Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***магістр***

на тему ***«Солітони в задачі розрідження для ланцюжка Тоди»***

Виконав: студент групи М161 VI курсу (другий магістерський рівень), спеціальності 111 "Математика" освітньо-наукової програми "Математика"
Кутецький В.Я.

Керівник: доктор фіз.-математ. наук, провідний науковий співробітник ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України
Єгорова І.Є.

Рецензент: доктор фіз.-математ. наук, член-кореспондент НАН України, зав. відділом ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України, професор
Шепельский Д.Г.

Харків — 2024 рік

Анотації

Кутецький В.Я. Солітони в задачі розрідження для ланцюжка Тоди.

Ми вивчаємо асимптотичну поведінку розв'язків задачі Коші для ланцюжка Тоди із початковими умовами типу сходики, що швидко спадають на правій півосі і є асимптотично двозонними на лівій. Взаємне положення спекрів фонових операторів відповідає задачі розрідження. Застосований метод задачі Рімана-Гільберта для отримання асимптотики розв'язків в лівій солітонній зоні, тобто досліджені солітони на скінченнозонному фоні.

Kutetskyi.V.Ya. Solitons in the Toda Rarefaction Problem.

We study the long-time asymptotics for the solution of the initial-value problem for the Toda lattice with steplike initial data. These data are fast decaying on the right half axis and are asymptotically two-band on the left one. The mutual location of the background spectra is associated with the Toda Rarefaction problem. We apply the Riemann-Hilbert problem approach for deriving asymptotics for the solution in the left soliton region, i.e. we study solitons on the finite gap background.

Зміст

Розділ 1

Вступ. Постановка задачі

1.1. Ланцюжок Тоди як інтегровне нелінійне рівняння

Рівняння ланцюжка Тоди - це математична модель, що описує розповсюдження хвиль в ланцюгу часток, у якому взаємодіють лише сусідні. У змінних $p(n,t)$ та $q(n,t)$, де $p(n,t)$ – швидкість n-ї частки, а $q(n,t)$ – координата n-ї частки, диференціальні рівняння руху виглядають наступним чином:

$$\begin{aligned} &\dot{p}(n,t) = e^{-(q(n,t)-q(n+1,t))} - e^{-(q(n+1,t)-q(n,t))}, \\ &\dot{q}(n,t) = p(n,t). \end{aligned} \qquad (n,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Тут

$$\dot{q}(n,t) = \frac{d}{dt} q(n,t), \quad \dot{p}(n,t) = \frac{d}{dt} p(n,t).$$

Для ланцюжка Тоди традиційно використовують так звані змінні Флашки:

$$a(n,t) = \frac{1}{2} e^{-(q(n+1,t)-q(n,t))/2}, \quad b(n,t) = -\frac{1}{2} p(n,t).$$

У цих змінних рівняння (1.1) набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{b}(n,t) = 2(a(n,t)^2 - a(n-1,t)^2), \\ &\dot{a}(n,t) = a(n,t)(b(n+1,t) - b(n,t)), \end{aligned} \qquad (n,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Ця система диференційно - різніцевих рівнянь є цілком інтегровною, тобто вона є еквівалентною рівнянню Лакса

$$\dot{H}(t) = A(t)H(t) - H(t)A(t), \tag{1.3}$$

де

$$\begin{aligned} H(t) : l^2(\mathbb{Z}) &\to l^2(\mathbb{Z}), \\ y(n) &\mapsto a(n,t)y(n+1) + b(n,t)y(n) + a(n-1,t)y(n-1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

це оператор Якобі, а

$$\begin{aligned} A(t) : l^2(\mathbb{Z}) &\to l^2(\mathbb{Z}), \\ y(n) &\mapsto a(n,t)y(n+1) - a(n-1,t)y(n-1), \end{aligned} \tag{1.5}$$

є кососиметричним різницевим оператором. Відмітимо (див. [2], [19]), що існування пари Лакса тягне за собою незалежність спектра оператора Якобі $H(t)$ від часу.

Наявність пари Лакса дозволяє використовувати так званий метод оберненої задачі розсіювання (див. [2]) для інтегрування ланцюжка Тоди в різних класах функцій, тобто для розв'язання асоційованих задач Коші з різними фізично важливими видами дійснозначних початкових умов

$$\{a(n,0),\ b(n,0)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad A \geq a(n,0) \geq a > 0, \quad -b \leq b(n,0) \leq b. \tag{1.6}$$

Відомо ([1, Теорема 12.6]), що для будь яких умов виду (1.6) існує єдиний глобальний розв'язок $\{a(n,t),\ b(n,t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ рівняння (1.2) що є обмеженим тими ж константами, що і початкові умови. Але метод оберненої задачі розсіювання, який буде описано у наступному параграфі, дозволяє контролювати поведінку розв'язка за фіксованим часом, коли просторова змінна прямує до нескінченності. Наприклад, тривіальним випадком початкових умов є випадок сталих коефіцієнтів $a(n,0) = a$ та $b(n,0) = b$. Відповідний єдиний розв'язок задачі Коші для ланцюжка Тоди теж є сталим $a(n,t) = a$ та $b(n,t) = b$. При $a = 1/2$ та $b = 0$ асоційований оператор Якобі з пари Лакса - це незбурений (вільний) дискретний Лапласіан:

$$\tilde{H}(t): \quad y(\lambda,n,t) \mapsto \frac{1}{2}y(\lambda,n-1,t) + \frac{1}{2}y(\lambda,n+1,t). \tag{1.7}$$

Швидкоспадні початкові умови є у компактним збуренням вільного Лапласіану у наступному сенсі:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|(|a(n,0) - \frac{1}{2}| + |b(n,0)|) < \infty, \tag{1.8}$$

Як було встановлено за допомогою метода оберненої задачі розсіювання у [1], [2], [20], [21], відповідний розв'язок задачі Коші спадає до свого фонового розв'язку (у даному випадку - до вільного Лапласіану) прі кожному значенні часу з тією ж швидкістю, що й початкові умови:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|(|a(n,t) - \frac{1}{2}| + |b(n,t)|) < \infty.$$

Наступним класом початкових умов для ланцюжка Тоди, що було проінтегровано методом оберненої задачі розсіювання є N- періодичні (і більш загально - скінченнозонні) початкові умови:

$$a(n,0) = a(n+N,0) = \hat{a}(n), \quad b(n,0) = b(n+N,0) = \hat{b}(n). \tag{1.9}$$

Єдиний розв'язок $\{\hat{a}(n,t), \hat{b}(n,t)\}$ відповідної задачі Коші є періодичним (скінченнозонним), і він асоціюється із оператором Якобі, ізоспектральним до початкового.

Як відомо, періодичний самоспряжений оператор Якобі має неперервний спектр, що складається з не більш ніж N неперетинних зон на дійсній вісі, розділених лакунами. Періодичні оператори, що мають один і той же неперервний спектр, є ізоспектральними. Обрати одного представника даного класу можна, якщо додати деякі додаткові спектральні дані, що характеризують його однозначно. Це власні значення звужень операторів Якобі з коефіцієнтами (1.9) на $\mathbb{Z}_\pm$ із умовами Діріхле на кінцях. Такі точки лежать по однієї у кожній лакуні, і кожній із них приписується знак тієї півосі, для якої вона є точкою дискретного спектра. Ця система точок і знаків має назву додаткового спектра Діріхлє. Насправді вони є полюсами відповідних функцій Вейля. Неперервний спектр періодичної задачі не може буті довільною системою N інтервалів, він задовольняє досить строгим геометричним обмеженням. Якщо ж розглянути довільну обмежену систему неперетинних інтервалів - зон, і обрати по довільній точці і знаку у кожній лакуні, то існує єдиний самоспряжений оператор Якобі на всій вісі, для якого ця система інтервалів буде неперервним спектром, а додатковий спектр - полюсами функцій Вейля. Такі оператори називаються скінченнозонними. Для кожної скінченнозонної початкової умови $\{\hat{a}(n,0), \quad \hat{b}(n,0)\}$ існує єдиний скінченнозонний розв'язок задачі Коші для ланцюжка Тоди $\{\hat{a}(n,t), \quad \hat{b}(n,t)\}$. Він може бути зображеним у тета-функціях Рімана (див. [1] та [14], див. нижче формули (2.6)).

Узагальнення методу оберненої задачі розсіювання із сталих на скінченнозонні фони дозволило у [9] та [4] проінтегрувати ланцюжок Тоди у класі збурень скінченнозонного розв'язку

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 \left(|a(n,t) - \hat{a}(n,t)| + |b(n,t) - \hat{b}(n,t)|\right) < \infty. \tag{1.10}$$

Наступним застосуванням методу оберненої задачі розсіювання було інтегрування ланцюжка Тоди у класі асимптотично-скінченнозонних функцій типу сходинки ([5], [6], [7], [8]). Цей клас визначається наступним чином. Нехай $\{\widehat{a^{\pm}}(n,t),\quad \widehat{b^{\pm}}(n,t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ є двома різними скінченнозонними розв'язками ланцюжка Тоди із довільним взаємним розташуванням спектрів, і нехай початкові дані $\{a(n,0),\ b(n,0)\}$ задовольняють умову

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{\pm}} n^2\left(|a(n,0)-\widehat{a^{\pm}}(n,0)|+|b(n,0)-\widehat{b^{\pm}}(n,0)|\right)<\infty, \tag{1.11}$$

тобто є асимптотично близькими до коефіцієнтів двох різних скінченнозонних операторів Якобі. Тоді існує глобальний розв'язок задачі (1.2), (1.11), що при кожному фіксованому t є асимптотично-скінченнозонним розв'язком типу сходинки:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{\pm}} n^2\left(|a(n,t)-\widehat{a^{\pm}}(n,t)|+|b(n,t)-\widehat{b^{\pm}}(n,t)|\right)<\infty. \tag{1.12}$$

Відмітимо, що випадок двох сталих фонових операторів із різними спектрами є окремим випадком цього твердження, але рівняння Тоди на сталих фонах можна проінтегрувати і у більш загальному випадку першого обмеженого моменту збурення:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{\pm}} |n|\left(|a(n,t)-a^{\pm}|+|b(n,t)-b^{\pm}|\right)<\infty. \tag{1.13}$$

Тут $a^{\pm}>0$ та $b^{\pm}\in\mathbb{R}$ є довільними сталими.

Отже, у всіх перерахованих вище класах початкових умов розв'язок ланцюжка Тоди добре контролюється при фіксованому t. Але значно більш цікавим є опис цієї поведінки коли змінна часу прямує до нескінченності разом із просторовою змінною, тобто у режимі $t\to+\infty$, $n\to\infty$, причому величина $n/t=\xi$ є слабо змінною. Для всіх вищеописаних класів дійсна вісь $\xi\in\mathbb{R}$ поділяється на сектори із якісно різною поведінкою розв'язку. Ця поведінка є більш-менш добре вивченою для початкових умов (1.8), (1.10) і для деяких секторів по ξ для (1.13) за умов $b^-+2a^-<b^+-2a^+$ (так звана

хвиля стиску, [16], [17], [18], [13]) або $b^+ + 2a^+ < b^- - 2a^-$ (хвиля розрідження, [15], [12]). Найбільш ефективним та математично обгрунтованим методом дослідження такої асимптотичної поведінки є нелінійний метод найшвидшого спуску (див. [15]), або метод задачі Рімана-Гільберта. Наразі не існує досліджень асимптотик розв'язку (1.12), навіть на фізичному рівні строгості. У даній дипломній роботі розглядається асимптотична поведінка за великим часом розв'язку рівняння (1.2) що відповідають наступним початковим умовам

$$\begin{aligned} &|a(n,0)-\frac{1}{2}|+|b(n,0)|\to 0, && n\to+\infty;\\ &|a(n,0)-\widehat{a}(n)|+|b(n,0)-\widehat{b}(n)|\to 0, && n\to-\infty, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} &\widehat{H}(0): l^2(\mathbb{Z})\to l^2(\mathbb{Z}),\\ &\qquad y(n)\mapsto \widehat{a}(n)y(n+1)+\widehat{b}(n)y(n)+\widehat{a}(n-1)y(n-1), \end{aligned} \tag{1.14}$$

є скінченнозонним оператором Якобі, що має двозонний неперервний спектр

$$[E_0,E_1]\cup[E_2,E_3], \quad 1<E_0<E_1<E_2<E_3, \tag{1.15}$$

і додатковий спектр Діріхле

$$(\mu,+), \quad \mu\in(E_1,E_2). \tag{1.16}$$

Ми припускаємо, що початкові умови наближаються до своїх фонів експоненційно швидко:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\varepsilon n}\big(|a(-n,0)-\widehat{a}(n)|+|b(-n,0)-\widehat{b}(n)|+|a(n,0)-\tfrac{1}{2}|+|b(n,0)|\big)<\infty, \quad \varepsilon>0. \tag{1.17}$$

Взаємне розташування спектрів фонів (1.15), правий з котрих - це вільний

Лапласіан, а лівий - двозонний, відповідає так званій задачі розрідження у узагальненій формі.

1.2. Задача розрідження на сталих фонах

Класична задача розрідження для ланцюжка Тоди пов'язана із дослідженням асимптотичної поведінки за великим часом розв'язку задачі Коші для рівняння (1.2) з симетричними початковими умовами

$$a(-n,0) = a(n,0) = \frac{1}{2}, \quad b(-n,0) = -b(n,0) = b > 0, \text{ при } n > 0;\ b(0,0) = 0.$$

Хвиля розрідження має якісно різну поведінку залежно від фонової константи b, розрізняють два випадки: $b > 1$ та $0 < b \leq 1$. Вперше дослідження цієї задачі було проведено в роботі [15] у так званій перехідній зоні $\xi = \dfrac{n}{t} \approx 0$. Саме у цій роботі у 1996 році вперше було поставлено задачу Рімана-Гільберта у векторному формулюванні в термінах змінної перетворення Жуковського спектрального параметра задачі.

У роботі [12] хвилю розрідження досліджено в основних секторах півплощини $(n,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$ за більш загальних початкових умов типу сходинки:

$$\begin{aligned} &a(n,0) \to a, \quad b(n,0) \to b, \quad \text{при } n \to -\infty, \\ &a(n,0) \to \frac{1}{2}, \quad b(n,0) \to 0, \quad \text{при } n \to +\infty, \end{aligned} \tag{1.18}$$

де $a > 0$ та $b \in \mathbb{R}$ задовольняють наступу умову

$$1 < b - 2a. \tag{1.19}$$

За припущенням

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\varepsilon n}\big(|a(-n,0)-a|+|b(-n,0)-b|+|a(n,0)-\tfrac{1}{2}|+|b(n,0)|\big)<\infty, \quad \varepsilon>0, \tag{1.20}$$

при $t\to+\infty$ розв'язок $\{a(n,t),b(n,t)\}$ задачі (1.2), (1.19), (1.20) є якісно різним у наступних чотирьох секторах:

- В області $n>t$ є асимптотично близьким до фонових констант $\{\frac{1}{2},0\}$ з додаванням солітонів, що відповідають власним значенням $\lambda_j<-1$.
- В області $0<n<t$:

$$a(n,t)=\frac{n}{2t}+O\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad b(n,t)=1-\frac{n}{t}+O\Big(\frac{1}{t}\Big).$$

- В області $-2at<n<0$:

$$a(n,t)=-\frac{n}{2t}+O\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad b(n,t)=b-2a-\frac{n}{t}+O\Big(\frac{1}{t}\Big).$$

- В області $n<-2at$, розв'язок є асимптотично близьким до фонових констант $\{a,b\}$ плюс солітони, що відповідають власним значенням $\lambda_j>b+2a$.

Метою даної дипломної роботи роботи є вивчення асимптотичної поведінки за великим часом розв'язку $\{a(n,t),b(n,t)\}$ рівняння (1.2) із початковими умовами типу сходинки (1.17), що є експоненційно швидко наближеними до коефіцієнтів вільного дискретного Лапласіана (1.7) на правій півосі, та до коефіцієнтів скінченнозонного оператора Якобі (1.14)-(1.16) на лівій. Ми вивчаємо цю асимптотику у лівій солітонній зоні, при

$$\frac{n}{t}<\frac{1}{2}(E_0+E_1+E_2-E_3)-\frac{\int_{E_1}^{E_2}\dfrac{\lambda(\lambda-E_3)}{\mathcal{R}(\lambda+\mathrm{i}0)}d\lambda}{\int_{E_1}^{E_2}\dfrac{\lambda-E_3}{\mathcal{R}(\lambda+\mathrm{i}0)}d\lambda},$$

де $\mathcal{R} := -\sqrt{(\lambda - E_0)(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)(\lambda - E_3)}$, тобто ми вивчаємо деяку нову мероморфну векторну задачу Рімана-Гільберта на Рімановій поверхні, що відповідає спектру оператора (1.14), і виводимо строгі математично обгрунтовані формули для солітонів ланцюжка Тоди на двозонному фоні.

1.3. Рівняння сумісності та метод оберненої задачі розсіювання

Розв'язки рівняння (1.2) зручно досліджувати використовуючи матричний формалізм пари Лакса (1.3)-(1.5). Дійсно, як встановлено для всіх наведених у пункті 1.1 класах початкових умов, розв'язки відповідної системи сумісності

$$(H(t) - \lambda)u(\lambda, \cdot, t) = 0, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial u(\lambda, \cdot, t)}{\partial t} - A(t)u(\lambda, \cdot, t) = 0, \tag{1.22}$$

задовольняють наступній властивості

Лема 1.1. *[3] Нехай $y(\lambda, n, t)$ та $z(\lambda, n, t)$ є будь-якими розв'язками рівняння Якобі (1.21), тоді вираз, що зветься дискретним вронскіаном цих розв'язків*

$$W\big(y(\lambda), z(\lambda)\big)(n, t) = a(n-1, t)\big(y(\lambda, n-1, t)z(\lambda, n, t) - y(\lambda, n, t)z(\lambda, n-1, t)\big),$$

не залежить від n. Якщо ж $y(\lambda, n, t)$ та $z(\lambda, n, t)$є розв'язками системи зумісності (1.21) – (1.22), то їх дискретний вронскіан є незалежним ні від просторової змінної, ні від часу.

У випадку, коли $\lambda = \lambda_0$ є власним значенням оператора $H(t)$, та існує розв'язок $y(\lambda_0, \cdot, t) \in l^2(\mathbb{Z})$ системи (1.21) – (1.22), то норма

$||y(\lambda_0, \cdot, t)||_{l^2(\mathbb{Z})}$ *є також незалежною від часу.*

Отже, класичний метод оберненої задачі полягає у тому, щоб знайти деякі зручні спектральні дані $S(H(0))$ для оператора $H(0)$, що асоційовано із початковими умовами. Рівняння сумісності дозволяють обчислити еволюцію за часом цих спектральних даних, тобто отримати множину $S(H(t))$, яка потенційно може вважатися спектральними даними для оператора $H(t)$, знайти коефіцієнти якого означає розв'язання досліджуваної задачі Коші. Щоб встановити це, потрібне детальне і кропітке дослідження рівнянь Марченка, тобто розв'язання оберненої задачі розсіювання (або оберненої спектральної задачі, як у випадку періодичних та скінченнозонних початкових даних). Отже, схематично схема інтегрування ланцюжка Тоди виглядає наступним чином:

$$\begin{tikzcd}
S(H(0)) \arrow[r, "\substack{\text{часова еволюція}\\ \text{спектральних параметрів}}"] & S(H(t)) \arrow[d, "\substack{\text{обернена}\\ \text{задача}\\ \text{розсіювання}}"] \\
(a(n,0), b(n,0)) \arrow[u, "\substack{\text{пряма}\\ \text{задача}\\ \text{розсіювання}}"] & (a(n,t), b(n,t))
\end{tikzcd}$$

Як вже згадувалося, наразі найбільш ефективним методом дослідження асимптотик за великого часу у заданому режимі розв'язків рівняння (1.2) є метод задачі Рімана-Гільберта, який часто розглядується як узагальнення класичного методу оберненої задачі розсіювання.

Сутність цього підходу для вивчаємої моделі буде описано у наступному розділі.

Розділ 2

Задача Рімана-Гільберта

2.1. Функція Бейкера-Ахієзера

Оскільки основний фон, на якому буде досліджено солітонні асимптотики, є скінченнозонним, нагадаємо деякі відомі факти зі спектральної теорії двозонного оператора $\hat{H}(t)$ і розв'язків рівняння (1.2). Метою цього параграфа є опис одного спеціального розв'язку системи сумісності

$$(\hat{H}(t) - \lambda)u(\lambda, \cdot, t) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u(\lambda, \cdot, t)}{\partial t} - \hat{A}(t)u(\lambda, \cdot, t) = 0, \tag{2.2}$$

що є (з точністю до мультиплiктивної константи, що залежить від часу) лівим розв'язком Вейля рівняння Якобі (2.1). В цьому рівнянні $\lambda \in \Pi$ - це спектральний параметр, який розглядається на множині

$$\Pi := \operatorname{clos}(\mathbb{C} \setminus \sigma(\hat{H}(t))), \quad \sigma(\hat{H}(t)) = [E_0, E_1] \cup [E_2, E_3]. \tag{2.3}$$

Введемо дволистну компактну Рiманову поверхню $\mathbb{M}$ порядку 1 асоційовану з функцією

$$\mathcal{R}(\lambda) = -\sqrt{(\lambda - E_0)(\lambda - E_1)(\lambda - E_2)(\lambda - E_3)},$$

де $\sqrt{\cdot}$ – є стандартним значенням коріня з розрізом вздовж $(-\infty, 0)$. Точки

$E_j = (E_j, 0) \in \mathbb{M}$ є точками розгалуження, а множини

$$\Pi_\pm = \{(\lambda, \pm\mathcal{R}(\lambda)) \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus [E_0, E_1] \cup [E_2, E_3]\} \subset \mathbb{M},$$

називаються верхнім та відповідно нижнім листом поверхні. Листи склеєні вздовж зон спектру $\sigma(\hat{H}(t))$. Точки на поверхні ми будемо позначати через $p = (\lambda, \pm)$, а через $p^* = (\lambda, \mp)$ їхні інволюції. Дана Ріманова поверхня має дві нескінчені точки, які будуть позначатися через $(\infty, \pm) =: \infty_\pm$. Введемо канонічний базис циклів на $\mathbb{M}$. Він складається з двох елементів $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$. Цикл $\mathfrak{a}$ охоплює точки E_1, E_2 змінюючи лист, із орієнтацією від E_1 до E_2 по верхньому листу, а цикл $\mathfrak{b}$ охоплює E_0, E_1, знаходиться повністю на верхньому листі та має орієнтацію проти годинникової стрілки.

Єдиний голоморфний диференціал на $\mathbb{M}$ задається формулою:

$$\zeta = c\,\frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)}, \qquad c = \left(2\int_{E_1}^{E_2} \frac{d\lambda}{\mathcal{R}(\lambda)}\right)^{-1}, \qquad \int_{\mathfrak{b}} \zeta = \tau.$$

Введемо також неголоморфні нормовані Абелеві диференціали. Нехай

$$\omega_{\infty_+\infty_-} = \frac{\lambda - \widehat{\lambda}_1}{\mathcal{R}(\lambda)} d\lambda;$$

є нормованим Абелевим диференціалом третього роду з простими полюсами у точках ∞_+ та ∞_-, а

$$\Omega_0 = \frac{(\lambda - \widetilde{\lambda}_1)(\lambda - \widetilde{\lambda}_2)}{\mathcal{R}(\lambda)} d\lambda, \qquad \widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{\lambda}_2 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1 + E_2 + E_3).$$

є Абелевим диференціалом другого роду з полюсами другого порядку у точках ∞_+ та, відповідно ∞_- (див. [1, Розділи 13.1, 13.2]). Нормалізація абелевих диференціалів полягає у тому, що їх $\mathfrak{a}$ періоди дорівнюють нулю.

Позначимо їхні $\mathfrak{b}$ - періоди через

$$2\pi\mathrm{i}U_0 =: \int_{\mathfrak{b}} \Omega_0, \quad 2\pi\mathrm{i}A_{\infty_-}(\infty_+) =: \int_{\mathfrak{b}} \omega_{\infty_+\infty_-}.$$

Нехай тепер $A(p) = \int\limits_{E_0}^{p} \zeta$ це відображення Абеля на $\mathbb{M}$.

Введемо також спеціальний нормований Абелев інтеграл, що залежить від параметрів n та t через змінну $\xi = \dfrac{n}{t}$:

$$\Phi(p) := \Phi(p, \xi) = \int\limits_{E_0}^{p} \Omega_0 + \xi \int\limits_{E_0}^{p} \omega_{\infty_+\infty_-}. \tag{2.4}$$

Ця функція має назву фазової функції, і розподілення знаків її дійсної частини в залежності від параметра ξ відіграє найважливішу роль в наших дослідженнях.

На $\mathbb{M}$ введемо наступні функції:

$$\begin{aligned} &z(p, n, t) = A(p) - A((\mu, +)) - nA_{\infty_-}(\infty_+) + tU_0 - \Xi \in \mathbb{C}, \\ &z(n, t) := z(\infty_+, n, t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

де

$$\Xi = \frac{1 + \tau}{2},$$

це Ріманова константа, а $(\mu, +)$ це дівізор Діріхле оператора $\hat{H}(0)$. Нагадаємо, що має місце наступна

Лема 2.1. *([1, додаток A])*

$$A_{\infty_-}(\infty_+) = \int\limits_{\infty_-}^{\infty_+} \zeta = 2A(\infty_+).$$

Введемо також тета функцію Рімана, пов'язану з поверхнею $\mathbb{M}$:

$$\theta(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \exp 2\pi \mathrm{i} \left(z\, j + \frac{\tau}{2} j^2 \right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

У введених позначеннях ми можемо тепер записати розв'язки задачі Коші для (1.2) з початковими скінченнозонними умовами $\{\widehat{a}(n,0); \widehat{b}(n,0)\}$ (див. [1, Розділ 9.2]) :

$$\begin{aligned} \widehat{a}(n,t)^2 &= \mathbf{a}^2 \frac{\theta(z(n+1,t))\theta(z(n-1,t))}{\theta(z(n,t))^2}, \\ \widehat{b}(n,t) &= \mathbf{b} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \log\left(\frac{\theta(z(n,t))}{\theta(z(n-1,t))} \right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

тут константи $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ залежать тільки від геометрії $\mathbb{M}$.

Розглянемо тепер розв'язок системі сумісності (2.1)-(2.2), де замість спектрального параметра на площині ми підставимо точку на $\mathbb{M}$.

$$\begin{aligned} &(\hat{H}(t) - p)u(p,\cdot,t) = 0, \\ &\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \hat{A}(t)u(p,\cdot,t) = 0, \end{aligned}$$

тут

$$(\hat{A}(t)y)(n) = \widehat{a}(n,t)y(n+1) - \widehat{a}(n-1,t)y(n-1).$$

Як відомо (див. [1, Розділ 13.2]), ця система має єдиний розв'язок $\hat{\psi}(p,n,t)$, що є мероморфною однозначною функцією на $\mathbb{M}$ із полюсом в точці $(\mu,+)$ та із поведінкою на нескінченностях виду

$$\hat{\psi}(p,n,t) - \mathrm{e}^{t\Phi(p,\xi)} \to 0, \quad p \to \infty_\pm. \tag{2.7}$$

Це так звана функція Бейкера-Ахієзера. Нам потрібна її нижня гілка (значення на нижньому листі).

Зауваження 2.2. *У подальшому, щоб спростити позначення, "фізичну"* *комплексну площину* (2.3) *спектрального параметра* λ *ми будемо ототожнювати із верхнім листом* Π_+. *При скороченні деяких формул ми завжди вважаємо, що* λ - *це точка на верхньому листі, а* λ^* - *її інволюція на нижній лист.*

Зокрема, додатковий спектр Діріхле (1.16) *оператора* $\hat{H}(0)$ *буде позначатися через* μ, *тобто* $\mu \in \Pi_+$.

Приймаючи до уваги це зауваження (2.4), нижня гілка функції Бейкера-Ахієзера буде виглядати наступним чином

$$\widehat{\psi}_-(\lambda, n, t) = C(n, 0, t)\frac{\theta(z(\lambda^*, n, t))}{\theta(z(\lambda^*, 0, 0))}\, \mathrm{e}^{-t\int\limits_{E_0}^{p}\Omega_0 - n\int\limits_{E_0}^{p}\omega_{\infty_+\infty_-}}, \quad \lambda \in \Pi_+, \tag{2.8}$$

де $C(n, 0, t)$ – дійснозначна позитивна величина, для якої виконано

$$C(n, 0, t)^2 = \frac{\theta(z(0, 0))\theta(z(-1, 0))}{\theta(z(n, t))\theta(z(n-1, t))}. \tag{2.9}$$

Зауваження 2.3. *З формул* (2.5) *випливає, що функція* $\widehat{\psi}_-(\lambda, n, t)$ *не має полюсів на* Π_+ *за будь-яких* n *і* t.

Лема 2.4. *При кожному фіксованому* t *і при всіх* $\lambda \in \Pi_+ \setminus \partial\Pi_+$

$$\widehat{\psi}_-(\lambda, \cdot, t) \in \ell^2(\mathbb{Z}_-). \tag{2.10}$$

Лема 2.5. *Фазова функція* $\Phi(\lambda, \xi)$ *має наступні властивості:*

- *При* $\lambda \to \infty_+$*:*

$$\Phi(\lambda, \xi) = -\sqrt{\lambda^2 - 1} + \xi \ln(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} + \xi \ln 2 - \xi \ln \mathbf{a} + O(\frac{1}{\lambda}),$$

де $\mathbf{a}$ - *це логарифмічна ємкість спектру оператора* $\hat{H}(t)$;

- $\Phi(\lambda^*, \xi) = -\Phi(\lambda, \xi)$.

Тепер, після введення всіх необхідних означень, пов'язаних із лівим фоном, ми також введемо спеціальний розв'язок

$$\tilde{\phi}_+(\lambda, n, t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda^2-1}\,t}\ \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^n \tag{2.11}$$

тривіальної системи сумісності ассоційованої із вільним Лапласіаном (1.7)

$$\begin{aligned}
&(\tilde{H}(t) - \lambda)u(\lambda, n, t) = 0, \\
&\frac{\partial u(\lambda, n, t)}{\partial t} - \tilde{A}(t)u(\lambda, n, t) = 0, \quad \lambda \in \operatorname{clos}(\Pi_+ \setminus [-1, 1],
\end{aligned}$$

де

$$(\tilde{A}(t)y)(n) = \frac{1}{2}y(n+1) - \frac{1}{2}y(n-1).$$

Цей розв'язок має наступну поведінку при $n \to +\infty$:

$$\tilde{\phi}_+(\lambda, \cdot, t) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+). \tag{2.12}$$

2.2. Розв'язки Йоста і дані розсіювання

Нехай тепер $\{a(n,t), b(n,t)\}$ є досліджуваним розв'язком задачі (1.2), (1.14)-(1.17), і нехай (1.21) - (1.22) є відповідною системою сумісності.

Лема 2.6. *Система сумісності* (1.21) - (1.22) *має два розв'язки* $\varphi(\lambda, n, t)$ *та* $\psi(\lambda, n, t)$, *що називаються розв'язками Йоста, і однозначно характеризуються їхньою поведінкою на нескінченностях:*

$$\begin{aligned}
&|\varphi(\lambda, n, t) - \hat{\phi}_+(\lambda, n, t)| \to 0, \quad \textit{при } n \to +\infty, \\
&|\psi(\lambda, n, t) - \widehat{\psi}_-(\lambda, n, t)| \to 0, \quad \textit{при } n \to -\infty.
\end{aligned}$$

Ці розв'язки мають наступні властивості:

- *Як функція* λ *функція* $\psi(\lambda, n, t)$ *(відповідно* $\varphi(\lambda, n, t)$*) є голоморфною в області* $\mathbb{C} \setminus \sigma(\hat{H}(t))$ *(відповідно* $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$*) і неперервною аж до границі області;*

- *$\phi(\lambda,\cdot,t)\in\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ коли $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$;*

- *$\psi(\lambda,n,t)\in\ell^2(\mathbb{Z}_-)$ коли $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma(\hat{H}(t))$;*

- *Вронскіан розв'язків Йоста $W(\lambda):=W(\phi,\psi)$ не залежить ні від n ні від t.*

Лема 2.7. *Оператор Якобі $H(t)$ має неперервний однократний спектр на множині $[-1,1]\cup[E_0,E_1]\cup[E_2,E_3]$ і скінченний дискретний спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^N\subset\mathbb{R}\setminus([-1,1]\cup[E_0,E_1]\cup[E_2,E_3])$.* Точки дискретного спектра $H(t)$ характеризуються тим, що $W(\lambda_j)=0$.

Зауваження 2.8.

- *Ми припускаємо, що розв'язок задачі* (1.2), (1.14)-(1.17) *відповідає нерезонансному випадку, тобто $W(\lambda)$ не обертається в нуль на кінцях неперервного спектра, та саме у точках $\{\pm1,E_0,\dots,E_3\}$. Зазначимо, що нерезонансний випадок є типовим.*

- *Ми також припускаємо, що ні одна з точок дискретного спектра не співпадає з точкою μ.*

Для точок λ на верхньому та нижньому берегах розрізу вздовж $[E_0,E_1]\cup[E_2,E_3]$ розглянемо ліве співвідношення розсіювання

$$T(\lambda)\varphi(\lambda,n,t)=R(\lambda)\psi(\lambda,n,t)+\overline{\psi(\lambda,n,t)},$$

де згідно лемі 1.1 коефіцієнти проходження та відбиття $T(\lambda)$ та $R(\lambda)$ не залежать від часу і задовольняють наступні рівності:

$$T(\lambda)=\frac{W(\psi,\overline{\psi})(\lambda)}{W(\psi,\varphi)(\lambda)},\quad R(\lambda)=-\frac{W(\varphi,\overline{\psi})(\lambda)}{W(\varphi,\psi)(\lambda)},\quad \lambda\in([E_0,E_1]\cup[E_2,E_3])\pm\mathrm{i}0.$$

Лема 2.9. *Між коефіцієнтами проходження та відбиття мають мі-*

сце наступні співвідношення:

$$R(\lambda) = \frac{T(\lambda)}{\overline{T(\lambda)}}, \quad \overline{R(\lambda)} = \frac{1}{R(\lambda)}. \tag{2.13}$$

Лема 2.10. *Коефіцієнт $T(\lambda)$ є мероморфною функцією на множині $\mathcal{D} := \mathbb{C} \setminus [-1,1] \cup [E_0, E_1] \cup [E_2, E_3]$, має прості полюси в точках дискретного спектру і означається формулою*

$$T(\lambda) = -\frac{\mathcal{R}(\lambda)}{(\lambda - \mu)\, W(\lambda)}, \quad \lambda \in ([E_0, E_1] \cup [E_2, E_3]) \pm \mathrm{i}0. \tag{2.14}$$

Аналогічні співвідношення можна розглянути й для λ на берегах розрізу вздовж інтервала $[-1, 1]$. Вони називаються правими співвідношеннями розсіювання:

$$\tilde{T}(\lambda)\psi(\lambda, n, t) = \tilde{R}(\lambda, t)\varphi(\lambda, n, t) + \overline{\varphi(\lambda, n, t)}.$$

Лема 2.11. *Праві коефіцієнти проходження та відбиття є незалежними від часу і задовольняють наступні рівності:*

$$\tilde{T}(\lambda) = -\frac{W(\varphi, \overline{\varphi})(\lambda)}{W(\psi, \varphi)(\lambda)}, \quad \tilde{R}(\lambda) = -\frac{W(\psi, \overline{\varphi})(\lambda)}{W(\psi, \varphi)(\lambda)}, \quad \lambda \in [-1, 1] \pm \mathrm{i}0.$$

Введемо для подальшого розгляду наступну функцію:

$$\chi(\lambda) = -\tilde{T}(\lambda + 0\mathrm{i})\, \overline{T(\lambda + 0\mathrm{i})}, \quad \lambda \in [-1, 1].$$

Лема 2.12. *Функція $\chi(\lambda)$ є неперервною при $\lambda \in [-1, 1]$.*

Зауваження 2.13. *Очевидно, що розв'язки Йоста та коефіцієнти проходження, введені в цьому параграфі, можна розглядати як функції на множині $\mathcal{D} = \Pi_+ \setminus [-1, 1]$, тобто на верхньому листі Рімanової поверхні $\mathbb{M}$ із розрізом вздовж інтервалу [-1, 1].*

2.3. Постановка задачі Рімана-Гільберта

Розглянемо векторнозначну функцію $m(p,n,t) = (m_1(p,n,t),\, m_2(p,n,t)$ визначену наступним чином на верхньому листі :

$$\begin{aligned} m_1(p,n,t) &= T(p)\,\varphi(p,n,t)\,e^{-t\,\Phi(p,\xi)}, \quad && \lambda \in \mathcal{D}, \\ m_2(p,n,t) &= \psi(p,n,t)\,e^{t\,\Phi(p,\xi)}, && \lambda \in \mathcal{D}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

На нижньому листі визначимо її за допомогою умов симетрії:

$$m(p,n,t) = m(p^*,n,t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathcal{D}^* = \Pi_- \setminus [-1,1].$$

Лема 2.14. *Функція m(p, n, t) задовольняє умову нормалізації:*

$$m_1(\infty_\pm,n,t)\cdot m_2(\infty_\pm,n,t) = 1.$$

Щойно визначена функція не є аналітичною на $\mathbb{M}$, вона має стрибки та полюси. Введемо позначення для контурів, на яких функція $m(p,n,t)$ має стрибки:

$$\begin{aligned} &\Sigma_l^{(1)} = \{p = (\lambda + \mathrm{i}0, +)\}, && \Sigma_l^{(2)} = \{p = (\lambda - \mathrm{i}0, +)\}, && \lambda \in \sigma(H_l), \\ &\Sigma_r = \{p = (\lambda, +)\}, && \Sigma_r^* = \{p = (\lambda, -)\}, && \lambda \in \sigma(H_r). \end{aligned}$$

Весь контур задачі Рімана-Гільберта це $\Gamma := \Sigma_l^{(1)} \cup \Sigma_l^{(2)} \cup \Sigma_r \cup \Sigma_r^*$. Задамо його орієнтацію: $\Sigma_l = \Sigma_l^{(1)} \cup \Sigma_l^{(2)}$ – орієнтований за годинниковою стрілкою, дивлячись з боку верхнього листа, а контури Σ_r та Σ_r^* орієнтовані зліва направо.

Далі відповідно до обраних орієнтацій контуру введемо граничні значення розглянутої функції:

$$m_+(p,n,t) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \zeta\in\Pi_+}} m(\zeta,n,t), \qquad m_-(p,n,t) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \zeta\in\Pi_-}} m(\zeta,n,t), \qquad p\in\Sigma_l,$$

$$m_+(p,n,t) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \operatorname{Re}\pi(\zeta)>0}} m(\zeta,n,t), \; m_-(p,n,t) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \operatorname{Re}\pi(\zeta)<0}} m(\zeta,n,t), \; p\in\Sigma_r\cup\Sigma_r^*.$$

Стрибки початкової функції описуються наступною лемою

Лема 2.15. *Функція $m(p,n,t)$ має стрибок на контурі Γ вигляду*

$$m_+(p,n,t) = m_-(p,n,t)\, v(p,n,t),$$

де функція стрибка має наступний вигляд

$$v(p,n,t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\overline{R(p)}e^{2t\Phi(p,\xi)} \\ R(p)e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1 \end{pmatrix}, & p\in\Sigma_l, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi(p)e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1 \end{pmatrix}, & p\in\Sigma_r, \\ \begin{pmatrix} 1 & \chi(p)e^{2t\Phi(p,\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & p\in\Sigma_r^*. \end{cases}$$

Розглянемо точки $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$, для них нам відомо, що $W(\varphi,\psi)(\lambda_k) = 0$, тобто функції $\varphi(\lambda,n,t)$ та $\psi(\lambda,n,t)$ є лінійно залежним. Нехай ця лінійна залежність виражається співвідношенням:

$$\psi(\lambda_k,n,t) = C_k^-\varphi(\lambda_k,n,t).$$

З цих міркувань випливає, що задача на власні значення (1.21) має розв'язок $\psi(\lambda_k,n,t)\in l^2(\mathbb{Z})$. З леми 1.1 випливає, що норма цього розв'язку не залежить від часу, тому позначимо:

$$\gamma_k^- = \frac{1}{\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} |\psi(\lambda_k, m, t)|^2}.$$

Для того, щоб обчислити лишки функції $m(p,n,t)$ нам необхідна наступна технічна лема:

Лема 2.16. *Дискретний вронскіан розв'язків Йоста задовольняє наступну рівність:*

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(W(\varphi(\lambda), \psi(\lambda))\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_k} = \frac{1}{C_k^- \gamma_k^-}.$$

Доведення цього факту див. [11, Лема 3.2].

Тепер можемо сформулювати наступне твердження:

Лема 2.17. *Функція $m(p,n,t)$ має прості полюси у точках у точках $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ та $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^N$ і відповідні лишки мають наступний вигляд:*

$$res_{\lambda_k} m(p,n,t) = \lim_{p\to\lambda_k} m(p,n,t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\widehat{\gamma}_k e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 0\end{pmatrix},$$

$$res_{\lambda_k^*} m(p,n,t) = \lim_{p\to\lambda_k^*} m(p,n,t)\begin{pmatrix} 0 & -\widehat{\gamma}_k e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)} \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

де $\widehat{\gamma}_k = \dfrac{\mathcal{R}^{1/2}(\lambda_k)\gamma_k^-}{(\lambda_k - \mu)}$.

Зауваження 2.18. *Із означення 2.15 випливає, що компонентна $m_1(p,n,t)$ є мероморфною функцією на $\mathcal{D}$, причому має на верхньому листі простий полюс у точці μ та прості полюси в точках дискретного спектра λ_k. Ця компонента є голоморфною на нижньому листі на $\mathcal{D}^*$. У свою чергу, друга компонента $m_2(p,n,t)$ є голоморфною на $\mathcal{D}$ і має прості полюсі у точках μ^* та $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_N^*$.*

2.4. Солітонна зона

Нагадаємо вигляд фазової функції у комплексній площині:

$$\Phi(\lambda,\xi) = \int_{E_0}^{\lambda} \Omega_0 + \xi \int_{E_0}^{\lambda} \omega_{\infty_+\infty_-}.$$

Головним чинником при дослідженні асимптотик розв'язків рівнянь (1.2), (1.14) – (1.17) є розподіл знаків фазової функції. Розглянемо у комплексній площині лінії рівня $\operatorname{Re}\Phi(\lambda,\xi) = 0$. Він складається з двох відрізків $[E_0, E_1] \cup [E_2, E_3]$ та з дуги $\widehat{\Gamma}$, що перетинає дійсну вісь рівно у одній точці, назвемо цю точку $\eta = \eta(\xi)$. Дуга $\widehat{\Gamma}$ поділяє площину на дві області $\mathcal{V}_+$ та $\mathcal{V}_-$ у яких, відповідно, $\operatorname{Re}\Phi(\lambda,\xi)$ додатне та від'ємне. Функція $\eta(\xi)$ є монотонною зростаючою функцією $\xi \in \mathbb{R}$, вона обчислюється неявно з рівності

$$\xi = -\frac{\operatorname{Re} \int_{E_0}^{\eta(\xi)+\mathrm{i}0} \Omega_0}{\operatorname{Re} \int_{E_0}^{\eta(\xi)+\mathrm{i}0} \omega_{\infty_+\infty_-}}. \tag{2.16}$$

Лема 2.19. *В лівій солітонній зоні у введених позначеннях розподіл знаків* $\operatorname{Re}\Phi(\lambda,\xi)$ *задається як*

$$\mathcal{V}_+ \cap \mathbb{R} = (-\infty, E_0) \cup (E_1, E_2) \cup (E_3, \eta),$$
$$\mathcal{V}_- \cap \mathbb{R} = \{\lambda : \lambda > \eta\}.$$

Означення 2.20. Ті $n = \xi t$, за яких $\eta(\xi) > E_3$ називаються лівою солітонною зоною.

Тобто у нашому випадку ліва солітонна зона це

$$\frac{n}{t} < -\frac{\operatorname{Re} \int_{E_0}^{E_3+\mathrm{i}0} \Omega_0}{\operatorname{Re} \int_{E_0}^{E_3+\mathrm{i}0} \omega_{\infty_+\infty_-}}.$$

Наведені вище міркування переносяться на верхній лист Рімανової поверхні за допомогою оператора проектування. На нижньому листі, завдяки умові

$$\Phi(\lambda^*, \xi) = -\Phi(\lambda, \xi),$$

ми отримуємо розподіл знаків $\operatorname{Re}\Phi(\lambda^*, \xi)$ при:

- При $\lambda \in (-\infty, E_0) \cup (E_1, E_2) \cup (E_3, \eta)$ маємо $\operatorname{Re}\Phi(p, \xi) < 0$;
- При $\lambda > \eta$ маємо $\operatorname{Re}\Phi(p, \xi) > 0$.

Межа лівої солітонної зони може бути обчисленою у явному вигляді без використання Абелевих інтегралів, а саме, має місце наступний результат:

Лема 2.21. *Умова $\eta(\xi) > E_3$ виконується при*

$$\xi < \frac{1}{2}(E_0 + E_1 + E_2 - E_3) - \frac{\int_{E_1}^{E_2} \dfrac{\lambda(\lambda - E_3)}{\mathcal{R}(\lambda + \mathrm{i}0)} d\lambda}{\int_{E_1}^{E_2} \dfrac{\lambda - E_3}{\mathcal{R}(\lambda + \mathrm{i}0)} d\lambda},$$

Надалі наша мета – побудувати модельну задачу Рімана-Гільберта. Вона буде залежати від положення точки $\eta(\xi)$ відносно точок дискретного спектра $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$. Позначимо ξ, за яких $\eta(\xi)$ співпадають з серединами відрізків $\{[\lambda_k, \lambda_{k+1}]\}_{\lambda_k > E_3}$, через $\{\xi_k\}$. Позначимо також ξ_N точку, за якої $\eta(\xi_N)$ трохи більше за λ_N. Далі у нас є два принципово різних випадки:

- точка ξ потрапила в один з відрізків вигляду $[\xi_{k-1}, \xi_k]$;
- точка ξ лежить правіше за ξ_N.

Суттєвою задачею є перший випадок. Надалі ми розглядаємо такі ξ, для яких $\eta(\xi)$ потрапили в окіл λ_k. Зафіксуємо це λ_k для подальших обчислень і для скорочення подальших записів позначимо $\nu = \lambda_k$.

Розділ 3

Зведення до модельної задачі

Мета даного розділу полягає в тому, щоб шляхом перетворень вектор-функції $m(p, n, t)$ спростити задачу Рімана-Гільберта, що розглядається. Задача, що буде отримана наприкінці, називається модельною задачею Рімана-Гільберта. Її розв'язки вже можна буде знайти в явному вигляді та дослідити їх асимптотичну поведінку. У подальшому буде показано, що розв'язки модифікованої задачі будуть збігатися до розв'язків модельної задачі.

3.1. Перехід від полюсів до стрибків

Першим етапом спрощень буде відмова від полюсних умов і заміна їх на більш прості у дослідженнях стрибки на маленьких колах навколо колишніх полюсів. Оточимо точки $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ окрім обраної ν достатньо малими околами $\{B_k^\pm\}_{k=1}^N$ так, щоб вони не перетинались між собою, не перетинали контур Γ та не перетинали лінію рівня $\operatorname{Re}\Phi(p,\xi) = 0$. При чому $B_k^\pm \subset \Pi_\pm$. Нехай далі $\{\mathbb{T}_k^\pm\}_{k=1}^N$ орієнтовані за годинниковою стрілкою межі обраних околів. Побудуємо нову вектор-функцію на $\mathbb{M}$ за наступним алгоритмом:

$$
m^{(1)}(p,n,t)=\begin{cases} m(p,n,t), & p\notin\bigcup B_k^{\pm};\\ m(p,n,t)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -\widetilde{\gamma}_k(p)e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in B_k^{+};\\ m(p,m,t)\begin{pmatrix} 1 & -\widetilde{\gamma}_k(p)e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in B_k^{-}.\end{cases} \tag{3.1}
$$

Тут $\widetilde{\gamma}_k(p)=-\dfrac{\widehat{\gamma}_k}{\pi(p)-\lambda_k}$. Ця функція має простий полюс у точках λ_k та λ_k^* на Рімановій поверхні.

Лема 3.1. *Функція $m^{(1)}(p,n,t)$ голоморфна в колах $\{B_k^{\pm}\}$ і задовольняє наступні умови стрибка $m_+^{(1)}(p,n,t)=m^{(1)}(p,n,t)v^{(1)}(p,n,t)$ з матрицею стрибка вигляду*

$$
v^{(1)}(p,n,t)=\begin{cases} v(p,n,t), & p\in\Sigma_l\cup\Sigma_r\cup\Sigma_r^*;\\ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ \widetilde{\gamma}_k(p)e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathbb{T}_k^{+};\\ \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\gamma}_k(p)e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathbb{T}_k^{-}.\end{cases}
$$

3.2. Перетворення розбіжних матриць стрибків у збіжні

Помітимо, що за умови $\lambda_k>\nu$ і, відповідно, $\lambda_k>\eta$, у нас виконано $\operatorname{Re}\Phi(p,\xi)<0$ на контурах $\mathbb{T}_k^{+}$, відповідно матриці стрибка $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ \widetilde{\gamma}_k(p)e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 1\end{pmatrix}$, є експоненційно зростальними при $t\to\infty$, а за $\lambda_k<$

ν ці матриці збігаються до одиничної при $t \to +\infty$, причому експоненційно швидко. Наша мета – так перетворити вектор-функцію, щоб нові стрибки на всіх контурах $\mathbb{T}_k^+$ були збіжними до одиничних матриць. Ми будемо використовувати метод множників Бляшки. Для ланцюжка Тоди цей метод бур розроблений Дейфтом у роботі [15]. Конкретний вигляд вигляд множника Бляшки на Рімановій поверхні був запропонований у роботі [10]. Множник Бляшки, що відповідає фіксованій точці λ_k виглядає наступним чином:

$$\mathcal{P}_k(p) = \frac{\theta(A(\lambda_k^*) + \Xi)\,\theta(A(p) - A(\lambda_k) - \Xi)}{\theta(A(\lambda_k) + \Xi)\,\theta(A(p) - A(\lambda_k^*) - \Xi)}.$$

Розглянемо тепер добуток цих множників, що відповідають всім $\{\lambda_k\}_{\lambda_k > \nu}$:

$$P(p) = \prod_{\lambda_k > \nu} \frac{\theta(A(\lambda_k^*) + \Xi)\,\theta(A(p) - A(\lambda_k) - \Xi)}{\theta(A(\lambda_k) + \Xi)\,\theta(A(p) - A(\lambda_k^*) - \Xi)}.$$

Після цього можемо визначити наступний крок перетворень нашої функції:

$$m^{(2)}(p,n,t) = \begin{cases} m^{(1)}(p,n,t) \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{e^{2t\Phi((\lambda_k,\xi)}}{\widetilde{\gamma}_k(p)} \\ \widetilde{\gamma}_k(p) e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 0 \end{pmatrix} [P(p)]^{\sigma_3}, & p \in B_k^+, \\ m^{(1)}(p,m,t) \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\gamma}_k(p) e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)} \\ -\dfrac{e^{-2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)}}{\widetilde{\gamma}_k(p)} & 1 \end{pmatrix} [P(p)]^{\sigma_3}, & p \in B_k^-, \\ m^{(1)}(p,n,t)[P(p)]^{\sigma_3}; & \text{інакше}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Властивості зробленого перетворення задаються наступною лемою:

Лема 3.2. *Функція $m^{(2)}(p,n,t)$ є голоморфною в* $\mathbb{M} \backslash \left\{ \bigcup_{k=1}^{N} \mathbb{T}_k^{\pm} \cup \Gamma \cup \{\nu, \nu^*\} \right\}$

і задовольняє умову стрибка на із матрицею наступного вигляду:

$$v^{(2)}(p,n,t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\overline{R(p)}e^{2t\Phi(p,\xi)}}{[P(p)]^2}\\ [P(p)]^2R(p)e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in\Sigma_l,\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ [P(p)]^2\chi(p)e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in\Sigma_r,\\ \begin{pmatrix}1 & \dfrac{\chi(p)e^{2t\Phi(p,\xi)}}{[P(p)]^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in\Sigma_r^*,\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ [P(p)]^2\widetilde{\gamma}_k(p)e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathbb{T}_k^+,\lambda_k<\nu,\\ \begin{pmatrix}1 & \dfrac{\widetilde{\gamma}_k(p)e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)}}{[P(p)]^2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathbb{T}_k^-,\lambda_k<\nu,\\ \begin{pmatrix}1 & \dfrac{\mathrm{e}^{2t\Phi(\lambda_k)}}{[P(p)]^2\widetilde{\gamma}_k(p)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathbb{T}_k^+,\lambda_k>\nu,\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{[P(p)]^2\mathrm{e}^{2t\Phi(\lambda_k^*)}}{\widetilde{\gamma}_k(p)} & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathbb{T}_k^-,\lambda_k>\nu.\end{cases}$$

Також вона задовольняє полюсні умови

$$res_\nu m^{(3)}(p,n,t)=\lim_{p\to\nu}m^{(3)}(p,n,t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ -[P(p)]^2\widehat{\gamma}_k e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 0\end{pmatrix};$$

$$res_{\nu^*} m^{(3)}(p,n,t)=\lim_{p\to\nu^*}m^{(3)}(p,n,t)\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{1}{[P(p)]^2}\widehat{\gamma}_k e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3.3. Метод лінз

Як видно з леми 3.2, єдиним стрибком, матриця якого не прямує до одиничної при $t \to +\infty$, є стрибок на Σ_l. Для наступного кроку перетворень розкладемо на множники відповідну матрицю стрибка. В силу наслідку 2.9 маємо $|R(p)|^2 = 1$. Таким чином:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\overline{R(p)}e^{2t\Phi(p,\xi)}}{[P(p)]^2} \\ [P(p)]^2 R(p) e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\overline{R(p)}e^{2t\Phi(p,\xi)}}{[P(p)]^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [P(p)]^2 R(p) e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдяки умові (1.17) має місце наступна лема про продовження коефіцієнта $R(\lambda)$ в окіл розтину:

Лема 3.3. *Коефіцієнт $R(p)$ допускає продовження у деякий окіл на Рімановій поверхні $\mathbb{M}$ відрізків $[E_0, E_1] \cup [E_2, E_3]$ таке, для якого виконується*

$$R(p^*) = \overline{R(p)},$$

В силу леми 3.3 існує окіл контура Σ_l в який можна продовжити коефіцієнт $R(p)$. Оберемо орієнтований за годинниковою стрілкою контур $\mathcal{C}^+ \subset \Pi_+$, що оточує контур Σ_l та повністю міститься у вибраному околі. Оберемо далі контур $\mathcal{C}^-$ симетричний відносно спряження контуру $\mathcal{C}^+$ і позначимо через $D^\pm \subset \Pi_\pm$ частини верхнього та нижнього листів, що обмежені обраними контурами $\mathcal{C}^\pm$. Обрана факторизація дозволяє розглянути перетворення вектор-функції у якої замість стрибка на Σ_l буде два стрибка, для матриць яких буде виконуватися умова збіжності до одиничних матриць при $t \to +\infty$. Ведемо наступний крок перетворення:

$$m^{(3)}(p,n,t)=\begin{cases} m^{(2)}(p,n,t), & p\notin D^{+}\cup D^{-};\\ m^{(2)}(p,n,t)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -[P(p)]^{2}R(p)e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in D^{+};\\ m^{(2)}(p,m,t)\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\overline{R(p)}e^{2t\Phi(p,\xi)}}{[P(p)]^{2}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in D^{-}.\end{cases} \tag{3.3}$$

Лема 3.4. *Функція* $m^{(3)}(p,n,t)$ *не має стрибка вздовж контуру* Σ_l, *а на контурах* $\mathcal{C}^{\pm}$ *задовольняє умову стрибка із матрицею наступного вигляду:*

$$v^{(3)}(p,n,t)=\begin{cases} v^{(2)}(p,n,t), & p\in\bigcup\limits_{k=1}^{N}\mathbb{T}_k^{\pm}\cup\Sigma_r\cup\Sigma_r^{*};\\ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ [P(p)]^{2}R(p)e^{-2t\Phi(p,\xi)} & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathcal{C}^{+};\\ \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\overline{R(p)}e^{2t\Phi(p,\xi)}}{[P(p)]^{2}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & p\in\mathcal{C}^{-}.\end{cases}$$

Тепер ми маємо всі матриці стрибків збіжними до одиничної матриці при $t\to+\infty$.

3.4. Умова стрибка на спектральній лакуні

Розглянемо надалі спектральну лакуну $[E_1,E_2]$ на верхньому листі орієнтовану зліва направо (на нижній лист всі умови переносяться за допомогою умов симетрії). На відміну від розв'язків Йоста фазова функція і множник Бляшки мають на ній стрибок.

На контурі $\Sigma_r \cup \Sigma_r^*$ визначимо наступні функції

$$\Phi_+(p,\xi) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \operatorname{Re}\pi(\zeta)>0}} \Phi(\zeta,\xi), \quad \Phi_-(p,\xi) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \operatorname{Re}\pi(\zeta)<0}} \Phi(\zeta,\xi), \quad p\in\Sigma_r\cup\Sigma_r^*. \tag{3.4}$$

Далі з огляду на визначення фазової функції співвідношенням (2.4) можемо зробити наступний висновок:

$$\Phi_+(p,\xi) - \Phi_-(p,\xi) = -\int_b (\Omega_0 + \xi\omega_{\infty_+\infty_-}) = -W - \xi V.$$

З леми 2.1 випливає що $V = 2\pi i A_{\infty_-}(\infty_+)$. У введених позначеннях можемо записати наступний результат:

Лема 3.5. *Для $p \in \Sigma_r \cup \Sigma_r^*$ виконане наступне співвідношення стрибка:*

$$\left(e^{-t\Phi_+(p,\xi)}, e^{t\Phi_+(p,\xi)}\right) = \left(e^{-t\Phi_-(p,\xi)}, e^{t\Phi_-(p,\xi)}\right)\begin{pmatrix} e^{tW+nV} & 0\\ 0 & e^{-tW-nV}\end{pmatrix}; \qquad p\in\Sigma_r,$$
$$\left(e^{-t\Phi_+(p,\xi)}, e^{t\Phi_+(p,\xi)}\right) = \left(e^{-t\Phi_-(p,\xi)}, e^{t\Phi_-(p,\xi)}\right)\begin{pmatrix} e^{-tW-nV} & 0\\ 0 & e^{tW+nV}\end{pmatrix}; \qquad p\in\Sigma_r^*.$$

Аналогічно (3.4) позначимо граничні значення на контурі добутків Бляшки:

$$P_+(p) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \operatorname{Re}\pi(\zeta)>0}} P(\zeta), \quad P_-(p) = \lim_{\substack{\zeta\to p\\ \operatorname{Re}\pi(\zeta)<0}} P(\zeta), \quad p\in\Sigma_r\cup\Sigma_r^*.$$

В цих позначеннях можемо записати умови стрибка для добутку Бляшки на контурі $\Sigma_r \cup \Sigma_r^*$:

Лема 3.6. *Для множників Бляшки виконані наступні співвідношення* *стрибків:*

$$P_+(p) = P_-(p) \cdot e^{-2\pi i \sum_{\lambda_k > \nu} (A(\lambda_k) - A(\lambda_k^*))}, \qquad p \in \Sigma_r,$$
$$P_+(p) = P_-(p) \cdot e^{2\pi i \sum_{\lambda_k > \nu} (A(\lambda_k) - A(\lambda_k^*))}, \qquad p \in \Sigma_r^*.$$

З огляду на леми 3.5 та 3.6 має місце наступна умова стрибка для вектор-функції $m^{(3)}(p, n, t)$ на :

Лема 3.7. *Функція $m(p, n, t)$ задовольняє наступну умову стрибка на $\Sigma_r \cup \Sigma_r^* \setminus \{B_k^{\pm}\}_{E_1 < \lambda_k < E_2} \cup D^{\pm}$ $m_+(p, n, t) = m_-(p, n, t) w(p, n, t)$, де*

$$w(p,n,t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}, p \in \Sigma_r, \\ \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}, p \in \Sigma_r^*, \end{cases}$$

де

$$2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta) = nV + tW - 2\pi i \sum_{\lambda_k > \nu} (A(\lambda_k) - A(\lambda_k^*)) .$$

Розглянемо далі стрибок на тих ділянках відрізка $[E_1, E_2]$, які потрапили в околи власних значень λ_k:

Лема 3.8. *Функція $m(p, n, t)$ задовольняє наступну умову стрибка на $\{\Sigma_r \cup \Sigma_r^*\} \cap \{B_k^{\pm}\}_{E_1 < \lambda_k < E_2}$: $m_+(p, n, t) = m_-(p, n, t) w(p, n, t)$, де*

$$w(p,n,t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & 0 \\ \mathcal{K}_1(p,n,t) e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & e^{-2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}, p \in \Sigma_r \cap B_k^+, \\ \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & -\mathcal{K}_1(p,n,t) e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)} \\ 0 & e^{2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}, p \in \Sigma_r^* \cap B_k^-, \end{cases}$$

де

$$\mathcal{K}_1(p,n,t) = \widetilde{\gamma}_k(p) P_+(p) P_-(p) \left(e^{2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W})} - e^{-2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W})} \right).$$

Лишилося розглянути перетин відрізка $[E_1, E_2]$ з областями $D^{\pm}$ на верхньому та нижньому листі та верхньому литі відповідно.

Лема 3.9. *Функція $m(p,n,t)$ задовольняє наступну умову стрибка на $\{\Sigma_r \cup \Sigma_r^*\} \cap D^{\pm}$: $m_+(p,n,t) = m_-(p,n,t) w(p,n,t)$, де*

$$w(p,n,t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & 0 \\ \mathcal{K}_2(p,n,t) e^{-2t\Phi(\lambda_k, \xi)} & e^{-2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}, p \in \Sigma_r \cap D^+, \\ \begin{pmatrix} e^{-2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & -\mathcal{K}_2(p,n,t) e^{2t\Phi(\lambda_k^*, \xi)} \\ 0 & e^{2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}, p \in \Sigma_r^* \cap D^-, \end{cases}$$

де

$$\mathcal{K}_2(p,n,t) = R(p) \left([P_-(p)]^2 e^{2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} - [P_+(p)]^2 e^{-2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \right).$$

Лема 3.10. *Визначена матриця стрибка $w(p,n,t)$ асимптотично при $t \to \infty$ поводить себе як*

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}$$

на верхньому листі і як

$$\begin{pmatrix} e^{-2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i (n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta)} \end{pmatrix}$$

на нижньому.

Розділ 4

Модельна задача Рімана-Гільберта

4.1. Розв'язання модельної задачі Рімана-Гільберта

Як видно з лем 3.4 та 3.10 всі матриці стрибків є збіжними, або мають відому асимптотичну поведінку. У зв'язку з цим розглядають так звану модельну задачу Рімана-Гільберта, сформулюємо її.

Задача полягає в тому, щоб знайти вектор-функцію $m^{mod}(p,n,t)$ на Рімановій поверхні $\mathbb{M}$, що задовольняє наступні умови:

- Голоморфна в $\mathbb{M} \setminus \big([E_1; E_2]^+ \cup [E_1; E_2]^- \cup \{\nu, \nu^*\}\big)$.
- Задовольняє умову симетрії: $m^{mod}(p^*, n, t) = m^{mod}\sigma_1$.
- Задовольняє умову стрибка $m_+^{mod}(p,n,t) = m_-^{mod}(p,n,t)w(p)$, де:

$$w^{mod}(p) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{2\pi i(n\widetilde{V}+t\widetilde{W}+\Delta)} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i(n\widetilde{V}+t\widetilde{W}+\Delta)} \end{pmatrix} & p \in \Pi^+; \\ \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(n\widetilde{V}+t\widetilde{W}+\Delta)} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(n\widetilde{V}+t\widetilde{W}+\Delta)} \end{pmatrix} & p \in \Pi^-; \end{cases}$$

$$2\pi i(n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta) = n\int_b \omega_{\infty_+\infty_-} + t\int_b \Omega_0 - 2\pi i \sum_{\lambda_k > \nu} \left(A(\lambda_k) - A(\lambda_k^*)\right).$$

- Компонента $m_1^{(mod)}(p,n,t)$ має простий полюс у точці $\widehat{\mu}$, а компонента $m_2^{(mod)}(p,n,t)$ має простий полюс у точці $\widehat{\mu}^*$.

- Має прості полюси в точках ν та ν^* і задовольняє наступні полюсні умови:

$$res_{\nu} m^{(mod)}(p,n,t) = \lim_{p \to \nu} m^{(mod)}(p,n,t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -[P(p)]^2 \widehat{\gamma}_k e^{-2t\Phi(\lambda_k,\xi)} & 0 \end{pmatrix};$$

$$res_{\nu^*} m^{(mod)}(p,n,t) = \lim_{p \to \nu^*} m^{(mod)}(p,n,t) \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\widehat{\gamma}_k e^{2t\Phi(\lambda_k^*,\xi)}}{[P(p)]^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Задовольняє умову нормування:

$$m_1^{mod}(\infty_\pm, n, t) \cdot m_2^{mod}(\infty_\pm, n, t) = 1.$$

Будемо шукати функцію $m^{(mod)}(p,n,t)$ у наступному вигляді:

$$m^{mod}(p,n,t) = \big(\mathcal{A}(f(p,n,t) + \mathcal{B} f_0(p,n,t)); \mathcal{A}(f(p^*,n,t) + \mathcal{B} f_0(p^*,n,t))\big),$$

де

$$\begin{aligned} f(p,n,t) &= \frac{\theta(A(p) - A(\mu) + n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta - \Xi)}{\theta(A(p) - A(\mu) - \Xi)}; \\ f_0(p,n,t) &= (\mathcal{P})^{-1}(p) \cdot f_1(p,n,t); \\ f_1(p,n,t) &= \frac{\theta(A(p) - A(\mu) + n\widetilde{V} + t\widetilde{W} + \Delta - A(\nu) + A(\nu^*))}{\theta(A(p) - A(\mu) - \Xi)}; \\ (\mathcal{P})^{-1}(p) &= \frac{\theta(A(\nu) + \Xi)\, \theta(A(p) - A(\nu^*) - \Xi)}{\theta(A(\nu^*) + \Xi)\, \theta(A(p) - A(\nu) - \Xi)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Задана таким чином функція задовольняє умови стрибка, симетрії та має прості полюси у точках ν, ν^* та $\widehat{\mu}$. Порівнюючи умови на лишки розглянутої функції з необхідними і скориставшись рівностями $(\mathcal{P}_j)^{-1}(\lambda_j, -) =$

0 та $f(\lambda_j,-)=f_1(\lambda_j,+)$ отримуємо:

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}(n,t)=-\frac{[P(\nu)]^2\widehat{\gamma}_k e^{-2t\Phi(\nu,\xi)}\,\theta(A(\nu^*)+\Xi)\,\theta'(\Xi)}{\theta(A(\nu)+\Xi)\,\theta(A(\nu)-A(\nu^*)-\Xi)}. \tag{4.2}$$

Має місце наступний технічний результат:

Лема 4.1. • *Для похідної тета-функції виконано:* $\operatorname{Re}\theta'(\Xi)=0$ *та* $\operatorname{Im}\theta'(\Xi)>0$.

- *Коефіцієнт* $\mathcal{B}$*, визначений рівністю* (4.2)*, є додатним.*
- $f(\infty_\pm,n,t)>0$ *та* $f_1(\infty_\pm,n,t)>0$.

Далі з умови нормування отримуємо:

$$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}(n,t)^2=\frac{1}{\Big(f(\infty_+,n,t)+\mathcal{B}f_0(\infty_+,n,t)\Big)\Big(f(\infty_-,n,t)+\mathcal{B}f_0(\infty_-,n,t)\Big)}. \tag{4.3}$$

Знак $\mathcal{A}$ ми обираємо відповідно до умови $m_1^{mod}(\infty_+,n,t)>0$.

Зауваження 4.2. *Відповідно до леми 4.1, значення* $\mathcal{A}^2$ *співвідношенням* (4.3) *визначено коректно.* Таким чином доведена наступна теорема:

Теорема 4.3. *Розв'язком модельної векторної задачі Рімана-Гільберта є функція* $m^{(mod)}(p,n,t)$*, яка визначена наступним чином:*

$$m^{mod}(p,n,t)=\big(\mathcal{A}(f(p,n,t)+\mathcal{B}f_0(p,n,t));\mathcal{A}(f(p^*,n,t)+\mathcal{B}f_0(p^*,n,t))\big),$$

де

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}(n,t)=-\frac{[P(\nu)]^2\widehat{\gamma}_k e^{-2t\Phi(\nu,\xi)}\,\theta(A(\nu^*)+\Xi)\,\theta'(\Xi)}{\theta(A(\nu)+\Xi)\,\theta(A(\nu)-A(\nu^*)-\Xi)};$$

$$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}(n,t)^2=\frac{1}{\Big(f(\infty_+,n,t)+\mathcal{B}f_0(\infty_+,n,t)\Big)\Big(f(\infty_-,n,t)+\mathcal{B}f_0(\infty_-,n,t)\Big)},$$

$$
\begin{aligned}
f(p,n,t) &= \frac{\theta(A(p)-A(\mu)+n\widetilde{V}+t\widetilde{W}+\Delta-\Xi)}{\theta(A(p)-A(\mu)-\Xi)};\\
f_0(p,n,t) &= (\mathcal{P})^{-1}(p)\cdot f_1(p,n,t);\\
f_1(p,n,t) &= \frac{\theta(A(p)-A(\mu)+n\widetilde{V}+t\widetilde{W}+\Delta-A(\nu)+A(\nu^*))}{\theta(A(p)-A(\mu)-\Xi)};\\
(\mathcal{P})^{-1}(p) &= \frac{\theta(A(\nu)+\Xi)\,\theta(A(p)-A(\nu^*)-\Xi)}{\theta(A(\nu^*)+\Xi)\,\theta(A(p)-A(\nu)-\Xi)}.
\end{aligned}
$$

Знак $\mathcal{A}$ обраний таким чином, щоб $m_1^{mod}(\infty_+,n,t)>0$.

4.2. Дослідження модельного розв'язку

Розглянемо початкову вектор-функцію $m(p,n,t)$ на верхньому листі:

$$m(p,n,t)=\Big(T(\lambda)\,\varphi(\lambda,n,t)\,e^{-t\,\Phi(p,\xi)},\psi(\lambda,n,t)\,e^{t\,\Phi(p,\xi)}\Big)$$

Згідно з [11] розв'язки Йоста пов'язані з фоновими функціями Бейкера-Ахієзера за допомогою оператора перетворення:

$$\psi(\lambda,n,t)=\sum_{l=n}^{-\infty}K_-(n,l,t)\widehat{\psi}_-(\lambda,l,t).$$

Нас цікавить поведінка розв'язку $\psi(\lambda,n,t)$ при λ близьких до нескінченно віддаленої точки Рімановї поверхні. Користуючись визначенням 2.8 можемо записати наступне твердження:

Лема 4.4. *Має місце наступна еквівалентність:*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\psi(\lambda,n,t)}{\widehat{\psi}(\lambda,n,t)}=K_-(n,n,t)=\prod_{m=n-1}^{-\infty}\frac{\widehat{a}(j,t)}{a(j,t)}.$$

З робіт [9] і [11] відомо, що при $n<0$ та $\lambda\to\infty$ справедливі наступні розкладання в околі нескінченно віддаленої точки:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\psi}(\lambda,n,t)\, e^{n\int_b \omega_{\infty_+\infty_-}+t\int_b\Omega_0} \\
&\qquad = \lambda^n \left(\prod_{l=n}^{-1} (\widehat{a}(l,t))^{-1}\right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{a}}{\lambda}\right)^n \cdot e^{h(t)}(1+o(1)); \\
&\widehat{\psi}(\lambda,n+1,t)\, e^{(n+1)\int_b \omega_{\infty_+\infty_-}+t\int_b\Omega_0} \\
&\qquad = \lambda^{n+1} \left(\prod_{l=n+1}^{-1} (\widehat{a}(l,t))^{-1}\right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{a}}{\lambda}\right)^{n+1} \cdot e^{h(t)}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

З наведеної рівності випливає наступна рівність:

$$\frac{m_2(\infty_+,n,t)}{m_2(\infty_+,n+1,t)} = \frac{\widehat{a}(n,t)}{\mathbf{a}} \cdot \frac{a(n,t)}{\widehat{a}(n,t)} = \frac{a(n,t)}{\mathbf{a}}.$$

Помітимо що єдине перетворення, що вплинуло на значення у нескінченно віддаленій точці це додання множників Бляшки (див. формули (3.1), (3.2), (3.3)), тому можемо зробити висновок:

$$\frac{m_2^{(3)}(\infty_+,n,t)}{m_2^{(3)}(\infty_+,n+1,t)} = \frac{m_2(\infty_+,n,t)}{m_2(\infty_+,n+1,t)} = \frac{a(n,t)}{\mathbf{a}}.$$

Таким чином, після переходу до модельної задачі, нам залишилося дослідити відношення $\dfrac{m_2^{(mod)}(\infty_+,n,t)}{m_2^{(mod)}(\infty_+,n+1,t)}$. Сформулюємо допоміжний технічний результат:

Лема 4.5. *Для функцій, що визначені рівностями* (4.1)*, виконані наступні співвідношення:*

- $f(\infty_+,n,t) = f(\infty_-,n+1,t)$*;*
- $f_0(\infty_-,n+1,t) = \mathcal{P}^2(\infty_+) f_0(\infty_+,n,t)$*.*

Використовуючи результат леми 4.5 можемо переписати відношення, що нас цікавить, наступним чином:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{m_2^{mod}(\infty_+,n,t)}{m_2^{mod}(\infty_+,n+1,t)}\right)^2 \\
&\quad = \frac{f(\infty_+,n-1,t)+\mathcal{B}(n,t)\,\mathcal{P}^2(\infty_+)f_0(\infty_+,n-1,t)}{f(\infty_+,n,t)+\mathcal{B}(n,t)\,f_0(\infty_+,n,t)}\times \\
&\qquad \frac{f(\infty_+,n+1,t)+\mathcal{B}(n+1,t)\,f_0(\infty_+,n+1,t)}{f(\infty_+,n,t)+\mathcal{B}(n+1,t)\,\mathcal{P}^2(\infty_+)f_0(\infty_+,n,t)}
\end{aligned}
$$

З формули (4.2) видно, що $\mathcal{B}(n,t) = \mathcal{B}(n+1,t)\mathrm{e}^{C(\nu)}$, тобто ці функції поза променем

$$
\frac{n}{t} = -\frac{\int_{E_0}^{\nu}\Omega_0}{\int_{E_0}^{\nu}\omega_{\infty_+,\infty_-}} = \xi_\nu
$$

одночасно прямують або до $+\infty$ $(n > \xi_\nu t)$ або до 0 $(n < \xi_\nu t)$. У кожному з цих випадків, враховуючи співвідношення (4.1), має місце асимптотична поведінка:

$$
\begin{aligned}
\frac{m_2^{mod}(\infty_+,n,t)}{m_2^{mod}(\infty_+,n+1,t)} &\sim \sqrt{\frac{f(\infty_+,n-1,t)\,f(\infty_+,n+1,t)}{\left(f(\infty_+,n,t)\right)^2}} + O(\mathrm{e}^{-C(\nu)t}),\\
\frac{m_2^{mod}(\infty_+,n,t)}{m_2^{mod}(\infty_+,n+1,t)} &\sim \sqrt{\frac{f_1(\infty_+,n-1,t)\,f_1(\infty_+,n+1,t)}{\left(f_1(\infty_+,n,t)\right)^2}} + O(\mathrm{e}^{-C(\nu)t}).
\end{aligned}
$$

Подальший аналіз цих формул призводить до наступного результату

Теорема 4.6. *Припустимо, що дискретний спектр задачі* (1.2), (1.14)-(1.16),*що лежить правіше* E_3, *занумеровано таким чином, що* $E_3 < \lambda_{N_0} < \ldots < \lambda_{N-1} < \lambda_N$. *Позначимо*

$$
\xi_k = -\frac{\mathrm{Re}\,\int_{E_0}^{\lambda_k+\mathrm{i}0}\Omega_0}{\mathrm{Re}\,\int_{E_0}^{\lambda_k+\mathrm{i}0}\omega_{\infty_+,\infty_-}}, \quad k = N_0,\ldots,N; \quad \xi_{N+1} = -\infty,
$$

$$
\xi_{N_0-1} = -\frac{\mathrm{Re}\,\int_{E_0}^{E_3+\epsilon+\mathrm{i}0}\Omega_0}{\mathrm{Re}\,\int_{E_0}^{E_3+\epsilon+\mathrm{i}0}\omega_{\infty_+,\infty_-}}.
$$

Нехай $\hat{\mu}_k \in \mathbb{M}$ *є точкою на Рімановій поверхні із проекцією в лакуну, що є* *єдиним розв'язком проблеми обернення Якобі:*

$$A(\hat{\mu}_k) - A(\mu) = \sum_{\lambda_j > \lambda_k} \left(A(\lambda_j) - A(\lambda_j^*) \right).$$

Нехай $\{\hat{a}_k(n,t), \hat{b}_k(n,t)\}$ *це скінченнозонний розв'язок рівняння* (1.2), *що є ізоспектральним розв'язку* $\{\hat{a}(n,t), \hat{b}(n,t)\}$, *але має додатковий спектр Дірiхле в точці* $\hat{\mu}_k$, $k = N_0, ..., N+1$, *де* $\mu_{N+1} \equiv \mu$. *Тоді існують позитивні константи* α, β, *що не залежать від* n, t, *і такі, що при* $k = N_0, ...N+1$*:*

$$a(n,t) - \hat{a}_k(n,t) = O(\mathrm{e}^{-\alpha t}), \quad \xi_k + \beta \frac{\ln t}{t^2} < \frac{n}{t} < \xi_{k-1} - \beta \frac{\ln t}{t};$$

$$b(n,t) - \hat{b}_k(n,t) = O(\mathrm{e}^{-\alpha t}), \quad \xi_k + \beta \frac{\ln t}{t^2} < \frac{n}{t} < \xi_{k-1} - \beta \frac{\ln t}{t^2}.$$

Список використаних джерел

[1] Gerald Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices.* Mathematical Surveys and Monographs **72**, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[2] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices,* 2nd enl. ed., Springer, Berlin, 1989.

[3] H. Krüger and G. Teschl, *Long-time asymptotics of the Toda lattice for decaying initial data revisited,* Rev. Math. Phys. **21:1**, 61-109 (2009).

[4] I. Egorova, J. Michor, and G. Teschl, *Inverse scattering transform for the Toda hierarchy with steplike finite-gap backgrounds,* J. Math. Physics **50**, 103522 (2009).

[5] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. **15**, 240–243 (1965).

[6] I. Egorova, J. Michor, and G. Teschl, *Inverse scattering transform for the Toda hierarchy with quasi-periodic background*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**, 1817–1827 (2007).

[7] I. Egorova, J. Michor, and G. Teschl, *Soliton solutions of the Toda hierarchy on quasi-periodic background revisited*, Math. Nach. **282:4**, 526–539 (2009).

[8] S. Kamvissis and G. Teschl, *Long-time asymptotics of the periodic Toda lattice under short-range perturbations,* J. Math. Phys. **53**, 073706 (2012).

[9] I. Egorova, J. Michor, *Scattering theory for Jacobi operators with quasi-periodic background,* Comm. Math. Phys. **264:3**, 811-842 (2006).

[10] G. Teschl, *Algebro-geometric constraints on solitons with respect to quasi-periodic backgrounds,* Bull. London Math. Soc. **39:4**, 677-684 (2007).

[11] I. Egorova, J. Michor, and G. Teschl, *Scattering theory for Jacobi operators with general steplike quasi-periodic background,* Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. **4:1**, 33-62 (2008).

[12] I. Egorova and J. Michor, *Rarefaction waves for the Toda equation via nonlinear steepest descent,* Discrete Contin. Dyn. Syst. **38**, 2007-2028 (2018).

[13] I. Egorova and J. Michor, *Long-time asymptotics for the Toda shock problem: Non-overlapping spectra,* Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. **14**, 406-451 (2018).

[14] W. Bulla, F. Gesztesy, H. Holden, and G. Teschl, *Algebro-Geometric Quasi-Periodic Finite-Gap Solutions of the Toda and Kac-van Moerbeke Hierarchies,* Memoirs of the Amer. Math. Soc. **135/641**, 1998.

[15] P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer, and X. Zhou, *The Toda rarefaction problem*, Comm. Pure Appl. Math. **49**, 35–83 (1996).

[16] A. M. Bloch and Y. Kodama, *The Whitham equation and shocks in the Toda lattice*, Proceedings of the NATO Advanced Study Workshop on Singular Limits of Dispersive Waves held in Lyons, July 1991, Plenum Press, New York, 1994.

[17] A. M. Bloch and Y. Kodama, *Dispersive regularization of the Whitham equation for the Toda lattice*, SIAM J. Appl. Math. **52**, 909–928 (1992).

[18] S. Venakides, P. Deift, and R. Oba, *The Toda shock problem*, Comm. Pure Appl. Math. **44**, 1171–1242 (1991).

[19] P. D. Lax *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure and Appl. Math. **21**, 467–490 (1968).

[20] K. M. Case and M. Kac, *A discrete version of the inverse scattering problem*, J. Math. Phys. **14**, 594–603 (1973).

[21] G.S. Guseinov, *The inverse problem of scattering theory for a second-order difference equation on the whole axis*, Soviet Math. Dokl., **17**, 1684–1688 (1976).