Приложенiе.

МИШЕЛЬ ШАЛЬ.

(Некрологъ).

Профессора К. А. Андреева.

Въ засѣданiи 20-го декабря 1880 года парижская академiя наукъ была извѣщена чрезъ своего предсѣдателя о тяжелой утратѣ, которую ей пришлось понести. 18-го числа умеръ одинъ изъ наиболѣе уважаемыхъ и любимыхъ членовъ этой ученой коллегiи, одинъ изъ наиболѣе знаменитыхъ представителей науки, геометръ *Мишель Шаль* (Michel Chasles).

Въ знакъ глубокой скорби, постигшей академiю, засѣданiе, по обычаю, было немедленно закрыто и академики разошлись, съ тѣмъ чтобы на другой же день собраться снова у гроба всѣми чтимаго товарища, воздать его праху подобающiя почести и сказать послѣднее прощальное слово.

Въ нѣсколькихъ краткихъ, но задушевныхъ рѣчахъ, произнесенныхъ надъ гробомъ маститаго ученаго, его товарищи и друзья, представители ученыхъ учрежденiй и обществъ, изобразили правдиво и просто высокiя качества его души и указали на то великое наслѣдiе, которое Шаль въ своихъ трудахъ оставилъ ученому мiру.

Придетъ, конечно, время, когда люди, знавшiе близко эту свѣтлую личность и призванные стоять во главѣ научныхъ движенiй, запечатлѣютъ въ памяти потомства, посредствомъ подробнаго жизнеописанiя и всесторонней оцѣнки трудовъ, высокiй образецъ ученаго дѣятеля, представляемый Мишелемъ Шалемъ. Въ ожиданіи этого достойнаго монумента позволимъ себѣ принести и съ своей стороны на свѣжую еще могилу посильное приношеніе, предлагая вниманію русскихъ читателей нѣсколько словъ о великомъ человѣкѣ, изученіе трудовъ котораго было для насъ излюбленнымъ предметомъ занятій и, мы увѣрены, предметомъ наиболѣе полезнымъ.

Мишель Шаль родился въ Эпернонѣ (въ департаментѣ Эры и Луары) 15-го ноября 1793 года. Еще въ лицеѣ, гдѣ онъ получилъ начальное математическое образованіе, обнаружилась его особенная склонность къ точнымъ наукамъ, выразившаяся главнымъ образомъ пристрастіемъ къ самостоятельному розысканію изящныхъ и простыхъ рѣшеній различныхъ трудныхъ задачъ, которыми онъ обмѣнивался съ нѣкоторыми своими сверстниками. Въ 1812 году, будучи 19-ти лѣтъ, онъ вступилъ въ политехническую школу. Оставивши ее въ 1814 году, когда она была распущена, Шаль, подобно другому знаменитому геометру, Понселе, готовъ былъ посвятить себя военно-инженерному дѣлу, какъ одно случайное обстоятельство отклонило его отъ этой карьеры. Отецъ одного изъ его товарищей по школѣ, который былъ первымъ изъ неполучившихъ мѣста воспитанниковъ ихъ выпуска, обратился къ нему съ просьбой отказаться отъ предстоящей ему государственной службы и тѣмъ дать возможность его сыну получить мѣсто. Шаль былъ человѣкъ обезпеченный и не упускалъ случая подать своимъ товарищамъ руку помощи. Не колеблясь нимало, онъ отказался отъ эполетъ инженернаго офицера и въ 1815 году вторично поступилъ въ политехническую школу. Послѣ полнаго окончанія въ ней курса онъ удалился въ Шартръ къ своей матери и нѣсколько лѣтъ былъ, по-видимому, чуждъ быстраго научнаго движенія того времени. На самомъ же дѣлѣ въ это время подготовлялись лучшія изъ его изобрѣтеній, долженствовавшія обезсмертить его имя.

Преданность свою чисто геометрическимъ изслѣдованіямъ Шаль выказалъ еще въ свое пребываніе въ политехнической школѣ, когда помѣстилъ въ журналѣ «Correspondance sur l'Ecole Polytechnique»[1], издававшемся Гашетомъ (Hachette), нѣсколько интересныхъ замѣтокъ и одинъ мемуаръ, содержащій геометрическое доказательство теоремъ Монжа о поверхностяхъ втораго порядка, доказанныхъ самимъ Монжемъ аналитически. Предметы этихъ первыхъ опытовъ могутъ показаться теперь слишкомъ простыми и элементарными, но не нужно забывать, что изслѣдованію свойствъ общихъ поверхностей втораго порядка положено было начало, собственно говоря, Монжемъ и въ то время первостепенные геометры посвящали свои силы этому предмету.

Послѣ десятилѣтняго молчанія въ теченіе времени, проведеннаго въ уединеніи на родинѣ и посвященнаго тщательному изученію любимыхъ научныхъ предметовъ, Шаль, благодаря существовавшимъ тогда спеціально-математическимъ журналамъ Жергона[2] и Кетле[3], выпустилъ въ свѣтъ рядъ мемуаровъ, относящихся по преимуществу къ геометріи. Къ тому времени относятся его изслѣдованія о стереографическихъ проекціяхъ, о параболическомъ преобразованіи, о фокусахъ и фокальныхъ линіяхъ конусовъ и поверхностей втораго порядка, теоремы, относящіяся къ статикѣ, а также первыя изслѣдованія о конечномъ и безконечно маломъ перемѣщеніи твердыхъ тѣлъ.

Вслѣдъ затѣмъ Шаль былъ избранъ корреспондентомъ брюссельской академіи наукъ и продолжалъ публиковать свои изслѣдованія въ ея изданіяхъ. Но въ родной странѣ его научныя заслуги не были признаны столь же скоро.

---

[1] Tomes II et III (1812—1815).

[2] «Annales de Mathématiques» de M. Gergonne (1810—1831), Nismes.

[3] «Correspondance mathématique et physique» de M. Quetelet (1825—1839), Gand et Bruxelles.

Нужно замѣтить, что время, когда Шаль начиналъ свою научную дѣятельность, было временемъ преобладанія трансцендентнаго анализа. Великіе таланты, украшавшіе тогда парижскую академію наукъ, употребляли свои гигантскія силы на развитіе теорій безконечно малыхъ и ихъ приложеній къ астрономіи, механикѣ и физикѣ. За ними старались слѣдовать и люди посредственныхъ способностей. Геометрическія же теоріи, каковы - ученіе о коническихъ сѣченіяхъ, о поверхностяхъ втораго порядка и вообще о линіяхъ и поверхностяхъ алгебраическихъ, были совершенно оставлены въ сторонѣ и считались предметомъ лишь элементарныхъ упражненій. Казалось, что всѣ вѣрили на слово Декарту, что въ этой области онъ не оставилъ болѣе потомству дѣлать изобрѣтеній, такъ-какъ всякій успѣхъ здѣсь долженъ достигаться лишь болѣе или менѣе терпѣливымъ выполненіемъ вычисленій по правиламъ и принципамъ, имъ уже установленнымъ. Такое предубѣжденіе не было поколеблено даже изящнымъ и въ высшей степени поучительнымъ трактатомъ Понселе «О проективныхъ свойствахъ фигуръ», изданнымъ въ 1822 году. Извѣстно, что послѣдующія работы Понселе, сдѣланныя въ томъ же направленіи и представленныя въ академію наукъ, встрѣтили тамъ весьма холодный пріемъ со стороны тогдашнихъ корифеевъ математики.

Нельзя отрицать, что это послужило однимъ изъ поводовъ къ переходу Понселе съ научно-геометрическаго поприща въ област механическихъ изысканій. Но, оставляя знамя геометріи, говоритъ Жозефъ Бертранъ, онъ передалъ его Шалю, который въ теченіе болѣе полувѣка не покидалъ его и съумѣлъ поставить на надлежащую высоту.

Первый капитальный трудъ Шаля, послужившій къ защитѣ и возвышенію геометрическихъ методовъ, было изданное въ 1837 году большое сочиненіе подъ заглавіемъ: «Историческій очеркъ происхожденія и развитія геометрическихъ методовъ» (Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie). Вотъ при какихъ обстоятельствахъ появилось это сочиненіе.

Брюссельскою академіею наукъ былъ предложенъ вопросъ о философскомъ разслѣдованіи различныхъ методовъ, употребляемыхъ въ новѣйшей геометріи вообще и въ-частности метода взаимныхъ поляръ. Въ началѣ 1830 года Шаль представилъ на эту тему обширный мемуаръ, носящій заглавіе: «Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie», которому было предпослано историческое введеніе. Въ то время какъ печатаніе этого мемуара было уже начато, авторъ возъимѣлъ счастливую мысль пополнить и расширить историческое введеніе, и съ этою цѣлью взялъ свое сочиненіе обратно. Въ теченіе семи лѣтъ Шаль трудился надъ поставленною себѣ задачей. Кетле, бывшій тогда секретаремъ брюссельской академіи, неоднократно обращался къ нему отъ имени послѣдней, прося поторопиться изданіемъ столь интереснаго сочиненія; но Шаль медлилъ, продолжалъ трудиться надъ усовершенствованіемъ своего произведенія, знакомился съ историческими документами и изучалъ древніе и восточные языки, чтобы имѣть возможность говорить объ этихъ документахъ съ полною компетентностью. Въ результатѣ такого усерднаго многолѣтняго труда получился большой томъ, состоящій изъ трехъ отдѣльныхъ частей, общее заглавіе котораго мы привели выше. Названный выше мемуаръ составилъ третью часть всего сочиненія; двѣ же остальныя замѣнили прежнее историческое введеніе. Изъ нихъ первая содержитъ собственно исторію геометріи въ Европѣ, начиная отъ Θалеса и кончая ближайшими послѣдователями Монжа, а вторая состоитъ изъ ряда болѣе или менѣе подробныхъ примѣчаній научно-историческаго характера. Эти двѣ части книги составляютъ безспорно наиболѣе важные ея отдѣлы и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе драгоцѣнный вкладъ въ науку.

Говоря объ «Историческомъ очеркѣ» Шаля, Бертранъ замѣчаетъ, что это есть наиболѣе ученое, наиболѣе глубокое и наиболѣе оригинальное изъ сочиненій, появлявшихся когда-либо по исторіи математики.

Основною задачею, которую поставилъ себѣ Шаль, разрабатывая это сочиненіе, было, по его собственнымъ словамъ, показать, что геометрія, считавшаяся въ теченіе послѣднихъ вѣковъ безсильною сама по себѣ и долженствующею извлекать свои средства для развитія изъ пособія алгебраическаго анализа, способна, напротивъ, имѣть свои собственные общіе принципы, свои особые методы могущественные и плодовитые, какъ и методы анализа; что геометрическіе методы имѣютъ даже иногда особыя преимущества, такъ-какъ позволяютъ проникать до общихъ началъ истинъ и обнаруживать таинственныя связи, соединяющія математическія истины, на первый взглядъ совершенно различныя.

Историческая часть книги раздѣляется на нѣсколько главъ, изъ которыхъ каждая посвящена обзору отдѣльной эпохи въ научной жизни народовъ. Первая глава имѣетъ предметомъ исторію древней греческой геометріи и оканчивается пятымъ столѣтіемъ нашей эры, т. е. временемъ комментаторовъ, передавшихъ намъ драгоцѣнныя свѣдѣнія о геометріи древнихъ. Слѣдующая, т. е. вторая глава начинается съ эпохи возрожденія, когда начали слагаться условія для чуждаго древнимъ направленія въ геометріи, выразившагося сближеніемъ ея съ количественнымъ анализомъ и приведшаго въ концѣ концовъ къ великому изобрѣтенію Декарта. Такимъ образомъ тысячелѣтній періодъ времени, протекшій между этими двумя эпохами и характеризуемый вообще какъ время застоя наукъ въ Европѣ, оказывается неотмѣченнымъ никакимъ научнымъ фактомъ изъ области геометріи. Собственно говоря, это не совсѣмъ справедливо, такъ-какъ и въ этотъ періодъ, преимущественно къ концу его, были въ западной Европѣ люди, преданные геометріи и оказавшіе ей несомнѣнныя, хотя и второстепенныя, услуги. Разсмотрѣнію этихъ услугъ Шаль отводитъ въ своей книгѣ особое мѣсто; именно въ 12-мъ примѣчаніи, занимающемъ около половины всей 2-й части книги и представляющемъ само по себѣ очень важный научно-историческій мемуаръ. Кромѣ названнаго предмета въ этомъ примѣчаніи находится обзоръ успѣховъ геометріи у арабовъ, и излагаются самостоятельныя научныя открытія и разслѣдованія, сдѣланныя Шалемъ относительно нѣкоторыхъ пунктовъ въ исторіи геометріи у индусовъ и у римлянъ. Изслѣдованія эти тѣмъ болѣе важны для интересующихся научною дѣятельностью Шаля, что ими положено только начало цѣлаго ряда работъ его въ томъ же направленіи, бывшихъ предметомъ многихъ его сообщеній академіи. Вотъ къ какимъ вопросамъ они относятся.

Въ началѣ настоящаго столѣтія нѣсколько английскихъ оріенталистовъ (Edv. Strachey, 1813; J. Taylor, 1816, и H. T. Colebrooke, 1817) познакомили ученый міръ съ успѣхами, которые были сдѣланы въ математикѣ индусами, передавши содержаніе двухъ математическихъ сочиненій, написанныхъ на санскритскомъ языкѣ, авторами которыхъ были *Брамегупта*, жившій въ VI-мъ вѣкѣ, и *Баскара Ачарія*, въ XII-мъ вѣкѣ нашего лѣтосчисленія. Заключенія, которымъ давали поводъ эти документы, сводились къ тому, что индусами были сдѣланы значительные самостоятельные успѣхи въ математикѣ и преимущественно въ неопредѣленномъ анализѣ. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой и второй степени было ими разработано съ большими тонкостями, и сверхъ того были разобраны и разъяснены нѣкоторые общіе вопросы, не встрѣчающіеся ни у Діофанта, ни у Фермата и получившіе разрѣшеніе только въ трудахъ Эйлера. Что касается геометріи, то по отчетамъ упомянутыхъ оріенталистовъ приходилось дѣлать заключеніе, что познанія индусовъ изъ ея области стояли несравненно ниже ихъ свѣдѣній изъ алгебры, такъ-какъ элементы геометріи, находящіеся у Брамегупты и Баскары, представляютъ матеріалъ весьма скудный. Именно на этотъ пунктъ Шаль и обратилъ свое особенное вниманіе. Разобравши подробно и тщательно тѣ мѣста въ сочиненіяхъ Брамегупты и Баскары, которыя относятся къ геометріи, онъ пришелъ къ выводамъ совершенно иного рода. Изъ сочиненія Брамегупты онъ усмотрѣлъ, что геометрическая часть его вовсе не имѣетъ цѣлью изложеніе элементовъ, а относится цѣликомъ къ одной особой геометрической теоріи. Изложеніе этой теоріи настолько мастерское, что предложенія, входящія въ нее, тѣсно и разумно связаны между собою и въ нихъ нѣтъ ни одного излишняго. Вслѣдствіе этого на отдѣльныя элементарныя предложенія, находящіяся у Брамегупты, нѣтъ никакого основанія смотрѣть какъ на полный сводъ свѣдѣній индусовъ изъ элементовъ геометріи; скорѣе это были только тѣ, выбранныя изъ этой области, свѣдѣнія, которыя оказывались необходимыми для рѣшенія главнаго вопроса, поставленнаго какъ цѣль всей теоріи. Вопросъ этотъ есть слѣдующая чисто геометрическая задача. *Построить четыреугольникъ вписанный въ кругъ, въ которомъ всѣ части, какъ-то: площадь, діагонали, перпендикуляры, ихъ отрѣзки и діаметръ круга, выражались бы числами раціональными.*

Замѣчательно, что до Шаля никто не могъ усмотрѣть, что именно эта задача есть цѣль всего геометрическаго отдѣла книги Брамегупты. Причина этому, кажется, та, что выраженія, входящія въ эту часть, чрезвычайно сжаты и вслѣдствіе множества опущенныхъ и подразумѣвающихся словъ являются для большинства читающихъ весьма неопредѣленными и загадочными. Только Шалю, благодаря его таланту и пріобрѣтенной упорнымъ трудомъ эрудиціи, удалось найдти ключъ къ этимъ загадкамъ.

Итакъ, въ мѣстахъ сочиненія Брамегупты, посвященныхъ геометріи, Шаль усмотрѣлъ лишь образчикъ изслѣдованій индусовъ въ этой наукѣ, образчикъ мастерской, заставляющій предполагать, что эта наука разрабатывалась ими уже давно и въ значительно большемъ объемѣ, чѣмъ думали прежде. Намъ кажется, что именно эллиптичность выраженій въ геометрическихъ разсужденіяхъ Брамегупты служитъ подтвержденіемъ этому, такъ-какъ извѣстно, что въ наукѣ, какъ и въ языкѣ вообще, эллиптическія выраженія тѣмъ болѣе получаютъ мѣста и укореняются, чѣмъ болѣе разрабатывается область, къ которой они относятся.

Разобравши сочиненіе Баскары, жившаго на шесть столѣтій послѣ Брамегупты, Шаль допускаетъ, что этотъ геометръ могъ имѣть намѣреніе представить въ своемъ сочиненіи элементы индійской геометріи, но попытку эту слѣдуетъ признать весьма несовершенною. Кромѣ того, воспроизводя сочиненіе Брамегупты и комментируя его, Баскара называетъ неточными тѣ мѣста этого сочиненія, которыя оказываются вполнѣ строгими и справедливыми. Другія разсужденія Брамегупты Баскара находитъ слишкомъ трудными и не всегда примѣнимыми, между тѣмъ какъ Шаль не имѣетъ сомнѣнія относительно ихъ общности.

Эти обстоятельства, а также то, что значительно позднѣйшіе индійскіе комментаторы, примѣчанія которыхъ находятся въ концѣ книги Баскары, не исправляютъ заблужденій этого геометра, приводитъ Шаля къ заключенію, что въ теченіе времени отъ Брамегупты до Баскары и позднѣе математическія науки въ Индіи быстро клонились къ упадку. Было ли время Брамегупты временемъ дѣйствительнаго процвѣтанія математики въ Индіи, или же его сочиненіе есть само только случайно сохранившійся остатокъ болѣе древняго научнаго богатства? Вопросъ этотъ чрезвычайно интересенъ, но въ имѣющихся документахъ Шаль не усматриваетъ данныхъ ни для какого относительно его предположенія.

Другой весьма важный историческій вопросъ, на которомъ Шаль доказалъ свое остроуміе и ученость, есть находящееся въ томъ же 12-мъ примѣчаніи истолкованіе двухъ мѣстъ въ сочиненіи Боэція, римскаго ученаго и писателя, извѣстнаго подъ названіемъ «послѣдняго римлянина». Скажемъ нѣсколько словъ только объ одномъ изъ этихъ мѣстъ.

Боэцій жилъ въ началѣ VI-го столѣтія при остготскомъ королѣ Теодорихѣ и былъ послѣднимъ очень уважаемъ за свою ученость[1]. Онъ изложилъ на латинскомъ языкѣ многія произведенія греческихъ философовъ и геометровъ и оставилъ намъ драгоцѣнныя свидѣтельства по исторіи наукъ. Въ его геометріи есть указаніе на происхожденіе нашей письменной нумераціи и исторію введенія знаковъ, которые принято теперь называть арабскими цифрами. Указанія эти долго оставались совершенно непонятыми, и, въ силу другихъ позднѣйшихъ свидѣтельствъ, признавалось обыкновенно, что употребляемое теперь письменное счисленіе, существенную особенность котораго составляетъ прогрессивное возрастаніе значеній одной и той-же цифры, смотря по занимаемому ею мѣсту, перешло въ Европу отъ арабовъ, которые въ свою очередь заимствовали его у индусовъ. Шаль, пользуясь спискомъ геометріи Боэція, находящимся въ библіотекѣ Шартра, далъ строго-научное разъясненіе указаніямъ Боэція, въ результатѣ котораго оказалось, что еще во времена этого ученаго наше письменное счисленіе, хотя и въ весьма несовершенномъ видѣ, употреблялось для вычисленія площадей поверхности и что честь изобрѣтенія этого превосходнаго орудія нужно съ большою вѣроятностью приписывать пиѳагорейцамъ. Вотъ подлинныя слова Боэція.

«Пиѳагорейцы, чтобы избѣжать ошибокъ при умноженіяхъ, дѣленіяхъ и измѣреніяхъ (такъ-какъ они во всѣхъ вещахъ отличались изобрѣтательностью и утонченностью), изобрѣли для своего употребленія *таблицу*, которую они въ честь своего учителя назвали *таблицею Пиѳагора;* потому что первую мысль о написанномъ ими они получили отъ этого философа»....

[1] Впослѣдствіи, подозрѣваемый въ измѣнѣ, онъ былъ заключенъ по повелѣнію Теодориха въ тюрьму и казненъ.

Обыкновенно полагали, что эта таблица есть таблица умноженія, которая въ большинствѣ списковъ и была помѣщена вскорѣ за приведенными сейчасъ словами. Но въ шартрскомъ спискѣ (XI-го вѣка), которымъ пользовался Шаль, таблицы умноженія нѣтъ. На основаніи же слѣдующихъ мѣстъ текста, Шаль выражаетъ мнѣніе, подтверждая его обстоятельно и категорически, что таблица, о которой говоритъ Боэцій, была не что иное, какъ рядъ столбцовъ или полосокъ (paginula), образуемыхъ при раздѣленіи плоскости вертикальными чертами, и назначавшихся для помѣщенія въ нихъ цифръ (apices), означающихъ послѣдовательные десятичные разряды числа.

Если это справедливо, то оказывается, что основной принципъ нашего письменнаго счисленія былъ извѣстенъ еще древнимъ и примѣнялся на практикѣ во времена Боэція. Переходъ же отъ таблицы Пиѳагора, какъ ее понимаетъ Шаль, къ нынѣшнему способу изображенія чиселъ нужно уже считать естественнымъ и необходимымъ упрощеніемъ. Главнымъ шагомъ при этомъ переходѣ было, конечно, введеніе въ число цифръ нуля, употребленіе котораго встрѣчается, какъ извѣстно, лишь въ сравнительно позднѣйшее время.

Мнѣніе свое по этому предмету Шаль неоднократно провѣрялъ впослѣдствіи по другимъ историческимъ документамъ и находилъ ему весьма вѣскія подтвержденія.

Всѣ эти историческія истолкованія Шаля и еще его возстановленіе сочиненія Эвклида о Поризмахъ (о которомъ будемъ говорить ниже) изобличаютъ въ немъ такой тонкій умъ и такое глубокое знакомство съ общимъ складомъ и направленіемъ геометрическихъ идей въ человѣчествѣ, что ему болѣе чѣмъ кому-либо было доступно ясное пониманіе геометрическихъ произведеній, не смотря на различіе эпохъ и національностей, которымъ принадлежатъ ихъ авторы.

Въ первой части «Историческаго очерка» особенное вниманіе читателя привлекаетъ, между прочимъ, обзоръ пятой и послѣдней эпохи, гдѣ получаютъ справедливую оцѣнку и надлежащее освѣщеніе труды и изобрѣтенія ближайшихъ предшественниковъ Шаля и гдѣ разъясняются общіе принципы, связывающіе новѣйшіе научные успѣхи и какъ-бы господствующіе надъ ними.

Во второй части кромѣ названнаго уже большаго историческаго примѣчанія (12-го) находятся еще 33 примѣчанія самаго разнообразнаго содержанія и болѣе или менѣе значительнаго объема. Всѣ они въ совокупности представляютъ богатый научный матеріалъ и въ нихъ можно найти начала большинства капитальныхъ изслѣдованій Шаля, получившія широкое и систематическое развитіе въ теченіе послѣдующихъ сорока лѣтъ его ученой дѣятельности. При необыкновенной простотѣ изложенія эти примѣчанія возбуждаютъ высокій научный интересъ въ читающемъ, наводя его на множество важныхъ и полезныхъ вопросовъ. Въ этомъ смыслѣ они могутъ быть рекомендованы по преимуществу какъ въ высшей степени полезное чтеніе для начинающихъ геометровъ, ищущихъ предмета для испытанія своихъ силъ.

Мы не безъ основанія позволили себѣ нѣкоторыя подробности, говоря объ «Историческомъ очеркѣ». Во-первыхъ, это есть безспорно наилучшій памятникъ, какой оставилъ по себѣ Шаль въ наукѣ, памятникъ, удивленіе передъ которымъ не уменьшилось въ теченіе почти пятидесяти лѣтъ быстраго научнаго прогресса. Во-вторыхъ, появленіе въ свѣтъ этой книги составило несомнѣнно эпоху въ научной жизни Шаля. Съ этого времени репутація его, какъ замѣчательнаго ученаго, могла считаться прочно установившеюся.

Даже тѣ первоклассные представители математики, благоволеніемъ которыхъ не пользовались геометрическіе методы, не могли не признать въ немъ талантливаго ученаго и полезнаго научнаго дѣятеля.

Одно возраженіе встрѣчалось съ ихъ стороны. Зачѣмъ растрата такого таланта на столь элементарныя и простыя вещи. Духъ времени. когда изобрѣтеніе незначительной теоремы интегральнаго исчисленія или разрѣшеніе простѣйшаго вопроса изъ области математической физики привлекало къ себѣ болѣе вниманія чѣмъ разъясненіе основныхъ законовъ въ ученіи о пространствѣ, не былъ благопріятенъ направленію идей Шаля.

Не опечаливаясь этимъ и не отчаяваясь въ успѣхѣ, Шаль продолжалъ свое дѣло на излюбленной имъ почвѣ и скромно шелъ тою дорогой, которую указывалъ ему его собственный геній.

Но всѣ пути къ математическимъ истинамъ рано или поздно сходятся, такъ-какъ всѣ эти истины покоятся на одномъ общемъ основаніи. Случилось поэтому, говоритъ Жозефъ Бертранъ, что, когда одинъ изъ первыхъ математиковъ вѣка, желая достигнуть одного изъ возвышенныхъ пунктовъ науки, недосягаемыхъ, повидимому, при помощи простыхъ средствъ, спустился къ нему изъ неизмѣримыхъ высотъ анализа, то встрѣтился съ Шалемъ, пришедшимъ туда ранѣе своимъ скромнымъ путемъ. Бертранъ разумѣетъ здѣсь вопросъ о притяженіи эллипсоидовъ.

Трудность этого вопроса, измѣренная усиліями Лапласа, Лагранжа, Пуассона и Гаусса, казалось, превышала тѣ средства, какими могла располагать геометрія. Въ нѣсколькихъ мемуарахъ, публикованныхъ въ 30-хъ годахъ, Шаль показалъ, однако, что тѣ-же самые результаты въ этомъ вопросѣ, (къ какимъ приводитъ анализъ посредствомъ сложныхъ и продолжительныхъ вычисленій, могутъ быть получены синтетическимъ путемъ при помощи изящныхъ и простыхъ геометрическихъ соображеній.

Но, возражали на это, если доказывать извѣстныя теоремы и можно различными способами, то тѣмъ не менѣе открывать ихъ есть преимущество анализа. Геометрія же не можетъ быть въ такой же степени руководительницею изобрѣтательнаго таланта.

Какъ-бы въ отвѣтъ на это, Шаль въ началѣ 1839 года сообщилъ академіи наукъ результаты своего новаго труда, въ которомъ, исходя изъ ученія о сложеніи силъ, вноситъ въ областъ изслѣдованій о притяженіи тѣлъ новыя предложенія столь же общія какъ и изящныя. Всѣ возраженія падали, такъ сказать, сами собою.

Главный результатъ этого замѣчательнаго сообщенія есть распространеніе предложеній, относящихся къ притяженію эллипсоидовъ на случай, когда притягивающее матеріальное тѣло имѣетъ какую-нибудь форму.

Около всякаго матеріальнаго тѣла можно вообразить безчисленное множество окружающихъ его замкнутыхъ поверхностей, характеризующихся тѣмъ свойствомъ, что нормаль въ каждой точкѣ любой изъ этихъ поверхностей совпадаетъ съ направленіемъ равнодѣйствующей притяженій этой точки всѣми матеріальными частицами тѣла. Это суть такъ-называемыя *поверхности уровня*. Если вообразимъ, что одна изъ этихъ поверхностей уровня покрыта безконечно тонкимъ однороднымъ матеріальнымъ слоемъ, толщина котораго въ различныхъ точкахъ обратно пропорціональна разстояніямъ этихъ точекъ отъ слѣдующей безконечно близкой поверхности уровня, то слой этотъ долженъ обладать такими двумя свойствами: 1) Онъ вовсе не притягиваетъ точку внутреннюю относительно поверхности уровня, на которой онъ помѣщается. 2) Притяженіе этимъ слоемъ внѣшней точки направлено такъ-же какъ и притяженіе ея самимъ тѣломъ и относится къ нему по величинѣ какъ масса слоя къ массѣ тѣла.

Не смотря на свою кажущуюся искусственность это предложеніе важно не только собственно въ ученіи о притяженіи, но также и по приложенію къ теоріи теплоты и электричества. Шаль, какъ было сказано, сообщилъ его академіи въ 1839 г.; доказательство же его онъ публиковалъ только въ 1842 году въ приложеніи къ «Connaissance des temps pour 1845». Правда, что въ томъ же 1842 году Штурмъ доказалъ это предложеніе аналитически и что по отношенію къ теоріи электричества результаты, данные Шалемъ, представляютъ частный выводъ изъ изслѣдованій англійскаго ученаго Джоржа Грина; но все это нисколько не уменьшаетъ ученыхъ заслугъ Шаля въ теоріи притяженія, въ рукахъ котораго геометрическій методъ являлся орудіемъ, обладающимъ такою силою, какой никто не предвидѣлъ.

Въ слѣдующемъ извлеченіи изъ доклада Пуансо академіи объ одномъ изъ названныхъ выше мемуаровъ Шаля всего лучше характеризуется значеніе этого метода.

«Мемуаръ этотъ, говоритъ Пуансо, представляетъ новый примѣръ той изящности и ясности, какія вносятся геометріей въ вопросы наиболѣе трудные и темные. Прекрасный геометрическій методъ древнихъ, называемый не совсѣмъ точно *синтезомъ*, уже неоднократно опережалъ алгебраическій методъ, именуемый нынѣ *анализомъ*. Доказательство этому представляютъ въ особенности безсмертныя творенія Ньютона, а также удивительный трудъ Маклорена по вопросу, о которомъ теперь идетъ рѣчь, трудъ, представляющій образцовое геометрическое изслѣдованіе, сравниваемое Лагранжемъ со всѣмъ тѣмъ, что оставилъ намъ Архимедъ наиболѣе прекраснаго и геніальнаго. Хотя въ этомъ знаменитомъ вопросѣ анализъ, искусно примѣняемый Лагранжемъ, Лапласомъ, Лежандромъ и наилучшими аналистами нашего времени, представляетъ теперь преимущества и, какъ говорятъ, не оставляетъ желать ничего болѣе, тѣмъ не менѣе этотъ примѣръ нельзя еще возводить въ доказательство высшаго значенія анализа сравнительно съ методомъ древнихъ. И дѣйствительно, авторъ настоящаго мемуара показываетъ намъ, что методъ, состоящій изъ ряда разсужденій, руководимыхъ синтезомъ, равнымъ образомъ приводитъ къ полному рѣшенію вопроса и даже болѣе легкимъ способомъ. Вопросъ не превышаетъ, слѣдовательно, силъ синтеза, какъ это могли думать до сего времени»......

«Какъ бы то ни было, продолжаетъ Пуансо, не подлежитъ сомнѣнію, что не слѣдуетъ пренебрегать ни тѣмъ, ни другимъ методомъ. Въ сущности они почти всегда соединяются въ нашихъ произведеніяхъ и совокупность ихъ представляетъ наиболѣе совершенное орудіе человѣческаго разума. Нашъ умъ дѣйствуетъ лишь при помощи знаковъ и образовъ, и когда онъ старается проникнуть въ вопросы новые и трудные, то не можетъ быть излишнимъ ни одно изъ этихъ средствъ; напротивъ, онъ часто получаетъ особенную силу отъ ихъ взаимной помощи. Это всякій можетъ на себѣ испытывать и это обнаруживается ясно въ настоящемъ мемуарѣ».

Въ 1839 году талантъ и энергія Шаля, выразившіеся столь блистательно въ пунктахъ соприкосновенія геометріи и анализа, были наконецъ поощрены избраніемъ его въ члены-корреспонденты парижской академіи наукъ. Ему было тогда 46-ть лѣтъ отъ роду.

Въ теченіе послѣдующаго десятилѣтія научная дѣятельность Шаля была раздѣлена между двумя поприщами—академическимъ и педагогическимъ, такъ какъ въ 1841 году онъ былъ назначенъ профессоромъ политехнической школы и преподавалъ въ ней геодезію и теорію машинъ до 1850 года.

Его ученые труды за это время были публикованы частію въ «Comptes Rendus de l'Académie», частію же въ «Journal des Mathématiques pures et appliquées», изданіе котораго начато Ліувилемъ въ 1836 году. Наиболѣе замѣчательные изъ нихъ суть тѣ, которые относятся къ геодезическимъ линіямъ и линіямъ кривизны на поверхностяхъ втораго порядка, а также къ ученію о перемѣщеніи свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ.

Дѣлать хотя бы краткія указанія на содержаніе ученыхъ сочиненій Шаля значило бы входить въ спеціальныя научныя подробности не для всѣхъ интересныя; да сверхъ того намъ пришлось бы для этого слишкомъ широко раздвинуть рамки настоящаго очерка. Научная дѣятельность Шаля была весьма плодовита, мемуары и ученыя сообщенія его приходится считать сотнями. Не теряя поэтому изъ виду, что главная цѣль наша дать указанія на то значеніе, которое принадлежитъ Шалю въ наукѣ по отношенію къ ея прогрессу, мы отмѣтимъ нѣсколькими чертами главнымъ образомъ тѣ его произведенія, которыя уже съиграли въ этомъ отношеніи болѣе или менѣе выдающуюся роль.

Такого рода сочиненія можно раздѣлить по ихъ значенію на двѣ категоріи. Во первыхъ тѣ, которые представляютъ уже готовые систематическіе научные своды, какъ бы цѣльные научные монументы, имѣющіе значеніе общаго фундамента для дальнѣйшаго развитія науки. Таковы книги: «Traité de Géométrie supérieure» и «Traité des sections coniques». Сочиненія второй категоріи представляютъ, напротивъ, точки отправленія и начала особыхъ путей въ наукѣ, которые знаменитый ученый открылъ и указалъ своимъ послѣдователямъ и эксплуатація которыхъ требуетъ уже сравнительно менѣе проницательности, чѣмъ открытіе.

Шаль, какъ опытный мастеръ своего дѣла, какъ оригинальный учитель, около котораго группируется цѣлая школа послѣдователей, намѣтилъ нѣсколько такихъ точекъ отправленія. Сюда относится, во первыхъ, только что названное ученіе о перемѣщеніи твердаго тѣла, положившее начало цѣлой отрасли геометріи, такъ называемой *геометріи кинематической* (Géométrie cinématique), имѣющей важное значеніе не только по своему собственному содержанію, но и по приложеніямъ какъ методъ. Сюда же принадлежитъ и знаменитая *теорія характеристикъ*, о которой подробнѣе будемъ говорить ниже и которая тоже составляетъ важнѣйшую часть особой вѣтви геометрическаго ученія, названной *числовою геометріей* (Abzählende Geometrie).

Вопросами кинематическими Шаль занимался въ теченіе почти всей своей ученой карьеры, и Дарбу въ своемъ о немъ воспоминаніи справедливо или нѣтъ ставитъ это въ связь съ его пре-

4*

подаваніемъ теоріи машинъ. Первое публикованное по этому предмету его изслѣдованіе помѣщено въ бюллетенѣ барона Ферюсака въ 1830 году, но главное значеніе для науки принадлежитъ конечно мемуару, появившемуся въ «Comptes Rendus» въ 1843 году подъ заглавіемъ: «Геометрическія свойства безконечно малаго движенія свободнаго твердаго тѣла въ пространствѣ». Позднѣе въ 1860 и 1861 годахъ Шаль напечаталъ также въ «Comptes Rendus» большое изслѣдованіе, относящееся къ той же области и присовокупилъ къ нему историческую замѣтку по вопросу о перемѣщеніи неизмѣняемой фигуры. Наконецъ уже въ концѣ своей жизни (1875—1876) онъ сдѣлалъ нѣсколько приложеній къ этому вопросу своего принципа соотвѣтствія (principe de correspondance).

Подъ кинематической геометріей подразумѣвается обыкновенно тотъ отдѣлъ геометрическаго ученія, въ которомъ геометрическія фигуры или тѣла разсматриваются въ состояніи движенія, причемъ послѣднее разсматривается независимо не только отъ производящихъ его причинъ, но и отъ времени. Этимъ устраненіемъ времени кинематическая геометрія существенно отдѣляется отъ кинематики и составляетъ какъ бы первую переходную ступень отъ геометріи вообще къ механикѣ.

Хотя честь установленія основаній этого ученія должна быть раздѣлена между Шалемъ, Пуансо и Мöбіусомъ, но тѣмъ не менѣе указанные мемуары Шаля носятъ неоспоримый характеръ оригинальности и имѣли существенное и преобладающее значеніе на дальнѣйшую судьбу ученія.

Изъ послѣдователей Шаля въ этомъ направленіи особенно почтенное мѣсто принадлежитъ г. Мангейму, нынѣ профессору въ политехнической школѣ, давшему въ своихъ изслѣдованіяхъ значительное развитіе первоначальныхъ идей Шаля и представившему академіи наукъ въ 1868 году большой мемуаръ о перемѣщеніи фигуръ, одобренный академіей и напечатанный въ Recueil des savants étrangers. Передъ самой смертью Шаля Мангеймъ издалъ въ 1880 году обширный курсъ начертательной геометріи, въ которомъ методу кинематической геометріи дано широкое примѣненіе.

На первомъ планѣ въ кинематической геометріи стоитъ теорія сопряженныхъ осей вращенія.

Извѣстно, и это доказалъ между прочимъ Шаль, что всякое безконечно малое измѣненіе положенія твердаго тѣла можетъ быть произведено безконечнымъ множествомъ способовъ посредствомъ двухъ послѣдовательныхъ вращеній тѣла около двухъ осей. Одна изъ этихъ осей можетъ быть взята произвольно въ пространствѣ; другая чрезъ то вполнѣ опредѣляется. Эти то оси вращенія и называются сопряженными. Зависимость между ними приводитъ ко множеству интересныхъ и важныхъ свойствъ фигуръ какъ по отношенію къ самому перемѣщенію, такъ и въ чисто геометрическомъ смыслѣ.

Всѣ оси сопряженныя съ осями, лежащими въ одной и той же данной плоскости, проходятъ чрезъ одну и ту же точку этой плоскости. Точку эту Шаль назвалъ *фокусомъ* данной плоскости.

По отношенію къ перемѣщенію фокусъ является такою точкою данной плоскости, траекторія которой нормальна къ послѣдней.

Точки данной плоскости, траекторіи которыхъ соприкасаются съ нею, лежатъ на одной прямой, которую Шаль называетъ *характеристикой* этой плоскости.

Фокусы плоскостей, проходящихъ чрезъ одну и ту же прямую D, лежатъ на одной и той же прямой Δ; и обратно, плоскости, которыхъ фокусы расположены на прямой, пересѣкаются между собою по одной и той же прямой. Прямыя D и Δ суть двѣ сопряженныя оси вращенія.

Вообще зависимость между сопряженными осями вращенія есть особый видъ взаимнаго или коррелятивнаго соотвѣтствія между элементами пространства (*Nullsystem* Möbius'a).

Особенный интересъ представляютъ сопряженныя оси вращенія, совпадающія между собою. Такова всякая прямая, пересѣкающая одновременно двѣ какія-нибудь другія сопряженныя оси вращенія. Каждая такая прямая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что траекторіи всѣхъ ея точекъ нормальны къ ней.

Всѣ точки, которыхъ траекторіи направлены къ одной и той же точкѣ пространства, расположены на кривой двоякой кривизны третьяго порядка, проходящей чрезъ эту точку.

Всякія двѣ пары сопряженныхъ осей вращенія представляютъ четыре прямолинейныя образующія одного и того же однополаго гиперболоида, и т. д., и т. д.

Изъ приведенныхъ свойствъ уже видно, какое интересное и обильное для изслѣдованій поле представляетъ область кинематической геометріи. Не менѣе интересны и важны приложенія ея къ вопросамъ чистой геометріи или механики.

Не лишнее замѣтить, что съ чисто геометрической точки зрѣнія теорія сопряженныхъ осей вращенія оказывается тождественною съ ученіемъ о линейныхъ комплексахъ Plücker'а, такъ какъ самый общій видъ линейнаго комплекса лучей всегда можетъ быть разсматриваемъ какъ совокупность такихъ осей вращенія по отношенію къ приличнымъ образомъ выбранному безконечно-малому перемѣщенію твердаго тѣла, которыя совпадаютъ съ своими сопряженными.

Мы сказали выше, что въ теченіи десяти лѣтъ (1841—1850) Шаль былъ профессоромъ въ политехнической школѣ. Съ этимъ великимъ учрежденіемъ Франціи онъ былъ связанъ самыми интимными нравственными узами, самою нѣжною сыновнею, такъ сказать, преданностью. Въ политехнической школѣ онъ получилъ основанія своего научнаго образованія и задатки своей ученой карьеры; въ ней появились его первыя научныя произведенія; въ ея же изданіи были напечатаны, составившіе ему такую извѣстность, первые мемуары о притяженіи эллипсоидовъ. Не безъ удовольствія, конечно, онъ принялъ предложеніе занять каѳедру въ дорогомъ для него заведеніи и вступилъ руководителемъ подъ старое, хорошо знакомое ему знамя, на которомъ стоитъ девизъ: «Для отечества, науки и славы» (Pour la Patrie, les Sciences et la Gloire).

Курсъ преподаванія Шаля отличался оригинальностью и строго научнымъ характеромъ. Достаточно перелистать литографированныя записки этого курса, говоритъ Дарбу, чтобы убѣдиться, что въ немъ Шаль оставался прежде всего геометромъ.

Въ то время какъ Шаль продолжалъ трудиться надъ своимъ курсомъ, слѣдуя въ развитіи ученія о машинахъ за быстрымъ рядомъ механическихъ изобрѣтеній и усовершенствованій, политехническую школу постигъ внезапный и, по его собственнымъ словамъ, весьма прискорбный переворотъ. Программы курсовъ по настоянію администраціи были значительно сокращены и преподаваніе втиснуто въ сравнительно узкія рамки, въ которыя не давалось доступа ничему, что могло бы относиться къ прогрессу науки или оригинальности преподавателя. И все это произошло вопреки постановленію совѣта самой школы и заявленіямъ тѣхъ спеціальныхъ заведеній[1], слушатели для которыхъ въ ней приготовлялись.

Находя вреднымъ такое преобразованіе и способнымъ лишь принизить то высокое значеніе и извѣстность, какими пользовалась школа съ самаго своего основанія, но не видя въ то же время надежды на близкую перемѣну въ положеніи вещей, Шаль счелъ за лучшее отказаться отъ преподаванія.

Въ этомъ не слѣдуетъ однако видѣть равнодушія къ судьбѣ школы; Шаль былъ далекъ отъ этого. Всегда и во всемъ искалъ онъ случая, чтобы придти на помощь дорогой ему школѣ и ея ученой и учащейся семьѣ. Въ этихъ видахъ онъ съ полною го-

[1] Ecole des Ponts et Chaussées, Ecole des Mines, Ecole d'application de l'Artillerie et du Génie.

товностью принялъ на себя предсѣдательство въ дружескомъ обществѣ бывшихъ учениковъ политехнической школы; въ этихъ же видахъ онъ уже въ старости принялъ участіе въ работахъ по преобразованію и усовершенствованію школы.

Не задолго до своей смерти Шаль задумалъ написать исторію политехнической школы. Этому намѣренію не пришлось осуществиться. Напечатана была только небольшая замѣтка, въ которой документально изображается судьба преподаванія теоріи машинъ въ школѣ. Въ замѣткѣ этой всего лучше выразилось то чувство, съ которымъ относился Шаль къ горячо любимому учрежденію. На-ряду со скорбію, съ которой описываются измѣненія преподаванія, происшедшія въ 1850 году, передъ нами выступаетъ чувство гордости и удовлетворенія при воспоминаніи о томъ, какъ въ 1829 году Якоби, повѣствуя о политехнической школѣ въ торжественномъ засѣданіи въ Берлинѣ, называетъ ее первою школой въ мірѣ, предметомъ зависти всей Европы и учрежденіемъ, не имѣющимъ себѣ подобнаго.

Въ 1846 году по распоряженію министра Сальванди, побуждаемаго совѣтами Пуансо, были учреждены въ парижскомъ факультетѣ наукъ двѣ новыя каѳедры: каѳедра небесной механики, предоставленная Леверье, и каѳедра высшей геометріи, предназначавшаяся для Шаля.

Вступая на эту каѳедру 22-го декабря того-же года, Шаль произнесъ въ публичномъ засѣданіи факультета (séance d'ouverture) вступительную рѣчь, посвященную обзору тѣхъ источниковъ, изъ которыхъ онъ считалъ необходимымъ почерпать матеріалъ для своего будущаго преподаванія. Обзоръ этотъ является сжатымъ, но въ то же время въ высшей степени изящнымъ очеркомъ развитія различныхъ геометрическихъ ученій, начиная съ древнихъ греческихъ школъ и кончая трудами геометровъ послѣднихъ двухъ столѣтій, вызвавшихъ, какъ извѣстно, къ новой жизни геометрію древности. Нѣкоторыя мѣста этой рѣчи представляютъ высокіе образцы научно-историческихъ сближеній и разъясненій, образцы въ которыхъ ученость Шаля и полное развитіе его таланта, какъ мыслителя, выказываются во всей своей силѣ.

Для примѣра приведемъ то разъясненіе, которое даетъ Шаль взаимному отношенію двухъ главныхъ направленій въ геометріи. Это разъясненіе проливаетъ много свѣта на геометрію какъ единое, стройное научное зданіе. Послѣдняя, по замѣчанію Шаля, должна быть опредѣляема какъ наука, имѣющая предметомъ *измѣреніе* и *свойства* представляемаго нами пространства.

Самымъ этимъ опредѣленіемъ намѣчаются уже два направленія въ наукѣ, направленія, выразившіяся еще въ трудахъ древнихъ геометровъ. Въ то время какъ одни изъ нихъ, представителемъ которыхъ является Архимедъ, преслѣдуютъ главнымъ образомъ *задачи объ измѣреніи*, другіе, какъ Эвклидъ и Аполлоній, создаютъ *ученіе объ общихъ свойствахъ фигуръ*, свойствахъ, которыя хотя и выражаются иногда подъ видомъ метрическихъ соотношеній (напр. подобіе) между частями фигуръ, но прямаго отношенія къ задачамъ объ измѣреніи не имѣютъ.

Въ настоящее время незамѣнимымъ и могущественнымъ орудіемъ для рѣшенія этихъ задачъ является анализъ безконечно малыхъ, и Шаль весьма остроумно усматриваетъ въ этомъ характеристическое различіе между двумя частями науки, на которыя она распадается въ силу названныхъ направленій. Въ то время, какъ анализъ безконечно малыхъ, примѣняемый къ вопросамъ, составляющимъ первую часть, дѣлаетъ возвращеніе къ пріемамъ Архимеда ненужнымъ и безполезнымъ, свойства фигуръ, составляющія вторую часть, въ настоящее время имѣютъ въ большинствѣ случаевъ то же значеніе какъ и въ древности. Основныя предложенія знаменитыхъ произведеній Паскаля, Дезарга и Карно были таковыми же и въ геометрическомъ анализѣ древнихъ.

Не нужно думать, однако, что оба эти отдѣла геометріи составляютъ двѣ части науки, въ равной мѣрѣ независящія одна отъ другой. Если, съ одной стороны, *геометрія измѣренія* и обособляется тѣмъ, что преслѣдуетъ особыя цѣли, и есть, такъ сказать, геометрія извѣстнаго рода задачъ, то съ другой—*геометрія, изучающая свойства фигуръ*, разрабатываетъ фундаментъ всего геометрическаго ученія, къ разрѣшенію какихъ бы задачъ это ученіе затѣмъ ни направлялось. Вслѣдствіе этого она имѣетъ прямое и естественное примѣненіе и къ геометріи измѣренія, такъ что успѣхъ въ разрѣшеніи задачъ послѣдней находится въ тѣсной зависимости отъ развитія первой.

Чтобы пояснить это, Шаль замѣчаетъ, что при опредѣленіи геометрическихъ величинъ того или другаго вида (площадей, объемовъ, длины линій и т. п.) основнымъ и почти неизбѣжнымъ пріемомъ служитъ раздробленіе этихъ величинъ на *элементы*, которые разсматриваются какъ безконечно малые и затѣмъ суммируются или сравниваются. При этомъ понятно, что быстрота и легкость въ рѣшеніи такихъ задачъ должна зависѣть отъ формы и свойствъ элементовъ, которыя въ свою очередь обусловливаются способомъ раздѣленія величины на элементы. Но выборъ того или другаго способа разложенія долженъ основываться на геометрическихъ свойствахъ разсматриваемой и измѣряемой фигуры. Слѣдовательно, эти свойства должны быть изучаемы предварительно, и отъ достаточнаго ихъ знанія зависитъ въ большинствѣ случаевъ весь успѣхъ рѣшенія.

Начавъ, какъ было сказано, свое преподаваніе въ Сорбоннѣ въ 1846 году, Шаль продолжалъ его около тридцати лѣтъ. Общія основанія преподававшейся имъ науки были имъ изложены въ особомъ трактатѣ, публикованномъ въ 1852 году подъ заглавіемъ: «Traité de Géométrie supérieure». Это обширное сочиненіе имѣетъ своей цѣлью установить начала науки, которая, пользуясь частію извѣстными еще древнимъ, частію же новыми чисто геометрическими методами, служила бы къ расширенію нашихъ свѣдѣній о свойствахъ пространства безъ помощи метода координатъ. Въ этомъ смыслѣ высшая геометрія Шаля носитъ также названіе чистой или синтетической геометріи въ противоположность съ аналитическою геометріей Декарта, въ которой понятіе о координатахъ составляетъ, такъ сказать, краеугольный камень.

Трактатъ по высшей геометріи Шаля состоитъ изъ четырехъ отдѣловъ. Первый отдѣлъ посвященъ установленію и подробному развитію трехъ основныхъ понятій: 1) о сложномъ или ангармоническомъ отношеніи, 2) о проективномъ или гомографическомъ соотвѣтствіи рядовъ и пучковъ и 3) объ инволюціи.

Понятіе о сложномъ отношеніи или по крайней мѣрѣ основное его свойство сохранять свою величину въ перспективѣ было извѣстно еще въ древности. Понятіе объ инволюціи введено въ XVII столѣтіи Дезаргомъ. Что же касается понятія о соотвѣтствіи, то по нашему мнѣнію оно составляетъ главную и существеннѣйшую особенность всѣхъ новѣйшихъ геометрическихъ ученій и въ частномъ случаѣ высшей геометріи Шаля.

Можно сказать, что введеніе этого понятія имѣетъ значеніе для науки сходное съ значеніемъ въ чистой математикѣ перемѣнныхъ величинъ и аналитическихъ между ними зависимостей. Соотвѣтствіе проективное есть простѣйшее изъ тѣхъ соотвѣтствій, которыя устанавливаются геометрически, т. е. построеніемъ; къ нему приводитъ насъ самымъ прямымъ и естественнымъ образомъ построеніе перспективы или центральной проекціи.

Совокупность методовъ и предложеній, основывающихся на проективномъ соотвѣтствіи или, что все то же, на построеніи центральныхъ проекцій, получило въ послѣднее время названіе *проективной геометріи*, названіе, которымъ характеризуется приблизительно то же ученіе, которое Шаль назвалъ высшею геометріей. Собственно творцемъ или основателемъ проективной геометріи слѣдуетъ считать Понселе, хотя примѣненіе центральной проекціи къ выводу свойствъ фигуръ, названныхъ Понселе проективными, беретъ свое начало еще отъ Дезарга.

Шалю принадлежитъ безспорно заслуга выдѣленія проективнаго соотвѣтствія, какъ предмета особаго элементарнаго изученія, и всесторонняго разъясненія той важной роли, какую играетъ въ немъ сложное или ангармоническое отношеніе. Послѣднее есть, собственно говоря, элементарная составная часть всѣхъ возможныхъ метрическихъ или количественныхъ проективныхъ свойствъ фигуръ, т. е. тѣхъ количественныхъ соотношеній между частями фигуры, которыя остаются неизмѣнными въ перспективѣ. На эти свойства Шаль обращаетъ, вообще говоря, больше вниманія чѣмъ Понселе и нѣкоторые нѣмецкіе геометры, какъ Штейнеръ и Штаудтъ, и подвергаетъ ихъ болѣе многостороннему разсмотрѣнію и оцѣнкѣ. Поэтому и понятно, что въ его геометріи сложное отношеніе является имѣющимъ такое преобладающее значеніе.

Въ послѣднее время нѣкоторыми нѣмецкими учеными возбужденъ былъ вопросъ: кому принадлежитъ первенство относительно введенія въ новую геометрію понятія о сложномъ или ангармоническомъ отношеніи, какъ общаго принципа доказательствъ и изслѣдованій?[1]. Если въ этомъ вопросѣ имѣть въ виду исключительно время публикованія сочиненія, въ которомъ для сложнаго отношенія указывается такая роль, то безспорно это первенство принадлежитъ Мöбіусу (Barycentrische Calcul, 1827). Но винить Шаля въ незнаніи и неупоминаніи заслугъ Мöбіуса было бы во всякомъ случаѣ несправедливостью.

Дѣло въ томъ, что въ самой Германіи сочиненіе Мöбіуса, въ которомъ мы находимъ теперь такое обиліе общихъ и совершенно новыхъ для того времени идей, оставалось долго почти незамѣченнымъ и неоцѣненнымъ, и лишь послѣ того, какъ тѣ же идеи получили свое обширное примѣненіе въ изслѣдованіяхъ Штей-

---

[1] См. *F. Klein*'а рецензію на сочиненіе Шаля «Rapport sur les progrès de Géométrie» въ Göttingische gelehrte Anzeigen, 1872, p. 1—12, и *H. Hankel*'я «Die Elemente der projectivischen Geometrie». Leipzig, 1875, p. 28—29.

нера и Плюкера, въ особенности же когда у Шаля эти идеи выступили съ такою ясностью и преобладающимъ значеніемъ какъ основанія стройной и цѣльной науки, стали воздавать должное и заслугамъ Мöбіуса.

Какъ бы то ни было, нельзя сомнѣваться, что то глубокое убѣжденіе въ пользѣ понятія о ангармоническомъ отношеніи для успѣховъ новой геометріи, которое Шаль постоянно выражалъ и подтверждалъ во многихъ своихъ сочиненіяхъ, начиная съ «Историческаго очерка», есть результатъ его собственнаго всесторонняго изученія геометріи древнихъ и трудовъ французскихъ геометровъ XVII вѣка (Дезаргъ и Паскаль) и никакой связи съ развитіемъ идей нѣмецкихъ ученыхъ не имѣло.

Второй отдѣлъ книги «Traité de Géometrie supérieure» содержитъ ближайшія примѣненія трехъ основныхъ ученій, изложенныхъ въ первомъ. Этотъ отдѣлъ безъ сомнѣнія есть наиболѣе интересный и въ немъ болѣе всего выразилась та характерная особенность, которою отличается большинство сочиненій Шаля отъ сочиненій другихъ геометровъ, содѣйствовавшихъ развитію новой геометріи. Эта особенность состоитъ въ томъ, что Шаль никогда не игнорируетъ историческихъ традицій науки и никогда не порываетъ той нити, которою его новое геометрическое ученіе связывается съ геометріею древнихъ.

Этой особенности нѣтъ ни у Монжа, ни у Понселе, ни у Штейнера, не говоря уже о такихъ геометрахъ, какъ Штаудтъ, книга котораго представляетъ глазамъ читателя сразу новую схему геометрическихъ воззрѣній. Между тѣмъ эта особенность имѣетъ весьма дорогую цѣну для читателя, изучающаго вновь науку. Она не только дѣлаетъ изученіе книги болѣе оживленнымъ и привлекательнымъ, но и позволяетъ оцѣнивать по достоинству какъ новые успѣхи науки, такъ и основной фондъ ея, завѣщанный намъ минувшими вѣками.

Мнѣніе, что историческія традиціи могутъ послужить стѣсненіемъ при изложеніи новыхъ обобщенныхъ взглядовъ, опровергается всего лучше высшею геометріей Шаля.

Въ разсматриваемомъ отдѣлѣ мы встрѣчаемся прежде всего съ классическою задачей объ *опредѣленномъ сѣченіи* (sectio determinata). Мы видимъ, съ какою легкостью, быстротою и общностью эта задача рѣшается пріемами новой геометріи. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы узнаемъ, что она была въ древности предметомъ особаго обширнаго сочиненія Аполлонія, такъ какъ, съ одной стороны, недостаточность общности въ методахъ древнихъ дѣлала рѣшеніе этой задачи чрезвычайно труднымъ, съ другой же—строгость и точность этихъ методовъ, а также, можетъ быть, существованіе особыхъ путей изслѣдованія, которые до насъ не сохранились, позволяли распознавать съ необыкновенною ясностью и осязательностью всѣ возможные частные случаи задачи и находить для каждаго особое строгое рѣшеніе.

Далѣе, передъ нами излагается общій геометрическій пріемъ для рѣшенія, такъ называемыхъ, задачъ втораго порядка, т. е. такихъ, рѣшеніе которыхъ сводилось бы въ аналитической геометріи къ уравненію 2-й степени. Вмѣстѣ съ тѣмъ указывается на аналогію этого общаго пріема съ ариѳметическимъ правиломъ ложнаго положенія, имѣющимъ громадную историческую древность и дошедшимъ до насъ отъ индусовъ чрезъ посредство арабовъ, и т. д., и т. д.

Главное содержаніе третьяго отдѣла книги составляетъ ученіе о коллинеарномъ и коррелятивномъ соотвѣтствіяхъ между плоскостями или, выражаясь терминами самого Шаля, о гомографическихъ и коррелятивныхъ фигурахъ. Сравнительно съ другими отдѣлами этотъ послѣдній оказывается весьма сжатымъ и многія стороны названнаго предмета въ немъ лишь едва затронуты. Это объясняется, быть можетъ, тѣмъ, что тотъ же предметъ былъ уже разработанъ и чрезвычайно подробно, и притомъ съ болѣе общей точки зрѣнія, изложенъ Шалемъ въ упомянутомъ выше большомъ мемуарѣ, составляющемъ часть книги «Aperçu historique»...

Четвертый отдѣлъ содержитъ примѣненіе основныхъ теорій высшей геометріи къ изслѣдованію свойствъ круга и системъ круговъ. Этотъ отдѣлъ составляетъ какъ бы переходную ступень отъ общей или элементарной части высшей геометріи къ спеціальному изученію коническихъ сѣченій. Послѣднему посвящено особое сочиненіе Шаля, публикованное въ 1865 году, т. е. 13-ть лѣтъ спустя послѣ появленія трактата о высшей геометріи, подъ названіемъ: «Traité des sections coniques».

Содержаніе этой книги есть также сводъ нѣкоторыхъ отдѣловъ многолѣтняго преподаванія съ университетской каѳедры. Представляя эту книгу академіи, Шаль выразился, что одною изъ его цѣлей при ея изданіи было восполнить пробѣлъ, существующій въ современной научной литературѣ по отношенію къ систематическому ученію о коническихъ сѣченіяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, хотя, съ одной стороны, большинство курсовъ аналитической геометріи и содержитъ изслѣдованіе этихъ кривыхъ, но это изслѣдованіе дѣлается въ нихъ не столько въ видахъ самой теоріи коническихъ сѣченій, сколько ради разъясненія общихъ пріемовъ аналитической геометріи. Съ другой же стороны, со времени Аполлонія, опытовъ изложенія геометрической теоріи коническихъ сѣченій и притомъ въ интересахъ лишь ея полноты и многосторонности совершенно не было. Исключеніемъ являются развѣ только сочиненіе Делагира (De la Hire, 1685) и ему подобныя, представляющія лишь подражанія Аполлонію.

Нечего и говорить, что книга Шаля вполнѣ соотвѣтствуетъ такимъ намѣреніямъ ея автора. Основываясь лишь на тѣхъ элементарныхъ геометрическихъ ученіяхъ, которыя подробно изложены въ его «Высшей геометріи», и исходя изъ древняго классическаго опредѣленія коническихъ сѣченій, она не оставляетъ желать ничего болѣе относительно оригинальности изложенія и чистоты геометрическихъ пріемовъ.

Что касается полноты ученія, то и въ этомъ едва ли кто счелъ бы себя неудовлетвореннымъ книгою Шаля, а между тѣмъ она представляетъ лишь первую часть всего намѣченнаго авторомъ плана. Вторая часть, основнымъ фондомъ для которой должны были, по видимому, послужить нѣкоторые его мемуары о системахъ коническихъ сѣченій, не была къ сожалѣнію публикована вовсе.

Какъ бы ни было желательно указать здѣсь хотя въ сжатыхъ словахъ на содержаніе «Трактата о коническихъ сѣченіяхъ», какъ одной изъ наиболѣе замѣчательныхъ книгъ Шаля, мы должны отказаться отъ этого по слѣдующей причинѣ. Главныя достоинства и привлекательность книги заключаются не въ тѣхъ истинахъ, которыя она намъ раскрываетъ, а въ той послѣдовательности и непрерывности, которую она между ними устанавливаетъ. Бертранъ вполнѣ справедливо сравниваетъ эту книгу съ произведеніями нѣкоторыхъ классическихъ поэтовъ, какъ Лукрецій, о которыхъ говорилось, что выдѣлить изъ нихъ для примѣра одинъ стихъ такъ-же невозможно, какъ невозможно для составленія понятія о волнующемся морѣ выдѣлить изъ него одну волну.

Это качество книги дѣлаетъ безполезнымъ приводить изъ нея цитаты или разъяснять ея общій характеръ по отдѣльнымъ главамъ. Въ виду этого для ознакомленія съ книгой можно только рекомендовать прочитать ее отъ начала до конца. При этомъ, замѣчаетъ Бертранъ, читающій съ самаго же начала чувствуетъ необходимость вникать въ мельчайшія подробности и, отдавшись съ первой же главы вполнѣ руководительству автора, не пожалѣетъ объ этомъ, когда дойдетъ до послѣдней.

Въ 1851 году Шаль былъ избранъ въ члены академіи наукъ.

Рядъ мемуаровъ и сообщеній, представленныхъ имъ академіи въ теченіе послѣдующаго десятилѣтія, посвящается главнымъ образомъ ученію о геометрическихъ линіяхъ высшаго порядка. Изслѣдованія эти, какъ представляющія дальнѣйшее развитіе геометріи на началахъ, изложенныхъ въ «Traité de Géométrie Supérieure», были во многихъ своихъ частяхъ продолженіемъ факультетскаго преподаванія Шаля.

Начало этому ряду изслѣдованій было положено небольшимъ, но изящнымъ мемуаромъ о построеніи кривой третьяго порядка по девяти даннымъ ея точкамъ.

Небольшое историческое введеніе, которымъ начинается мемуаръ, очерчиваетъ въ краткихъ словахъ прошедшее этого вопроса. Онъ былъ намѣченъ еще Ньютономъ и охарактеризованъ имъ какъ одинъ изъ труднѣйшихъ. Два знаменитые англійскіе геометра начала прошедшаго столѣтія Маклоренъ и Брейкенриджъ, слѣдуя по пути, указанному Ньютономъ, сдѣлали очень многое для разъясненія свойствъ высшихъ геометрическихъ кривыхъ, преимущественно по отношенію къ способамъ ихъ геометрическаго образованія (органическаго описанія), и имѣли постоянно въ виду задачу Ньютона, но рѣшить ее въ общемъ видѣ имъ не удалось[1].

Изслѣдованія свойствъ кривыхъ третьяго порядка, предпринимавшіяся въ послѣдующія времена различными учеными, между которыми Шаль въ особенности отмѣчаетъ имена Краммера и Эйлера, приготовили мало по малу данныя для рѣшенія этой задачи. На основаніи этихъ то данныхъ Шалю и удалось наконецъ найдти рѣшеніе вполнѣ точное и общее.

Чтобы уяснить, чѣмъ обусловливается успѣхъ Шаля въ задачѣ, не поддававшейся столь долгое время усиліямъ первоклассныхъ геометровъ, замѣтимъ, что исходнымъ пунктомъ для отысканія ея рѣшенія служило какъ для самого Шаля, такъ и для

[1] Терминъ *органическое описаніе* (descriptio organica) былъ въ первый разъ употребленъ Ньютономъ въ его «Enumeratio linearum tertii ordinis» (1704), гдѣ и намѣчена эта задача. Сочиненіе Маклорена, развивающее первоначальную мысль Ньютона, названо имъ *органической геометріей:* «Geometria organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis» (1720).

его предшественниковъ, то или другое геометрическое образованіе или органическое описаніе кривой, которое въ чистой геометріи имѣетъ такое же значеніе, какъ ея уравненіе въ геометріи аналитической. Было предложено нѣсколько такихъ способовъ образованія кривыхъ третьяго порядка, но ни одинъ изъ нихъ неудовлетворялъ условію, чтобы данными, на которыхъ основывается это образованіе, были девять произвольно взятыхъ точекъ кривой. Въ этомъ и заключалось единственное, но весьма важное препятствіе для нахожденія искомаго рѣшенія.

Вмѣсто того, чтобы стремиться къ преодолѣнію этого препятствія, придумывая все новые и новые способы образованія, какъ это дѣлали его предшественники, Шаль съумѣлъ устранить его, идя совершенно инымъ путемъ, а именно слѣдующимъ.

За опредѣленіе кривой третьяго порядка онъ принималъ образованіе ея посредствомъ двухъ проективно-соотвѣтственныхъ пучковъ, изъ которыхъ одинъ есть пучекъ прямыхъ, а другой пучекъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія точки. Затѣмъ данныя девять точекъ онъ раздѣлялъ произвольно на двѣ группы, одну въ четыре и другую въ пять точекъ. Вообразивъ затѣмъ пять коническихъ сѣченій, изъ которыхъ каждое проходитъ чрезъ всѣ четыре точки первой группы и одну изъ точекъ второй, онъ сталъ отыскивать на плоскости такую точку, которая, будучи соединена прямыми линіями съ точками второй группы, давала бы пучекъ пяти прямыхъ проективно-соотвѣтственный съ пучкомъ этихъ коническихъ сѣченій. Нахожденіе такой точки оказалось всегда возможнымъ и построеніе ея по девяти даннымъ точкамъ выполнимымъ всегда помощію одной только линейки.

Эту десятую точку, которая, такъ сказать, дополняетъ девять данныхъ, Шаль называетъ *ключемъ* для рѣшенія задачи, такъ какъ послѣ нахожденія ея построеніе самой кривой не представляетъ уже особенныхъ трудностей.

Дѣйствительно, кривая третьяго порядка, образуемая названными двумя пучками прямыхъ и коническихъ сѣченій, должна, по самому способу образованія, проходить черезъ всѣ эти десять точекъ, а слѣдовательно и быть искомою. Чтобы найдти затѣмъ сколько угодно и притомъ какъ угодно близкихъ между собою точекъ этой кривой, остается на всякомъ произвольно взятомъ лучѣ пучка прямыхъ отыскивать тѣ точки кривой, въ которыхъ этотъ лучъ пересѣкается съ соотвѣтствующимъ ему коническимъ сѣченіемъ втораго образующаго пучка. Отысканіе этихъ точекъ пересѣченія составляетъ, какъ извѣстно, задачу втораго порядка и, на основаніи правилъ, извѣстныхъ изъ элементовъ высшей геометріи, достигается безъ вычерчиванія самихъ коническихъ сѣченій весьма простымъ построеніемъ при помощи линейки и циркуля.

Вскорѣ послѣ напечатанія этого мемуара Шаль предложилъ еще нѣсколько способовъ для рѣшенія той же задачи, но всѣ они основываются на одной общей мысли, которая ускользала отъ всѣхъ предшественниковъ Шаля, именно на мысли найдти сперва *ключъ* къ рѣшенію, который въ различныхъ пріемахъ можетъ быть или точкой, или прямою линіей, дополняющею данныя девять точекъ кривой и составляющею вмѣстѣ съ ними группу данныхъ, устанавливающихъ какъ самые образующіе кривую пучки, такъ и соотвѣтствіе между ними.

Большинство другихъ мемуаровъ Шаля, принадлежащихъ этой же серіи, содержитъ дальнѣйшее развитіе идей, уже положенныхъ въ первомъ мемуарѣ, и преслѣдуютъ рѣшеніе той же задачи, но уже въ обобщенномъ видѣ, а именно въ примѣненіи къ кривымъ, порядокъ которыхъ выше третьяго.

Занявшись вопросомъ объ этихъ кривыхъ, Шаль легко замѣтилъ, что ключемъ для нахожденія ихъ построенія должна уже быть не одна точка или прямая, а цѣлая группа ихъ. Такъ, въ случаѣ кривой четвертаго порядка эта группа можетъ состоять или изъ двухъ, или изъ трехъ точекъ. Нахожденіе такой группы, если число составляющихъ ее элементовъ болѣе двухъ, а также нахожденіе при такомъ же условіи группъ точекъ искомой кривой, въ которыхъ пересѣкаются линіи образующихъ ее пучковъ, уже не можетъ быть достигаемо элементарнымъ построеніемъ, т. е. помощію линейки и циркуля. Затрудненіе, которое такимъ образомъ возникало, вызвало мемуаръ о построеніи корней уравненій третьей и четвертой степени. Тѣми же изслѣдованіями были вызваны первыя идеи Шаля о его *принципѣ соотвѣтствія*.

Въ заключеніи разсматриваемаго ряда мемуаровъ должны быть поставлены два сообщенія академіи (1857) о тѣхъ условіяхъ геометрическихъ и числовыхъ, которыми связаны группы точекъ пересѣченія нѣсколькихъ линій или поверхностей какихъ бы то ни было высшихъ порядковъ.

Всѣ эти изслѣдованія, носящія общій чисто геометрическій характеръ, привлекли вниманіе и другихъ геометровъ, которые, подражая отчасти Шалю и придерживаясь созданнаго имъ круга идей, тѣмъ не менѣе подвергли ту же научную область дальнѣйшей болѣе подробной разработкѣ. Къ числу этихъ геометровъ слѣдуетъ отнести прежде всего Жонкьера (E. de Jonquières), который въ 1856 году представилъ академіи большой мемуаръ подъ заглавіемъ: «Опытъ изслѣдованія образованія геометрическихъ кривыхъ и въ частности кривыхъ четвертаго порядка». Разсмотрѣвъ этотъ трудъ по порученію академіи, Шаль отозвался о немъ съ большою похвалою и выразился между прочимъ слѣдующимъ образомъ. «Этотъ мемуаръ представляетъ, какъ намъ кажется, удачный опытъ разработки вопросовъ, заключающихъ въ себѣ большія трудности, передъ которыми приходится останавливаться, такъ сказать, на первомъ же шагу. Трудъ этотъ изобличаетъ въ авторѣ выходящую изъ ряда способность къ отвлеченнымъ представленіямъ чистой геометріи и вполнѣ заслуживаетъ поощренія».

Продолжая трудиться на поприщѣ, требующемъ прежде всего научной изобрѣтательности, Шаль не оставлялъ въ то же время и своихъ научно-историческихъ изслѣдованій. Мы уже сказали, что онъ неоднократно представлялъ академіи соображенія и доказательства по поводу своихъ прежнихъ выводовъ. Кромѣ того онъ всегда живо интересовался всякимъ новымъ фактомъ или истолкованіемъ изъ исторіи геометріи, почему-либо выступавшимъ впередъ, или благодаря счастливому открытію памятниковъ науки, или по поводу трудовъ другихъ ученыхъ. Можно сказать, что не было ни одного сообщенія или представленія, сдѣланнаго кѣмъ-либо академіи изъ этой области, которое не возбудило бы его особеннаго вниманія и соревнованія и не вовлекло бы его или въ самостоятельныя глубокія изслѣдованія, или въ ученыя состязанія и споры.

Но надъ всѣми этими изслѣдованіями или случайными замѣтками должно быть поставлено, какъ образцовое произведеніе и результатъ многолѣтняго труда опытнаго и геніальнаго ученаго, его возстановленіе недошедшаго до насъ сочиненія Эвклида о поризмахъ, о которомъ мы слегка упомянули выше.

Этотъ прекрасный трудъ изданъ Шалемъ въ 1860 году подъ заглавіемъ: «Три книги поризмъ Эвклида, возстановленныя на основании замѣчанія Паппа и согласно мнѣнію Р. Симсона». (Les trois livres de Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions).

Вопросомъ о поризмахъ Шаль занимался очень долго и еще въ «Aperçu historique» касался его какъ въ самой исторической части книги, такъ и въ особомъ примѣчаніи.

Слово *поризма* (porisma, *πόρισμα*) есть названіе особаго рода геометрическихъ предложеній. Въ элементахъ Эвклида это слово употребляется въ смыслѣ тождественномъ съ словомъ слѣдствіе или корроларій, но въ другихъ сочиненіяхъ древнихъ и между прочимъ въ сочиненіи Эвклида, возстановленномъ Шалемъ, этимъ именемъ называются предложенія, имѣющія свой спеціальный характеръ и отличныя отъ другихъ какъ по формѣ, такъ и по содержанію.

Нужно замѣтить, что древніе геометры дѣлали весьма тонкое различеніе между предложеніями разныхъ родовъ и характеризовали каждый видъ предложеній особымъ названіемъ. Впослѣдствіи это различеніе утратило свое значеніе вѣроятно какъ болѣе или менѣе формальное и неимѣющее прямого отношенія къ самой, такъ сказать, сущности науки, и теперь представляется весьма труднымъ не только отнести какое-либо предложеніе къ тому или другому виду, но и узнать хотя приблизительно, въ чемъ видѣли древніе отличительные признаки предложеній, которыя они называли общимъ именемъ. Это какъ-разъ имѣетъ мѣсто и по отношенію къ поризмамъ.

Краткія указанія на особенности этихъ предложеній, а также нѣкоторыя свѣдѣнія о посвященномъ имъ сочиненіи Эвклида, сохранились для насъ у Паппа александрійскаго, геометра комментатора, жившаго въ концѣ IV-го столѣтія, и у Прокла Діадоха, философа V-го столѣтія. Послѣдній даетъ только опредѣленіе поризмъ какъ особыхъ предложеній, у Паппа же въ 7-й книгѣ его сочиненія «Collectiones mathematicae» мы находимъ болѣе подробныя по этому предмету указанія. Тамъ мы встрѣчаемъ, во первыхъ, два опредѣленія поризмъ, изъ которыхъ одно принадлежитъ древнимъ, а другое новѣйшимъ по отношенію къ той эпохѣ геометрамъ. Затѣмъ кромѣ общихъ указаній на характеръ сочиненія Эвклида о поризмахъ замѣтка Паппа содержитъ 29-ть поризмъ, приведенныхъ безъ доказательства лишь какъ примѣры изъ числа всѣхъ 171-й поризмы, содержащихся въ книгахъ Эвклида. Для поясненія этихъ примѣровъ Паппъ даетъ 38-мь леммъ. Всѣ эти предложенія изложены, однако, у Паппа въ выраженіяхъ столь сжатыхъ и темныхъ, что Галлей, извѣстный англійскій астрономъ прошедшаго столѣтія, чрезвычайно свѣдущій въ геометріи древнихъ грековъ, признается, что ничего въ нихъ не понимаетъ.

Не смотря на эту скудость и темноту историческихъ указаній относительно поризмъ, желаніе возстановить по этимъ указаніямъ сочиненіе Эвклида возбуждало къ упорному труду очень многихъ геометровъ новаго времени, начиная почти съ эпохи возрожденія. Одною изъ побудительныхъ причинъ къ этому служило кромѣ самого имени Эвклида, представляющаго безъ сомнѣнія лучшее ручательство за достоинство сочиненія, служило общее сужденіе высказанное о немъ Паппомъ. По его словамъ, это было обширное и геніально составленное собраніе чрезвычайно важныхъ предложеній, служащихъ необходимымъ пособіемъ для рѣшенія наиболѣе трудныхъ задачъ. Далѣе Паппъ говоритъ, что поризмы Эвклида представляютъ ученіе замѣчательное по своей общности и чрезвычайно пріятное для тѣхъ, кто умѣетъ видѣть и находить.

Въ числѣ ученыхъ, старавшихся возстановить это ученіе, мы встрѣчаемъ имена Альберта Жирара (нач. XVII стол.), Фермата (1590—1663), Галлея (1656—1742) и др. Усиліямъ ихъ не удалось однако, сколько до сихъ поръ извѣстно, побѣдить трудности вопроса и дать хотя бы частное вполнѣ удовлетворительное его рѣшеніе.

Первый, имѣвшій въ этомъ отношеніи успѣхъ, былъ Робертъ Симсонъ, профессоръ въ Глазго (1687—1768). Ему принадлежитъ честь разъясненія многихъ изъ этихъ загадочныхъ предложеній и въ особенности той общей формы, которая была имъ свойственна. Объясненіе поризмъ, данное этимъ геометромъ, слѣдующее.

«Поризма есть предложеніе, въ которомъ высказывается, что нѣкоторыя геометрическія величины могутъ быть опредѣлены и дѣйствительно опредѣляются, если даны ихъ соотношенія съ величинами постоянными и извѣстными, а также съ такими величинами, которыя могутъ быть измѣняемы до безконечности; эти послѣднія величины связываются сверхъ того однимъ или нѣсколькими условіями, опредѣляющими законъ ихъ измѣняемости».

Къ числу поризмъ, предлагаемыхъ Симсономъ въ подтвержденіе этого объясненія, принадлежатъ семь или восемь изъ 29-ти поризмъ Эвклида, переданныхъ Паппомъ. Кромѣ того въ разныхъ мѣстахъ своего сочиненія Симсонъ воспроизводитъ 38-мь леммъ Паппа съ доказательствами часто упрощенными и пополненными.

Идеи Симсона о поризмахъ возбудили большое вниманіе геометровъ и болѣе всего содѣйствовали его ученой извѣстности, хотя нѣкоторые изъ ученыхъ и не вполнѣ соглашались съ его объясненіями. Какъ бы то ни было, несомнѣнно то, что Симсонъ сдѣлалъ рѣшительный и крупный шагъ къ разъясненію знаменитой научно-исторической загадки, которую представляло для новыхъ геометровъ сочиненіе Эвклида о поризмахъ. Болѣе важную услугу оказалъ въ этомъ отношеніи одинъ только Шаль, разрѣшившій эту загадку окончательно.

Вниманіе Шаля было обращено на этотъ вопросъ еще съ самыхъ первыхъ дней его научной дѣятельности. Въ третьемъ примѣчаніи къ «Историческому очерку» онъ говоритъ: «Размышленія объ этомъ предметѣ долгое время занимали насъ исключительно и часто отвлекали отъ занятій, которымъ мы хотѣли себя посвятить; интересъ былъ сильнѣе воли».

Раздѣляя вполнѣ воззрѣнія Симсона, Шаль находитъ, что въ трудѣ его еще очень многаго не достаетъ для того, чтобы загадка могла считаться вполнѣ разрѣшенною. Для этого, по его мнѣнію, необходимо найдти удовлетворительные и точные отвѣты на слѣдующіе вопросы.

1) Какова была форма выраженій поризмъ?

2) Каковы были предложенія, заключавшіяся вообще въ сочиненіи Эвклида, въ особенности же тѣ изъ нихъ, относительно которыхъ Паппъ оставилъ намъ весьма неполныя указанія?

3) Какія намѣренія и философскія соображенія заставили Эвклида изложить это сочиненіе въ совершенно особой формѣ?

4) Почему это сочиненіе заслуживало то особое предпочтеніе, какое даетъ ему Паппъ предъ всѣми другими произведеніями древнихъ?

5) Какіе въ наше время методы и операціи, хотя бы и въ иной формѣ, ближе всего подходятъ къ поризмамъ Эвклида и что нынѣ замѣнило ихъ въ рѣшеніи задачъ?

6) Наконецъ, было бы необходимо объясненіе отдѣльныхъ мѣстъ у Паппа, напримѣръ того мѣста, гдѣ онъ осуждаетъ опредѣленіе, данное поризмамъ позднѣйшими геометрами.

Книга Шаля о поризмахъ Эвклида представляетъ въ своей первой вводной части тщательное изысканіе элементовъ для составленія отвѣтовъ на эти вопросы. Чрезвычайно остроумный синтезъ, употребляемый Шалемъ для созданія изъ этихъ элементовъ стройныхъ и вполнѣ удовлетворительныхъ объясненій, которыя, будучи свѣрены со свидѣтельствами Паппа и другими документами, не оставляютъ никакого сомнѣнія въ справедливости заключеній и строгости метода, дѣлаютъ трудъ Шаля высокимъ образцомъ научно-историческихъ изслѣдованій.

Главною руководящею нитью въ этомъ трудѣ является разысканіе тѣхъ мельчайшихъ признаковъ, которыми различались или въ которыхъ сходствовали предложенія, носившія у древнихъ разныя наименованія. Данныя для этого Шаль усматриваетъ въ самыхъ различныхъ мѣстахъ какъ у древнихъ писателей, такъ и у разныхъ ихъ комментаторовъ и переводчиковъ.

У Паппа, напримѣръ, находится слѣдующее указаніе на положеніе, занимаемое поризмой относительно теоремы и проблемы.

Теорема есть предложеніе, въ которомъ требуется доказать то, что предложено.

Проблема есть предложеніе, въ которомъ требуется построить то, что предложено.

Поризма есть предложеніе, въ которомъ требуется найдти то, что предложено.

Другія указанія Паппа относятся къ соотношенію между поризмами и теоремами о мѣстахъ.

Мѣстомъ называется въ геометріи послѣдовательность точекъ (или другихъ геометрическихъ предметовъ), удовлетворяющихъ общимъ условіямъ, выражаемымъ построеніемъ или соотношеніями между величинами. Слѣдовательно, всякая линія есть мѣсто точекъ. Древніе раздѣляли мѣста на нѣсколько родовъ или классовъ. Такъ, прямую линію и окружность они называли *плоскими мѣстами*, коническія сѣченія — *тѣлесными мѣстами;* нѣкоторыя же линіи высшихъ порядковъ, какъ напримѣръ конхоида, циссоида, квадратрикса, назывались у нихъ *линейными мѣстами*.

Теоремою о геометрическомъ мѣстѣ должна быть, слѣдовательно, такая теорема, въ которой выражается и доказывается какое-либо свойство общее всѣмъ точкамъ (элементамъ) этого мѣста. Паппъ говоритъ, что геометрическія мѣста суть частные виды поризмъ и что по опредѣленію позднѣйшихъ греческихъ геометровъ то, что составляетъ поризму, недостаетъ въ гипотезѣ теоремы о мѣстѣ.

Изъ произведеній Эвклида до насъ дошла вполнѣ книга, носящая названіе «Данныя». Слово *данное* имѣло у геометровъ древности особое значеніе и означало, можно сказать, то же самое, что мы теперь выражаемъ словами *нѣкоторое-опредѣленное*. Предложенія, находящіяся въ названной сейчасъ книгѣ Эвклида, выражаютъ, что если будутъ извѣстны и опредѣлены (даны) нѣкоторые геометрическіе предметы, то чрезъ нихъ будутъ таковыми же и нѣкоторые другіе. Нужно думать, что книга эта составляла непосредственное продолженіе элементовъ и служила также пособіемъ для рѣшенія задачъ.

Сопоставляя всѣ эти дошедшія до насъ свѣдѣнія и множество другихъ, которыми обладалъ Шаль, благодаря его громадной исторической эрудиціи, онъ пришелъ къ заключенію, что поризмы были тѣмъ же по отношенію къ теоремамъ о мѣстахъ, чѣмъ данныя по отношенію къ обыкновеннымъ теоремамъ элементовъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ поризмахъ говорилось не объ одномъ или нѣсколькихъ предметахъ, а о безконечномъ множествѣ предметовъ, подчиненныхъ общему условію, или, что все то-же, о предметахъ перемѣнныхъ; да сверхъ того то, что говорилось о нихъ, состояло главнымъ образомъ лишь въ констатированіи возможности опредѣлять одни перемѣнные предметы или свойства по другимъ. Цѣль поризмъ, по мнѣнію Шаля, состояла въ замѣнѣ одного выраженія (или опредѣленія) геометрическаго мѣста другимъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что отличительный характеръ поризмъ состоялъ въ наибольшей степени общности, каковою не обладалъ ни одинъ изъ другихъ видовъ предложеній древности. Можно даже сказать, что общность этихъ предложеній ни въ чемъ не уступаетъ той общности, которую до послѣдняго времени было принято считать присущею исключительно пріемамъ аналитическимъ. Шаль даже прямо говоритъ, что ученіе о поризмахъ было нѣкоторымъ образомъ аналитическою геометріей древнихъ и если-бы оно дошло до насъ, то мы можетъ быть усмотрѣли бы въ немъ зачатки Декартова метода[1].

Что касается вопроса, какіе изъ современныхъ намъ научныхъ пріемовъ и геометрическихъ методовъ ближе всего подходятъ къ

[1] См. «Aperçu historique», 2-e éd., 1875, p. 276.

поризмамъ Эвклида по своему содержанію и значенію для науки вообще, то Шаль твердо держится мнѣнія, что это суть пріемы новѣйшей или проективной геометріи. Понятіе о сложномъ отношеніи и гомографическомъ соотвѣтствіи, положенныя, какъ мы видѣли, Шалемъ въ основаніе его «Высшей геометріи», играютъ преобладающую роль и въ поризмахъ Эвклида, какъ это видно по тѣмъ ихъ образчикамъ, которые даетъ Паппъ. А изъ 38-ми леммъ Паппа нѣкоторыя суть не что иное, какъ различныя выраженія свойства ангармоническаго отношенія не мѣнять своего значенія въ перспективѣ; другія же суть слѣдствія этого свойства.

Главное отличіе ученія о поризмахъ отъ современной намъ проективной геометріи заключается, по всей вѣроятности, въ томъ, что въ поризмахъ тѣ же самые принципы являются не въ столь явной и очищенной, такъ сказать, формѣ, а скрыты въ пріемахъ и построеніяхъ, свойственныхъ по преимуществу геометріи элементарной.

Сочиненіе Эвклида о поризмахъ состояло, по свидѣтельству Паппа, изъ трехъ книгъ, изъ которыхъ въ первыхъ двухъ рѣчь идетъ только о прямыхъ линіяхъ, а въ третьей говорится также и о кругѣ. Эти три книги Шаль возстановилъ вполнѣ и изложеніе ихъ въ стилѣ древнихъ геометровъ составляетъ вторую и главную часть его трактата «Les trois livres de Porismes d'Euclide». Конечно, нельзя быть увѣреннымъ, что это изложеніе можетъ оказаться болѣе или менѣе точнымъ переводомъ оригинала, если бы онъ отыскался, но тѣмъ не менѣе, сообразивъ всѣ доводы Шаля, слѣдуетъ признать, что различіе между утраченнымъ классическимъ оригиналомъ и его возсозданіемъ не можетъ быть въ существенномъ.

Въ началѣ шестидесятыхъ годовъ Шаль представилъ академіи рядъ сообщеній, относящихся къ ученію о линіяхъ двоякой кривизны. На первомъ планѣ здѣсь стоятъ, конечно, линіи 3-го порядка, занимающія среди линій въ пространствѣ, по своей простотѣ, столь же важное мѣсто, какъ коническія сѣченія среди линій плоскихъ. Извѣстно даже, что многія свойства двояко-кривыхъ линій 3-го порядка находятся въ полнѣйшей аналогіи со свойствами коническихъ сѣченій. Этимъ предметомъ Шаль занимался также очень давно и о названныхъ сейчасъ свойствахъ линій 3-го порядка говорится еще въ его «Историческомъ очеркѣ», гдѣ этимъ линіямъ посвящено особое примѣчаніе [1]. Въ изслѣдованіяхъ, публикованныхъ въ шестидесятыхъ годахъ, особенно важное значеніе для науки представляетъ общій пріемъ для изученія двояко кривыхъ линій, состоящій главнымъ образомъ въ разсмотрѣніи этихъ линій какъ помѣщающихся по поверхностяхъ линейчатыхъ, т. е. описываемыхъ движеніемъ прямой. Пріемъ этотъ представляетъ нѣкоторую аналогію или, вѣрнѣе, обобщеніе декартовыхъ координатъ на плоскости.

Время и преклонные годы не уменьшали ни энергіи, ни научной изобрѣтательности Шаля; въ теченіе 1864 года, будучи 70-ти лѣтъ отъ роду, онъ сообщилъ академіи рядъ своихъ изслѣдованій, положившихъ основаніе цѣлой отрасли геометріи. Однихъ этихъ изслѣдованій было бы достаточно для того, чтобы обезсмертить имя Шаля въ наукѣ. Въ нихъ онъ не имѣлъ себѣ предшественниковъ и блестящее изобрѣтеніе его отличается полнѣйшею оригинальностью. Это изобрѣтеніе есть его *теорія характеристикъ*, за которую лондонское королевское общество присудило ему медаль Коплея, — самое высшее отличіе, какое дается этою знаменитою ученою коллегіей за наиболѣе полезныя практическія и научныя изобрѣтенія.

Вотъ въ общихъ чертахъ главная цѣль и содержаніе этого ученія.

Всякая геометрическая линія на плоскости можетъ быть вполнѣ опредѣлена тѣми или другими геометрическими данными или условіями. Если эти данныя состоятъ изъ достаточнаго числа то-

---

[1] «Aperçu historique» 2-e ed. Paris, 1875, p. 403—407.

чекъ, чрезъ которыя линія должна проходить, то, какъ извѣстно, эта опредѣляемая линія будетъ единственною. Но при другихъ данныхъ или условіяхъ можетъ существовать нѣсколько вполнѣ ими опредѣляемыхъ линій. Иначе говоря, вопросъ объ опредѣленіи искомой линіи по этимъ даннымъ можетъ имѣть нѣсколько рѣшеній. Такъ, напримѣръ, извѣстно, что пятью точками опредѣляется единственное проходящее чрезъ нихъ коническое сѣченіе. Но коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ четыре точки и касающихся одной данной прямой, должно быть, вообще говоря, два.

Такимъ образомъ естественно возникаетъ вопросъ о числѣ кривыхъ линій, удовлетворяющихъ тѣмъ или другимъ условіямъ, посредствомъ которыхъ онѣ опредѣляются вполнѣ.

Въ аналитической геометріи опредѣленіе этого числа находится въ тѣсной связи съ составленіемъ самаго уравненія, выражающаго кривую относительно какой-либо системы координатъ. При составленіи же этого уравненія приходится въ большинствѣ случаевъ встрѣчаться съ большими трудностями, состоящими въ чрезвычайно сложныхъ алгебраическихъ преобразованіяхъ.

Дѣйствительно, чтобы получить уравненіе кривой, опредѣляемой геометрическими условіями, нужно прежде всего облечь эти условія въ алгебраическую форму и затѣмъ посредствомъ послѣдовательныхъ исключеній вспомогательныхъ величинъ вывести изъ этихъ алгебраическихъ соотношеній связь между коеффиціентами искомаго уравненія и данными задачи. Но какъ та, такъ и другая изъ этихъ операцій требуетъ для каждаго частнаго случая особыхъ усилій ума, и выполнима съ небольшою затратою времени лишь для немногихъ вопросовъ весьма частнаго характера.

Методъ характеристикъ Шаля позволяетъ опредѣлять число искомыхъ кривыхъ линій, обходя всѣ эти трудности, такъ-какъ при употребленіи его уравненія линій не играютъ никакой роли и потому оказывается совершенно ненужнымъ ни облекать условія въ алгебраическую форму, ни производить какія-либо исключенія. Основывается этотъ методъ лишь на немногихъ простыхъ принципахъ, и потому примѣненіе его весьма однообразно и не можетъ представлять большихъ затрудненій.

Прежде чѣмъ указывать на эти принципы замѣтимъ, что существенную важность большинства научныхъ открытій, представляющихъ крупныя пріобрѣтенія на пути научнаго прогресса, составляетъ не столько созданіе новыхъ искусственныхъ орудій изслѣдованія, сколько устраненіе тѣхъ частностей и аксессуаровъ обсуждаемаго предмета, отъ которыхъ обыкновенному уму весьма трудно отдѣлиться или вслѣдствіе укоренившейся привычки и традицій, или по естественной для всѣхъ склонности ухищряться прежде всего въ употребленіи средствъ, находящихся непосредственно подъ руками. Въ этомъ смыслѣ главную важность такого, напримѣръ, изобрѣтенія какъ аналитическая геометрія, слѣдуетъ, намъ кажется, видѣть не столько въ самомъ употребленіи координатъ, которыя въ рукахъ опытнаго геометра почти для всякаго болѣе или менѣе труднаго вопроса должны быть особыя, сколько въ отвлеченіи мысли отъ тѣхъ частностей построенія, съ которыми неразрывно связанъ строгій методъ древнихъ.

Но, отвлекаясь отъ частностей построенія, аналитическая геометрія создала новые конкретные образы — уравненія. Изучать линіи на основаніи ихъ уравненій сдѣлалось такою вкоренившеюся привычкою геометровъ аналистовъ, что можно утверждать съ большою смѣлостью, что для многихъ стало невозможнымъ даже мыслить о линіи и ея свойствахъ, не представляя себѣ ея уравненія. Лишь въ сравнительно недавнее время Бобилье и Плюкеръ введеніемъ такъ называемаго сокращеннаго метода расширили кругозоръ изслѣдователей и первые подали примѣръ разсмотрѣнія уравненій съ общей точки зрѣнія независимо отъ частныхъ видовъ алгебраическихъ формъ, изъ которыхъ они составлены.

Шалю принадлежитъ болѣе важный шагъ на пути дальнѣйшихъ плодотворныхъ отвлеченій. Въ вопросахъ геометрическихъ, въ которыхъ требуемый отвѣтъ долженъ выражаться числомъ и которые въ совокупности составляютъ отдѣльное ученіе, называемое теперь *числовою геометріей*, онъ далъ возможность совершенно устранить изъ разсужденій уравненія и разсуждать только надъ числовыми характеристиками, т. е. надъ числами, которыя имѣютъ непосредственное значеніе для опредѣленія системъ кривыхъ линій или условій и которыхъ оказывается вполнѣ достаточно, помимо всякихъ другихъ аналитико-геометрическихъ символовъ, для нахожденія чиселъ, представляющихъ искомыя рѣшенія.

Въ основаніи метода характеристикъ положенъ между прочимъ упомянутый выше *принципъ соотвѣтствія*. Онъ выражается двумя предложеніями, изъ которыхъ слѣдующее есть первое и главное.

Если на прямой линіи мы имѣемъ два ряда точекъ, связанныхъ между собою такъ, что каждой точкѣ перваго ряда соотвѣтствуетъ m точекъ втораго, а каждой точкѣ втораго n точекъ перваго, то число точекъ на прямой, изъ которыхъ каждая, будучи разсматриваема какъ принадлежащая тому или другому ряду, имѣетъ въ числѣ ей соотвѣтствующихъ точекъ одну съ нею совпадающую, равняется $m+n$.

Предложеніе это остается вѣрнымъ не только тогда, когда ряды точекъ разсматриваются на прямой, но также и тогда, когда прямая замѣнена такъ называемою раціональною или уникурсальною кривою. Для кривыхъ же не раціональныхъ онъ долженъ быть нѣсколько измѣненъ или, вѣрнѣе, обобщенъ, и это обобщеніе сдѣлано было позднѣе другими геометрами.

Извѣстно, что коническія сѣченія, проходящія чрезъ четыре общія точки, представляютъ систему линій, число которыхъ есть простая безконечность, т. е. безконечно большое число того же порядка какъ число точекъ на прямой. Подобныя системы линій, и притомъ линій какого угодно порядка, могутъ быть до безконечности разнообразны. Достаточно сказать, что если въ уравненіи какой либо линіи относительно какой нибудь системы координатъ входитъ кромѣ перемѣнныхъ координатъ еще одна неопредѣленная величина, то, давая ей различныя значенія, мы будемъ имѣть вмѣсто одной линіи цѣлую систему ихъ указаннаго сейчасъ характера.

Для разрѣшенія различныхъ числовыхъ вопросовъ, относящихся къ такой системѣ, имѣютъ особенно важное значеніе, какъ убѣждаетъ насъ Шаль, слѣдующія два числа: 1) число линій, принадлежащихъ системѣ и проходящихъ въ то же время чрезъ одну произвольно взятую точку, и 2) число линій, принадлежащихъ системѣ и касающихся въ то же время одной произвольной прямой. Числа эти Шаль обозначаетъ чрезъ μ и ν и называетъ *характеристиками системы*. Знанія этихъ двухъ чиселъ вполнѣ достаточно, чтобы, пользуясь принципомъ соотвѣтствія, обнаруживать множество свойствъ, принадлежащихъ системѣ.

Въ первыхъ своихъ мемуарахъ, посвященныхъ ученію о характеристикахъ, Шаль разсматриваетъ только системы коническихъ сѣченій.

Каждое коническое сѣченіе опредѣляется пятью простыми условіями, такъ напримѣръ пятью точками, или пятью касательными, или четырьмя точками и одною касательною и т. д. Такія условія для кривой какъ проходить черезъ данную точку или касаться данной прямой называются элементарными; но кромѣ ихъ можетъ быть множество другихъ условій, въ такой же степени опредѣляющихъ линію и потому называющихся также простыми. Таково, напримѣръ, условіе, чтобы коническое сѣченіе касалось не прямой, а кривой линіи того или другаго порядка.

Каждое такое условіе характеризуется также двумя числами, которыя Шаль обозначаетъ чрезъ α и β и называетъ *характеристиками условія*.

Если обозначимъ чрезъ Z какое нибудь простое условіе и положимъ, что p есть число коническихъ сѣченій, удовлетворяющихъ условію Z и проходящихъ черезъ четыре точки, а q — число коническихъ сѣченій, удовлетворяющихъ тому же условію и касающихся четырехъ прямыхъ, то характеристики α и β условія Z опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \frac{2q - p}{3}, \quad \beta = \frac{2p - q}{3}.$$

Въ теоріи характеристикъ особенно важное значеніе принадлежитъ слѣдующему предложенію.

Число линій, принадлежащихъ системѣ, которой характеристики суть μ и ν, и подчиненныхъ сверхъ того условію, котораго характеристики суть α и β, всегда равняется $\alpha\mu + \beta\nu$.

Мы не можемъ приводить здѣсь ни того множества любопытныхъ и простыхъ примѣровъ, которыми это предложеніе подтверждается, ни тѣхъ обильныхъ и важныхъ послѣдствій, которыя изъ него проистекаютъ. Скажемъ только, что, основываясь на этомъ предложеніи, Шаль даетъ весьма остроумный и изящный пріемъ для опредѣленія числа коническихъ сѣченій, подчиненныхъ какимъ бы то ни было пяти простымъ условіямъ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, которыхъ характеристики суть послѣдовательно α_1, β_1, α_2, β_2 и т. д. Пріемъ этотъ состоитъ въ послѣдовательномъ замѣщеніи элементарныхъ условій условіями данными. Помощію его находится, напримѣръ, что число коническихъ сѣченій, касающихся одновременно пяти даннымъ коническимъ сѣченіямъ, есть 3264.

Изъ сказаннаго видно, что подъ простыми условіями нужно понимать такія, которыхъ необходимо и достаточно пять, чтобы опредѣлить вполнѣ коническое сѣченіе. Но могутъ существовать еще условія сложныя, т. е. такія, которыя, по отношенію къ опредѣленію коническихъ сѣченій, слѣдуетъ считать равнозначущими съ двумя, тремя и вообще нѣсколькими простыми условіями. Такъ напримѣръ условіе, чтобы коническое сѣченіе касалось данной кривой въ двухъ неопредѣленныхъ точкахъ, есть двойное; условіе, чтобы оно имѣло съ данной кривой соприкосновеніе третьяго порядка въ неопредѣленной же точкѣ, есть тройное, и т. п. Нахожденіе числа коническихъ сѣченій или характеристикъ системъ въ случаяхъ, когда въ число данныхъ, ихъ опредѣляющихъ, входятъ такія сложныя условія, достигается безъ труда при помощи того же метода Шаля.

Система коническихъ сѣченій, которой характеристики суть μ и ν, можетъ включать въ себѣ особые частные виды этихъ кривыхъ, которые Шаль называетъ *исключительными* (coniques exceptionnelles, quasi-coniques). Это суть: 1) совокупность двухъ совпадающихъ прямыхъ, и 2) совокупность двухъ совпадающихъ точекъ. Между числами этихъ исключительныхъ кривыхъ и характеристиками системы существуютъ, какъ показалъ Шаль, простыя линейныя соотношенія. Именно, если назовемъ числа исключительныхъ коническихъ сѣченій послѣдовательно черезъ a и b, то будемъ имѣть

$$a = 2\nu - \mu, \quad b = 2\mu - \nu$$

откуда

$$a + b = \mu + \nu.$$

Такимъ образомъ видно, что каждая изъ двухъ характеристикъ системы менѣе удвоенной другой и болѣе ея половины, и что сумма обѣихъ характеристикъ равняется числу всѣхъ исключительныхъ коническихъ сѣченій.

Вскорѣ послѣ первыхъ примѣненій своего новаго метода къ ученію о системахъ коническихъ сѣченій на плоскости Шаль распространилъ его на поверхности втораго порядка и коническія сѣченія въ пространствѣ, а затѣмъ и на линіи какого бы ни было высшаго порядка.

Мы уже высказали выше наше мнѣніе о важности метода характеристикъ. Считаемъ не лишнимъ привести еще въ подтвержденіе этого мнѣнія заключеніе президента лондонскаго королевскаго общества въ его отзывѣ о достоинствахъ изобрѣтенія Шаля. «Принимая во вниманіе, говоритъ онъ, какое обширное и совершенно новое поле для изслѣдованій открываетъ ученіе о характеристикахъ, мы думаемъ, что эта новая теорія, какъ особый методъ чистой геометріи, ни въ чемъ не уступаетъ всѣмъ другимъ изобрѣтеніямъ нашего вѣка».

Поле изслѣдованій оказалось не только обширнымъ, но и весьма плодовитымъ. Кэлей, Цейтенъ, Кремона, Клебшъ и многіе другіе геометры развили и дополнили научные выводы Шаля и въ результатѣ получился цѣлый отдѣлъ геометріи, въ которомъ еще многіе ученые могутъ находить матеріалъ для своихъ трудовъ какъ въ смыслѣ систематизаціи и уясненія уже пріобрѣтеннаго, такъ и въ смыслѣ новыхъ открытій или усовершенствованій.

Справедливость требуетъ упомянуть, что одновременно съ Шалемъ вопросами о системахъ геометрическихъ линій занимался еще Жонкьеръ, которому также принадлежитъ извѣстная доля участія въ установкѣ и развитіи новаго ученія. Нѣкоторая разность взглядовъ была причиной возникшей между обоими геометрами полемики, которая продолжалась въ 1866 и 1867 годахъ.

Въ связи съ изслѣдованіями о системахъ линій находятся сообщенія Шаля академіи (въ 1866 г.) о такъ называемыхъ раціональныхъ кривыхъ. Вопросами о этихъ линіяхъ занимались въ различныя эпохи тоже очень многіе ученые и Шаль съ своей стороны внесъ въ эту область нѣсколько свѣтлихъ и изящно выраженныхъ мыслей.

Въ концѣ шестидесятыхъ годовъ Шаль потерпѣлъ одну неудачу на поприщѣ научно-историческихъ изслѣдованій. Какой-то шарлатанъ продалъ ему за очень дорогую цѣну нѣсколько документовъ, доказывавшихъ, что первенство изобрѣтенія дифференціальнаго исчисленія должно быть всецѣло приписано не Ньютону, а Паскалю. Документы эти, состоявшіе главнымъ образомъ изъ писемъ Паскаля, оказались подложными. Эта мистификація была, однако, устроена такъ искусно, что Шаль, увлеченный важностью открытія и возможностью укрѣпить за французскою національностію честь великаго изобрѣтенія Ньютона, занималъ этимъ предметомъ вниманіе академіи въ теченіе всего 1869 года. Искренность этого увлеченія не могла подлежать ни малѣйшему сомнѣнію, такъ-какъ по обнаруженіи подлога Шаль сознавался въ своей ошибкѣ съ полной откровенностью и чистосердечіемъ, соотвѣтствующими вполнѣ его свѣтлому правдивому характеру, для котораго торжество истины и слава любимаго отечества были дороже всего.

Послѣднимъ большимъ трудомъ Шаля по исторіи геометріи была книга, напечатанная въ 1870 году подъ заглавіемъ: «Rapport sur les progrès de la Géométrie en France». Сочиненіе это было написано по слѣдующему поводу.

Министерство народнаго просвѣщенія, въ видахъ содѣйствія процвѣтанію наукъ во Франціи, предложило различнымъ извѣстнымъ ученымъ представить отчеты о состояніи и новѣйшихъ успѣхахъ въ государствѣ тѣхъ наукъ, которыхъ они были представителями. На долю Шаля пришлась геометрія. Онъ взялся за это дѣло съ обычною своею энергіей, и результатомъ его усерднаго и продолжительнаго труда получился большой томъ, содержащій обзоръ научнаго движенія почти за все настоящее столѣтіе. Въ нѣкоторомъ отношеніи эту книгу можно считать продолженіемъ «Историческаго очерка»; но по характеру изложенія между обѣими книгами есть существенное различіе. Такъ какъ въ «Rapport sur les progrès» приходилось вести рѣчь большею частію о новыхъ научныхъ теоріяхъ, развитіе которыхъ еще не могло считаться законченнымъ, и о авторахъ еще живущихъ и продолжающихъ свои изслѣдованія, то Шаль ограничивался здѣсь по возможности сжатою и строго объективною передачею содержанія произведеній каждаго автора, рѣшаясь дѣлать сближенія и сопоставленія лишь тѣхъ произведеній, которыя относились къ одному предмету и находились въ тѣсной между собою связи какъ отдѣльные вклады въ одно общее научное теченіе. Такое воздержаніе отъ научной критики тѣмъ болѣе было необходимо, что Шаль, какъ наиболѣе выдающійся дѣятель на геометрическомъ поприщѣ за цѣлую половину столѣтія, по необходимости долженъ былъ удѣлить значительную часть книги отчету о своихъ собственныхъ трудахъ.

Книга раздѣлена на пять главъ. Начавъ съ указанія на труды Монжа и Карно, какъ положившіе начало новаго направленія въ геометріи, Шаль разсматриваетъ въ первой главѣ труды ихъ ближайшихъ послѣдователей (1800 — 1830) и обнаруживаетъ передъ читателемъ съ достаточною ясностью, какое участіе принадлежитъ каждому въ общемъ прогрессѣ наукъ. Намъ кажется только, что при этомъ сравнительно мало сказано и о геометрическихъ заслугахъ Понселе, уже закончившаго къ тому времени свою дѣятельность и имѣющаго неоспоримое право на первенствующее мѣсто среди ученыхъ, создавшихъ новую или проективную геометрію.

Вторая глава представляетъ отчетъ объ «Историческомъ очеркѣ» Шаля и о другихъ его трудахъ, ближайшихъ по времени и содержанію къ этому сочиненію.

Третья глава обозрѣваетъ произведенія различныхъ геометровъ за періодъ времени отъ 1830 по 1850 годъ.

Четвертая глава начинается съ того времени, когда открыта была въ парижскомъ факультетѣ каѳедра высшей геометріи, и содержитъ описаніе какъ произведеній, относящихся къ преподаванію этого предмета, такъ и другихъ позднѣйшихъ трудовъ Шаля и его сообщеній академіи до 1868 года.

Пятая глава относится къ тому же періоду времени, какъ и предыдущая, но посвящена обзору трудовъ другихъ геометровъ.

Въ общемъ книга Шаля представляетъ драгоцѣнный сборникъ матеріала для исторіи новыхъ геометрическихъ ученій и, для всѣхъ геометровъ, интересующихся новыми научными успѣхами, можетъ служить превосходною справочною книгой и руководствомъ для правильнаго установленія связи между тѣмъ, что новыя усилія ученыхъ могутъ намъ открыть, и тѣмъ, что уже принадлежитъ наукѣ.

Въ послѣднее десятилѣтіе своей жизни неутомимый труженикъ продолжалъ разрабатывать свое ученіе о характеристикахъ, примѣняя этотъ методъ къ самымъ разнообразнымъ геометрическимъ вопросамъ и обнаруживая новые законы, которымъ подчиняются числовыя соотношенія, имѣющія мѣсто при разсмотрѣніи системъ различныхъ геометрическихъ предметовъ.

Обиліе сообщеній, сдѣланныхъ Шалемъ академіи изъ этой области, поразительно. Цѣлыя серіи новыхъ вопросовъ возбуждаются этими сообщеніями; цѣлыми сотнями предлагаются въ нихъ новыя любопытныя теоремы.

Мы считаемъ себя не въ правѣ входить въ нашемъ краткомъ очеркѣ въ разсмотрѣніе этихъ сложныхъ и трудныхъ изслѣдованій и думаемъ, что сказаннаго вполнѣ достаточно, чтобы дать читателю общее понятіе о научной дѣятельности великаго геометра.

Интеллектуальная жизнь знаменитыхъ ученыхъ продолжается еще долго послѣ ихъ смерти. Шаля живущаго и говорящаго не стало, но Шаль мыслящій и научающій еще долго останется съ нами. Новыя научныя идеи, даже сравнительно простыя, рѣдко слагаются въ умахъ учениковъ въ совершенно такой же формѣ и съ такимъ же предвидѣніемъ ихъ послѣдствій какъ въ умахъ геніальныхъ изобрѣтателей и учителей. Еще долго сказанное Шалемъ будетъ усваиваться все болѣе и болѣе; еще долго мы будемъ жить мысленно въ его сообществѣ, возбуждаемые и питаемые его свѣжими плодотворными научными идеями.

Намъ неизвѣстно пока подробностей относительно частной жизни Шаля. По всей вѣроятности, его товарищи и друзья дадутъ впослѣдствіи, въ своихъ воспоминаніяхъ о столь полезномъ для потомства дѣятелѣ, нѣкоторыя указанія на связь между его научною трудовою жизнью и его домашнимъ міромъ. Теперь же можно только сказать, судя по тѣмъ рѣчамъ и замѣткамъ, которыя уже посвящены его памяти, что научная дѣятельность поглощала почти все внутреннее существо Шаля. Онъ никогда не былъ женатъ и не имѣлъ семьи въ тѣсномъ смыслѣ этого слова. Но за-то онъ былъ самымъ нѣжнымъ, самымъ преданнымъ и самымъ полезнымъ семьяниномъ въ кругу людей, связанныхъ узами родства нравственнаго, въ семьѣ своихъ товарищей по наукѣ. Воспоминанія о томъ, какъ онъ любилъ собирать эту семью около своего домашняго стола, приходится читать и слышать изъ весьма многихъ источниковъ.

Впрочемъ гостепріимство Шаля было такою особенностью его характера, которая хорошо была извѣстна далеко не однимъ его ближайшимъ товарищамъ по наукѣ. Готовность его идти навстрѣчу всякому, хотя бы только возможному, научному успѣху была такъ велика, что двери его дома любезно отворялись передъ всѣми, кто желалъ найдти въ его бесѣдѣ руководительство или поощреніе или просто являлся, чтобы засвидѣтельствовать великому геометру свое удивленіе предъ его учеными трудами.

При этомъ не полагалось различія между соотечественниками и иностранцами. Къ послѣднимъ Шаль былъ особенно внимателенъ, какъ къ заѣзжимъ гостямъ, и принималъ у себя, говоритъ

Дарбу, съ одинаковою любезностью и сердечностью какъ знаменитаго ученаго, который прiѣзжалъ во Францiю, предшествуемый давно заслуженною славою, такъ и скромнаго молодаго труженика, являвшагося въ Парижъ, чтобы пополнить свое научное образованiе. Въ этомъ послѣднемъ положенiи намъ лично привелось быть у Шаля за нѣсколько лѣтъ до его смерти и испытать на себѣ справедливость свидѣтельствъ о сердечности и любезной обходительности маститаго ученаго.

Упоминаютъ особенно часто еще объ одномъ высокомъ нравственномъ качествѣ Шаля, въ силу котораго онъ являлся горячимъ семьяниномъ, можно даже сказать — отцемъ, въ кругу несравненно болѣе обширномъ, чѣмъ кругъ дѣятелей науки. Это качество — страсть къ благотворительности; этотъ кругъ — всѣ нуждающiеся въ какой либо помощи или поддержкѣ.

Дюма въ своей рѣчи, сказанной надъ гробомъ Шаля отъ имени благотворительнаго общества друзей науки, выражается между прочимъ слѣдующимъ образомъ: « Шаль былъ замѣчателенъ своимъ добрымъ сердцемъ не менѣе чѣмъ своею научною генiальностью. Ученые, которыхъ преклонный возрастъ или болѣзни сдѣлали неспособными къ труду, безпомощныя семейства тѣхъ изъ нихъ, которые были похищены преждевременною смертью, теряютъ въ лицѣ Шаля наиболѣе сочувствующаго свидѣтеля ихъ бѣдствiй, защитника наиболѣе проникнутаго желанiемъ облегчить ихъ положенiе, благодѣтеля наиболѣе готоваго подать имъ руку помощи ». И эта готовность распространялась не на однихъ только постигнутыхъ несчастiемъ ученыхъ. Всякiй, кто искалъ помощи, легко могъ встрѣтить на своемъ пути Шаля; только шедшiй благодарить его не имѣлъ столь же быстраго успѣха.
