжеву уравнению (1).

Обратно, исключив p, q из системы уравнений

$$px' + qy' - z' = 0, \quad (6)$$

$$x'F_q - y'F_p = 0 \quad (7)$$

и (3), приходим к Монжеву уравнению (1).

2. Характеристики уравнения в частных производных первого порядка (3) определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}. \quad (8)$$

Так как они являются интегральными кривыми Монжева уравнения (1), то дифференциальное уравнение их может быть получено непосредственно по самому этому уравнению. Докажем, что характеристики определяются уравнениями (1) и

$$D = \begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_{x'} & (\Omega_{x'})' \\ \Omega_y & \Omega_{y'} & (\Omega_{y'})' \\ \Omega_z & \Omega_{z'} & (\Omega_{z'})' \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где производная взята по произвольному параметру.

Действительно, перепишем систему (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda x' &= F_p, \quad \lambda y' = F_q, \quad \lambda z' = pF_p + qF_q, \quad -\lambda p' = F_x + pF_z - \\ &\quad -\lambda q' = F_y + qF_z. \end{aligned} \quad (8')$$

Первые три уравнения по (6) и (7) выполняются для любой интегральной кривой Монжева уравнения.

Последние два уравнения запишем по (4) так:

$$\lambda \left(\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}} \right)' = F_x - \frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}} F_z, \quad (10)$$

$$\lambda \left(\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}} \right)' = F_y - \frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}} F_z. \quad (11)$$

Для вычисления F_x , F_y , F_z воспользуемся тождеством

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') \equiv F(x, y, z, p, q), \quad (12)$$

из которого следует

$$\Omega_x = F_x + F_p p_x + F_q q_x$$

или

$$F_x = \Omega_x + \lambda x' \left(\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}} \right)_x + \lambda y' \left(\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}} \right)_x.$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись условием однородности:

$$x' \Omega_{x'} + y' \Omega_{y'} + z' \Omega_{z'} \equiv n \Omega(x, y, z, x', y', z') = 0, \quad (13)$$

$$x' \Omega_{xx'} + y' \Omega_{xy'} + z' \Omega_{xz'} \equiv n \Omega_x(x, x');$$

получим:

$$F_x = \Omega_x + n \lambda \frac{\Omega_x}{\Omega_{z'}},$$

$$F_y = \Omega_y + n \lambda \frac{\Omega_y}{\Omega_{z'}},$$

$$F_z = \Omega_z + n \lambda \frac{\Omega_z}{\Omega_{z'}}.$$

Подставив значение F_x , F_z в уравнение (10), найдем

$$\lambda \left| \frac{\Omega_{z'}}{\Omega_{x'}} \frac{(\Omega_{z'})'}{(\Omega_{x'})'} \right| = \left| \frac{\Omega_{z'}}{\Omega_{x'}} \frac{\Omega_z}{\Omega_x} \right| (\Omega_{z'} + n \lambda). \quad (14)$$

Продифференцируем тождество (12) по x' :

$$\Omega_{x'} = F_p p_{x'} + F_q q_{x'}.$$

По (8) и (4) имеем:

$$\Omega_{x'} = -\lambda x' \left(\frac{\Omega_{x'}}{\Omega_{z'}} \right)_{x'} - \lambda y' \left(\frac{\Omega_{y'}}{\Omega_{z'}} \right)_{y'},$$

следовательно,

$$\Omega_{x'} + \frac{\lambda}{\Omega_{z'}} (x' \Omega_{x'x'} + y' \Omega_{x'y'} + z' \Omega_{x'z'}) = 0,$$

или, воспользовавшись условием однородности, имеем;

$$\Omega_{x'} \left[1 + \frac{\lambda}{\Omega_{z'}} (n - 1) \right] = 0,$$

отсюда

$$\Omega_{z'} + \lambda (n - 1) = 0.$$

Уравнение (14) принимает такой вид:

$$\begin{vmatrix} \Omega_{z'} (\Omega_{z'})' - \Omega_z \\ \Omega_{x'} (\Omega_{x'})' - \Omega_x \end{vmatrix} = 0, \quad (14')$$

Аналогично из (11)

$$\begin{vmatrix} \Omega_{z'} (\Omega_{z'})' - \Omega_z \\ \Omega_{y'} (\Omega_{y'})' - \Omega_y \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Из (14') и (15) следует

$$\begin{vmatrix} \Omega_{x'} (\Omega_{x'})' - \Omega_x \\ \Omega_{y'} (\Omega_{y'})' - \Omega_y \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Умножим (14') на Ω_y (15), на Ω_x и (16) на Ω_z и сложим.

Получим

$$D = 0. \quad ($$

Если Монжево уравнение есть дифференциальное уравнение линейчатого комплекса, то

$$\Omega(x; x') \equiv \Omega(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx', x', y', z') = 0, \quad (16')$$

при этом выполняется условие

$$\Sigma \Omega_x x' = 0, \quad (16'')$$

обратно из (16'') следует (16').

Если Монжево уравнение не есть уравнение линейчатого комплекса, то из уравнения $D=0$ следуют уравнения (14'), (15) и (16).

Действительно, умножив в определителе (9) последнюю строку на z' и прибавив к ней первую, умноженную на x' , и вторую, умноженную на y' , получим;

$$\begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_{x'} (\Omega_{x'})' \\ \Omega_y & \Omega_{y'} (\Omega_{y'})' \\ \Sigma \Omega_x x' & 0 \quad \Sigma (\Omega_{x'})' x' \end{vmatrix} = 0,$$

однако

$$\Sigma (\Omega_{x'})' x' = \Sigma \Omega_x x',$$

поэтому уравнение (9) принимает вид

$$(\Sigma \Omega_x x') \begin{vmatrix} \Omega_{x'} (\Omega_{x'})' - \Omega_x \\ \Omega_{y'} (\Omega_{y'})' - \Omega_y \end{vmatrix} = 0.$$

Но по условию (16'') не имеет места, следовательно, выполняется условие (16). Аналогично получим условие (14') и (15).

Приняв x за независимую переменную, мы имеем для определения двух функций y, z систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (9) первого и второго порядка, из которых характеристики определяются с тремя произвольными постоянными.

3. Распространим понятие сопряженных направлений поверхности на множество κ интегральных кривых Монжева уравнения, проходящих через точку M пространства.

Рассмотрим интегральную кривую γ Монжева уравнения. Через точку $M(x, y, z)$ кривой γ проведем касательную t — образующую локального конуса (2) с вершиной в M . Касательная плоскость α к конусу вдоль t имеет вид

$$\Omega_{x'}(X-x) + \Omega_{y'}(Y-y) + \Omega_{z'}(Z-z) = 0. \quad (17)$$

Через бесконечно близкую точку M' кривой γ проведем касательную t' — образующую конуса с вершиной в M' .

Касательная плоскость α' к этому конусу вдоль t' пересекает α по прямой τ' .

При стремлении M' и M прямая τ' имеет предельным положением прямую τ , лежащую в плоскости α и проходящую через точку M . Прямые же t и t' в пределе определяют соприкасающуюся плоскость β к интегральной кривой γ с касательной t .

Если в точке M' вместо образующей t' конуса взять другую образующую t'' , получим в пределе соприкасающуюся плоскость β' другой интегральной кривой γ' , проходящей через точку M с той же касательной t . При этом соприкасающейся плоскости β будет соответствовать прямая τ .

Таким образом, пучку соприкасающихся плоскостей β к интегральным кривым с общей касательной t соответствует пучок прямых τ с центром M , лежащих в плоскости α .

Назовем прямую τ и соответствующую ей плоскость β взаимно сопряженными.

Направление δx для τ определяется уравнением (17) и уравнением, полученным из него дифференцированием по параметру интегральной кривой:

$$(\Omega_{x'})' \delta x + (\Omega_{y'})' \delta y + (\Omega_{z'})' \delta z = 0. \quad (18)$$

Теорема: Соответствие между пучком направлений δx прямых, лежащих в плоскости α , касательной к конусу (2) вдоль его образующей t , с центром в вершине этого конуса, и пучком соприкасающихся плоскостей β интегральных кривых с общей касательной t проективно.

Доказательство проведем в специально выбранной системе координат.

Примем точку M за начало координат, образующую t — за ось x -ов, x — за независимую переменную, тогда в точке M

$$x=y=z=0, \quad x'=1, \quad y'=z'=0. \quad (19)$$

Касательную плоскость α к конусу вдоль t примем за плоскость XOY . Тогда в точке M

$$\Omega_{x'} = \Omega_{y'} = 0, \quad \Omega_{z'} \neq 0. \quad (20)$$

Вдоль интегральной кривой

$$\Sigma \Omega_{x'} x' + \Sigma \Omega_{x''} x'' = 0. \quad (21)$$

В выбранной системе координат в точке M (21) сводится к

$$\Omega_{x'} + \Omega_{z'} z'' = 0. \quad (22)$$

Для любой прямой τ пучка с центром M в плоскости α

$$\Sigma \Omega_{x'} \delta x = 0, \quad (23)$$

или

$$\delta z = 0.$$

Рассмотрим соприкасающуюся плоскость $\beta(u, v, w)$ интегральной кривой. Для нее

$$ux' + vy' + wz' = 0, \quad (24)$$

$$ux'' + vy'' + wz'' = 0. \quad (25)$$

Из (24) следует по (19)

$$u=0, \quad (26)$$

а из (25) и (22) —

$$vy''\Omega_{z'} = w\Omega_x. \quad (27)$$

В выбранной системе координат уравнение (18) принимает вид

$$\delta x (\Omega_{xx'} + \Omega_{x'y'} y'' + \Omega_{x'z'} z'') + \delta y (\Omega_{xy'} + \Omega_{y'y'} y'' + \Omega_{z'y'} z'') = 0. \quad (28)$$

Заменив z'' и y'' по (22) и (27), получим:

$$\begin{aligned} \delta x &= \lambda [(\Omega_{z'} \Omega_{xy'} - \Omega_x \Omega_{y'z'}) v + \Omega_x \Omega_{y'y'} w], \\ \delta y &= -\lambda [(\Omega_{z'} \Omega_{xx'} - \Omega_x \Omega_{x'z'}) v + \Omega_x \Omega_{x'y'} w]. \end{aligned} \quad (29)$$

т. е. линейную зависимость между $(v, w$ и $(\delta x, \delta y)$.

Если учесть, что в точке M

$$\Omega_{xx'} = n\Omega_x, \quad \Omega_{x'z'} = (n-1)\Omega_{z'}, \quad \Omega_{x'y'} = 0,$$

получим для определителя системы (29)

$$\Delta = -\Omega_x^2 \Omega_{z'} \Omega_{y'y'}.$$

При $\Omega_x \neq 0$, $\Omega_{y'y'} \neq 0$ система (29) определяет невырожденное проективное соответствие.

(Для линейчатого комплекса $\Sigma \Omega_x x' = 0$, следовательно $\Omega_x = 0$).

В этом соответствии касательной плоскости $z=0$ ($v=0$) соответствует прямая $\delta y=0$, т. е. образующая конуса.

Теорема. Если вдоль интегральной кривой прямые τ , соответствующие ее соприкасающимся плоскостям β , совпадают с ее касательными t , то кривая служит асимптотической.

Доказательство. Если некоторая прямая τ из пучка δx , проходящая через вершину M конуса (2), совпадает с касательной t к интегральной кривой, то соответствующая ей соприкасающаяся плоскость β совпадает с касательной плоскостью α к конусу вдоль t .

И если это имеет место в каждой точке интегральной кривой, то соприкасающаяся плоскость β вдоль всей этой интегральной кривой совпадает с касательной плоскостью α к соответствующему конусу, что и характеризует асимптотические линии.

4. К дифференциальному уравнению характеристик (9) можно прийти другим путем, не исходя из системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Рассмотрим произвольную плоскость ω . Точки этой плоскости служат вершинами двухпараметрического множества конусов Монжева уравнения. В этом двухпараметрическом множестве выделяем однопараметрическое подмножество конусов, касательных к плоскости ω .

Вершины этого подмножества конусов образуют некоторую плоскую кривую C в плоскости ω [3].

Действительно, пусть уравнение плоскости ω

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (30)$$

Условие касания конуса Монжева уравнения (1) с вершиной в точке $M(x, y, z)$ с плоскостью ω по (17)

$$\frac{\Omega_{x'}}{A} = \frac{\Omega_{y'}}{B} = \frac{\Omega_{z'}}{C}, \quad (31)$$

Исключив x', y', z' из системы (31) и уравнений $\Omega = \Sigma x' \Omega_{x'} = 0$, получим зависимость между x, y, z

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad (32)$$

которая вместе с (30) и определяет плоскую кривую C .

Рассмотрим теперь конус Монжева уравнения с вершиной в точке M .

В каждой плоскости α , касательной к конусу вдоль его образующей t , содержится плоская кривая C , проходящая через M .

В этой же плоскости α , как нами уже показано в п. 3, лежит пучок направлений δx с центром M , сопряженных пучку соприкасающихся плоскостей β интегральных кривых Монжева уравнения с общей касательной t . Среди этого пучка направлений δx содержится и направление касательной τ к плоской кривой C .

Теорема. Интегральная кривая Монжева уравнения, для каждой точки которой прямая τ , сопряженная ее соприкасающейся плоскости β , касается плоской кривой C , есть характеристика.

Пусть $M(x, y, z)$ — точка интегральной кривой γ . Плоскость, касательная к конусу (2) с вершиной в M вдоль его образующей t , касательной к γ ,

$$\Sigma \Omega_{x'}(X - x) = 0. \quad (33)$$

В плоскости (33) расположена плоская кривая C , проходящая через точку M . Ее текущие координаты X, Y, Z удовлетворяют уравнению (33) и уравнениям

$$\Omega(X, Y, Z, X', Y', Z') = 0, \quad (34)$$

$$\Omega_{X'} = \lambda \Omega_{x'}, \quad \Omega_{Y'} = \lambda \Omega_{y'}, \quad \Omega_{Z'} = \lambda \Omega_{z'}. \quad (35)$$

Касательная к плоской кривой C удовлетворяет уравнениям

$$\Omega_{X'} dX + \Omega_{Y'} dY + \Omega_{Z'} dZ = 0, \quad (36)$$

$$\Sigma \Omega_X dX + \Sigma \Omega_{X'} dX' = 0, \quad (37)$$

$$d\Omega_{X'} = \Omega_{x'} d\lambda, \quad d\Omega_{Y'} = \Omega_{y'} d\lambda, \quad d\Omega_{Z'} = \Omega_{z'} d\lambda, \quad (38)$$

Умножим последние уравнения на x', y', z' соответственно и сложим. Получим

$$\Sigma x' d\Omega_{X'} = 0. \quad (39)$$

В точке M уравнение (39) принимает вид

$$n \Sigma \Omega_X dX + (n - 1) \Sigma \Omega_{X'} dX' = 0. \quad (40)$$

В этой же точке M уравнения (36) запишутся так:

$$\Sigma \Omega_{x'} dX = 0, \quad (41)$$

$$\Sigma \Omega_X dX + \Sigma \Omega_{X'} dX' = 0. \quad (42)$$

Из уравнений (40) и (42) следует

$$\Sigma \Omega_X dX = 0. \quad (43)$$

Таким образом, касательная τ к плоской кривой C в точке M определяется уравнениями

$$\Sigma \Omega_X(X - x) = 0, \quad (44)$$

$$\Sigma \Omega_{X'}(X - x) = 0.$$

Но прямая, сопряженная соприкасающейся плоскости β интегральной кривой γ , определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\Sigma \Omega_{x'}(X-x) &= 0, \\ \Sigma (\Omega_{x'})'(X-x) &= 0.\end{aligned}\quad (45)$$

Чтобы касательная τ к плоской кривой C была сопряжена соприкасающейся плоскости интегральной кривой, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_{x'} & (\Omega_{x'})' \\ \Omega_y & \Omega_{y'} & (\Omega_{y'})' \\ \Omega_z & \Omega_{z'} & (\Omega_{z'})' \end{vmatrix} = 0, \quad (46)$$

которое совпадает с (9) п. 2.

Решая уравнение (46) совместно с уравнением Монжа (1), получаем ∞^3 характеристик

$$\begin{aligned}y &= \varphi(x, C_1, C_2, C_3), \\ z &= \psi(x, C_1, C_2, C_3).\end{aligned}$$

Таким образом, из множества κ интегральных кривых, проходящих через вершину M локального конуса (2), соответствующего Монжеву уравнению (1), к вышеупомянутым во введении кривым (асимптотические линии, линии кривизны двух родов и геодезические «прямейшие» и «кратчайшие») можно присоединить теперь и ∞^1 интегральных кривых — характеристик.

5. Используем уравнение (9) характеристик для решения задачи Коши о построении интегральной поверхности дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (3)$$

проходящей через произвольную заданную кривую L :

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u). \quad (47)$$

В п. 1 были указаны формулы (6), (7), преобразующие уравнение в частных производных первого порядка (3) в соответствующее ему Монжево уравнение (1).

Каждая точка M кривой L служит вершиной конуса (2) уравнения (1). Эти конусы вдоль кривой L образуют однопараметрическое поле.

Через касательные l к кривой L проводим плоскости α , касательные к соответствующим конусам этого поля. При этом через каждую касательную l проходит m плоскостей, касательных к соответствующему конусу (m — класс конуса) вдоль m его образующих.

Каждая из этих образующих t определяет характеристику. Множество полученных таким образом характеристик образуют m интегральных поверхностей уравнения (3), проходящих через кривую L .

Пусть

$$\begin{aligned}y &= \varphi(x, C_1, C_2, C_3), \\ z &= \psi(x, C_1, C_2, C_3) -\end{aligned}\quad (48)$$

уравнения характеристик, полученные в результате интегрирования системы (1), (9).

Касательная l к кривой L и образующая t конуса лежат в плоскости α , касательной к конусу, следовательно,

$$\Omega_{x'} x'_u + \Omega_{y'} y'_u + \Omega_{z'} z'_u = 0. \quad (49)$$

Исключив четыре величины u, C_1, C_2, C_3 из уравнений (47), (49) и

$$\begin{aligned} y(u) &= \varphi[x(u), C_1, C_2, C_3], \\ z(u) &= \psi[x(u), C_1, C_2, C_3] \end{aligned} \quad (50)$$

— (пяти уравнений), получим искомые интегральные поверхности.

Пример Пусть

$$F(x, y, z, p, q) = qy - p^2 - z = 0.$$

Кривая L

$$x=0, y=u, z=u^2. \quad (47')$$

По (6) и (7) п. 1

$$\Omega(x; x') = 4yy'z' + y^2x'^2 - 4zy'^2 = 0. \quad (51)$$

Примем за независимую переменную y и воспользуемся дифференциальным уравнением характеристик в виде (14'), получим

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

Решая его совместно с (5'), получим уравнение характеристик

$$\begin{aligned} x &= C_1y + C_2, \\ z &= -\frac{C_1^2}{4}y^2 + C_3y. \end{aligned} \quad (48')$$

Уравнение (49) после подстановки в него значений x, y, z по уравнениям кривой дает

$$C_3 - \frac{u}{2} C_1^2 = 0. \quad (49')$$

Уравнения (50) принимают вид

$$C_1u + C_2 = 0, C_3 = u \left(\frac{C_1^2}{4} - 1 \right). \quad (50')$$

Исключив u, C_1, C_2, C_3 из пяти уравнений (47'), (49'), (50'), получаем две интегральные поверхности

$$\begin{aligned} z &= y^2 + xy, \\ z &= y^2 - xy \end{aligned}$$

дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, нелинейного относительно p, q .

6. Во множестве интегральных кривых Монжева уравнения, проходящих через данную точку M пространства, содержится и проходит в направлении любой образующей конуса, соответствующего этому уравнению, одна характеристика, одна геодезическая «прямейшая» — интегральная кривая, вдоль которой главная нормаль к кривой совпадает с нормалью к конусу, и одна геодезическая «кратчайшая» — экстремаль вариационной задачи

$$\int \sqrt{\Sigma \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt = \text{extr}$$

при дополнительном условии $\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0$.

Теорема. Если кривая обладает одним из трех свойств: 1° быть характеристикой, 2° быть геодезической «прямейшей», 3° быть геодезической «кратчайшей», то она обладает и третьим свойством.

Действительно, вдоль характеристики

$$\begin{aligned}(\Omega_{x'})' - \Omega_x &= \lambda \Omega_{x'}, \\(\Omega_{y'})' - \Omega_y &= \lambda \Omega_{y'}, \\(\Omega_{z'})' - \Omega_z &= \lambda \Omega_{z'},\end{aligned}\tag{51}$$

Дифференциальное уравнение геодезических «прямейших»:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} &= \mu \Omega_{x'}, \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \mu \Omega_{y'}, \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= \mu \Omega_{z'}.\end{aligned}\tag{52}$$

Дифференциальное уравнение геодезических «кратчайших»

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} &= \nu \left[\Omega_x - \frac{d}{ds} (\Omega_{x'}) \right] + \frac{d\nu}{ds} \Omega_{x'}, \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \nu \left[\Omega_y - \frac{d}{ds} (\Omega_{y'}) \right] + \frac{d\nu}{ds} \Omega_{y'}, \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= \nu \left[\Omega_z - \frac{d}{ds} (\Omega_{z'}) \right] + \frac{d\nu}{ds} \Omega_{z'}.\end{aligned}\tag{53}$$

Из сопоставления этих формул и следует теорема.

Ниже приводим пример Монжева уравнения, для которого имеет место вышеуказанная теорема:

$$\begin{aligned}\Omega(x; x') &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - \Phi^2, \\ \Phi &= \varphi_x x' + \varphi_y y' + \varphi_z z' .\end{aligned}$$

Здесь

$$(\Omega_{x'})' - \Omega_x = 2x'' - 2\Phi' \varphi_x.$$

Если принять за параметр длину дуги, то $\Phi^2 = 1$, $\Phi' = 0$ и

$$(\Omega_{x'})' - \Omega_x = 2x'',$$

Дифференциальное уравнение характеристик (51) совпадает с дифференциальным уравнением геодезических «прямейших» и дифференциальным уравнением геодезических «кратчайших».

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Lie, Geometrie der Berührungs transformationen, B I, 1896.
2. Д. М. Синцов. Геометрія Монжевих рівнянь. «Зап. Харк. матем. т-ва», 1929 (4), III, 121—132.
3. G. Darboux, Solutions singulières des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre (Mem. d. savants étrangers, t. XXVII, n° 2).

ТРЕХМЕРНЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА, ДОПУСКАЮЩИЕ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. С. Слободян

Вполне геодезической поверхностью риманова пространства n измерений называется такая поверхность, геодезические линии которой являются одновременно и геодезическими пространства. Здесь рассматриваются трехмерные римановы пространства, допускающие семейства вполне геодезических поверхностей. Метрика пространства предполагается аналитической в том смысле, что функции

$$g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

определяющие компоненты метрического тензора пространства, предполагаются аналитическими функциями координат точки.

Пусть трехмерное риманово пространство допускает сходящуюся последовательность вполне геодезических поверхностей. На поверхностях этой последовательности имеем [1]:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= a_{ij}(x^1, x^2), \\ g_{j3} &= 0, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

где функции a_{ij} определяют компоненты метрического тензора вполне геодезической поверхности. Предположим, что в произвольной точке M пространства

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, x^3).$$

Эти функции совпадают на поверхностях последовательности с функциями a_{ij} , которые не зависят от x^3 . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} = 0$$

на поверхностях этой последовательности. Но $g_{\alpha\beta}$, по предположению, аналитические, и мы можем утверждать, что и функции

$$f_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3}, \quad i, j = 1, 2$$

тоже являются аналитическими во всем пространстве. Так как значения f_{ij} равны нулю на поверхностях последовательности, имеющих предельную поверхность, то эти функции тождественно равны нулю [2]. По той же причине

$$g_{j3} = 0.$$

Компоненты метрического тензора в любой точке пространства имеют вид

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2), \\ g_{i3} = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

А это означает, что через любую точку пространства проходит вполне геодезическая поверхность. Другими словами, рассматриваемое риманово пространство допускает однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Таким образом, доказана теорема:

Если трехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает сходящуюся последовательность вполне геодезических поверхностей, то оно допускает однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей.

Линейный элемент такого пространства в специальной системе координат записывается в виде [1]

$$dS^2 = d\sigma^2 + \varphi(x^1, x^2, \rho) d\rho^2,$$

где $d\sigma^2$ — линейный элемент вполне геодезической поверхности, не зависящий от ρ ; ρ — параметр, характеризующий отдельные такие поверхности.

Рассмотрим трехмерное риманово пространство, допускающее двухпараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Пусть это семейство задано уравнением

$$f(x^1, x^2, x^3, a_1, a_2) = 0,$$

где a_1, a_2 — параметры семейства. Предположим, что в пространстве имеет место хотя бы одно из двух неравенств

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} \neq 0.$$

Пусть имеет место первое неравенство. Зафиксируем некоторую точку пространства $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Из уравнения семейства можно выразить параметр a_1 через координаты точки M_0 и параметр a_2 :

$$a_1 = \varphi(x_0^1, x_0^2, x_0^3, a_2).$$

Подставляя значение a_1 в уравнение семейства, получим:

$$f(x^1, x^2, x^3, \varphi(x_0^1, x_0^2, x_0^3, a_2), a_2) = 0.$$

Так как точка M_0 была произвольной, мы можем сказать, что через каждую точку пространства проходит однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей.

Известно [1], что направления, ортогональные вполне геодезическим поверхностям, проходящим через некоторую точку пространства, являются главными направлениями индикатрисы Римана, построенной для этой точки. Собственные значения оператора $\|A - \lambda E\|$, где $\|A\|$ — матрица коэффициентов индикатрисы, $\|E\|$ — единичная матрица, соответствующие этим главным направлениям, дают кривизну пространства по площадкам, касающимся вполне геодезических поверхностей. Зафиксируем точку пространства, построим в этой точке индикатрису Римана. Векторы направлений, ортогональных к вполне геодезическим поверхностям, опишут на индикатрисе некоторую кривую. Если эта кривая пространственная, то любое направление индикатрисы главное, и она представляет собой сферу. Если это имеет место в каждой точке пространства, то это пространство постоянной кривизны.

Пусть имеется хотя бы одна точка M , где индикатриса — не сфера. Тогда она будет эллипсоидом вращения, потому что должна допускать однопараметрическое семейство главных направлений. Кривизна пространства определяется тензором Римана, компоненты которого составлены из первых и вторых частных производных функций $g_{\alpha\beta}$, которые мы предполагаем аналитическими. При этом условии функции

$$f_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

тоже аналитические, и мы можем утверждать, что компоненты тензора Римана являются аналитическими функциями точки. Тогда и кривизна пространства представляет собой аналитическую функцию точки и направления. В силу этого индикатриса будет эллипсоидом вращения и в некоторой окрестности U точки M . Все вполне геодезические поверхности, проходящие через точку P этой окрестности содержат фиксированную геодезическую линию δ_P . В окрестности U возьмем другую точку Q . Все вполне геодезические поверхности, проходящие через Q , содержат геодезическую δ_Q . Геодезические δ_P и δ_Q либо пересекаются, либо не пересекаются.

Рассмотрим первый случай. Пусть δ_P и δ_Q пересекаются в точке $M \in U$. Тогда в этой точке индикатриса допускает два различных однопараметрических семейства главных направлений. Значит, она сфера, чего быть не может. Отсюда следует, что геодезические δ_P и δ_Q могут пересекаться только в точке $N \notin U$. Множество V точек $A \notin U$ замкнуто, как дополнительное к открытому множеству U . Оно не может иметь ни одной внутренней точки. В самом деле, допустим, что такая точка существует, обозначим ее A_0 . Существует такая окрестность V' точки A_0 , что каждая точка этой окрестности принадлежит множеству V . Кривизна пространства в каждой точке V' не зависит от направления. Как было показано выше, она представляет собой аналитическую функцию точки и направления. Следовательно, кривизна не зависит от направления в любой точке пространства. Индикатриса в каждой точке — сфера, чего быть не может, так как, по предположению, множество U не пусто. Таким образом, множество V представляет собой некоторую совокупность поверхностей, кривых и изолированных точек. Оно может быть также дискретным множеством. Заметим, что если среди поверхностей множества V можно выбрать хотя бы одну сходящуюся последовательность, и предельная поверхность принадлежит множеству V , то пространство обладает постоянной кривизной.

Пусть V — дискретное множество. Возьмем такую окрестность точки N , в которой, кроме нее, нет других точек из множества V . Проведем через точку N геодезическую δ_N . При условии аналитичности метрики пространства семейство вполне геодезических поверхностей, содержащее некоторую геодезическую, проходит через каждую точку пространства. Поэтому всякая геодезическая, выходящая из точки N , лежит на одной из вполне геодезических поверхностей семейства, которое проходит через δ_P . С другой стороны, всякая геодезическая, проходящая через точку N , лежит на одной из вполне геодезических поверхностей семейства, проходящего через δ_Q . Таким образом, через геодезическую δ_N проходят две поверхности F_P и F_Q , принадлежащие двум различным однопараметрическим семействам. Если мы возьмем на геодезической δ_N точку N' , то через

нее тоже проходит семейство вполне геодезических поверхностей, оно содержит некоторую геодезическую $\delta_{N'}$.

Если $\delta_{N'}$ не лежит ни на F_P , ни на F_Q , то индикатриса в точке N' допускает однопараметрическое семейство главных направлений, которые лежат в плоскости, ортогональной к $\delta_{N'}$, и еще два различных главных направления, которые не лежат в этой плоскости. В точке N' индикатриса-сфера, чего быть не может. Итак, $\delta_{N'}$ лежит на одной из поверхностей — F_P или F_Q . Пусть $\delta_{N'}$ лежит на F_P . Если направление $\delta_{N'}$ не ортогонально F_Q , индикатриса в точке N' — снова сфера, потому что допускает однопараметрическое семейство главных направлений и еще одно главное направление, не входящее в состав семейства и не ортогональное ему.

Пусть, наконец, $\delta_{N'}$ ортогональна F_Q . Теперь индикатриса в точке N' допускает плоскость главных направлений, которая совпадает с касательной плоскостью к F_Q в точке N' , и еще одно главное направление, ортогональное этой плоскости. Это должно иметь место в каждой точке $\delta_{N'}$, в противном случае индикатриса в некоторой точке A , где этого нет, будет сферой. Итак, в каждой точке $\delta_{N'}$ индикатриса допускает семейство главных направлений и еще одно направление, ортогональное плоскости этого семейства. Если мы теперь на $\delta_{N'}$ возьмем точку N'' и проведем вполне геодезическую поверхность через δ_Q и N'' , то получим, что в этой точке индикатриса допускает однопараметрическое семейство главных направлений и еще одно направление, но уже не лежащее в плоскости семейства и не ортогональное ей. Индикатриса в N'' — сфера, чего быть не может. Из сказанного следует, что "ось" пучка, проходящего через N' , совпадает с $\delta_{N'}$.

Так как δ_N — произвольная геодезическая, выходящая из точки N , то, следовательно, каждая геодезическая, проходящая через N , служит "осью" однопараметрического пучка, и тогда любая площадка в точке N определяет вполне геодезическую поверхность. Через точку N проходит двухпараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Следовательно, все вполне геодезические поверхности пространства проходят через фиксированную точку. Отсюда вытекает, что R_3 обладает свободной подвижностью вокруг точки N . Если мы введем полярную систему координат, то линейный элемент пространства можно записать в виде

$$dS^2 = dr^2 + \varphi(r) dS_2^2,$$

где dS_2^2 — линейный элемент двумерного пространства постоянной кривизны, не зависящий от r ; r — расстояние от произвольной точки пространства до точки N .

Пусть множество V представляет собой поверхность, которую обозначим буквой F . Геодезические δ_P и δ_Q пересекаются в точке $N \in F$. Предположим сначала, что эта поверхность не содержит ни одной геодезической пространства. Так как кривизна пространства есть аналитическая функция, то поверхность F представляет собой аналитическую поверхность. Поэтому на произвольной геодезической пространства найдутся хотя бы две точки, которые не принадлежат

этой поверхности. Проведем через точку N геодезическую δ_N и возьмем на ней точку $N' \notin F$. Через N' проходит две вполне геодезические поверхности F_P и F_Q , принадлежащие двум различным семействам. „Ось“ $\delta_{N'}$ пучка вполне геодезических поверхностей, проходящего через N' , лежит на одной из поверхностей F_P или F_Q . Пусть, как и раньше, $\delta_{N'} \in F_P$. Эта геодезическая может быть в точке N' направлена только по нормали к F_Q . Выберем на $\delta_{N'}$ точку $N'' \notin F$ и проведем вполне геодезическую поверхность $F_{N''}$ через δ_Q и точку N'' . При этом получим, что в точке N'' индикатриса допускает плоскость главных направлений и еще одно главное направление, не лежащее в этой плоскости и не ортогональное ей. В точке N'' индикатриса — сфера, чего быть не может, так как $N'' \notin F$. Таким образом, и в случае, когда V представляет собой поверхность, пространство обладает свободной подвижностью вокруг фиксированной точки.

Пусть поверхность F содержит только одну геодезическую δ_N . Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что всякая геодезическая, которая проходит через точку N и не совпадает с δ_N , служит „осью“ однопараметрического пучка вполне геодезических поверхностей. Вследствие аналитичности метрики пространства, среди поверхностей каждого пучка имеется одна поверхность, проходящая через δ_N . Тогда и через δ_N проходит однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Положим, наконец, что поверхность F вполне геодезическая в точке N . Возьмем геодезическую δ_N . Произвольная двумерная площадка, в которой лежит направление δ_N , кроме касательной к поверхности F , определяет вполне геодезическую поверхность. Так как метрика пространства аналитическая, то и касательная к F площадка определяет вполне геодезическую поверхность F_N . F_N совпадает с поверхностью F .

Рассмотрим более подробно случай, когда множество V представляет собой поверхность. Метрика такого пространства, как было показано раньше, имеет вид:

$$dS^2 = d\rho^2 + \varphi(\rho) dS_2^2,$$

где dS_2^2 обладает постоянной кривизной и не зависит от ρ .

Выпишем компоненты объекта связности пространства:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho},$$

$$\Gamma_{23}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \rho}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln a_{22}}{\partial x^2},$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln a_{22}}{\partial x^3}, \quad \Gamma_{12}^3 = 0, \quad \Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln a_{22}}{\partial x^3},$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2} a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}.$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln a_{22}}{\partial x^2}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln a_{22}}{\partial x^2}.$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln a_{22}}{\partial x^3},$$

где [3]

$$a_{22} = \frac{1}{\left[1 + \frac{K_0}{4} (x^{2^2} + x^{3^2})^2\right]},$$

K_0 — кривизна пространства S_2 .

Подсчитав компоненты тензора Римана, получим.

$$R_{2323} = - \frac{K_0 \varphi}{\left[1 + \frac{K_0}{4} (x^{2^2} + x^{3^2})\right]^4} + \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}{\left[1 + \frac{K_0}{4} (x^{2^2} + x^{3^2})\right]^4},$$

$$R_{1313} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi_1}{d\rho^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{K_0}{4} (x^{2^2} + x^{3^2})\right]^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 \frac{1}{\left[1 + \frac{K_0}{4} (x^{2^2} + x^{3^2})\right]^2},$$

$$R_{1323} = R_{1232} = R_{1213} = 0, \quad R_{1212} = R_{1313}.$$

Индикатриса Римана имеет вид

$$R_{2323} x'^2 + R_{1313} x^{2^2} + R_{1212} x^{3^2} = 1.$$

Пусть поверхность F задана уравнением

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Положим, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^3} \neq 0.$$

Тогда уравнение поверхности F можно записать в виде

$$x^3 = \varphi_1(x^1, x^2).$$

Так как в точках поверхности F индикатриса является сферой, то мы должны иметь

$$K_0 \varphi a_{22}^2 - \frac{1}{4} \frac{d\varphi}{d\rho} a_{22}^2 = \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 \right] a_{22}$$

или

$$\begin{aligned} & K_0 \varphi - \frac{1}{4} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{K_0}{4} [x^{2^2} + \varphi_1^2(x^1, x^2)] \right\} \cdot \left[-\frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 \right]. \quad (*) \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства не зависит от x^2 , следовательно, первый сомножитель правой части тоже не зависит от x^2 :

$$x^{2^2} + \varphi_1^2(\rho^1, x^2) = \psi(\rho^1).$$

Откуда

$$\varphi_1 = \pm \sqrt{\psi(\rho^1) - x^{2^2}}.$$

Подставляя найденное выражение $\varphi_1(\rho^1, x^2)$ в уравнение (*), получим:

$$K_0\varphi - \frac{1}{4}\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{K_0}{4}\psi(\rho)\right]\left[-\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2\right].$$

Из этого уравнения получаем вид функции $\varphi_1(\rho, x^2)$, следовательно, и линейный элемент пространства, допускающего некоторую поверхность F , в точках которой индикатриса—сфера. Заметим, что если

$$1 + \frac{K_0}{4}\psi(\rho) = \varphi(\rho),$$

то рассматриваемое пространство постоянной кривизны.

Аналогично можно провести рассуждения и в том случае, если V представляет собой кривую.

Рассмотрим второй случай.

Пусть геодезические δ_P и δ_Q не пересекаются. Зафиксируем на δ_P , точку P , принадлежащую той окрестности, где индикатриса представляет собой эллипсоид вращения, и проведем через δ_Q и P вполне геодезическую поверхность. Если эта поверхность не совпадает ни с одной из поверхностей, проходящих через δ_P , то она определяет в точке P еще одно главное направление, которое не лежит в плоскости семейства, проходящего через δ_P . Применяя рассуждения, приведенные в предыдущем случае, получим, что через любые две „оси“ пучков проходит вполне геодезическая поверхность и через каждую точку каждой вполне геодезической поверхности проходит единственная „ось“.

Зафиксируем поверхность семейства, проходящего через некоторую «ось» δ , и проведем через точку M этой поверхности ортогональную траекторию γ всех «осей», через которые проходит наша поверхность. Докажем, что двумерное пространство S_2 , образованное всеми такими кривыми γ , проходящими через точку M , есть пространство постоянной кривизны. Заметим, что γ служит геодезической линией в S_2 .

Доказательство. В самом деле, для всяких двух равных отрезков кривой γ существует такое однопараметрическое семейство, что ортогональные траектории поверхностей этого семейства устанавливают между этими отрезками изометрическое соответствие. Достаточно показать это для двух равных отрезков, имеющих общую точку. Возьмем на кривой γ две точки M_1 и M_2 такие, чтобы отрезок MM_1 был равен отрезку MM_2 , и через точку M_1 проведем ортогональную траекторию поверхностей семейства. Среди точек, соответствующих по изометрии точке M_1 , обязательно окажется точка M_2 , так как отрезки M_1M и MM_2 равны и через точку M_2 проходит единственная кривая γ . Исходя из этого, мы можем считать S_2 помещенным в евклидово пространство, и тогда изометрическое соответствие, устанавливаемое ортогональными траекториями поверхностей семейства, проходящего через «ось» δ , сведется к вращению кривой γ вокруг нормали к поверхности S_2 в точке M . Так как точка M была произвольной, то S_2 допускает свободную подвижность вокруг каждой своей точки. Но этим свойством обладает только пространство постоянной кривизны.

Выбирая за координатные поверхности, полученные выше пространства S_2 и за третье семейство координатных линий ортогональные траектории этих пространств, мы можем записать линейный элемент пространства в виде

$$dS^2 = d^2 + \varphi(\rho) dS_2^2,$$

где dS_2^2 — линейный элемент пространства S_2 , не зависящий от ρ ; ρ — расстояние от некоторой точки M до фиксированного S_2 .

Таким образом доказана теорема:

Если трехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает двухпараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, то это пространство или обладает свободной подвижностью вокруг некоторой точки, или же это пространство постоянной кривизны. Линейный элемент такого пространства можно записать в виде

$$dS^2 = d\rho^2 + \varphi(\rho) dS_2^2,$$

где dS_2^2 имеет постоянную кривизну и не зависит от ρ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств, М., 1936.
2. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II, Изд-во иностр. лит.-ры, 1936.
3. Л. Эйзенхарт. Риманова геометрия, М., Изд-во иностр. лит.-ры, 1948.

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Г. И. Студенцов

Под парой поверхностей будем понимать две поверхности с заданным взаимно однозначным точечным соответствием между ними.

Пара поверхностей с общими соприкасающимися квадрами Ли была рассмотрена Демуленом [3] и Годо [4]. С. П. Фиников показал [5], что такая пара поверхностей имеет общие директрисы Вильчинского.

Л. С. Ермолаев [6] исследовал пару поверхностей относительно общего тетраэдра, который для одной из поверхностей является асимптотическим, ввел понятие двойных линий на паре поверхностей как линий, соответственные касательные которых пересекаются. Им изучены условия асимптотического соответствия пары поверхностей и рассмотрен частный случай, когда одна из поверхностей пары есть огибающая соприкасающихся квадра Дарбу или квадра Ли другой поверхности.

Пару поверхностей, соприкасающиеся квадрами Ли которых касаются вдоль общей образующей, исследовал В. С. Малаховский [9].

В настоящей работе рассматривается пара поверхностей (A_1) и (A_2) относительно общего координатного тетраэдра первого порядка, две вершины которого A_1 и A_2 помещены в соответствующие точки пары поверхностей, а две другие A_3 и A_4 совмещены с двойными точками — точками пересечения касательных к двойным линиям. Определяются проективные инварианты пары поверхностей, находится в конечном виде пара поверхностей с неопределенными двойными точками, устанавливается условие асимптотического соответствия и проективного изгибания пары поверхностей. Устанавливается необходимое и достаточное условие совпадения двойных точек с фокальными точками конгруэнции прямых $(A_3 A_4)$. Доказывается, что фокальные плоскости конгруэнции прямых $(A_1 A_2)$ пересекают прямую $A_3 A_4$ в двойных точках, и двойственное предложение.

Для пары поверхностей Демулена — Годо доказывается, что соответствие является проективным изгибанием лишь в случае, когда поверхности пары — квадрами.

§ 1. Канонический тетраэдр. Инварианты пары поверхностей

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве две аналитические поверхности (A_1) и (A_2) , между которыми установлено взаимно однозначное точечное соответствие, т. е. пару поверхностей. Точки A_1 и A_2 будем считать соответствующими точками. В общем случае

пара поверхностей определяется четырьмя функциями двух аргументов, две из которых определяют поверхности пары, а две другие — соответствие между ними.

Проведем в соответствующих точках пары поверхностей касательные плоскости, они пересекутся по некоторой прямой A_3A_4 . Пучок касательных к кривым на поверхности (A_1) , проходящих через точку A_1 , высекает на прямой A_3A_4 точечный ряд; соответствующий ему пучок касательных к кривым на поверхности (A_2) — другой точечный ряд. Эти два точечных ряда проективно соответствуют друг другу, поэтому на прямой A_3A_4 существуют две двойные точки (действительные, мнимые или совпадающие. Случай, когда все точки двойные, рассмотрен особо), которые обозначим A_3, A_4 .

Присоединим к каждой паре соответствующих точек пары поверхностей тетраэдр $\{A_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). При этом исключим из рассмотрения случай, когда точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости. Последнее возможно лишь тогда, когда либо совпадают двойные точки, либо поверхности (A_1) и (A_2) служат фокальными поверхностями конгруэнции прямых $(A_1 A_2)$.

Исключая из рассмотрения эти случаи, в дальнейшем будем предполагать $(A_1 A_2 A_3 A_4) \neq 0$, тогда любая точка A может быть представлена посредством линейной комбинации A_i :

$$A = x_i A_i \quad (\text{суммировать по } i).$$

Инфинитезимальное смещение тетраэдра $\{A_i\}$ определяется уравнениями

$$dA_i = \omega_i^j A_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (1)$$

где

$$\omega_i^j = a_i^j du + b_i^j dv.$$

Приняв формы ω_1^3 и ω_1^4 за независимые ($[\omega_1^3 \omega_1^4] \neq 0$), выразим через них остальные ω_i^j :

$$\omega_i^j = \alpha_i^j \omega_1^3 + \beta_i^j \omega_1^4, \quad (2)$$

где α_i^j и β_i^j — некоторые функции u, v .

Плоскости $(A_1 A_3 A_4)$ и $(A_2 A_3 A_4)$ — касательные плоскости поверхностей (A_1) и (A_2) в соответствующих точках A_1, A_2 , поэтому

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4,$$

$$dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4,$$

т. е.

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad (3)$$

Примем направления $A_1 A_3$ и $A_1 A_4$ на поверхности (A_1) за направления координатных линий, тогда направления $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_1^4 = 0$ соответствуют координатным линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, следовательно,

$$\omega_1^3 = \alpha_1^3 du, \quad \omega_1^4 = b_1^4 dv.$$

Точки A_3 и A_4 — двойные, значит, направлению $A_1 A_3$ ($\omega_1^4 = 0$) на поверхности (A_1) должно соответствовать направление $A_2 A_3$ ($\omega_2^4 = 0$) на поверхности (A_2) , поэтому из (2) следует $\alpha_2^4 = 0$; аналогично устанавливаем, что $\beta_2^3 = 0$.

Таким образом,

$$\omega_2^3 = \alpha_2^3 \omega_1^3, \quad \omega_2^4 = \beta_2^4 \omega_1^4. \quad (4)$$

Дифференцируя внешним образом (3), применяя лемму Картана и учитывая (4), получим:

$$\beta_3^2 = \alpha_4^2, \beta_3^1 : \alpha_4^1 = \beta_2^4 : \alpha_2^3.$$

Нормируя вершины A_3 и A_4 тетраэдра $\{A_i\}$, приведем a_1^3 и b_1^4 к единице; вершину A_2 нормируем таким образом, чтобы

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = 1, \quad (5)$$

а нормирование вершины A_1 пока оставим произвольным. Дифференцируя (5) с учетом (1), (2) и независимости форм ω_1^3 и ω_1^4 , получим:

$$\Sigma \alpha_i^i = 0, \quad \Sigma \beta_i^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Введем обозначения:

$$\alpha_i^i = \alpha_i, \quad \beta_i^i = \beta_i, \quad \alpha_2^3 = m, \quad \beta_2^4 = n, \quad \alpha_3^1 = an, \quad \beta_3^1 = bn, \quad \alpha_4^1 = bm, \quad \beta_4^1 = cm,$$

$$\alpha_3^2 = \alpha, \quad \beta_3^2 = \alpha_4^2 = \beta, \quad \beta_4^2 = \gamma, \quad \alpha_3^4 = f, \quad \beta_3^4 = g, \quad \alpha_4^3 = k, \quad \beta_4^3 = l.$$

В новых обозначениях инфинитезимальное смещение тетраэдра $\{A_i\}$ запишем в виде таблицы.

	A_1	A_2	A_3	A_4
dA_1	$\alpha_1 \omega_1^3 + \beta_1 \omega_1^4$	0	ω_1^3	ω_1^4
dA_2	0	$\alpha_2 \omega_1^3 + \beta_2 \omega_1^4$	$m \omega_1^3$	$n \omega_1^4$
dA_3	$n(a \omega_1^3 + b \omega_1^4)$	$\alpha \omega_1^3 + \beta \omega_1^4$	$\alpha_3 \omega_1^3 + \beta_3 \omega_1^4$	$f \omega_1^3 + g \omega_1^4$
dA_4	$m(b \omega_1^3 + c \omega_1^4)$	$\beta \omega_1^3 + \gamma \omega_1^4$	$k \omega_1^3 + l \omega_1^4$	$\alpha_4 \omega_1^3 + \beta_4 \omega_1^4$

(6)

где

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0.$$

Заметим, что нормированием

$$a_1^3 = b_1^4 = 1$$

мы исключили вырождение поверхности (A_1) . Действительно, если, например, $a_1^3 = 0$, то $\omega_1^3 = 0$ и

$$dA_1 = \omega_1^4 A_4$$

для любого направления дифференцирования, откуда следует вырождение поверхности (A_1) в линию.

Дифференцируя внешним образом ω_i^j , из (6) получим условия интегрируемости (уравнения структуры):

$$[d\alpha_1 \omega_1^3] + [d\beta_1 \omega_1^4] = b(n - m)[\omega_1^3 \omega_1^4],$$

$$[d\alpha_2 \omega_1^3] + [d\beta_2 \omega_1^4] = \beta(m - n)[\omega_1^3 \omega_1^4],$$

$$[d\alpha_3 \omega_1^3] + [d\beta_3 \omega_1^4] = \{fl - kg - bn - \beta m\}[\omega_1^3 \omega_1^4],$$

$$[d(an) \omega_1^3] + [d(bn) \omega_1^4] = \{an(\beta_1 - \beta_3) - bn(\alpha_1 - \alpha_3) + m(cf - bg)\}[\omega_1^3 \omega_1^4],$$

$$\begin{aligned}
[d(bm)\omega_1^3] + [d(cm)\omega_1^4] &= \{bm(\beta_1 - \beta_4) - cm(\alpha_1 - \alpha_4) + n(bk - al)\} [\omega_1^3 \omega_1^4], \\
[d\alpha\omega_1^3] + [d\beta\omega_1^4] &= \{\alpha(\beta_2 - \beta_3) - \beta(\alpha_2 - \alpha_3) + f\gamma - g\beta\} [\omega_1^3 \omega_1^4], \\
[d\beta\omega_1^3] + [d\gamma\omega_1^4] &= \{\beta(\beta_2 - \beta_4) - \gamma(\alpha_2 - \alpha_4) + k\beta - l\alpha\} [\omega_1^3 \omega_1^4], \\
[df\omega_1^3] + [dg\omega_1^4] &= \{f(\beta_4 - \beta_3) - g(\alpha_4 - \alpha_3) + n(a + \alpha)\} [\omega_1^3 \omega_1^4], \\
[dk\omega_1^3] + [dl\omega_1^4] &= \{k(\beta_3 - \beta_4) - l(\alpha_3 - \alpha_4) - m(c + \gamma)\} [\omega_1^3 \omega_1^4], \\
[dm\omega_1^3] &= \{m(\beta_3 - \beta_2) - kn\} [\omega_1^3 \omega_1^4], \\
[dn\omega_1^4] &= \{n(\alpha_2 - \alpha_4) + gm\} [\omega_1^3 \omega_1^4],
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$k = \beta_3 - \beta_1, \quad g = \alpha_4 - \alpha_1.$$

При выполнении этих условий 16 функций

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, m, n, a, b, c, \alpha, \beta, f, l, \tag{8}$$

зависящих от двух аргументов u, v , определяют пару поверхностей с точностью до проективного преобразования. Нормированием вершины A_1 мы можем привести m или n к константе, что приведет к замене одного из квадратичных уравнений (7) обыкновенным уравнением, т. е. наложит еще одно условие на 16 функций (8), и тогда 10 квадратичных уравнений (7) на 14 функций, согласно теореме Бахвалова [8], определяют пару поверхностей $(A_1), (A_2)$ с произволом в 4 функции двух аргументов, что согласуется с установленным в начале этого параграфа непосредственным подсчетом.

Все функции (8) являются инвариантами относительно проективных преобразований, т. е. проективными инвариантами пары поверхностей $(A_1), (A_2)$.

Выясним геометрический смысл инварианта $m:n$ (m и n отличны от нуля, в противном случае из (6) следует вырождение поверхности (A_2)). Из (6) следует, что произвольное направление $\omega_1^3:\omega_1^4$ определяет пару точек

$$B_1 = \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4 \quad \text{и} \quad B_2 = m\omega_1^3 A_3 + n\omega_1^4 A_4,$$

которые являются точками пересечения касательных к соответствующим кривым на поверхностях (A_1) и (A_2) с прямой $A_3 A_4$, поэтому сложное отношение четырех точек

$$DV(A_3 A_4; B_1 B_2) = m:n.$$

Кроме того, если $C = \xi A_1 + \eta A_2$ — фокус луча $A_1 A_2$ конгруэнции $(A_1 A_2)$, то

$$(dCA_1 A_2) = 0.$$

Продифференцировав C и воспользовавшись формулами (6), получим

$$(\xi\omega_1^3 + \eta\omega_2^3)(A_1 A_2 A_3) + (\xi\omega_1^4 + \eta\omega_2^4)(A_1 A_2 A_4) = 0.$$

Умножая внешним образом на A_4 , а затем на A_3 , найдем:

$$(\xi + m\eta)\omega_1^3 = 0, \tag{9}$$

$$(\xi + n\eta)\omega_1^4 = 0,$$

откуда имеем уравнения для определения фокусов:

$$\xi + m\eta = 0, \quad \xi + n\eta = 0,$$

а фокусы C_1 и C_2 определяются так:

$$C_1 = nA_1 - A_2, \quad C_2 = mA_1 - A_2, \quad (10)$$

следовательно,

$$DV(A_1A_2; C_1C_2) = m:n.$$

Таким образом, в соответствующих точках пары поверхностей

$$DV(A_1A_2; C_1C_2) = DV(A_3A_4; B_1B_2).$$

Из (9) следует, что развертывающиеся поверхности конгруэнции прямых A_1A_2 высекают на поверхностях (A_1) и (A_2) двойные линии u , v . Действительно, уравнение этих линий получим из (9) в результате обращения в нуль ω_1^3 , ω_1^4 , т. е. дифференциальными уравнениями развертывающихся поверхностей служат

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0.$$

Двойные линии u , v будут сопряженными на обеих поверхностях пары, если

$$b = \beta = 0.$$

При этом условии конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют развертывающимися поверхностями, поэтому при выполнении этого условия конгруэнция (A_1A_2) сопряжена, а конгруэнция (A_3A_4) гармонична паре поверхностей (A_1) , (A_2) .

§ 2. Пара поверхностей с неопределенными двойными точками

Рассмотрим пару поверхностей, в соответствующих точках которой

$$m = n.$$

Из уравнения структуры (7) следует, что такая пара поверхностей определится с произволом в две функции двух аргументов.

Нетрудно заметить, что при $m = n$ четыре точки A_1 , A_2 , dA_1 , dA_2 лежат в одной плоскости, т. е.

$$(A_1A_2dA_1dA_2) = 0$$

для любого направления дифференцирования, поэтому двойные точки становятся неопределенными, так как в этом случае любая точка прямой A_3A_4 становится двойной.

Из (10) следует, что при $m = n$ фокусы совпадают и конгруэнция (A_1A_2) параболическая.

Определим все пары поверхностей, у которых двойные точки A_3 , A_4 неопределенные.

Теорема. Пара поверхностей с неопределенными двойными точками состоит из произвольно взятой поверхности и ее перспективного образа.

Доказательство. Пусть поверхности (A_1) и (A_2) заданы в векторной форме

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u, v), \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_2(u, v),$$

тогда по условию

$$(d\bar{r}_2 d\bar{r}_1 \bar{r}_2 - \bar{r}_1) = 0$$

для любого (d) , поэтому

$$\begin{aligned}(\bar{r}_{2u} \bar{r}_{1u} \bar{r}_2 - \bar{r}_1) &= 0, \\(\bar{r}_{2v} \bar{r}_{1v} \bar{r}_2 - \bar{r}_1) &= 0, \\(\bar{r}_{2u} \bar{r}_{1v} \bar{r}_2 - \bar{r}_1) + (\bar{r}_{2v} \bar{r}_{1u} \bar{r}_2 - \bar{r}_1) &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

или

$$\begin{aligned}\bar{r}_{2u} &= x \bar{r}_{1u} + y (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ \bar{r}_{2v} &= z \bar{r}_{1v} + t (\bar{r}_2 - \bar{r}_1),\end{aligned}\tag{12}$$

где x, y, z, t — некоторые функции u, v .

Подставляя значения $\bar{r}_{2u}$ и $\bar{r}_{2v}$ в (11), получим

$$(\bar{r}_{2v} \bar{r}_{1u} \bar{r}_2 - \bar{r}_1) (x - z) = 0,$$

$(\bar{r}_{2v} \bar{r}_{1u} \bar{r}_2 - \bar{r}_1) \neq 0$, в противном случае (A_1) и (A_2) — фокальные поверхности конгруэнции $(A_1 A_2)$, поэтому

$$x = z.$$

Дифференцируя (12) (первое по v , а второе по u) и сравнивая полученные результаты, будем иметь:

$$\begin{aligned}x_v &= t(x - 1), \\ x_u &= y(x - 1), \\ y_v &= t_u,\end{aligned}$$

следовательно,

$$y du + t dv = d\lambda$$

(λ — некоторая функция u, v), тогда

$$dx = d\lambda (x - 1).$$

Пусть $x \neq 1$, тогда

$$x = z = 1 + c_1 e^\lambda,$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Подставляя в (12) вместо x, y, t соответственно $1 + c_1 e^\lambda, \lambda_u, \lambda_v$, получим:

$$\begin{aligned}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)_u &= c_1 e^\lambda \bar{r}_{1u} + \lambda_u (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)_v &= c_1 e^\lambda \bar{r}_{1v} + \lambda_v (\bar{r}_2 - \bar{r}_1),\end{aligned}$$

или

$$c_1 d\bar{r}_1 = d[e^{-\lambda} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)].$$

Интегрирование дает

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 (1 + c_1 e^\lambda) + \bar{B} e^\lambda,$$

где $\bar{B}$ — постоянный вектор. Обозначим

$$1 + c_1 e^\lambda = \varphi, \quad \bar{B} : c_1 = -\bar{b},$$

тогда последнее соотношение принимает вид

$$\bar{r}_2 - \bar{b} = \varphi (\bar{r}_1 - \bar{b}),$$

или после переноса начала координат

$$\bar{\rho}_2 = \varphi \bar{\rho}_1.$$

Если $x = 1$, тогда из (12) следует:

$$\begin{aligned}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)_u &= \lambda_u (\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)_v &= \lambda_v (\bar{r}_2 - \bar{r}_1),\end{aligned}$$

или

$$d(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = d\lambda (\bar{r}_2 - \bar{r}_1).$$

Интегрируя, получим

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{C}e^\lambda$$

($\bar{C}$ — постоянный вектор), и поверхности (A_1) и (A_2) соответствуют друг другу перспективно с центром в бесконечности.

§ 3. Пара поверхностей, находящихся в асимптотическом соответствии

Асимптотические линии поверхностей (A_1) и (A_2) определяются уравнениями

$$(d^2 A_1 A_1 A_3 A_4) = 0,$$

$$(d^2 A_2 A_2 A_3 A_4) = 0,$$

или, в силу (6) и (5),

$$\alpha (\omega_1^3)^2 + 2\beta \omega_1^3 \omega_1^4 + \gamma (\omega_1^4)^2 = 0,$$

$$a (\omega_1^3)^2 + 2b \omega_1^3 \omega_1^4 + c (\omega_1^4)^2 = 0,$$

откуда следует, что соответствие между поверхностями (A_1) и (A_2) будет асимптотическим при условии

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}.$$

Это отношение представляет собой некоторую функцию $\psi(u, v)$. Нормируем теперь вершину A_1 тетраэдра $\{A_i\}$ так, чтобы $\psi(u, v) = 1$, тогда условие асимптотического соответствия будет иметь вид:

$$a = \alpha, b = \beta, c = \gamma. \quad (13)$$

Теорема. Двойные точки A_3 и A_4 служат фокусами конгруэнции $(A_3 A_4)$, когда поверхности (A_1) и (A_2) асимптотически соответствуют, или когда конгруэнция $(A_1 A_2)$ сопряжена, а конгруэнция $(A_3 A_4)$ гармонична паре поверхностей.

Доказательство. Если $D = \xi A_3 + \eta A_4$ есть фокус луча $A_3 A_4$ конгруэнции $(A_3 A_4)$, то $\xi : \eta$ должно удовлетворять уравнению

$$n(a\beta - b\alpha)\xi^2 + [n\alpha\gamma - m\alpha\alpha + b\beta(m - n)]\xi\eta + m(b\gamma - c\beta)\eta^2 = 0. \quad (14)$$

Чтобы фокусы совпадали с двойными точками, это уравнение должно иметь своими решениями

$$\xi = 0 \text{ и } \eta = 0,$$

следовательно,

$$a\beta - b\alpha = 0, \quad (15)$$

$$c\beta - b\gamma = 0,$$

а

$$n\alpha\gamma - m\alpha\alpha + b\beta(m - n) \neq 0,$$

в противном случае фокусы неопределены. Если при этом

$$a\gamma - c\alpha \neq 0,$$

то уравнения (15) имеют единственное решение

$$b = \beta = 0;$$

в этом случае, как показано в § 1, конгруэнция $(A_1 A_2)$ сопряжена, а конгруэнция $(A_3 A_4)$ гармонична паре поверхностей (A_1) , (A_2) .

Если же

$$a\gamma - c\alpha = 0,$$

то из уравнений (15) следует

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$$

и поверхности (A_1) , (A_2) асимптотически соответствуют.

Из уравнений структуры (7) следует, что как пара асимптотически соответствующих поверхностей, так и пара поверхностей с общей сопряженной конгруэнцией определяется с произволом в две функции двух аргументов.

§ 4. Пара конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$

Пара конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ наиболее тесно связана с парой поверхностей (A_1) , (A_2) : лучи первой конгруэнции соединяют соответствующие точки, а вдоль лучей второй конгруэнции пересекаются касательные плоскости в соответствующих точках, поэтому лучи пары конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ соответствуют по принципу двойственности.

Инфинитезимальное смещение тетраэдра $\{A_i\}$ можно записать как в точечных, так и в тангенциальных координатах. Пусть α^i — грань координатного тетраэдра $\{A_i\}$, не содержащая вершины A_i . Если нормировать плоскости тетраэдра так, чтобы $SA_i\alpha^i = 1$ (по i не суммировать!) (S — сумма произведений одноименных координат точки A_i и плоскости α^i), т. е.

$$\alpha^1 = (A_2 A_3 A_4), \quad \alpha^2 = -(A_1 A_3 A_4), \quad \alpha^3 = (A_1 A_2 A_4), \quad \alpha^4 = -(A_1 A_2 A_3),$$

тогда инфинитезимальное смещение тетраэдра $\{A_i\}$ в тангенциальных координатах будет иметь вид:

	α^1	α^2	α^3	α^4
$d\alpha^1$	$-\omega_1^1$	0	$-\omega_3^1$	$-\omega_4^1$
$d\alpha^2$	0	$-\omega_2^2$	$-\omega_3^2$	$-\omega_4^2$
$d\alpha^3$	$-\omega_1^3$	$-\omega_2^3$	$-\omega_3^3$	$-\omega_4^3$
$d\alpha^4$	$-\omega_1^4$	$-\omega_2^4$	$-\omega_3^4$	$-\omega_4^4$

(16)

где ω_i^j имеют те же значения, что и в (6). Двум проективным рядам точек

$$B_1 = \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4 \quad \text{и} \quad B_2 = \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4$$

на прямой $A_3 A_4$ по принципу двойственности соответствуют два проективных пучка плоскостей

$$\beta^1 = \omega_3^1 \alpha^3 + \omega_4^1 \alpha^4 \quad \text{и} \quad \beta^2 = \omega_3^2 \alpha^3 + \omega_4^2 \alpha^4. \quad (17)$$

Двойные плоскости этих пучков определяются из условия

$$\frac{\omega_3^1}{\omega_3^2} = \frac{\omega_4^1}{\omega_4^2},$$

что соответствует уравнению

$$(na\beta - mb\alpha)(\omega_1^3)^2 + [na\gamma - mc\alpha + b\beta(n - m)]\omega_1^3\omega_1^4 + (nb\gamma - mc\beta)(\omega_1^4)^2 = 0. \quad (18)$$

Для определения точек пересечения двойных плоскостей с прямой A_3A_4 достаточно в (17) вместо α^3 и α^4 подставить $(A_1A_2A_4)$ и $-(A_1A_2A_3)$ и выделить слагаемые, содержащие A_3 и A_4 . Точками пересечения служат

$$\xi_1^*A_3 + \eta_1^*A_4 \text{ и } \xi_2^*A_3 + \eta_2^*A_4,$$

где $\xi_1^*:\eta_1^*$ и $\xi_2^*:\eta_2^*$, учитывая (18), — корни уравнения

$$n(a\beta - b\alpha)(\xi^*)^2 + [na\gamma - mc\alpha + b\beta(m - n)]\xi^*\eta^* + m(b\gamma - c\beta)(\eta^*)^2 = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (14), определяющим фокусы конгруэнции (A_3A_4) , следовательно, двойные плоскости проективных пучков плоскостей (17) пересекают луч A_3A_4 в его фокусах.

Нетрудно убедиться, что фокальные плоскости конгруэнции (A_1A_2) , т. е. плоскости $(A_1A_2dC_1)$ и $(A_1A_2dC_2)$, где C_1 и C_2 — фокусы конгруэнции (A_1A_2) , совпадают с плоскостями α^3 и α^4 , которые пересекают луч конгруэнции (A_3A_4) в двойных точках A_3 и A_4 . Таким образом, имеет место

Теорема. Для любой пары поверхностей (A_1) , (A_2) фокальные плоскости конгруэнции (A_1A_2) пересекают лучи конгруэнции (A_3A_4) в двойных точках, а двойные плоскости проективных пучков (17) проходят через фокусы конгруэнции (A_3A_4) .

§ 5. Пара проективно налагающихся поверхностей

Как известно [2], проективный линейный элемент поверхности (X) , при соответствующем нормировании координат, имеет вид

$$\frac{SdXd^2\xi - Sd\xi d^2X}{Sd\xi dX}, \quad (19)$$

где X — точка поверхности, ξ — ее касательная плоскость в этой точке.

Нормирование точки X и плоскости ξ определяется тем условием, что направления

$$(XdX) \pm (\xi d\xi) \quad (20)$$

асимптотические независимо от направления дифференцирования.

Числитель и знаменатель проективного линейного элемента представляют собой соответственно кубичную и квадратичную формы поверхности (X) :

$$F_3 = SdXd^2\xi - Sd\xi d^2X, \\ F_2 = Sd\xi dX.$$

Обращение в нуль этих форм соответствует на поверхности (X) направлениям Дарбу и асимптотическим в точке X .

Исходя из этого, полагаем

$$X = A_1, \quad \xi = \mu_1\alpha^2,$$

где

$$\mu_1 = \mu_1(u, v)$$

и выполнялось условие (20). При этом оказывается, что

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta^2 - \alpha\gamma}}.$$

Аналогично полагаем

$$Y = A_2, \quad \eta = \mu_2 \alpha^1,$$

получаем

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{b^2 - ac}}.$$

При таком нормировании квадратичные и кубичные формы поверхностей (A_1) и (A_2) в соответствующих точках A_1 и A_2 принимают вид:

$$F_2^{(1)} = \mu_1 (\omega_1^3 \omega_3^2 + \omega_1^4 \omega_4^2),$$

$$F_2^{(2)} = \mu_2 (\omega_2^3 \omega_3^1 + \omega_2^4 \omega_4^1),$$

$$F_3^{(1)} = [2\mu_1 (\omega_1^3 + \omega_2^3) - 3d\mu_1] (\omega_1^3 \omega_3^2 + \omega_1^4 \omega_4^2) - \mu_1 (\omega_1^3 d\omega_3^2 - \omega_3^2 d\omega_1^3 + \omega_1^4 d\omega_4^2 - \omega_4^2 d\omega_1^4) + \\ + 2\mu_1 [\omega_1^3 (\omega_3^3 \omega_3^2 + \omega_3^4 \omega_4^2) + \omega_1^4 (\omega_4^3 \omega_3^2 + \omega_4^4 \omega_4^2)],$$

$$F_3^{(2)} = [2\mu_2 (\omega_1^3 + \omega_2^3) - 3d\mu_2] (\omega_2^3 \omega_3^1 + \omega_2^4 \omega_4^1) - \mu_2 (\omega_2^3 d\omega_3^1 - \omega_3^1 d\omega_2^3 + \omega_2^4 d\omega_4^1 - \omega_4^1 d\omega_2^4) + \\ + 2\mu_2 [\omega_2^3 (\omega_3^3 \omega_3^1 + \omega_3^4 \omega_4^1) + \omega_2^4 (\omega_4^3 \omega_3^1 + \omega_4^4 \omega_4^1)],$$

где формы ω_i^j имеют значения (6).

Известно [2], что необходимым условием проективной наложимости двух поверхностей в соответствующих точках есть условие асимптотического соответствия, тогда, используя это условие в виде (13), при котором $\mu_1 = \mu_2$, получим условие проективной наложимости пары поверхностей (A_1) , (A_2) в виде

$$mnF_3^{(1)} = F_3^{(2)}.$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях $\omega_1^3 : \omega_4^1$, с учетом уравнений структуры (7), приводит к системе уравнений такого вида:

$$\begin{aligned} \alpha(mn_u - m_u n) + 2\beta f(n - m)m &= 0, \\ \gamma(m_v n - mn_v) + 2\beta l(m - n)n &= 0, \\ \alpha(m_v n - mn_v) - 2(n - m)[m(g\beta + f\gamma) - \alpha kn] &= 0, \\ \gamma(mn_u - m_u n) - 2(m - n)[n(l\alpha + k\beta) - \gamma gm] &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим три случая.

1) Если $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ (асимптотические линии не совпадают с двойными линиями), то, определяя из уравнений структуры m_u , m_v , n_u , n_v и подставляя их значения в уравнения (21), получим, что первые два уравнения есть следствием последних, которые принимают вид

$$\alpha kn - \gamma fm = 0,$$

$$\alpha ln - \gamma gm = 0.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие проективной наложимости пары поверхностей (A_1) , (A_2) в соответствующих точках A_1 , A_2 :

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma,$$

$$\frac{m\gamma}{n\alpha} = \frac{k}{f} = \frac{l}{g}.$$

2) Если $m = n$, то все уравнения системы (21) тождественно обращаются в нуль, откуда следует: для того чтобы пара поверхностей с неопределенными двойными точками A_3, A_4 находилась в соответствии проективного изгибания, необходимо и достаточно, чтобы асимптотические на поверхностях $(A_1), (A_2)$ соответствовали.

3) Если $\alpha = \gamma = 0$, а $\beta \neq 0$, то из уравнений структуры (7) и уравнений (21) следует

$$f = k = g = l = 0. \quad (22)$$

Пара поверхностей, определяемая условием

$$a = c = \alpha = \gamma = 0, \quad b = \beta \neq 0,$$

известна под названием пары Демулена—Годо. Такая пара поверхностей в соответствующих точках имеет общую квадрику Ли, уравнение которой относительно координатного тетраэдра $\{A_i\}$ имеет вид

$$x_1 x_2 - \beta x_3 x_4 = 0.$$

Кроме того, как показал С. П. Фиников [5], эта пара поверхностей имеет общие директрисы Вильчинского, которые совпадают с ребрами $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ тетраэдра $\{A_i\}$.

Кубические формы поверхностей пары Демулена—Годо принимают вид

$$F_3^{(1)} = -2\sqrt{\beta^3} \{f(\omega_1^3)^3 + l(\omega_1^4)^3\},$$

$$F_3^{(2)} = -2\sqrt{\beta^3} \{m^2 f(\omega_1^3)^3 + n^2 l(\omega_1^4)^3\}.$$

Обращение в нуль f и l , как известно [2], влечет за собой вырождение поверхностей пары в поверхности второго порядка, поэтому пара поверхностей Демулена—Годо будет находиться в соответствии проективного изгибания лишь в том случае, когда поверхности пары есть квадрики.

При выполнении условия (22) поверхности (A_3) и (A_4) вырождаются в линии, касательные к которым согласно (6) пересекают лучи конгруэнции $(A_1 A_2)$ в точках

$$C'_1 = nA_1 + A_2, \quad C'_2 = mA_1 + A_2.$$

Как известно, фокусы конгруэнции $(A_1 A_2)$ есть точки

$$C_1 = nA_1 - A_2, \quad C_2 = mA_1 - A_2,$$

поэтому

$$DV(A_1 A_2; C_1 C'_1) = DV(A_1 A_2; C_2 C'_2) = -1.$$

§ 6. Пара поверхностей с общей квадрикой Дарбу

Определим условия, при которых поверхности пары в соответствующих точках имеют общую квадрику Дарбу.

Соприкасающаяся квадрика Дарбу поверхности (A_1) в точке A_1 определяется из условия, что искомая квадрика

$$\Sigma a_i A_i A_j = 0$$

проходит через точки $A_1, A_1 + dA_1, A_1 + dA_1 + \frac{1}{2} d^2 A_1$ для любого направления дифференцирования, поэтому

$$\Sigma a A_1 A_1 = 0, \quad \Sigma a (A_1 + dA_1)^2 = 0, \quad \Sigma a \left(A_1 + dA_1 + \frac{1}{2} d^2 A_1 \right)^2 = 0.$$

Из (6) следует, что $d^2 A_1$ определяется следующим образом:

$$d^2 A_1 = (d\omega_1^1 + \omega_1^1 \omega_s^1) A_1 + \omega_1^s \omega_s^2 A_2 + \omega_1^s \omega_s^3 A_3 + \omega_1^s \omega_s^4 A_4.$$

Подставляя значения dA_1 и $d^2 A_1$ и принимая тетраэдр $\{A_i\}$ за координатный, получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= a_{13} = a_{14} = 0 \\ a_{33} + \alpha a_{12} &= 0, \quad a_{34} + \beta a_{12} = 0, \quad a_{44} + \gamma a_{12} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Кроме того, соприкасающаяся квадрика Дарбу поверхности (A_1) в точке A_1 проходит и через точку

$$A_1 + dA_1 + \frac{1}{2} d^2 A_1 + \frac{1}{6} d^3 A_1$$

при условии, что направление дифференцирования совпадает с направлениями Дарбу, поэтому

$$\sum a \left(A_1 + dA_1 + \frac{1}{2} d^2 A_1 + \frac{1}{6} d^3 A_1 \right)^2 = 0 \quad (24)$$

для направлений Дарбу. Из (6) следует, что $d^3 A_1$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} d^3 A_1 &= \{d^2 \omega_1^1 + d(\omega_1^1 \omega_s^1) + d\omega_1^1 \omega_s^1 + \omega_1^s \omega_s^k \omega_k^1\} A_1 + \{d(\omega_1^s \omega_s^2) + d\omega_1^s \omega_s^2 + \omega_1^s \omega_s^k \omega_k^2\} A_2 + \\ &+ \{d(\omega_1^s \omega_s^3) + d\omega_1^s \omega_s^3 + \omega_1^s \omega_s^k \omega_k^3\} A_3 + \{d(\omega_1^s \omega_s^4) + d\omega_1^s \omega_s^4 + \omega_1^s \omega_s^k \omega_k^4\} A_4. \end{aligned}$$

Подставляя $d^2 A_1$ и $d^3 A_1$ в (24), учитывая (6) и принимая тетраэдр $\{A_i\}$ за координатный, находим

$$\begin{aligned} &(\omega_1^3)^3 \{3\alpha a_{23} + [\alpha_u - 2\beta f - \alpha(3\alpha_3 + \alpha_4)] a_{12}\} + \\ &+ 3(\omega_1^3)^2 \omega_1^4 \{\alpha a_{24} + 2\beta a_{23} + [\beta_u - f\gamma - kx + 2\beta(\alpha_1 + \alpha_2)] a_{12}\} + \\ &+ 3\omega_1^3 (\omega_1^4)^2 \{2\beta a_{24} + \gamma a_{23} + [\beta_v - l\alpha - g\gamma + 2\beta(\beta_1 + \beta_2)] a_{12}\} + \\ &+ (\omega_1^4)^3 \{3\gamma a_{24} + [\gamma_v - 2\beta l - \gamma(\beta_3 + 3\beta_4)] a_{12}\} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение должно определять три направления Дарбу на поверхности (A_1) в точке A_1 , поэтому кубическая форма, стоящая слева в последнем уравнении, и квадратичная форма

$$F_2^{(1)} = \alpha (\omega_1^3)^2 + 2\beta \omega_1^3 \omega_1^4 + \gamma (\omega_1^4)^2$$

должны быть аполярны. Из аполярности этих форм следует:

$$\left. \begin{aligned} a_{23} - \{\alpha_1 + \alpha_2 - (\ln \mu_1)_u\} a_{12} &= 0 \\ a_{24} - \{\beta_1 + \beta_2 - (\ln \mu_1)_v\} a_{12} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Таким образом, уравнение квадрик Дарбу поверхности (A_1) в точке A_1

$$\begin{aligned} \alpha x_3^2 + 2\beta x_3 x_4 + \gamma x_4^2 - 2x_1 x_2 + 2\{\alpha_1 + \alpha_2 - (\ln \mu_1)_u\} x_2 x_3 + \\ + 2\{\beta_1 + \beta_2 - (\ln \mu_1)_v\} x_2 x_4 + \lambda_1 x_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где λ_1 — параметр пучка.

Аналогично определяем уравнение квадрики Дарбу поверхности (A_2) в точке A_2 :

$$a \frac{n}{m} x_3^2 + 2bx_3x_4 + c \frac{m}{n} x_4^2 - 2x_1x_2 + \\ + 2 \frac{1}{m} \{ \alpha_1 + \alpha_2 - (\ln \mu_2)_u \} x_1x_3 + 2 \frac{1}{n} \{ \beta_1 + \beta_2 - (\ln \mu_2)_v \} x_1x_4 + \lambda_2 x_1^2 = 0, \quad (27)$$

где λ_2 — параметр пучка.

Выделим из этих пучков квадрики Ли.

Известно, что квадрика Ли поверхности есть предел трех бесконечно близких асимптотических касательных одного семейства в точках асимптотической другого семейства, поэтому квадрика Ли определится как квадрика

$$\Sigma aP \cdot P = 0,$$

проходящая через асимптотическую касательную (A_1A^*) , где

$$A^* = (\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} - \beta) A_3 + \alpha A_4,$$

и через прямые $d(A_1A^*)$ и $d^2(A_1A^*)$, где направление дифференцирования определяется условием

$$\omega_1^3 : \omega_1^4 = -(\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} + \beta) : \alpha. \quad (28)$$

Любая точка прямой (A_1A^*) имеет координаты

$$A_1 + xA^*,$$

где x — произвольный параметр, поэтому

$$\Sigma a(A_1 + xA^*)^2 = 0.$$

Так как это уравнение должно быть удовлетворено при всяком x , то

$$\Sigma aA_1A_1 = 0, \quad \Sigma aA_1A^* = 0, \quad \Sigma aA^*A^* = 0. \quad (29)$$

Подставляя значение A^* и дважды дифференцируя уравнение (29) в направлении (28), получаем уравнения (23), (25) и уравнение

$$\alpha \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} a_{22} + \{ n(a\beta - \alpha b) + \alpha\beta(n - m) + p[\alpha(\beta_3 - \beta_1) + \beta(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha r - \beta p] + \\ + r(\alpha g - \beta f) + \beta p_u - \alpha p_v + [an - \alpha m + p(\alpha_1 - \alpha_3 - p) + p_u - rf] \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma} \} a_{12} = 0, \quad (30)$$

$$\text{где } p = \alpha_1 + \alpha_2 - (\ln \mu_1)_u, \quad r = \beta_1 + \beta_2 - (\ln \mu_1)_v.$$

Таким образом, квадрика Ли выделяется из пучка (26) условием, что параметр пучка

$$\lambda_1 = a_{22} : a_{12},$$

где отношение $a_{22} : a_{12}$ определяется уравнением (30).

Аналогично устанавливаем, что квадрика Ли поверхности (A_2) в точке A_2 выделяется из пучка (27) условием, что параметр пучка

$$\lambda_2 = b_{11} : b_{12},$$

где отношение $b_{11} : b_{12}$ определяется уравнением

$$an \sqrt{b^2 - ac} b_{11} + \left\{ bx - a\beta + ab \frac{m-n}{m} + p^1 [a(\beta_3 - \beta_2) + b(\gamma_2 - \gamma_3) + anr^1 - \right. \\ \left. - bmp^1] + r'(ag - bf) + bmp_u^1 - anp_v^1 + \left[\frac{am - an}{m} + p^1 (\alpha_2 - \alpha_3 - p^1 m) + \right. \right. \\ \left. \left. + p_u^1 n - r^1 f \right] \sqrt{b^2 - ac} \right\} t_{12} = 0, \quad (30')$$

где

$$p^1 = \frac{1}{m} \{ \alpha_1 + \alpha_2 - (\ln \mu_2)_u \}, \quad r^1 = \frac{1}{n} \{ \beta_1 + \beta_2 - (\ln \mu_2)_v \}.$$

Пучки (26) и (27) имеют общую квадрику Дарбу пары поверхностей (A_1) и (A_2) в соответствующих точках A_1 и A_2 при условии

$$\left. \begin{aligned} \alpha m = an, \quad \gamma n = cm, \quad \beta = b, \\ (\ln \mu_1)_u = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (\ln \mu_1)_v = \beta_1 + \beta_2, \quad \lambda_1 = 0 \\ (\ln \mu_2)_u = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (\ln \mu_2)_v = \beta_1 + \beta_2, \quad \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

и тогда уравнение общей квадрики Дарбу имеет вид

$$2x_1 x_2 - (\alpha x_3^2 + 2\beta x_3 x_4 + \gamma x_4^2) = 0. \quad (32)$$

В результате первых трех соотношений (31) имеем: $\mu_1 = \mu_2$, тогда условия (31) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha m = an, \quad \gamma n = cm, \quad \beta = b \\ d(\ln \mu_1) = (\alpha_1 + \alpha_2) \omega_1^3 + (\beta_1 + \beta_2) \omega_1^4 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 1) \\ 2) \\ 3) \end{matrix} \quad (31')$$

При выполнении условий $(31'_{1-2})$ отношения $a_{22} : a_{12}$, $b_{11} : b_{12}$, определяемые уравнениями (30) и (30'), обращаются в нуль и общая квадрика Дарбу (32) есть общая квадрика Ли пары поверхностей.

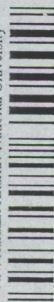
Выражаю глубокую благодарность профессору Якову Павловичу Бланку за ценные советы и замечания, полученные автором при написании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнции, ГИТТЛ, М., 1956.
2. Fubini et Cech. Introduction a la geometrie projective differentielle des surfaces. Paris. 1931.
3. Demoulin. Sur la quadrique de Lie, CR, 147, 1908, стр. 493.
4. Godeaux. Sur les surfaces ayant memes quadriques de Lie. Bulletin de l'Ac. Belg. 14, 1928, стр. 158, 174. 375.
5. Finikov S. P. Surfaces ayant aux points homologues les memes directrices Wilezynski. Известия Казанского физико-математического об-ва, сер. 3, 7, 1934—35, стр. 44—54.
6. Л. Ермолаев. Проективное отображение поверхности, ДАН СССР, 1940, т. XXVI, № 8.
7. Н. В. Лактанова. Расслояемая пара поверхностей, ДАН СССР, 1953, 92, 473—474, «Уч. зап. М. гор. пед. ин-та», 1955, 35, 109—157.
8. С. В. Бахвалов. Замечания к методу подвижного трехгранника. Матем. сб., 7 (49), 1940, стр. 321—326.
9. В. С. Малаховский. Точечное взаимно-однозначное соответствие двух поверхностей с заданным свойством соприкасающихся квадрик С. Ли. Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 2, 1956.

Цена 65 коп.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00199026

9