Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.1 № 475, 2000, с. 347–357

О синтезе управления для некоторых уравнений гиперболического типа

Г. М. Скляр*, В. А. Скорик

Харьковский национальный университет, Украина
**Szczecin University, Poland*

Рассмотрена задача синтеза позиционного управления для управляемого процесса, который описывается линейным дифференциальным уравнением с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве. Указано такое ограниченное позиционное управление, что решение соответствующего уравнения с произвольным начальным условием стремится к нулю за конечное время, равное значению функционала управляемости в начальном состоянии. Приведены примеры управляемых процессов, для которых это управление решает рассмотренную задачу.

1. Введение

Рассмотрим задачу синтеза ограниченного позиционного управления для управляемого процесса, описываемого линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{X},\ u \in \mathbf{\Omega} \subset \mathbf{U},\ 0 \in \operatorname{int}\mathbf{\Omega}, \tag{1}$$

где $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ – пространства Гильберта, оператор A с областью определения $\mathbf{D}(A)$ порождает сильно непрерывную группу операторов $\left\{e^{At}\right\}$, $-\infty < t < +\infty$, B – ограниченный оператор, действующий из пространства $\mathbf{U}$ в пространство $\mathbf{X}$, т.е. $B \in [\mathbf{U}, \mathbf{X}]$. Эта задача состоит в построении управления u в виде $u = u(x)$, удовлетворяющего ограничению $u(x) \in \mathbf{\Omega}$, такого, чтобы для любого x_0 из некоторой окрестности $\mathbf{Q}$ начала координат решение $x(t)$ задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu(x)$, $x(0) = x_0$ удовлетворяло при некотором конечном $T = T(x_0)$ условию $\lim\limits_{t \to T(x_0)} x(t) = 0$. Если $\mathbf{Q} = \mathbf{X}$, то будем говорить о глобальном синтезе, и о локальном – в противном случае.

Будем предполагать, что уравнение (1) является точно 0-управляемым за свободное время.

В работе [1] получено конструктивное решение задачи локального синтеза ограниченного управления для уравнения (1) в случае, когда A является ограниченным оператором. А именно, показано, что решением этой задачи является управление

$$u(x) = -\frac{1}{2}B^*N^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, \tag{2}$$

где $\Theta(x)$ – функционал управляемости, определяемый при $x \neq 0$ как единственное положительное решение уравнения

$$2a_0\Theta = \left(N^{-1}\left(\tfrac{1}{\Theta}\right)x, x\right), \ a_0 > 0,$$

$$N(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt, \quad \lambda > 2\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\|e^{-At}\|}{t} = 2\omega_0(-A).$$

В работе [2] показано, что управление (2) решает задачу синтеза для уравнения (1) с неограниченным оператором A, если при некотором натуральном k и некотором $\lambda \geq \lambda_0 = \max\{0, 2\omega_0(-A)\}$ выполнено неравенство

$$(N(\lambda)x, x) \geq \frac{\gamma}{\lambda}\|T_\lambda^{*k}x\|^2, \quad \gamma > 0,$$

где $T_\lambda = A(A + \lambda I)^{-1}$.

С другой стороны, результаты работы [1] получили дальнейшее развитие и в случае ограниченного оператора A. Так, в работе [3] дано описание множества ограниченных позиционных управлений, решающих задачу локального синтеза. А именно, описан класс функций $\mathfrak{F}_m(A)$ такой, что каждая функция $f \in \mathfrak{F}_m(A)$ порождает синтезирующее управление $u_f(x)$, удовлетворяющее ограничению $\|u_f(x)\| \leq d$ в некоторой области $\mathbf{Q}_f \setminus \{0\}$.

При этом в исходных предположениях в уравнении (1) относительно оператора A для произвольной невозрастающей неотрицательной на полуоси $[0, \infty)$ функции $f(s)$, удовлетворяющей условию $-\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln f(s)}{s} = f_0 > 0$ (константа f_0 может быть равна $+\infty$, например, когда f – финитная функция), установлены следующие факты, которые будут использованы нами далее. А именно:

– положительная обратимость оператора

$$N_f(\lambda)x = \int\limits_0^\infty f(\lambda t)e^{-At}BB^*e^{-A^*t}x\,dt, \quad \lambda > \lambda_0 = \max\left\{0, \frac{2\omega_0(-A)}{f_0}\right\}; \tag{3}$$

– существование и единственность положительного решения $\Theta(x)$ в области $\mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$ уравнения

$$2a_0\Theta = \left(N_f^{-1}\left(\tfrac{1}{\Theta}\right)x, x\right), \quad a_0 > 0, \tag{4}$$

$\mathbf{Q}_1 = \{x : \|x\| \leq R_f\}$ $(R < \sqrt{2a_0\Theta_f/\|N_f^{-1}(\frac{1}{\Theta_f})\|},\ 0 < \Theta_f < \lambda_0^{-1})$, $\Theta(0) = 0$;

– непрерывность функционала $\Theta(x)$ при $x \in \mathbf{Q}_1$ и его непрерывная дифференцируемость в $\mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$;

– из того, что $\Theta(x) \to 0$, следует $x \to 0$;

– существование такой константы C $(0 < C < R^2/2a_0\|N_f(\frac{1}{\Theta_f})\|)$, что множество $\mathbf{Q} = \{x : \Theta(x) \leq C\}$ ограничено и $\mathbf{Q} \subset \mathrm{int}\mathbf{Q}_1$;

– липшицевость управления $u_f(x) = -\frac{1}{2}f(0)B^*N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x$ в $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}(\rho_1, \rho_2)$, $\mathbf{K}(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 < R\}$;

– непрерывность функционала $\Psi_f(x_0) = \Phi_t(x_0, 0)$ для любого $x_0 \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, где $\Phi(x_0, t) = \Theta(x(t))$, $x(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu_f(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbf{Q} \setminus \{0\};$$

– показано, что функционал $\Psi_f(x) = \langle \Theta_x, Ax + Bu_f(x)\rangle$ в области $x \in \mathbf{D}(A) \cap (\mathbf{Q} \setminus \{0\})$ имеет вид

$$\Psi_f(x) = \frac{\Theta(x)\left(\widehat{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x\right)}{\left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, x\right) + \left(\widetilde{N}_f\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x, N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x\right)}, \qquad (5)$$

где операторы $\widehat{N}_f(\lambda)$, $\widetilde{N}_f(\lambda)$ задаются соотношениями

$$\widehat{N}_f(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-At}BB^*e^{-A^*t}x\,d(-f(\lambda t)), \qquad (6)$$

$$\widetilde{N}_f(\lambda)x = \int_0^\infty te^{-At}BB^*e^{-A^*t}x\,d(-f(\lambda t)). \qquad (7)$$

2. Основной результат

Пусть $f(s) = f_0(s)$, где

$$f_0(s) = \begin{cases} 1 - s \text{ при } s \in [0, 1], \\ 0 \quad \text{ при } s > 1. \end{cases} \qquad (8)$$

Тогда оператор $N_{f_0}(\lambda)$, согласно (3), задается соотношением

$$N_{f_0}(\lambda)x = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (1 - \lambda t)e^{-At}BB^*e^{-A^*t}x\,dt, \quad \lambda > 0. \qquad (9)$$

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) оператор A обладает в $\mathbf{X}$ ортогональным нормированным базисом из собственных векторов $\{e_n\}_{n=\pm1,\pm2,\ldots}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n=\pm1,\pm2,\ldots}$ таким, что*

$$\overline{\lambda_n} = \lambda_{-n}, \quad |\mathrm{Re}\lambda_n| \leq \Lambda, \quad |\mathrm{Im}\lambda_n| \geq q > 0, \quad n = \pm1, \pm2, \ldots.$$

Пусть $\mathbf{U} = \overline{Span\{e_n - e_{-n}\}}_{n=\pm1,\pm2,\ldots}$ *и* B *оператор вложения* $\mathbf{U}$ *в* $\mathbf{X}$, *т.е.* $B(e_n - e_{-n}) = e_n - e_{-n}$. *Пусть* $f = f_0$ *из (8) и функционал* $\Theta(x)$ *в* $\mathbf{Q}_1 \setminus \{0\}$ *определяется из уравнения (4);* $\Theta(0) = 0$.

Тогда существует константа $c > 0$ *такая, что* $\mathbf{Q}_c = \{x : \Theta(x) \le c\} \subset \operatorname{int}\mathbf{Q}_1$ *и при значениях коэффициента* $a_0 :\ 0 < a_0 \le \widetilde{a}_{f_0}$, *управление*

$$u_{f_0}(x) = -\frac{1}{2}B^* N_{f_0}^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x \tag{10}$$

решает задачу локального синтеза в $\mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$, *а в случае, когда* $\mathrm{Re}\lambda_n = 0$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, *то задачу глобального синтеза, удовлетворяет ограничению* $\|u_{f_0}(x)\| \le d$, *причем* $T(x_0) = \Theta(x_0)$.

Доказательство основано на теореме 1 из [1]. Пусть $\mathbf{Q}_c = \{x : \Theta(x) \le c\}$, где c – достаточно малое положительное число, удовлетворяющее условию $0 < c < \min\{C, 1/\Lambda\}$, константа C из предыдущего раздела. Тогда $\mathbf{Q}_c \subset \operatorname{int}\mathbf{Q}_1$. Учитывая результаты работы [3], приведенные в предыдущем разделе, нам осталось установить в области $\mathbf{D}(A) \cap (\mathbf{Q}_c \setminus \{0\})$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ неравенство

$$\Psi_{f_0}(x) \le -\beta\Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \tag{11}$$

и показать, что управление $u_{f_0}(x)$ удовлетворяет заданным ограничениям.

Из (5) получаем, что

$$\Psi_{f_0}(x) = -1, \tag{12}$$

т.е. оценка (11) выполнена при $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Докажем ограниченность управления $u_{f_0}(x)$ в области $\mathbf{Q}_c \setminus \{0\}$. Покажем, что коэфффициент a_0 можно выбрать так, что будет выполнено неравенство

$$\|u_{f_0}(x)\|^2 = \frac{1}{2}a_0\Theta(x)\frac{\|B^*\psi\|^2}{\left(N_{f_0}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)\psi, \psi\right)} \le d^2, \tag{13}$$

где $\psi = N_{f_0}^{-1}\left(\frac{1}{\Theta(x)}\right)x$. Для этого вычислим выражения $(N_{f_0}(\lambda)\psi, \psi)$ и $\|B^*\psi\|$. Имеем для вектора $\psi = \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\ne0}}^{\infty} \psi_n e_n$:

$$B^* e^{-A^*t}\psi = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_{-n}t}\psi_n - e^{-\lambda_n t}\psi_{-n}\right)(e_n - e_{-n}),$$

$$(N_{f_0}(\lambda)\psi, \psi) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(1-\lambda t)\left|e^{-\lambda_{-n}t}\psi_n - e^{-\lambda_n t}\psi_{-n}\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\xi(\lambda)\left(|\psi_n|^2 + |\psi_{-n}|^2\right) - \left(\frac{1}{2\lambda_{-n}} - \right.$$

$$\frac{\lambda}{4\lambda_{-n}^2}\left(1-e^{-2\lambda_{-n}/\lambda}\right)\Bigg)\psi_n\overline{\psi_{-n}}\left(\frac{1}{2\lambda_n}-\frac{\lambda}{4\lambda_n^2}\left(1-e^{-2\lambda_n/\lambda}\right)\right)\overline{\psi_n}\psi_{-n}\Bigg],$$

где

$$\xi(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\mathrm{Re}\lambda_n}-\dfrac{\lambda}{(2\mathrm{Re}\lambda_n)^2}\left(1-e^{-2\mathrm{Re}\lambda_n/\lambda}\right), & \text{если } \mathrm{Re}\lambda_n\neq 0,\\ \dfrac{1}{2\lambda}, & \text{если } \mathrm{Re}\lambda_n=0,\end{cases} \tag{14}$$

$$B^*\psi=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n-\psi_{-n})(e_n-e_{-n}),$$

$$\|B^*\psi\|^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\psi_n|^2+|\psi_{-n}|^2-\psi_n\overline{\psi_{-n}}-\overline{\psi_n}\psi_{-n}\right).$$

Из (13) следует, что нам требуется установить неравенство

$$\frac{1}{\Theta}\left(N_{f_0}\left(\frac{1}{\Theta}\right)\psi,\psi\right)-\frac{a_0}{2d^2}\|B^*\psi\|^2\geq 0,$$

которое принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\left(\frac{1}{\Theta}\xi\left(\frac{1}{\Theta}\right)-\frac{a_0}{2d^2}\right)\left(|\psi_n|^2+|\psi_{-n}|^2\right)-$$

$$-\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_{-n}\Theta}-\frac{1}{4\lambda_{-n}^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_{-n}\Theta}\right)\right)\psi_n\overline{\psi_{-n}}-$$

$$-\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_n\Theta}-\frac{1}{4\lambda_n^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_n\Theta}\right)\right)\overline{\psi_n}\psi_{-n}\Bigg]\geq 0.$$

В силу критерия Сильвестра достаточно установить при $0<\Theta\leq c$ равномерно по n оценки:

$$\frac{1}{\Theta}\xi\left(\frac{1}{\Theta}\right)-\frac{a_0}{2d^2}\geq 0,$$

$$\left(\frac{1}{\Theta}\xi\left(\frac{1}{\Theta}\right)-\frac{a_0}{2d^2}\right)^2-\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_{-n}\Theta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\lambda_{-n}^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_{-n}\Theta}\right)\right)\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_n\Theta}-\frac{1}{4\lambda_n^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_n\Theta}\right)\right)\geq 0,$$

которые на основании (14) имеют вид

$$\frac{1}{2\Theta\mathrm{Re}\lambda_n}-\frac{a_0}{2d^2}-\frac{1}{(2\mathrm{Re}\lambda_n)^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\Theta\mathrm{Re}\lambda_n}\right)\geq 0, \tag{15}$$

$$\left(\frac{1}{2\Theta\mathrm{Re}\lambda_n}-\frac{a_0}{2d^2}-\frac{1}{(2\mathrm{Re}\lambda_n)^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\Theta\mathrm{Re}\lambda_n}\right)\right)^2-\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_{-n}\Theta}-\right.$$

$$-\frac{1}{4\lambda_{-n}^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_{-n}\Theta}\right)\right)\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_n\Theta}-\frac{1}{4\lambda_n^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_n\Theta}\right)\right)\geq 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{a_0}{2d^2}\geq 0, \quad (17)$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{a_0}{2d^2}\right)^2-\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_{-n}\Theta}-\right.$$

$$-\frac{1}{4\lambda_{-n}^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_{-n}\Theta}\right)\right)\left(-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{1}{2\lambda_n\Theta}-\frac{1}{4\lambda_n^2\Theta^2}\left(1-e^{-2\lambda_n\Theta}\right)\right)\geq 0. \quad (18)$$

Обозначим $\nu_n = \mathrm{Re}\lambda_n$, $\mu_n = \mathrm{Im}\lambda_n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда неравенства (15)–(18) принимают вид

$$\frac{1}{2}-\frac{a_0}{2d^2}+\frac{\nu_n\Theta}{3}+o(\Theta)\geq 0,\ \frac{1}{18}\mu_n^2\Theta^2\left(1-\frac{3a_0}{d^2}\right)+o\left(\Theta^2\right)\geq 0, \text{ если } \mathrm{Re}\lambda_n\neq 0,$$

$$a_0\leq d^2, \quad \frac{1}{18}\mu_n^2\Theta^2\left(1-\frac{3a_0}{d^2}\right)+o\left(\Theta^2\right)\geq 0, \quad \text{если} \quad \mathrm{Re}\lambda_n = 0,$$

которые справедливы при $\Theta \leq c$, если коэффіцциент a_0 удовлетворяет условию

$$0 < a_0 \leq a_{f_0} < \frac{1}{3}d^2, \quad (19)$$

при этом $\widetilde{a}_{f_0} = a_{f_0}$.

Таким образом, при значениях коэффициента a_0 из (19) управление $u_{f_0}(x)$ решает задачу локального синтеза и удовлетворяет ограничению

$$\|u_{f_0}(x)\| \leq d, \quad x \in \mathbf{Q}_c \setminus \{0\}. \quad (20)$$

Рассмотрим случай, когда $\nu_n = 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. В этом случае оператор A порождает унитарную полугруппу, которая может быть продолжена до унитарной группы [4]. Операторы $\widehat{N}_f(\lambda)$, $\widetilde{N}_f(\lambda)$ из (6), (7) при $f = f_0$ имеют вид $\widehat{N}_{f_0}(\lambda) = \lambda \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$, $\widetilde{N}_{f_0}(\lambda) = \lambda \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda}} te^{-At}BB^*e^{-A^*t}dt$ и определены на всей положительной полуоси $\lambda > 0$. Уравнение (4) определяет функционал $\Theta(x)$ для всех $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$, поскольку функция $\Phi(\Theta) = 2\mathrm{a}_0\Theta - \left(N_f^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}\right)x, x\right)$ монотонно возрастает на $(0, +\infty)$ и $\lim\limits_{\Theta\to+0}\Phi(\Theta) = -\infty$, $\lim\limits_{\Theta\to+\infty}\Phi(\Theta) = +\infty$. Тогда управление (10) и функционал $\Psi_{f_0}(x)$ также определены для всех $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$. Для функционала $\Psi_{f_0}(x)$ имеем, что

$$\Psi_{f_0}(x) = -1 \quad (21)$$

для $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$, т.е. оценка (11) выполнена при $\alpha = \beta = 1$ в глобальном смысле.

Покажем, что в этом случае управление $u_{f_0}(x)$ удовлетворяет заданным ограничениям во всем пространстве $\mathbf{X}$. Учитывая (20), нам осталось установить ограниченность управления $u_{f_0}(x)$ в области $\{x : \Theta(x) \geq c\}$. Для этого вначале покажем, что для любого достаточно малого $T_0 > 0$ оператор N_{T_0}, заданный соотношением $N_{T_0}x = \int\limits_0^{T_0} e^{-At}BB^* e^{-A^*t}dtx$, является положительно определенным. Действительно, так как

$$(N_{T_0}x, x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{T_0}\left|e^{-\lambda_{-n}t}x_n - e^{-\lambda_n t}x_{-n}\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[T_0\left(|x_n|^2 + |x_{-n}|^2\right) + \frac{i}{2\mu_n}\left(1 - e^{-i2\mu_n T_0}\right)x_{-n}\overline{x_n} -$$
$$- \frac{i}{2\mu_n}\left(1 - e^{i2\mu_n T_0}\right)x_n\overline{x_{-n}}\Big],$$

то согласно критерию Сильвестра достаточно установить равномерно по n неравенство

$$T_0^2 - \frac{1}{4\mu_n^2}\left(1 - e^{-i2\mu_n T_0}\right)\left(1 - e^{i2\mu_n T_0}\right) > 0.$$

Из последнего неравенства получаем, что

$$\frac{1}{3}\mu_n^2 T_0^4 + o\left(T_0^5\right) > 0.$$

Следовательно, для достаточно малых $T_0 > 0$ оператор N_{T_0} положительно определенный.

Тогда для выбранной нами ранее константы $c > 0$ существует $T_0 > 0$ такое, что точка T_0/c принадлежит носителю функции $f_0(s)$, причем для этого T_0 справедливо неравенство

$$(N_{T_0}x, x) \geq \delta\|x\|^2, \quad \delta > 0. \tag{22}$$

Учитывая это, получим оценку снизу для $\frac{1}{\Theta}\left(N_{f_0}\left(\frac{1}{\Theta}\right)\psi, \psi\right)$. На основании неравенства (22) и унитарности группы $\left\{e^{-A^*t}\right\}$, $-\infty < t < +\infty$, имеем

$$\frac{1}{\Theta}\left(N_{f_0}\left(\frac{1}{\Theta}\right)\psi, \psi\right) = \frac{1}{\Theta}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{kT_0}^{(k+1)T_0} f_0\left(\frac{t}{\Theta}\right)\|B^*e^{-A^*t}\psi\|^2 dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{\Theta}\sum_{k=0}^{\infty} f_0\left(\frac{(k+1)T_0}{\Theta}\right)\left(N_{T_0}e^{-A^*kT_0}\psi, e^{-A^*kT_0}\psi\right) \geq$$

$$\geq \frac{\delta}{\Theta}\sum_{k=0}^{\infty} f_0\left(\frac{(k+1)T_0}{\Theta}\right)\|e^{-A^*kT_0}\psi\|^2 = \|\psi\|^2\frac{\delta}{\Theta}\sum_{k=1}^{\infty} f_0\left(\frac{kT_0}{\Theta}\right). \tag{23}$$

Так как $\int\limits_{T_0}^{\infty} f_0\left(\frac{t}{\Theta}\right) dt \le T_0 \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_0\left(\frac{kT_0}{\Theta}\right)$, то из (23) получаем

$$\frac{1}{\Theta}\left(N_{f_0}\left(\frac{1}{\Theta}\right)\psi,\psi\right) \ge \frac{\delta}{T_0}\|\psi\|^2 \frac{1}{\Theta}\int\limits_{T_0}^{\infty} f_0\left(\frac{t}{\Theta}\right) dt =$$

$$= \frac{\delta}{T_0}\|\psi\|^2 \int\limits_{\frac{T_0}{\Theta}}^{\infty} f_0(\tau)d\tau \ge \frac{\delta}{T_0}\|\psi\|^2 \int\limits_{\frac{T_0}{c}}^{\infty} f_0(\tau)d\tau = I_c\frac{\delta}{T_0}\|\psi\|^2, \tag{24}$$

где $I_c = \frac{1}{2} - \frac{T_0}{c} + \frac{T_0^2}{2c^2} > 0$.

Используя равенство (4) и неравенство (24), имеем:

$$\|u_{f_0}(x)\|^2 = \frac{1}{4}\|B^*\psi\|^2 = \frac{1}{2}a_0 \ \frac{\|B^*\psi\|^2}{\frac{1}{\Theta(x)}\left(N_f(\frac{1}{\Theta(x)})\psi,\psi\right)} \le$$

$$\le \frac{T_0}{2\delta I_c}\, a_0, \quad x \in \{x : \Theta(x) \ge c\}. \tag{25}$$

Выбирая коэффициент a_0 из условия

$$0 < a_0 \le a'_{f_0} = \frac{2\delta I_c d^2}{T_0}, \tag{26}$$

из (25) получаем, что

$$\|u_f(x)\| \le d \quad \text{при} \quad x \in \{x :\ \Theta(x) \ge c\}. \tag{27}$$

Из (20) и (27), на основании (19) и (26), получаем, что для коэффициента a_0 такого, что $0 < a_0 \le \tilde{a}_{f_0} = \min\{a_{f_0}, a'_{f_0}\}$, управление $u_{f_0}(x)$ решает задачу глобального синтеза и удовлетворяет ограничению $\|u_{f_0}(x)\| \le d$ для $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$.

Из (12), (21) имеем, что $T(x_0) = \Theta(x_0)$, чем и завершается доказательство теоремы.

3. Синтез управления для уравнений в частных производных

Приведем некоторые постановки задач управления процессами, описываемые уравнениямі в частных производных, для которых решение может быть получено при помощи теоремы 1.

Пусть $\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^n$ замкнутая ограниченная область с границей $\partial\mathfrak{G}$ класса $\mathbb{C}^2$. Рассмотрим управляемый процесс, который описывается гиперболическим уравнением второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Ly + u, \quad y|_{\partial\mathfrak{G}} = 0, \quad u \in \{u \in L_2(\mathfrak{G}) : \|u\| \le d\}, \tag{28}$$

где $y = y(t,s)$, $s \in \mathfrak{G}$, $t \in [0,\infty)$, дифференциальный оператор L определяется соотношением

$$L\varphi = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s_k}\left(g_{kj}(s)\frac{\partial \varphi}{\partial s_j}\right) + g_0(s)\varphi,$$

$g_{kj}(s)$, $g_0(s)$ – вещественные функции, $g_{kj} \in \mathbb{C}^2(\mathfrak{G})$, $g_0 \in \mathbb{C}(\mathfrak{G})$, и при некотором $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{k,j=1}^{n} g_{kj}(s)\xi_k\xi_j \geq \delta \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2, \quad s \in \mathfrak{G}.$$

Требуется выбрать управление u в виде функции от фазовых переменных $u = u\left(y, \frac{\partial y}{\partial t}\right)$ так, чтобы любое решение [1] $\left(y(t,\cdot), \frac{\partial y}{\partial t}(t,\cdot)\right)$ уравнения (28) равнялось нулю при некотором $T = T\left(y(0,\cdot), \frac{\partial y}{\partial t}(0,\cdot)\right)$.

Обозначим

$$y(t,\cdot) = x_1(\cdot)(t), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(t,\cdot) = x_2(\cdot)(t)$$

и предположим, что $x_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\mathfrak{G})$, $x_2 \in L_2(\mathfrak{G})$. Тогда поставленная задача эквивалентна задаче синтеза позиционного управления для уравнения (1), в котором $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\mathfrak{G}) \times L_2(\mathfrak{G}) = \mathbf{X}$, $u \in L_2(\mathfrak{G}) = \mathbf{U}$, операторы A и B задаются равенствами

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ Lx_1 \end{pmatrix}, \quad Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Область определения $\mathbf{D}(A)$ оператора A равна $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)} \times \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$. Оператор L с областью определения $\mathbf{D}(L) = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}$ обладает в $L_2(\mathfrak{G})$ компактной резольвентой ([6], с. 167). Кроме того, в этом пространстве оператор L самосопряженный и

$$(L\varphi,\varphi)_{L_2(\mathfrak{G})} \leq M\|\varphi\|, \quad \varphi \in D(L), \ M \geq \max_{s\in\mathfrak{G}} g_0(s).$$

Следовательно, этот оператор обладает ортонормированным базисом из собственных векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, соответствующих вещественным собственным значениям $\mu_k : \mu_k < M$, $k = 1,2,\ldots$, $\mu_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Предположим, что $M > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k \geq \ldots$ и $\mu_k > 0$ при $1 \leq k < q_1$, $\mu_k = 0$ при $q_1 \leq k < q$, $\mu_k < 0$ при $k \geq q$ $(1 \leq q_1 \leq q)$, в случае, если положительных или равных нулю чисел в последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ нет, положим, соответственно, $q_1 = 1$ или $q = q_1$. Введем в комплексифицированном пространстве

[1] Под решением понимаем траекторию в фазовом пространстве, точкой которого является пара $\left(y, \frac{\partial y}{\partial t}\right)$.

$\mathbf{X}$ гильбертову норму $\|\cdot\|_*$, еквивалентную исходной, следующим образом:

$$\|x\|_*=\left(\int\limits_{\mathfrak{G}}\left(\sum_{k,j=1}^{n} g_{kj}(s)\frac{\partial x_1}{\partial s_k}\frac{\partial \overline{x_1}}{\partial s_j}+(M-g_0(s))|x_1|^2\right)ds+\int\limits_{\mathfrak{G}}|x_2|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (29)$$

В этой норме оператор A будет обладать ортогональным базисом из собственных и корневых векторов $\{e_{\pm k}\}_{k=1}^{\infty}$ вида:

а) $e_{\pm k}=(\varphi_k,\pm\sqrt{\mu_k}\varphi_k)$, $Ae_{\pm k}=\pm\sqrt{\mu_k}e_{\pm k}$, $1\le k<q_1$,

б) $e_k=(\varphi_k,0)$, $Ae_k=0$, $e_{-k}=(0,\varphi_k)$, $Ae_{-k}=e_k$, $q_1\le k<q$,

в) $e_{\pm k}=(\varphi_k,\pm i\sqrt{|\mu_k|}\varphi_k)$, $Ae_{\pm k}=\pm i\sqrt{|\mu_k|}$, $k\ge q$.

Поэтому $|\mathrm{Re}(Ax,x)_*|<\sqrt{|M|}\|x\|_*^2$. Поскольку, кроме того, при $|\lambda|\ge M$ образ оператора $A-\lambda I$ совпадает со всем пространством $\mathbf{X}$, то ([4, 5]) оператор A порождает сильно непрерывную группу.

Пусть $\mathbf{X}_0=\mathrm{Span}\{e_{\pm k},\ 1\le k<q\}$, $\mathbf{X}_1=\overline{\mathrm{Span}\{e_{\pm k},\ k\ge q\}}$. Тогда $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0\bigoplus\mathbf{X}_1$ и подпространства $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_1$ инвариантные относительно оператора $N_{f_0}(\lambda)$. Установим положительную определенность этого оператора на $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X}_1$. Рассмотрим уравнение [2]

$$\dot x=A|_{\mathbf{X}_1}x+B|_{\mathbf{X}_1\cap\mathbf{U}}u,$$

где $x\in\mathbf{X}_1$, $u\in\mathbf{X}_1\cap\mathbf{U}=\mathrm{Span}\{e_k-e_{-k}.\ k\ge q\}$, $\mathbf{D}\left(A|_{\mathbf{X}_1}\right)=\mathbf{D}(A)\cap\mathbf{X}_1$. Поскольку $B(e_k-e_{-k})=e_k-e_{-k}$, $k\ge q$, это уравнение удовлетворяет предположениям теоремы 1. Поэтому для $x\in\mathbf{X}_1$ следует положительная определенность оператора $N_{f_0}(\lambda)$. Далее, подпространство $\mathbf{X}_0$ конечномерное и уравнение

$$\dot x=A|_{\mathbf{X}_0}x+B|_{\mathbf{X}_0\cap\mathbf{U}}u,\quad x\in\mathbf{X}_0,\ u\in\mathbf{X}_0\cap\mathbf{U}$$

полностью управляемо по критерию Калмана. Отсюда следует положительная определенность $N_{f_0}(\lambda)$ на $\mathbf{X}_0$. Тогда оператор $N_{f_0}(\lambda)$ положительно определенный во всем $\mathbf{X}$ и уравнение (1) в нашем случае точно управляемо. Поэтому по теореме 1 управление (10) решает задачу локального позиционного синтеза.

Рассмотрим отдельно случай, когда $g(s)\le 0$, $s\in\mathfrak{G}$. Положим $M=0$ в формуле (29). Тогда оператор A в норме $\|\cdot\|_*$ будет кососамосопряженным [7], т.е. $(Ax_1,x_2)_*=-(x_1,Ax_2)_*$, $x_1,x_2\in\mathbf{D}(A)$ и, следовательно, группа $\left\{e^{At}\right\}$, $-\infty<t<\infty$, будет унитарной [4, 7]. Поэтому в этом случае управление (10) решает задачу глобального синтеза ограниченного управления.

Если в уравнении (28) оператор L равен $a^2\Delta$, $a\ne 0$ (Δ – оператор Лапласа), то это уравнение описывает волновой процесс и рассмотренная задача интерпретируется как выбор позиционной управляющей силы $u(y,\partial y/\partial t)$, обеспечивающей стремление к нулю любого решения за конечное время в энергетической норме.

[2]Символом $F|_{\mathbf{Y}}$ обозначается ограничение оператора F на подпространство $\mathbf{Y}$

Другими примерами управляемых процессов, для которых решение задачи синтеза может быть получено при помощи нашей теоремы, могут служить примеры, рассмотренные в [2]. А именно, волновой процесс с торможением (движению препятствует тормозящая сила, пропорциональная скорости), описываемый уравнением

$$\frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t^2} = a^2 \Delta y(t,s) - \nu \frac{\partial y(t,s)}{\partial t} + u(t,s), \quad y\Big|_{\partial\mathfrak{G}} = 0, \nu > 0,$$

для которого управление (10) решает задачу локального синтеза, а также процесс колебаний закрепленного с одной стороны прямоугольного стержня длины l, описываемый уравнением

$$\frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 y(t,s)}{\partial s^4} + u(t,s), \quad a \neq 0,\ u \in \{u \in L_2[0,l] : \|u\| \leq d\},$$

$$y(t,0) = \frac{\partial}{\partial s} y(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} y(t,l) = \frac{\partial^3}{\partial s^3} y(t,l) = 0,$$

для которого управление (10) решает задачу глобального позиционного синтеза, интерпретируемая как задача гашения колебаний стержня за конечное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах // Докл. АН УССР. – Сер. А, 1983. – **5**. – С. 11–14.

2. Скляр Г. М. О распостранимости метода построения позиционного синтезирующего управления на уравнения с неограниченным оператором// Вестник Харьковского университета. – 1992. – **361**: Прикладная математика и механика. – С. 15–25.

3. Скляр Г. М., Скорик В. А. О множестве позиционных управлений, решающих задачу синтеза в гильбертовых пространствах // Вісник Харківського університету. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”. – 1999. – **458**. – С. 3–14.

4. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

5. Балакришнан А. Введние в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1974. – 259 с.

6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова Думка, 1965. – 798 с.

7. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеивания.– М.: Мир, 1971. – 312 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.983.24+519.248.2 № 475, 2000, с. 358–365

Метод операторных узлов в задачах фильтрации нестационарных случайных последовательностей

Е. А. Когут, А. А. Янцевич

Харьковский национальный университет, Украина

Реализуется новый подход к построению оптимальных среднеквадратичных фильтров, основанный на теории операторных узлов. Найдено решение уравнения Винера-Хопфа в явном виде.

Рассматривается задача фильтрации состояний дискретной открытой линейной системы в случае, когда она ассоциирована со сжимающим операторным узлом [1-5]. Задаче фильтрации состояний линейных дискретных систем с постоянными коэффициентами-матрицами посвящено значительное количество работ [8,9].

Привлечение теории операторных узлов к решению задачи фильтрации стационарных последовательностей на конечном интервале оказалось весьма плодотворным и эффективным.

Использование методов теории операторных узлов позволяет получить решение задачи фильтрации в явном виде. Полученное решение является корректным с точки зрения ограниченности полученных решений при условии ослабления коррелируемости входных сигналов и при увеличении числа "весовых" матриц построенного фильтра [7]. Следует отметить, что произвольная линейная открытая система может быть расширена до системы, ассоциированной с операторным узлом.

Построение оптимального фильтра проводится в рамках подхода Винера-Колмогорова.

Открытая линейная дискретная система, ассоциированная со сжимающим операторным узлом, представляет собой пару отображений

$$x_{n+1} = Tx_n + \Phi u_n \tag{1}$$

$$v_n = \Psi x_n + K u_n, \tag{2}$$

где $x_n \in H$; $u_n \in E$; $v_n \in F$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x_n \mid_{n=0} = x_0$ и операторы $T \in [H, H]$; $\Phi \in [E, H]$; $\Psi \in [H, F]$; $K \in [E, F]$ связаны узловыми соотношениями

$$
\begin{aligned}
TT^* + \Phi\Phi^* = I_H \quad T^*T + \Psi^*\Psi = I_H \\
\Psi\Psi^* + KK^* = I_F \quad \Phi^*\Phi + K^*K = I_E \\
T\Psi^* + \Phi K^* = 0 \quad T^*\Phi + \Psi^*K = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

Система (1)-(2) может быть записана в виде $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}$, где $S = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{pmatrix}$. Для таких открытых систем справедлив закон сохранения энергии, [2]:

$$\| x_{n+1}\|_H^2 - \| x_n\|_H^2 = \| u_n\|_E^2 - \| v_n\|_F^2.$$

Перейдем к задаче фильтрации как задаче минимума квадратичного функционала. Пусть пространства H, E и F системы (1)-(2) конечномерные $dimH = p$; $dimE = m$; $dimF = q$. Кроме того, входные сигналы, а следовательно и внутренние состояния и выход системы будем считать комплексными векторными случайными величинами: $u(\omega) \in E$; $x(\omega) \in H$; $v(\omega) \in F$; $\omega \in \Omega$, где Ω - некоторое вероятностное пространство. Скалярное произведение в указанных пространствах вводится естественным образом, так в пространстве E, например,

$$(u_1, u_2) = TrM(u_1 \cdot u_2^*) = \sum_{k=1}^{m} M(u_1^{(k)} \cdot \bar{u}_2^{(k)})$$

$$\| u\|_E^2 = (u, u)_E.$$

В силу предположения конечномерности пространств системы при каждом $\omega \in \Omega$, линейные ограниченные операторы T, Φ, Ψ, K - суть детерминированные матрицы соответствующих размерностей.

Наряду с операторной нормой матрицы

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

рассмотрим и другую норму матрицы, использование которой более целесообразно в данной работе

$$\| A\|_1 = \sqrt{Tr(A \cdot A^*)}.$$

Легко видеть, что $\| A \| \leq \| A \|_1 \leq \sqrt{p} \| A \|$, где p - размерность матрицы AA^*.

Пусть x_0 и x_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ некоррелированные векторы с

$$M(x_0 \cdot x_0^*) = \mu I_H; \quad \mu > 0 \tag{4}$$

$$M(u_n \cdot u_k^*) = \lambda \delta_{n,k} I_E; \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

где $\delta_{n,k}$ - символ Кронекера и $M(x_n) = 0$ для всех n. Из узловых соотношений (3) следует, что $dimE = dimF = m$.

Перейдем к решению задачи фильтрации состояний системы (1)-(2) и построению оптимальной линейной оценки внутреннего состояния в момент N. Решая (1), находим

$$x_N = T^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} T^{N-k-1} \Phi u_k.$$

Рассмотрим линейную оценку внутреннего состояния x_N, составленную на основании известных значений выхода системы v_k при $k = 0, 1, ..., N-1$

$$\hat{x}_N = \sum_{k=0}^{N-1} W_k v_k,$$

где $\{W_k\}_{k=0}^{N-1}$ - искомый набор детерминированных матриц размерности $p \times m$. Учитывая (2), получаем, что отклонение $x_N - \hat{x}_N$ имеет вид:

$$x_N - \hat{x}_N = A x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} B_j u_j, \tag{6}$$

где $A = T^N - \sum_{j=0}^{N-1} W_j \Psi T^j$; $\qquad B_{N-1} = \Phi - W_{N-1} K$;

$B_j = T^{N-j-1}\Phi - W_j K - \sum_{s=j+1}^{N-1} W_s \Psi T^{s-j-1} \Phi$; $\quad (j = 0, 1, ..., N-2)$.

С учетом корреляционных соотношений (4)-(5), выражение для среднеквадратического отклонения оценки $\hat{x}_N$ от реального внутреннего состояния системы в момент N, можно записать в виде:

$$\| x_N - \hat{x}_N \|^2_{L_2(H)} = \mu \parallel A \|_1^2 + \lambda \sum_{j=0}^{N-1} \parallel B_j \|_1^2. \tag{7}$$

Рассматриваемый квадрат нормы $\parallel x_N - \hat{x}_N \|^2_{L_2(H)}$ является квадратичным функционалом от W. Для нахождения набора матриц $\{W_s\}_{s=0}^{N-1}$ минимизирующего указанный квадратичный функцаонал, вычислим его градиент и приравняем его нулю. Таким образом, приходим к системе матричных уравнений Винера-Хопфа, являющихся необходимым и достаточным условием минимума среднеквадратической ошибки

$$\mu A \Psi^* + \lambda B_0 K^* = 0$$

$$\mu A (T^*)^s \Psi^* + \lambda B_s K^* + \lambda \sum_{j=0}^{s-1} B_j \Phi^* (T^*)^{s-j-1} \Psi^* = 0 \tag{8}$$

$$s = 1, 2, ..., N-1.$$

Использование узловых соотношений (3) позволяет записать эту систему матричных уравнений в более компактной форме

$$(\mu-\lambda)\sum_{j=0}^{N-1} W_j\Psi T^j (T^*)^s\Psi^* + \lambda W_s = (\mu-\lambda)T^N(T^*)^s\Psi^* \tag{9}$$

$$s=0,1,2,\ldots N-1.$$

Для нахождения решения (9) умножим справа s-е уравнение на ΨT^s и просуммируем всю систему:

$$(\mu-\lambda)Q\sum_{s=0}^{N-1}(T^*)^s\Psi^*\Psi T^s + \lambda Q = (\mu-\lambda)T^N\sum_{s=0}^{N-1}(T^*)^s\Psi^*\Psi T^s, \tag{10}$$

где $Q=\sum\limits_{j=0}^{N-1} W_j\Psi T^j$.

Узловые соотношения позволяют упростить (10) и получить явное выражение для искомых матриц W_k.

Заметим, что $\sum\limits_{s=0}^{N-1}(T^*)^s\Psi^*\Psi T^s = I-(T^*)^N T^N$,

$(\mu-\lambda)\sum_{s=0}^{N-1}(T^*)^s\Psi^*\Psi T^s + \lambda I = (\lambda-\mu)(T^*)^N T^N + \mu I$,

а значит $\{(\mu-\lambda)\sum\limits_{s=0}^{N-1}(T^*)^s\Psi^*\Psi T^s + \lambda I\}^{-1}$ существует при любых положительных λ и μ.

Таким образом, $Q=[I-\lambda\{\mu I+(\lambda-\mu)T^N(T^*)^N\}^{-1}]T^N$.

Отметим также, что (9) можно записать в виде $(\mu-\lambda)Q(T^*)^s\Psi^*+\lambda W_s=(\mu-\lambda)T^N(T^*)^s\Psi^*$ $(s=0,1,\ldots,N-1)$, а значит набор матриц $\{W_s\}_{S=0}^{N-1}$ определяется единственным образом.

$$W_s=(\mu-\lambda)\{\mu I_H+(\lambda-\mu)T^N(T^*)^N\}^{-1}T^N(T^*)^s\Psi^* \tag{11}$$

$$s=0,1,\ldots,N-1.$$

Перейдем к вычислению среднеквадратической ошибки и исследованию корректности оптимального фильтра.

Рассмотрим среднеквадратическую ошибку на найденном наборе матриц W_j (11) и поведение ее при ослаблении корреляции входных сигналов системы ($\lambda\to+0$) и увеличении числа измерений входных сигналов системы ($N\to\infty$).

Заметим прежде всего, что если обозначить

$$\beta(N)=\mu\{\mu I_H+(\lambda-\mu)T^N(T^*)^N\}^{-1}, \quad \text{то} \tag{12}$$

$$A=\frac{\lambda}{\mu}\beta(N)T^N; \quad B_j=\beta(N)T^{N-j-1}\Phi; \tag{13}$$

$$(j=0,1,2,\ldots,N-1).$$

Таким образом

$$\| x_N-\hat{x}_N\|^2_{L_2(H)}=\lambda Tr\beta(N). \tag{14}$$

Использование узловых соотношений позволяет получить оценку среднеквадратичной ошибки, не зависящей от N. А именно,

$$\| x_N - \hat{x}_N\|^2_{L_2(H)} \leq p(\mu+\lambda) max\left\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\lambda}{\mu}\right\}. \qquad (15)$$

Следовательно, рассматриваемое отклонение ограничено при всех N. Принципиальным моментом в этих рассуждениях является требование ассоциированности открытой системы с операторным узлом. Для иллюстрации сказанного приведем простой пример открытой дискретной системы вида (1)-(2), у которой
$dimH = 2$; $dimE = 1$; $T = I$; $\Psi = (1,1)$; $K = \nu$; $\Phi = \binom{1}{-1}$, - где ν - любое, вообще говоря, комплексное число.

Легко видеть, что T, Φ, Ψ, K не связаны узловыми соотношениями (3). Используя прежние обозначения

$$A = I - \sum_{j=0}^{N-1} W_j\Psi; \quad B_s = \Phi - \nu W_s; \quad s = 0, 1, \ldots, N-1,$$

система (9) принимает вид

$$\lambda \mid \nu \mid^2 W_s + 2\mu \sum_{j=0}^{N-1} W_j = \mu\Psi^* + \lambda\bar{\nu}\Phi.$$

Решением этой системы является набор матриц

$$W_s = \frac{1}{\lambda \mid \nu \mid^2 + 2\mu N}(\mu\Psi^* + \lambda\bar{\nu}\Phi); \quad s = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Величина среднеквадратической ошибки определяется выражением (7), в котором

$$\sum_{j=0}^{N-1} \| B_j \|_1^2 = 2\mu^2 N \frac{4N^2 + \mid \nu \mid^2}{(\lambda \mid \nu \mid^2 + 2\mu N)^2},$$

а это выражение неограниченно возрастает при $N \to \infty$.

Получим теперь оценку для среднеквадратической ошибки при условии $\lambda \to +0$. Известно, что всякую квадратную матрицу T с помощью унитарного преобразования U можно привести к треугольному виду $\widetilde{T}$, причем диагональные элементы $\widetilde{T}$, т.е. собственные значения T, расположить в порядке убывания их модулей.

Обозначим $T = U^*\widetilde{T}U$; $\widetilde{\Phi} = U\Phi$; $\widetilde{\Psi} = \Psi U^*$; $\widetilde{K} = K$, тогда, учитывая, что узловые соотношения сохраняются при унитарных преобразованиях, для операторов $\widetilde{T}$, $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Psi}$, $\widetilde{K}$ также справедливы соотношения (3).

В силу (3) T - сжатие. Следовательно, если матрица T имеет r собственных чисел, по модулю равных единице, то $\widetilde{T}$ и $\widetilde{\Phi}$ имеют вид

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_{r+1,1} & \cdots & \varphi_{r+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{p,1} & \cdots & \varphi_{p,m} \end{pmatrix};$$

где $V = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\alpha_r} \end{pmatrix}; \quad T_1 = \begin{pmatrix} t_{r+1,r+1} & t_{r+1,r+2} & \cdots & t_{r+1,p} \\ 0 & t_{r+2,r+2} & \cdots & t_{r+2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{p,p} \end{pmatrix}$

и $|t_{kk}| < 1$, где $k = r+1, r+2, ..., p$; $\quad Im\alpha_s = 0$; $\quad (s = 1, 2, ..., r)$.

Обозначим $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{r+1,1} & \cdots & \varphi_{r+1,m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{p,1} & \dots & \varphi_{p,m} \end{pmatrix}$, тогда $I_{p-r} - T_1T_1^* = \Phi_1\Phi_1^*$.

Таким образом, основное пространство H разбивается на сумму ортогональных инвариантных относительно $\widehat{T}$ подпространств H_1 и H_2, где $dimH_1 = r$, а $dimH_2 = p - r$. Так как матрица T_1 является строгим сжатием, то ее спектральный радиус меньше единицы.

Критическим показателем $q(T_1)$ для матрицы T_1 называется наименьшее натуральное число такое, что $\| T_1^{q(T_1)} \| < 1$. В. Птаком [6] было доказано, что $q(T_1)$ не превосходит размерности матрицы T_1, т.е. в нашем случае $q(T_1) \leq p - r$. Во всяком случае можно показать, что уже $\| T_1^{p-r} \| < 1$. Воспользуемся этим результатом для исследования поведения среднеквадратической ошибки при $\lambda \to +0$. В дальнейшем будем считать, что $N \geq p - r$.

Обозначим $\nu = \frac{\mu-\lambda}{\mu}$; $\quad 0 < \nu < 1$ и $\nu \to 1 - 0$ при $\lambda \to +0$.

$\| A \|_1^2 = r + \frac{\lambda^2}{\mu^2} Tr\{I_{p-r} - \nu T_1^N (T_1^*)^N\}^{-1} T_1^N (T_1^*)^N \{I_{p-r} - \nu T_1^N (T_1^*)^N\}^{-1}$

$\lim\limits_{\lambda \to +0} \| A \|_1^2 = r$

$\sum\limits_{j=0}^{N-1} \| B_j \|_1^2 = Tr\{I_{p-r} - \nu T_1^N (T_1^*)^N\}^{-1} [I_{p-r} - T_1^N (T_1^*)^N] \{I_{p-r} - \nu T_1^N (T_1^*)^N\}^{-1}$

$\lim\limits_{\lambda \to +0} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \| B_j \|_1^2 = Tr\{I_{p-r} - T_1^N (T_1^*)^N\}^{-1}$

Объединяя полученные результаты согласно (7), получаем $\lim\limits_{\lambda \to +0} \| x_N - \hat{x}_N \|_{L_2(H)}^2 = \mu r$, где, напомним, r - число собственных значений основной матрицы T, равных по модулю единице.

Заметим, что отказ от условия ассоциированности линейной открытой системы с операторным узлом приводит к неустойчивым фильтрам, [7].

Представляет практический интерес вопрос о связи между оптимальными оценками $\hat{x}_N$ в последовательные моменты времени, естественно, учитывающий возникающие при этом ошибки. В общем виде такая связь имеет вид:

$$x_{\hat{N+1}} = Tx_N + S(N)[v_N - \Psi \hat{x}_N], \qquad (16)$$

где матрица $S(N)$ подлежит определению.

$$x_{\hat{N+1}} - T\hat{x}_N = S(N)[\Psi(x_N - \hat{x}_N) + Ku_N].$$

Из (12) получаем $\beta(N) = \{I - \nu T^N (T^*)^N\}^{-1}$, где $\nu = \frac{\mu-\lambda}{\mu}$.
Заметим, что $T\beta(N) - \beta(N+1)T = \nu T^{N+1}(T^*)^N[\beta(N) - T^*\beta(N+1)T] = \nu\beta(N+1)T^{N+1}(T^*)^N \Psi^* \Psi \beta(N)$. Отсюда следует, что $S(N)$ имеет вид

$$S(N) = \nu\beta(N+1)T^{N+1}(T^*)^N \Psi^*.$$

Пример. Пусть $dimH = 4$, $dimE = 2$ и матрицы, определяющие каналы связи открытой системы, имеют вид:

$$T = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\| T \| = 1$; $\| T_1 \| < 1$.
Для среднеквадратической ошибки имеем

$$\| x_N - \hat{x}_N \|^2_{L_2(H)} = 2\mu + \lambda \frac{Tr\{I - \nu T_1^N (T_1^*)^N\}}{det\{I - \nu T_1^N (T_1^*)^N\}}; \quad r(N) = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^N;$$

$$Tr\{I - \nu T_1^N (T_1^*)^N\} = 2 - \nu \frac{2^{6N}}{3^{4N}} \left[1 + \frac{9}{196} r^2(N) + \left(\frac{9}{16}\right)^N\right]$$

$$det\{I - \nu T_1^N (T_1^*)^N\} = 1 - \nu \frac{2^{6N}}{3^{4N}} \left[1 + \frac{9}{196} r^2(N) + \left(\frac{9}{16}\right)^N\right] + \nu^2 \frac{2^{8N}}{3^{6N}} \equiv d.$$

Таким образом,

$$\lim_{\lambda \to +0} \| x_N - \hat{x}_N \|^2_{L_2(H)} = 2\mu; \quad \lim_{N\to\infty} \| x_N - \hat{x}_N \|^2_{L_2(H)} = 2(\mu + \lambda).$$

Матрицы W_j, определяющие оптимальный фильтр, имеют вид:

$$W_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{11}^{(j)} & \omega_{12}^{(j)} \\ \omega_{21}^{(j)} & \omega_{22}^{(j)} \end{pmatrix},$$

где $$\omega_{11}^{(j)} = \frac{\nu}{d} \frac{2^{3(N+j)}}{3^{2(N+j)}} \left[\frac{1}{9} - \frac{\nu}{9} \frac{2^{2N}}{3^{2N}} + \frac{1}{196} r(N) r(j)\right]$$

$$\omega_{12}^{(j)} = \frac{\nu}{d} \frac{2^{3N+j}}{3^{2N+j}} \left[-\frac{2^{2j+2}}{3^{j+2}} \left(1 + \frac{9}{196} r(N) r(j)\right) + \nu \frac{2^{2(N+j+1)}}{3^{2(N+j+1)}} + (-1)^j \frac{r(N)}{7}\right]$$

$$\omega_{21}^{(j)} = \frac{\nu}{d} \frac{(-1)^N}{42} \frac{2^{N+3j}}{3^{N+2j}} \left[r(j) + \nu \frac{2^{6N}}{3^{4N}} (r(N) - r(j)) \right]$$

$$\omega_{22}^{(j)} = \frac{\nu}{d} (-1)^N \frac{2^{N+j}}{3^{N+j}} \left[(-1)^j \frac{2}{3} - \nu (-1)^j \frac{2^{6N+1}}{3^{4N+1}} - \frac{1}{7} r(j) \frac{2^{2j+1}}{3^{j+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu}{7} \frac{2^{6N+2j+1}}{3^{4N+j+1}} (r(N) - r(j)) \right].$$

Тот факт, что первые две строки W_j, $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ нулевые, означает наличие замкнутой подсистемы размерости два во внутреннем пространстве, что объясняется структурной основой матрицы T.

ЛИТЕРАТУРА

1. Livsic M. S.,Yancevich A. A. Theory of Operator Colligations in Hilbert Space. – New-York: 1979.

2. Янцевич А. А. Операторные J-узлы и ассоциированные с ними открытые системы // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1972. – вып.17. – С. 215–220.

3. Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны (открытые системы). М.: Наука, 1966. – 298 с.

4. Аров Д. З. Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб.мат.журнал. – 1979.– Т. 20, **2**. – С. 211–228.

5. Бродский М.С. Унитарные узлы и их характеристические функции // УМН. – 1978. – Т. XXXIII, вып.4(202). – С. 141–168.

6. Ptak V. Norms and Spectral Radius of Matrices // Czech.Math.J. – 1962. – **12**. – P. 555–557.

7. Moylan P.J.A. A Note on Kalman-Bucy Filters with Zero Measurements Noise // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1974. – V.19. – P. 263–264.

8. Kailath T. An Innovations Approach to Least-squares Estimation, Part I: Linear Filtering in Additive White Noise // IEEE Trans. Automatic Control,AC-13. – 1968. – P. 655–660.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 475, 2000, с. 366–374

Последовательности в гильбертовом пространстве

Н. В. Черемская

Харьковский национальный университет, Украина

В статье строится корреляционная теория нестационарных последовательностей в гильбертовом пространстве, определяемая парой дважды перестановочных операторов. Введены характеристики нестационарности, которые связаны с несамосопряженностью соответствующих операторов. Для изучения некоторых классов таких последовательностей используются треугольные модели систем дважды перестановочных операторов, построенные В.А. Золотаревым.

В статье при помощи треугольных моделей В.А. Золотарева исследуются некоторые новые классы нестационарных последовательностей (дискретные поля в гильбертовых пространствах).

Определение. *Поле $\xi(n,m)$ называется эволюционно представимым, если оно является решением задачи Коши для системы уравнений в частных разностях 1-го порядка:*

$$\xi_{n+1,m} = A_1\xi_{n,m},$$
$$\xi_{n,m+1} = A_2\xi_{n,m},$$

где A_k $(k=1,2)$ дважды перестановочные линейные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве, т.е.

$$\xi(n,m) = A_1^n A_2^m \xi_0. \tag{1}$$

Рассмотрим корреляционную функцию последовательности (1):

$$K(n,p,m,q) = \langle \xi(n,p), \xi(m,q)\rangle. \tag{2}$$

Введем корреляционные разности

$$W_1(n,p,m,q) = K(n+1,p,m,q) - K(n,p,m+1,q),$$
$$W_2(n,p,m,q) = K(n,p+1,m,q) - K(n,p,m,q+1),$$

$$W(n,p,m,q)=K(n,p+1,m+1,q)+K(n+1,p,m,q+1)-$$
$$-K(n+1,p+1,m,q)-K(n,p,m+1,q+1).$$

Нетрудно видеть, что для эволюционно представимых полей имеют место следующие представления для $W_i(n,p,m,q)$ $(i=1,2)$, $W(n,p,m,q)$:

$$W_1(n,p,m,q)=\langle 2\mathrm{Im}A_1\xi(n,p),\xi(m,q)\rangle,$$
$$W_2(n,p,m,q)=\langle 2\mathrm{Im}A_2\xi(n,p),\xi(m,q)\rangle,$$
$$W(n,p,m,q)=\langle 2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2\xi(n,p),\xi(m,q)\rangle.$$

Определение. *Рангом квазиоднородности последовательности $\xi(n,p)$ будем называть максимальный ранг квадратичных форм*

$$\sum_{k,l=1}^{N} w(x_k,x_l)a_k\overline{a_l}.$$

Лемма. *Пусть $W(n,p,m,q)$ – корреляционная разность эволюционно представимого поля (1), тогда*

$$W(n,p,m,q)=\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha^0\varphi_\alpha(n,p)\overline{\varphi_\alpha(m,q)},$$

где λ_α^0 – вещественные числа, $\varphi_\alpha(n,p)=\langle\xi(n,p),e_\alpha^0\rangle$.

Доказательство.

$$W(n,p,m,q)=\langle 2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2\xi,\xi\rangle,$$
$$H_0=2\mathrm{Im}A_1H\cap\overline{2\mathrm{Im}A_2H},$$
$$\dim H_0=r<\infty,$$

e_α^0 – базис в H_0. Тогда

$$\langle 2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2\xi,\xi\rangle=\sum_{\alpha=1}^{r}\langle 2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2\xi,e_\alpha^0\rangle\langle e_\alpha^0,\xi\rangle=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha^0\langle\xi(n,p),e_\alpha^0\rangle\langle e_\alpha^0,\xi(m,q)\rangle,$$

где

$$2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2e_\alpha^0=\lambda_\alpha^0e_\alpha^0.$$

Обозначив $\varphi_\alpha(n,p)=\langle\xi(n,p),e_\alpha^0\rangle$, получаем

$$W(n,p,m,q)=\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha^0\varphi_\alpha(n,p)\overline{\varphi_\alpha(m,q)}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* $\xi(n,p) = A_1^n A_2^p \xi_0$ *имела конечный квазиранг* r, *необходимо и достаточно, чтобы* $\dim H_0 = r < \infty$, *где* $H_0 = \overline{2\mathrm{Im}A_1 H} \cap \overline{2\mathrm{Im}A_2 H}$.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{k,l=1}^{N} W(n_k,p_k,m_l,q_l)\xi_k\bar{\xi}_l = \sum_{k,l=1}^{N} \xi_k\bar{\xi}_l \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \varphi_\alpha(n_k,p_k)\overline{\varphi_\alpha(m_l,q_l)} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha \sum_{k=1}^{N} \varphi_\alpha(n_k,p_k)\xi_k \sum_{l=1}^{N} \overline{\varphi_\alpha(m_l,q_l)\xi_l} = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha |\xi_\alpha|^2,$$

где $\xi_\alpha = \sum_{k=1}^{N} \varphi_\alpha(n_k,p_k)\xi_k$. Отсюда видно, что ранг квадратичных форм не превосходит r.

Необходимость. Пусть имеется последовательность $x_k = \{(n_k,p_k)\}_{k=1}^{N}$, тогда

$$\sum_{k,l=1}^{N} W(n_k,p_k,m_l,q_l) = \langle 2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2 z, z\rangle,$$

где $z = \sum_{k=1}^{N} \xi_k z(x_k)$. Пусть $H_m = \{z = \sum_{k,l=1}^{m} \xi_k z(x_k)\}$, тогда $H_m \in H_z$.

Пусть P_m – ортопроектор на H_m. Определим подпространство $G_m(x_1,\ldots,x_m)$ следующим образом:

$$G_m = P_m(2\mathrm{Im}A_1 2\mathrm{Im}A_2)P_m H_z.$$

Очевидно, $G_m \subseteq P_m H_0$ и ранг квадратичных форм $\sum_{k,l=1}^{N} W(x_k,x_l)\xi_k\bar{\xi}_l$ совпадает с G_m. Выберем плотную в R_2 последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Рассмотрим последовательность подпространств $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_m \subset \ldots$. Очевидно, $\lim P_m = I$. Окончательно имеем: $\mathrm{rang}W \geq \dim G_m$, тогда $\mathrm{rang}W \geq \lim_{m\to\infty} \dim G_m = \dim H_0$ и, учитывая, что $\mathrm{rang}W \leq \dim H_0$, имеем: $\mathrm{rang}W = \dim H_0$.

Перейдем теперь к нахождению общего вида корреляционных разностей для некоторых классов квазиоднородных последовательностей в гильбертовом пространстве. Имеем:

$$\varphi_\alpha(n,p) = \langle A_1^n A_2^p e_0, e_\alpha^0\rangle = \langle e_0, A_1^{*n} A_2^{*p} e_\alpha\rangle,$$

$$\varphi(n,p) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^p \langle (A_1-\lambda_2 I)^{-1}(A_2-\lambda_2 I)^{-1}e_0, e_0\rangle d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Контур γ_k охватывает весь спектр оператора A_k $(k=1,2)$.

Рассматривая разные случаи, соответствующие определенным спектрам операторов A_1 и A_2, в качестве модельных операторов A_1 и A_2 можно взять треугольные модели для системы дважды перестановочных операторов A_1 и A_2 [2].

Рассмотрим случай, когда спектры операторов A_1 и A_2 сосредоточены в нуле и $e_0 = g$ – каналовый элемент. Возьмем в качестве модельного пространства $\widehat{H}$ пространство, совпадающее с $L^2(D)$, $D = [0, a_1] \times [0, a_2]$; $a_1, a_2 < \infty$:

$$\widehat{A}_1 f(x, y) = i \int_0^x f(t, y) dt, \;\; \widehat{A}_2 f(x, y) = i \int_0^y f(x, \tau) d\tau.$$

В силу унитарной эквивалентности H_0 отображается оператором U в $\widehat{H}_0 = 2\mathrm{Im} A_1 \widehat{H} \cap 2\mathrm{Im} A_2 \widehat{H}$ подпространство постоянных функций из $L^2(D)$, так как $\|e_0\| = 1$, то $\|g_0\| = 1$, следовательно, $g_0(x, y) \equiv 1$.

Нетрудно показать, что

$$\left(\widehat{A}_1 - \lambda_1 I\right)^{-1} \left(\widehat{A}_2 - \lambda_2 I\right)^{-1} g_0(x, y) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} e^{i\frac{x}{\lambda_1} + i\frac{y}{\lambda_2}}.$$

Тогда

$$\varphi(n, p) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^n \lambda_2^p \left[\int_D^1 \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} e^{i\frac{\xi_1}{\lambda_1} - i\frac{\xi_2}{\lambda_2}} d\xi_1, d\xi_2 \right] d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_D \left[\oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \lambda_1^{n-1} \lambda_2^{p-1} e^{i\frac{\xi_1}{\lambda_1} - i\frac{\xi_2}{\lambda_2}} d\lambda_1 d\lambda_2 \right] d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int_D \frac{i^n \xi_1^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^p i^p \xi_2^p}{p!} d\xi_1 d\xi_2 = (-1)^p \frac{i^{n+p}}{n! p!} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \xi_1^n \xi_2^p d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= (-1)^p \frac{i^{n+p} a_1^{n+1} a_2^{p+1}}{(n+1)!(p+1)!},$$

$$W(n, p, m, q) = \varphi(n, p) \overline{\varphi(m, q)},$$

где

$$\varphi(n, p) = \frac{(-1)^p i^{n+p} a_1^{n+1} a_2^{p+1}}{(n+1)!(p+1)!}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы $W(n, p, m, q)$ была корреляционной разностью дискретного поля вида $\xi(n, p) = A_1^n A_2^p \xi_0$, где A_k $(k = 1, 2)$ операторы со спектром в нуле, необходимо и достаточно, чтобы*

$$W(n, p, m, q) = \varphi(n, p) \overline{\varphi(m, q)},$$

где

$$\varphi(n, p) = (-1)^p \frac{i^{n+p} a_1^{n+1} a_2^{p+1}}{(n+1)!(p+1)!}.$$

Доказательство. Необходимость уже доказана.

Достаточность. Покажем, что существует дискретное поле вида $\xi(n,p) = \widehat{A}_1^n \widehat{A}_2^p \xi_0$, для которого $W(n,p,m,q)$ является корреляционной разностью.

Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(D)$, $D = [0,a_1] \times [0,a_2]$. Введем

$$\widehat{A}_1 f(x,y) = i \int_0^x f(t,y)dt,$$

$$\widehat{A}_2 f(x,y) = i \int_0^y f(x,\tau)d\tau.$$

Если провести рассуждения как при доказательстве необходимости, то получим корреляционную разность требуемого вида.

Пусть теперь спектры операторов A_k $(k = 1,2)$ сосредоточены в нуле и $e_0 = h_0$ не является каналовым элементом. В качестве модельного пространства $\widehat{H}$ снова возьмем $L^2(D)$, $D = [0,a_1] \times [0,a_2]$; $a_1, a_2 < \infty$,

$$\widehat{A}_1 f(x,y) = i \int_0^x f(t,y)dt,$$

$$\widehat{A}_2 (x,y) = i \int_0^y f(x,\tau)d\tau.$$

Рассмотрим

$$\left(\widehat{A}_1^* - \lambda_1 I\right)^{-1} h_0 = f(x,y),$$

$$h_0 = \left(\widehat{A}^* - \lambda_1 I\right) f(x,y),$$

$$h_0 = -\lambda_1 f(x,y) - i \int_x^1 f(t,y)dt.$$

Обозначим $u(x,y) = \int_x^1 f(t,y)dt$. Тогда

$$-iu(x,y) + \lambda_1 \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} h_0(x,y), \quad u(1,y) = 0.$$

Отсюда

$$u(x,y) = \left\{ c_1 + \int_x^1 \frac{h_0(t,y)}{\lambda_1} e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)} dt \right\} e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}.$$

Так как $u(1,y)=0$, то, следовательно, имеем $G=0$,

$$f(x,y)=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}-\frac{i}{\lambda_1}e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}\int_x^1\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)}dt.$$

Таким образом,

$$\left(\widehat{A}_1^*-\lambda_1 I\right)^{-1}h_0=\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}-\frac{i}{\lambda_1}e^{-\frac{i}{\lambda_1}(1-x)}\int_x^1\frac{h_0(t,y)}{\lambda_1}e^{\frac{i}{\lambda_1}(1-t)}dt=M_1(x,y,\lambda_1).$$

Аналогично,

$$\left(\widehat{A}_2^*-\lambda_2 I\right)^{-1}h_0=\frac{h_0(x,t)}{\lambda_2}-\frac{i}{\lambda_2}e^{-\frac{i}{\lambda_2}(1-y)}\int_y^1\frac{h_0(x,t)}{\lambda_2}e^{\frac{i}{\lambda_2}(1-t)}dt=M_2(x,y,\lambda_2),$$

$$\varphi(n,p)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\lambda_1^n\lambda_2^p\left[\int_D M_1(x,y,\lambda_1)\overline{M_2(x,y,\lambda_2)}dxdy\right]d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Дальнейшие выражения для $\varphi(n,p)$ и $W(n,p,m,q)$ опускаются ввиду их громоздкости.

Рассмотрим случай, когда операторы A_k $(k=1,2)$ последовательности $\xi(n,p)=A_1^n A_2^p\xi_0$ имеют дискретные спектры и $g_0(m,q)$ – каналовый элемент. В этом случае модельное пространство $\widehat{H}$ совпадает с

$$l^2(\beta_1,\beta_2)=\{f(m,q),\ m=1,\dots,N_1,\ q=1,\dots,N_2;$$

$$\sum_{m=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2}|f(m,q)|^2\left(\beta_m^{(1)}\right)^2\left(\beta_q^{(2)}\right)^2<\infty\},$$

$N_1,N_2<\infty$, где $\left\{\lambda_m^{(1)}\right\}_{m=1}^{N_1}$ – последовательность невещественных точек спектра A_1/H_2,

$$H_2=\overline{2\mathrm{Im}A_2H},\ \lambda_m^{(1)}=\alpha_m^{(1)}+i\frac{\left(\beta_m^{(1)}\right)^2}{2},$$

$\left\{\lambda_q^{(2)}\right\}_{q=1}^{N_2}$ – последовательность невещественных точек спектра A_2/H_1, $H_1=\overline{2\mathrm{Im}A_1H}$, $\lambda_q^{(2)}=\alpha_q^{(2)}+i\frac{\left(\beta_q^{(2)}\right)^2}{2}$. Операторы $\widehat{A}_1$ и $\widehat{A}_2$ задаются формулами:

$$\widehat{A}_1 f(m,q)=\lambda_m^{(1)}f(m,q)+i\sum_{s=1}^{m-1}f(s,q)\left(\beta_s^{(1)}\right)^2,$$

$$\widehat{A}_2 f(m,q)=\lambda_q^{(2)}f(m,q)+i\sum_{r=1}^{q-1}f(m,r)\left(\beta_r^{(2)}\right)^2.$$

Так как пересечение неэрмитовых подпространств операторов $\widehat{A}_1$ и $\widehat{A}_2$ совпадает с подпространством функций, не зависящих от аргументов, то $g_0(m,q)\equiv 1$.

Нетрудно показать, что

$$(A_1-\lambda_1 I)^{-1}(A_2-\lambda_2 I)^{-1}g_0(m,q)=$$

$$=\frac{\beta_m^{(1)}}{\lambda_m^{(1)}-\lambda_1}\cdot\frac{\beta_q^{(2)}}{\lambda_q^{(2)}-\lambda_2}\prod_{s=1}^{m-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m-s}^{(1)}}\cdot\prod_{r=1}^{q-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{q-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{q-r}^{(2)}}.$$

Тогда имеет место представление

$$\varphi(n,p)=\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\lambda_1^n\lambda_2^p\sum_{m=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2}\frac{\left(\beta_m^{(1)}\right)^2}{\lambda_m^{(1)}-\lambda_1}\cdot\frac{\overline{\left(\beta_q^{(2)}\right)^2}}{\lambda_q^{(2)}-\lambda_2}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{m-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m-s}^{(1)}}\cdot\prod_{r=1}^{q-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{q-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{q-r}^{(2)}}d\lambda_1 d\lambda_2,$$

то есть $\varphi(n,p)=\varphi_1(n)\varphi_2(p)$, где

$$\varphi_1(n)=\sum_{m=1}^{N_1}\beta_m^{(1)}\Lambda_m^{(1)}(n),\quad \varphi_2(p)=\sum_{q=1}^{N_2}\beta_q^{(2)}\Lambda_q^{(2)}(p),$$

$$\Lambda_m^{(1)}(n)=-\frac{1}{2\pi i}\beta_m^{(1)}\oint_{\gamma_1}\lambda_1^n\frac{1}{\lambda_m^{(1)}-\lambda_1}\prod_{s=1}^{m-1}\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_{m-s}^{(1)}}}{\lambda_1-\lambda_{m-s}^{(1)}}d\lambda_1,$$

$$\Lambda_q^{(2)}(n)=-\frac{1}{2\pi i}\beta_q^{(2)}\oint_{\gamma_2}\lambda_2^p\frac{1}{\lambda_q^{(2)}-\lambda_2}\prod_{r=1}^{q-1}\frac{\lambda_2-\overline{\lambda_{q-r}^{(2)}}}{\lambda_2-\lambda_{q-r}^{(2)}}d\lambda_2.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в последовательности $\xi(n,p)=A_1^n A_2^p\xi_0$ у оператора A_1 спектр сосредоточен в нуле, а у оператора A_2 – дискретный спектр и g_0 – каналовый элемент. В этом случае модельное пространство $\widehat{H}$ следующее:

$$\widehat{H}=\left\{f_k(y),\ k=1,\ldots,N;\ y\in[0,l]:\sum_{k=1}^{N}\left[\int_0^l|f_k(y)|^2dy\right]\beta_k^2<\infty\right\}.$$

Пусть $\left\{\lambda_k=\alpha_k+i\frac{\beta_k^2}{2}\right\}_{k=1}^{N}$ – последовательность невещественных точек спектра операторов A_2/H_1. Тогда модельные операторы $\widehat{A}_1$ и $\widehat{A}_2$ задаются формулами:

$$(\widehat{A}_1 f)_k(y)=i\int_0^y f_k(t)dt,$$

$$(\widehat{A}_2 f)_k(y) = \lambda_k f_k(y) + i\sum_{s=1}^{k-1} f_s(y)\beta_s^2.$$

Легко видеть, что и в этом случае $g_0 \equiv 1$, тогда

$$\varphi(n,p) = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k \Lambda_k(p) \frac{i^n l^{n+1}}{(n+1)!},$$

где

$$\Lambda_k(p) = -\frac{1}{2\pi i}\beta_k \oint_\gamma \lambda^p \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \prod_{s=1}^{k-1} \frac{\lambda - \overline{\lambda}_{k-s}}{\lambda - \lambda_{k-s}} d\lambda.$$

Для последовательностей $\xi(n,p) = A_1^n A_2^p \xi_0$ в случае, когда A_k $(k = 1, 2)$ имеют дискретные спектры, а так же в смешанном случае имеет место теорема, аналогичная теореме 2.

Перейдем к случаю, когда оба оператора A_k $(k = 1, 2)$ последовательности $\xi(n,p)$ имеют дискретный спектр, а $g_0(m,q)$ не является каналовым элементом.

Модельным пространством снова является $l^2(\beta_1, \beta_2)$.

Рассмотрим

$$\left(\widehat{A}_1^* - \lambda_1 I\right)_k^{-1} g_k(m,q) = f_k(m,q),$$

отсюда

$$g_k(m,q) = \left((\widehat{A}_1^* - \lambda_1 I) f_k(m,q)\right)_k$$

или

$$g_k(m,q) = (\overline{\lambda}_k - \lambda_1) f_k(m,q) - i\sum_{s=1}^{m-1} f(s,q)\left(\beta_s^{(1)}\right)^2,$$

то есть

$$\frac{g_k(m,q)}{\beta_k^{(1)}} = \frac{\overline{\lambda}_k - \lambda_1)}{\beta_k^{(1)}} f_k(m,q) - i\sum_{s=1}^{m-1} f(s,q)\beta_s^{(1)}.$$

Обозначим

$$\frac{g_k(m,q)}{\beta_k^{(1)}} = a_m^{(1)}; \quad \frac{\overline{\lambda}_k - \lambda_1}{\beta_k^{(1)}} f_k(m,q) = h^{(1)}(m).$$

Тогда

$$a_m^{(1)} = h^{(1)}(m) - i\sum_{s=1}^{m-1} \frac{h^{(1)}(s)}{\overline{\lambda}_s - \lambda_1}\left(\beta_s^{(1)}\right)^2,$$

$$a_{m+1}^{(1)} = h^{(1)}(m+1) - i\sum_{s=1}^{m-1} \frac{h^{(1)}(s)}{\overline{\lambda}_s - \lambda_1}\left(\beta_s^{(1)}\right)^2,$$

$$a_{m+1}^{(1)} - a_m^{(1)} = h^{(1)}(m+1) - h^{(1)}(m) - i\frac{h^{(1)}(m)}{\overline{\lambda}_m - \lambda_1}\left(\beta_m^{(1)}\right)^2.$$

Получаем линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка для $h^{(1)}(m)$:

$$h^{(1)}(m+1) - h^{(1)}(m) - i\frac{\left(\beta_m^{(1)}\right)^2}{\lambda_m - \lambda_1} h^{(1)}(m) = a_{m+1}^{(1)} - a_m^{(1)}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$h_m^{(1)} = \sum_{\mu=0}^{m-1}\left[1 + \frac{i\left(\beta_\mu^{(1)}\right)^2}{\lambda_\mu - \lambda_1}\right]\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{a_{\nu+1}^{(1)} - a_\nu^{(1)}}{\prod\limits_{\mu=0}^{\nu}\left[1 + \frac{i\left(\beta_\mu^{(1)}\right)^2}{\lambda_\mu - \lambda_1}\right]}\right\} + \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\lambda_{m-s} - \lambda_1}{\lambda_{m-s} - \lambda_1}.$$

Таким образом,

$$\left(\widehat{A}_1^* - \lambda_1 I\right)_k^{-1} g_k(m,q) = \frac{\beta_m^{(1)}}{\lambda_m - \lambda_1}\left\{\sum_{\mu=0}^{m-1}\left[1 + \frac{i\left(\beta_\mu^{(1)}\right)^2}{\lambda_\mu - \lambda_1}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{a_{\nu+1}^{(1)} - a_\nu^{(1)}}{\prod\limits_{\mu=0}^{\nu}\left[1 + \frac{i\left(\beta_\mu^{(1)}\right)^2}{\lambda_\mu - \lambda_1}\right]}\right\} + \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\lambda_{m-s} - \lambda_1}{\lambda_{m-s} - \lambda_1}\right\}.$$

Аналогично,

$$\left(\widehat{A}_2^* - \lambda_2 I\right)_k^{-1} g_k(m,q) = \frac{\beta_q^{(2)}}{\lambda_q - \lambda_2}\left\{\sum_{n=0}^{q-1}\left[1 + \frac{i\left(\beta_n^{(2)}\right)^2}{\lambda_n - \lambda_2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\sum_{\Theta=0}^{q-1} \frac{a_{\Theta-1}^{(2)} - a_\Theta^{(2)}}{\prod\limits_{n=0}^{\Theta}\left[1 + \frac{i\left(\beta_q^{(2)}\right)^2}{\lambda_n - \lambda_2}\right]}\right\} + \prod_{r=1}^{q-1} \frac{\lambda_{q-r} - \lambda_2}{\lambda_{q-r} - \lambda_2}\right\}.$$

Окончательное выражение опускается ввиду его громоздкости. Аналогично можно получить выражения для смешанного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Изд-во ХГУ.– 1971. – 160 с.

2. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм. ССР.– 1976. – Т. 63, **3**. – С. 136–140.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.946.9 № 475, 2000, с. 375–377

Об одном способе решения задачи Дирихле

Г. В. Сузиков

Харьковский национальный университет, Украина

В работе решение задачи Дирихле представляется в виде предела решений задач Неймана для того же уравнения и в той же области. При этом используется одна методика, предложенная в книге Гловински Р.Г., Лионса Ж.-Л., Тремольера Р. "Численное исследование вариационных неравенств" для решения краевых задач для бигармонического уравнения.

Пусть D – область в R_3 с границей Γ. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u(x) - p(x)u(x) = f(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $p(x) \geq a > 0$ в D, $f(x), \varphi(x)$ – заданные функции.

Найдем последовательность функций $\lambda_n(x), u_n(x)$, определенных на Γ и в D, соответственно, следующими условиями: $\lambda_0(x)$ – функция на Γ – выбирается произвольно, функции $u_0(x), \lambda_1(x), u_1(x), ...$ последовательно находятся из рекуррентных соотношений

$$\Delta u_n(x) - p(x)u_n(x) = f(x), \quad x \in D, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial n_x} = -\lambda_n(x), \quad x \in \Gamma, \tag{4}$$

$$\lambda_{n+1}(x) = \lambda_n(x) + \rho_n(u_n(x) - \varphi(x)), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

где $n = 0, 1, 2, ..., n_x$ – внешняя к поверхности Γ нормаль в точке x, числа $\rho_n > 0$ – параметры метода. Очевидно, что каждый шаг процесса (3)–(5) состоит из решения задачи Неймана (3)–(4) и пересчета (5).

Сейчас мы докажем, что параметры метода числа $\rho_n > 0$ всегда можно выбрать так, что будет $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, где $u(x)$ решение краевой задачи (1)–(2).

В самом деле, положив

$$\lambda(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}, \quad \widetilde{u}_n(x) = u_n(x) - u(x), \quad \widetilde{\lambda}_n(x) = \lambda_n(x) - \lambda(x)$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$, из (1)–(5) имеем:

$$\Delta\widetilde{u}_n(x) - p(x)\widetilde{u}_n(x) = 0, \quad x \in D, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\widetilde{u}_n(x)}{\partial n_x} = -\widetilde{\lambda}_n(x), \quad x \in \Gamma, \tag{7}$$

$$\widetilde{\lambda}_{n+1}(x) = \widetilde{\lambda}_n(x) + \rho_n\widetilde{u}_n(x), \quad x \in \Gamma. \tag{8}$$

Так как

$$\widetilde{\lambda}_n^2 - \widetilde{\lambda}_{n+1}^2 = -2\rho_n\widetilde{\lambda}_n\widetilde{u}_n - \rho_n^2\widetilde{u}_n^2 = 2\rho_n\widetilde{u}_n\frac{\partial\widetilde{u}_n}{\partial n_x} - \rho_n^2\widetilde{u}_n^2,$$

то, из этого равенства и (6)–(7) легко выводим:

$$\int\limits_\Gamma \widetilde{\lambda}_n^2 ds - \int\limits_\Gamma \widetilde{\lambda}_{n+1}^2 ds = 2\rho_n \int\limits_\Gamma \widetilde{u}_n \frac{\partial\widetilde{u}_n}{\partial n_x} ds - \rho_n^2 \int\limits_\Gamma \widetilde{u}_n^2 ds =$$

$$= 2\rho_n \int\limits_D \left[|\nabla\widetilde{u}_n|^2 + pu_n^2\right] dx - \rho_n^2 \int\limits_\Gamma \widetilde{u}_n^2 ds. \tag{9}$$

Учитывая теперь, что

$$\|\widetilde{u}_n\|_{L_2(\Gamma)} \le c\|\widetilde{u}_n\|_{H^1(D)}, \quad c > 0,$$

(см., например, [1], теорема о следах), из (8) очевидно, получаем

$$\int\limits_\Gamma \widetilde{\lambda}_n^2 ds - \int\limits_\Gamma \widetilde{\lambda}_{n+1}^2 ds \ge 2\rho_n \int\limits_D \left[|\nabla\widetilde{u}_n|^2 + p\widetilde{u}_n^2\right] dx - c^2\rho_n^2\|\widetilde{u}_n\|_{H^1(D)}^2. \tag{10}$$

Так как

$$\int\limits_D \left(\nabla\widetilde{u}_n^2 + p\widetilde{u}_n^2\right) dx \ge \alpha\|\widetilde{u}_n\|_{H^1(D)}^2,$$

где $\alpha = \min\{1, a\} > 0$, то, положив еще $\mu_n = \int\limits_\Gamma \widetilde{\lambda}_n^2 ds$, из (10) получаем

$$\mu_n - \mu_{n+1} \ge 2\rho_n \left[\alpha - \frac{\rho_n c^2}{2}\right] \|\widetilde{u}_n\|_{H^1(D)}. \tag{11}$$

Пусть теперь r_0 и r_1 положительные числа, удовлетворяющие условиям $0 < r_1 < \alpha, \quad 0 < r_0 < \frac{2(\alpha - r_1)}{c^2}$ и пусть параметры метода ρ_n удовлетворяют условиям $0 < r_0 \le \rho_n \le \frac{2(\alpha - r_1)}{c^2}, \quad n = 0, 1, \ldots$ Тогда из (11) легко получаем

$$\mu_n - \mu_{n+1} \ge 2r_0r_1\|\widetilde{u}_n\|_{H^1(D)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Таким образом, последовательность неотрицательных чисел μ_n – невозрастающая и, тем самым, сходящаяся и, следовательно,

$$\mu_{n+1} - \mu_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а тогда из (12), очевидно, следует

$$\|\widetilde{u}_n(x)\|_{H^1(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тем самым нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Параметры метода (3)–(5) – числа ρ_n – всегда могут быть выбраны так, что будет выполнено*

$$\|\widetilde{u}_n(x)\|_{H^1(D)} = \|u_n(x) - u(x)\|_{H^1(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Замечание 1. Приведенное доказательство справедливо, например, при таких предположениях: D – открытое ограниченное множество с границей Γ, которая является непрерывно-дифференцируемым многообразием размерности 2, область D расположена локально по одну сторону от Γ, $p(x)$ – непрерывна в $\bar{D} \cap \Gamma$, $p(x) \geq a > 0$ в D, $f(x) \in L_2(D)$, $\varphi(x) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, $\lambda_0(x) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ и, очевидно, может быть распространено и на многие другие случаи.

Замечание 2. Из теоремы 1, в частности, следует, что решение любой задачи Дирихле (1)-(2) может быть представлено в виде предела решений задач Неймана (3)–(4) для того же уравнения с той же правой частью и в той же области, причем, чтобы превратить программу решения задачи Неймана в программу решения задачи Дирихле, нужно в первую добавить всего один цикл с простым пересчетом (5) после каждого прохождения.

Замечание 3. Описанная здесь технология в настоящее время широко распространена. Скажем, в [2], аналогичным образом, решение краевой задачи для и гармонического уравнения сводится к решению последовательности краевых задач для уравнений Лапласа, и в [3], подобным же образом, решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения сводится к решению последовательности задач Коши для того же уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

2. Гловински Р. Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Наука, 1979. – 574 с.

3. Сузиков Г. В., Воробьев И. В., Розуменко О. В. Об одном методе решения краевой задачи 2-го порядка // Вісник Харківського університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 1999. – 444. – С. 61–70.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.21 № 475, 2000, с. 378–387

Восстановление винеровского поля на плоскости по его значениям на участках двух монотонно невозрастающих кривых

Т. В. Земляк

Донбасская государственная академия архитектуры и строительства, Украина

В статье решена задача построения наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки для значения винеровского поля в некоторой точке плоскости, основанной на значениях этого поля на двух невозрастающих кривых и найдена ее погрешность.

1. Введение

В задачах обработки изображений последние нередко интерпретируются как случайные (чаще всего винеровские) поля и как следствие такой интерпретации возникает необходимость решения следующих задач. Пусть (Ω, σ, P) - некоторое вероятностное пространство, на котором задано винеровское поле $w(x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Предполагается, что мы наблюдаем винеровское поле $w(x, y)$, $(x, y) \in \gamma$ (где γ - некоторая кривая на плоскости) и необходимо восстановить поле в точке $(u, v) \notin \gamma$. Под восстановлением понимается построение наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки для $w(u, v)$, основанной на значениях $w(x, y)$ при $(x, y) \in \gamma$. Известно, что эта оценка задается формулой $\bar{m}(u, v) = M\{w(u, v)|F\}$ и ее ошибка вычисляется по формуле $d(u, v) = M\{(w(u, v) - \bar{m}(u, v))^2|F\}$, где $F = \sigma\{w(x, y), (x, y) \in \gamma\}$. Цель работы - построение явных формул для $\bar{m}(u, v)$ и $d(u, v)$. В [1] приведено решение задач восстановления винеровского поля на плоскости по его значениям на участке монотонной кривой. В [2 - 5] решены задачи восстановления по значениям винеровского поля на замкнутых кривых некоторого типа. В настоящей статье рассматривается случай, когда известны значения винеровского поля на участках двух монотонно невозрастающих кривых γ_1 и γ_2. Данная задача не сводится к задаче восстановления на одном участке монотонной кривой.

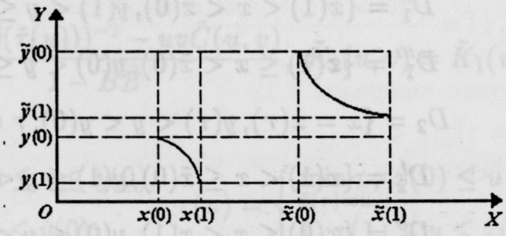

Рис. 1: Общий вид и взаимное расположение кривых γ_1 и γ_2 (выпуклость кривых роли не играет).

2. Основные обозначения и формулировки теорем

Предположим, что мы наблюдаем винеровское поле на участках двух монотонных кривых γ_1 и γ_2 (рис. 1), которые задаются следующими параметрическими уравнениями:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x(\tau); \\ y = y(\tau), \tau \in [0,1]; \end{cases} \gamma_2 : \begin{cases} x = \tilde{x}(\tau); \\ y = \tilde{y}(\tau), \tau \in [0,1]; \end{cases}$$

где функции $x(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ удовлетворют следующим условиям:

C_1) функции $x(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ положительные, непрерывно - дифференцируемые на отрезке [0,1];

C_2) если $\tau_1 < \tau_2$ то $x(\tau_1) \le x(\tau_2), y(\tau_1) \ge y(\tau_2), \tilde{x}(\tau_1) \le \tilde{x}(\tau_2), \tilde{y}(\tau_1) \ge \tilde{y}(\tau_2)$;

C_3) $x(1) < \tilde{x}(0), y(0) > \tilde{y}(1)$.

Рассмотрим следующие случайные процессы:

$$w(\tau) = w(x(\tau),\, y(\tau)),\ \tau \in [0,1], \tilde{w}(\tau) = w(\tilde{x}(\tau),\, \tilde{y}(\tau)),\ \tau \in [0,1].$$

Эти процессы являются гауссовскими с корреляционными функциями:

$$R(\tau_1,\tau_2) = \min(x(\tau_1), x(\tau_2)) \min(y(\tau_1), y(\tau_2)),\ \tau \in [0,1],$$

$$\tilde{R}(\tau_1,\tau_2) = \min(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_2)) \min(\tilde{y}(\tau_1), \tilde{y}(\tau_2)),\ \tau \in [0,1]$$

соответственно.

В настощей статье будет рассмотрен случай, когда точка (u,v) принадлежит области, ограниченной участками кривых γ_1 и γ_2 и прямыми $y = \tilde{y}(0)$, $y = y(1)$, $x = x(0)$, $x = \tilde{x}(1)$. Эту область можно представить в виде объединения следующих областей (явный вид формул для $\bar{m}(u,v)$ и $d(u,v)$ будет зависеть от того, какой из этих областей принадлежит точка (u,v)).

$$D_1 = \left\{x = \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(1) < y < \tilde{y}(\tau), \tau \in (0,1)\right\},$$

$$D_1' = \left\{\tilde{x}(0) \le \tilde{x}(1), y(0) < y \le \tilde{y}(1), \tau \in (0,1)\right\},$$

$$D_1'' = \{x(1) < x < \tilde{x}(0), \tilde{y}(1) < y \le \tilde{y}(0)\}\,,$$

$$D_1''' = \{x(1) \le x < \tilde{x}(0), y(0) < y \le \tilde{y}(1)\}\,,$$

$$D_2 = \{x = x(\tau), y(\tau) < y < y(0), \tau \in (0,1)\}\,,$$

$$D_2' = \{x(1) < x \le \tilde{x}(0), y(1) \le y < y(0)\}\,,$$

$$D_2'' = \{x(0) \le x < x(1), y(0) \le y < \tilde{y}(1)\}\,,$$

$$D_3 = \{\tilde{x}(0) \le x \le \tilde{x}(1), y(1) \le y \le y(0)\}\,,$$

$$D_4 = \{x(0) \le x \le x(1), \tilde{y}(1) \le y \le \tilde{y}(0)\}\,.$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(\tau) = \dot{x}(\tau)y(\tau) - x(\tau)\dot{y}(\tau),\ \tilde{\varphi}(\tau) = \dot{\tilde{x}}(\tau)\tilde{y}(\tau) - \tilde{x}(\tau)\dot{\tilde{y}}(\tau),$$

$$B = x(0)y(0) + \int\limits_0^1 \frac{[\dot{x}(\tau)y(\tau)]^2}{\varphi(\tau)}d\tau,\ \tilde{B} = \frac{1}{\tilde{x}(0)\tilde{y}(0)} + \int\limits_0^1 \left[\frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)}\right]^2 \frac{d\tau}{\tilde{\varphi}(\tau)},$$

$$\bar{m}_1 = w(x(0), y(0)) + \int\limits_0^1 \frac{\dot{x}(\tau)y(\tau)}{\varphi(\tau)}dw(\tau) - \int\limits_0^1 \frac{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)w(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau,$$

$$\bar{m}_2 = -\frac{w(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0))}{(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0))} + \int\limits_0^1 \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)\varphi(\tau)}d\tilde{w}(\tau) \int\limits_0^1 \left[\frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)}\right]^2 \frac{\tilde{w}(\tau)d\tau}{\tilde{\varphi}(\tau)}$$

$$\tilde{\tau}(v) = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{y}(\tau)=v} \tau, \tilde{y}(1) \le v \le \tilde{y}(0), \\ 1,\ y(1) \le v \le \tilde{y}(1); \end{cases} \quad \tilde{\tau}(u) = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{x}(\tau)=u} \tau,\ \tilde{x}(0) \le u \le \tilde{x}(1), \\ 0,\ x(0) \le u \le \tilde{x}(0); \end{cases}$$

$$\tilde{C}(u,v) = \int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \left[\frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)}\right]^2 \frac{d\tau}{\tilde{\varphi}(\tau)},\ \alpha = \begin{cases} 1,\ \tilde{x}(0) \le u \le \tilde{x}(1), \\ \frac{u}{\tilde{x}(0)},\ x(0) \le u \le \tilde{x}(0). \end{cases}$$

Учитывая обозначения сделанные выше, имеют место следующие утверждения:

Теорема 2.1. *Пусть точка (u,v) принадлежит области $D_1 \bigcup D_1' \bigcup D_1'' \bigcup D_1'''$ тогда (с вероятностью $P=1$):*

$$\bar{m}(u,v) = \tilde{K}_1(u,v)\bar{m}_1 + \tilde{K}_2(u,v)\bar{m}_2 + \alpha\frac{v}{\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))}w(u, \tilde{y}(\tilde{\tau}(u))) -$$
$$-uv\left[\int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)\tilde{\varphi}(\tau)}d\tilde{w}(\tau) - \int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \left[\frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)}\right]^2 \frac{\tilde{w}(\tau)d\tau}{\tilde{\varphi}(\tau)}\right], \tag{2.1}$$

$$d(u,v) = \Big(uv - \tilde{K}_1(u,v)\Big)\Big(1 - \alpha v(\tilde{y}(\tilde{\tau}(u)))^{-1} - uv\tilde{C}(u,v)\Big)\,, \tag{2.2}$$

где

$$\tilde{K}_1(u,v) = \frac{1 - v(\tilde{y}(\tilde{\tau}(u)))^{-1} - uv\tilde{C}(u,v)}{1 - B\tilde{B}}, \ \tilde{K}_2(u,v) = \tilde{K}_1(u,v)B.$$

Далее обозначим:

$$\tau(v) = \begin{cases} \min\limits_{y(\tau)=v} \tau, \ y(1) \le v \le y(0), \\ 0, \ y(0) \le v \le \tilde{y}(0); \end{cases} \quad \tau(u) = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{x}(\tau)=u} \tau, \ x(0) \le u \le x(1), \\ 1, \ x(1) \le u \le \tilde{x}(1); \end{cases}$$

$$C(u,v) = \int\limits_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{[\dot{x}(\tau)y(\tau)]^2}{\varphi(\tau)} d\tau, \ \beta = \begin{cases} 1, \ y(1) \le v \le y(0), \\ \frac{y(0)}{v}, \ y(0) \le v \le \tilde{y}(0). \end{cases}$$

Теорема 2.2. *Пусть точка (u,v) принадлежит области $D_2 \bigcup D_2' \bigcup D_2''$ тогда (с вероятностью $P = 1$):*

$$\bar{m}(u,v) = K_1(u,v)\bar{m}_1 + K_2(u,v)\bar{m}_2 + w(x(\tau(v)),v) +$$
$$+ \int\limits_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}(\tau)y(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau) - \int\limits_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)w(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau,$$

$$d(u,v) = (1 + K_1(u,v))(uv - \beta v(x(\tau(v))) - C(u,v)),$$

где

$$K_1(u,v) = \frac{(-uv + \beta v(x(\tau(v))) + C(u,v))\tilde{B}}{1 - B\tilde{B}}, \ K_2(u,v) = K_1(u,v)\tilde{B}^{-1}.$$

Теорема 2.3. *Пусть точка (u,v) принадлежит области $D_3 \bigcup D_4$ тогда (с вероятностью $P = 1$):*

$$\bar{m}(u,v) = \hat{K}_1(u,v)\bar{m}_1 + \hat{K}_2(u,v)\bar{m}_2 + \alpha \frac{v}{\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))} w(u, \tilde{y}(\tilde{\tau}(u))) -$$
$$-uv \left[\int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)\tilde{\varphi}(\tau)} d\tilde{w}(\tau) - \int\limits_{\tilde{\tau}(u)}^{\tilde{\tau}(v)} \left[\frac{\dot{\tilde{y}}(\tau)}{\tilde{y}(\tau)} \right]^2 \frac{\tilde{w}(\tau)d\tau}{\tilde{\varphi}(\tau)} \right] +$$
$$+ w(x(\tau(v)),v) + \int\limits_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}(\tau)y(\tau)}{\varphi(\tau)} dw(\tau) - \int\limits_{\tau(v)}^{\tau(u)} \frac{\dot{x}(\tau)\dot{y}(\tau)w(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau,$$

$$d(u,v) = uv - C(u,v)(1 + \hat{K}_1(u,v)) - \beta v \left[(x(\tau(v))) - \hat{K}_1(u,v)x(0) \right] -$$
$$-uv\tilde{C}(u,v)(uv - \hat{K}_2(u,v)) - \alpha v \left[uv\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))^{-1} - \hat{K}_2(u,v)y(0)^{-1} \right],$$

где

$$\hat{K}_1(u,v) = \frac{[\alpha v(x(\tau(v))) + C(u,v)]\tilde{B} - v[\beta\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))^{-1} - u\tilde{C}(u,v)]}{1 - B\tilde{B}}$$

$$\hat{K}_2(u,v) = \frac{[\alpha v(x(\tau(v))) + C(u,v)] - v[\beta \tilde{y}(\tilde{\tau}(u))^{-1} - u\tilde{C}(u,v)]B}{1 - B\tilde{B}}$$

Доказательство теоремы 2.1.

Пусть $0 = \tau^0_{k(n)} < \tau^1_{k(n)} < ... < \tau^{k(n)}_{k(n)} = 1$, $n \geq 1$ - некоторое разбиение отрезка [0,1] такое что:

а) $1 \leq k(1) < k(2) < ... < k(n) < ...$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leq j\leq k(n)} (\tau^j_{k(n)} - \tau^{j-1}_{k(n)}) = 0$;

с) для $j = \overline{1, k(n)}$ любого существует $r = \overline{1, k(n+1)}$ такое, что $\tau^j_{k(n)} = \tau^r_{k(n)}$.

Введем следующие обозначения:

$$x_j = x^j_{k(n)}, y_j = y^j_{k(n)}, \tilde{x}_j = \tilde{x}^j_{k(n)}, \tilde{y}_j = \tilde{y}^j_{k(n)}, w_j = w(x_j, y_j), \tilde{w}_j = w(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j),$$

$$F_{k(n)} = \sigma\left\{w_j, \tilde{w}_j, j = \overline{1, k(n)}\right\}, \bar{m}_{k(n)}(u,v) = M\left\{w(u,v)\Big|F_{k(n)}\right\},$$

$$d_{k(n)}(u,v) = M\left\{(w(u,v) - \bar{m}(u,v))^2\Big|F_{k(n)}\right\}.$$

Далее для упрощения записей переобозначим $k(n)$ через n и для нахождения $\bar{m}_n(u,v)$ и $d_n(u,v)$ воспользуемся теоремой о нормальной корреляции из [6, стр.498]. Для этого найдем решение системы:

$$cov(\bar{w}, \bar{w})\bar{\beta} = cov(w(u,v), \bar{w}), \tag{2.3}$$

где

$$\bar{w} = (w, \tilde{w}), w = (w_0, w_1, ..., w_j, ..., w_n), \tilde{w} = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_j, ..., \tilde{w}_n),$$

$\bar{\beta}$ - неизвестный вектор, имеющий следующую структуру:

$$\bar{\beta} = (\beta, \tilde{\beta}), \beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_j, ..., \beta_n), \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_j, ..., \tilde{\beta}_n).$$

Матрица $cov(\bar{w}, \bar{w})$ имеет следующую структуру:

$$cov(\bar{w}, \bar{w}) = \begin{pmatrix} cov(w,w) & cov(w,\tilde{w}) \\ cov(\tilde{w}, w) & cov(\tilde{w}, \tilde{w}) \end{pmatrix},$$

где

$$cov(w,w) = \begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & \dots & x_0y_n \\ x_0y_1 & x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0y_n & x_1y_n & \dots & x_ny_n \end{pmatrix},$$

$$cov(\tilde{w},\tilde{w}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0\tilde{y}_0 & \tilde{x}_0\tilde{y}_1 & \dots & \tilde{x}_0\tilde{y}_n \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_1 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \dots & \tilde{x}_1\tilde{y}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_0\tilde{y}_n & \tilde{x}_1\tilde{y}_n & \dots & \tilde{x}_n\tilde{y}_n \end{pmatrix},$$

$$cov(w,\tilde{w})=\begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_0 & \dots & x_0y_0\\ x_1y_1 & x_1y_1 & \dots & x_1y_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_ny_n & x_ny_n & \dots & x_ny_n\end{pmatrix}, cov(\tilde{w},w)=cov^T(w,\tilde{w}).$$

Осталось определить координаты вектора $cov(w(u,v),\bar{w})$. Рассмотрим сначала случай, когда точка $(u,v)\in D_1$. Не умаляя общности можно считать, что для любого $n\geq 1$ существуют τ_n^q и τ_n^p такие, что $\tilde{\tau}(v)=\tau_n^q$ и $\tilde{\tau}(u)=\tau_n^p$ $(p<q)$. Учитывая эти обозначения и условие C_2, запишем координаты вектора $cov(w(u,v),\bar{w})$:

$$cov(w(u,v),w_j)=x_jy_j,\ j=\overline{0,n},\ cov(w(u,v),\tilde{w}_j)=\begin{cases} x_jv, & j=\overline{0,p},\\ uv, & j=\overline{p+1,q},\\ uy_j, & j=\overline{q+1,n}.\end{cases}$$

Делая над уравнениями системы (2.3) эквивалентные преобразования и предполагая, что не существует отрезка $[\tau',\tau'']\subseteq[0,1]$, на котором $x(\tau)\equiv const$ или $\tilde{y}(\tau)\equiv const$ для коэффициентов $\beta_j,\tilde{\beta}_j$ получим следующие равенства:

$$\beta_0=\left(1-\frac{y_1\Delta x_1}{\varphi_1}\right)\frac{\varphi_n}{y_{n-1}\Delta x_n}\beta_n,\beta_j=S_j\frac{\varphi_n}{y_{n-1}\Delta x_n}\beta_n, j=\overline{1,n-1},\qquad(2.4)$$

$$\tilde{\beta}_0=-\frac{1}{\tilde{y}_0}\left(\frac{1}{\tilde{x}_0}+\frac{\Delta\tilde{y}_1}{\tilde{\varphi}_1}\right)\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n,\tilde{\beta}_j=\frac{\tilde{S}_j}{\tilde{y}_j}\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n, j=\overline{1,p-1}, j=\overline{q+1,n-1},\qquad(2.5)$$

$$\tilde{\beta}_p=\frac{v}{\tilde{y}_p}\left(1-\frac{u\Delta\tilde{y}_{P+1}}{\tilde{\varphi}_{p+1}}\right)+\frac{\tilde{S}_p}{\tilde{y}_p}\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n,\qquad(2.6)$$

$$\tilde{\beta}_j=-\frac{\tilde{S}_j}{\tilde{y}_j}\left(uv-\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\right)\tilde{\beta}_n, j=\overline{p+1,q-1},\tilde{\beta}_q=-\frac{u\Delta\tilde{y}_q}{\tilde{\varphi}_q}+\frac{\tilde{S}_q}{\tilde{y}_q}\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n,\qquad(2.7)$$

где

$$S_j=\frac{y_{j-1}\Delta x_j}{\varphi_j}-\frac{y_{j+1}\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}},\tilde{S}_j=\frac{\Delta\tilde{y}_j}{\tilde{\varphi}_j}-\frac{\Delta\tilde{y}_{j+1}}{\tilde{\varphi}_{j+1}}, j=\overline{1,n-1}.$$

А для определения $\frac{\varphi_n}{y_{n-1}\Delta x_n}\beta_n$, и $\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n$ получим следующую систему:

$$\begin{cases}\frac{\varphi_n}{y_{n-1}\Delta x_n}\beta_n-\tilde{B}'\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n=1-\frac{v}{\tilde{y}_p}+uv\tilde{C}',\\ B'\frac{\varphi_n}{y_{n-1}\Delta x_n}\beta_n-\frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n=0;\end{cases}\qquad(2.8)$$

где

$$\tilde{B}'=\frac{1}{\tilde{x}_0\tilde{y}_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta\tilde{y}_j^2}{\tilde{y}_{j-1}\tilde{y}_j\tilde{\varphi}_j},B'=x_0y_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{y_{j-1}y_j\Delta x_j^2}{\varphi_j},\tilde{C}'=\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta\tilde{y}_j^2}{\tilde{y}_{j-1}\tilde{y}_j\tilde{\varphi}_j}.$$

Заметим, что главный определитель матрицы (2.8) равен $1-B'\tilde{B}'$ и в силу условий C_2, C_3 $1-B'\tilde{B}'\neq 0$. Таким образом, система (2.8) имеет единственное решение, которое имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_n}{y_{n-1}\Delta x_n}\beta_n = \frac{1-vy_p^{-1}+uv\tilde{C}'}{1-B'\tilde{B}'}, \\ \frac{\tilde{y}_n\tilde{\varphi}_n}{\Delta\tilde{y}_n}\tilde{\beta}_n = \frac{(1-vy_p^{-1}+uv\tilde{C}')B'}{1-B'\tilde{B}'}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Таким образом,

$$\bar{m}_n(u,v) = \sum_{j=0}^{n}\beta_j w_j + \sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j\tilde{w}_j, \tag{2.10}$$

где коэффициенты $\beta_j, \tilde{\beta}_j$ определяются равенствами (2.4) - (2.7) и (2.9). Рассмотрим первую сумму в равенстве (2.10).

$$\sum_{j=0}^{n}\beta_j w_j = \frac{\varphi_n}{\Delta x_n}\beta_n\left(w_0 - \frac{y_1\Delta x_1}{\varphi_1}w_0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{y_{j-1}\Delta x_j}{\varphi_j} - \frac{y_{j+1}\Delta x_{j+1}}{\varphi_{j+1}}\right)w_j + \right.$$

$$\left. + \frac{y_{n-1}\Delta x_n}{\varphi_n}w_n\right) =$$

$$= \frac{1-vy_p^{-1}+uv\tilde{C}'}{1-B'\tilde{B}'}\left(w_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{y_{j-1}\Delta x_j}{\varphi_j}\Delta w_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{y_j\Delta x_j}{\varphi_j}w_{j-1}\right). \tag{2.11}$$

Делая аналогичные преобразования со второй суммой в равенстве (2.10) получим:

$$\sum_{j=0}^{n}\tilde{\beta}_j\tilde{w}_j = \frac{(1-vy_p^{-1}+uv\tilde{C}')B'}{1-B'\tilde{B}'}\left(\frac{\tilde{w}_0}{\tilde{x}_0\tilde{y}_0} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta\tilde{y}_j}{\tilde{y}_j\tilde{\varphi}_j}\Delta\tilde{w}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta\tilde{y}_j^2\tilde{w}_{j-1}}{\tilde{y}_j^2\tilde{\varphi}_j}\right) +$$

$$+uv\left(\frac{\tilde{w}_0}{\tilde{x}_0\tilde{y}_0} - \sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta\tilde{y}_j}{\tilde{y}_j\tilde{\varphi}_j}\Delta\tilde{w}_j + \sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta\tilde{y}_j^2\tilde{w}_{j-1}}{\tilde{y}_j^2\tilde{\varphi}_j}\right). \tag{2.12}$$

Переходя в равенствах (2.11) и (2.12) к $l.i.m$ при $n \to \infty$ и учитывая равество (2.10) получим выражение, стоящее в правой части (2.1). Отметим, что

$$B\tilde{B} \le \frac{x(1)y(0)}{\tilde{x}(0)\tilde{y}(1)} < 1.$$

И следовательно: $1 - B\tilde{B} \ne 0$. Далее, вспоминая, что $k(n)$ переобозначали через n и учитывая определение разбиения отрезка $[0,1]$ имеем:

$$F_{k(1)} \subseteq F_{k(2)} \subseteq \ldots \subseteq F_{k(n)} \subseteq \ldots \subseteq F, \text{ где } F = \sigma\left\{\bigcup_{k(n)}^{\infty} F_{k(n)}, n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Следовательно, согласно теореме Леви получим: $\bar{m}_{k(n)}(u,v) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{m}(u,v)$ (с вероятностью $P = 1$). Так как

$$M\left\{(w(u,v) - \bar{m}_{k(n)}(u,v))^2 \middle| F_{k(n)}\right\} \le M\left\{(w(u,v) - \bar{m}_{k(1)}(u,v))^2 \middle| F_{k(n)}\right\},$$

при $n = 1, 2...$ и следовательно

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, \bar{m}_{k(n)}(u,v) = \bar{m}(u,v).$$

что и доказывает равенство (2.1). Равенство (2.2) доказывается аналогично. Таким образом, утверждение теоремы 2.1 доказано в случае, когда не существует отрезка $[\tau', \tau''] \subseteq [0,1]$ на котором $x(\tau) \equiv const$ или $\tilde{y}(\tau) \equiv const$ и уравнение $x(\tau) = u$ имеет единственное решение. Пусть $x(\tau) \equiv const$ на отрезке $[\tau', \tau''] \subseteq [0,1]$. Не умаляя общности можно считать, что для любого $n \geq 1$ существуют τ_l^n и τ_k^n такие, что $\tau' = \tau_l^n$ и $\tau'' = \tau_k^n (l < k)$, тогда $\Delta x_j = 0$, $j = \overline{l+1,k}$. Учитывая эти равенства, получим, что $\beta_j = 0$, $j = \overline{l+1,k}$. Так как в этом случае $\dot{x}(\tau) \equiv 0$ на отрезке $[\tau', \tau''] \subseteq [0,1]$, то формулы (2.1) и (2.2) остаются верными в том же виде. Проведя аналогичные рассуждения в случах $\tilde{y}(\tau) \equiv const$ и когда уравнение $x(\tau) = u$ имеет единственное решение докажем теорему 2.1 при условии, что точка $(u,v) \in D_1$. Если точка $(u,v) \in D_1' \bigcup D_1'' \bigcup D_1'''$ то изменятся только координаты вектора $cov(w(u,v), \bar{w})$. Учитывая это и повторяя рассуждения, сделанные в первом случае, утверждение теоремы 2.1 докажем полностью. Для доказательства теорем 2.2, 2.3 необходимо повторить все этапы доказательства теоремы 2.1, учитывая, что изментся только координаты вектора $cov(w(u,v), \bar{w})$.

Замечание. Утверждения теорем 2.1 - 2.3 останутся верными и в том случае, когда на отрезке $[0,1]$ существует конечное число точек $\tau_{r(i)}, i = \overline{1,p}$ в которых функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ не имеют производную, а имеют только конечные правосторонние и левосторонние производные. В этом случае в формулах для $\bar{m}(u,v)$ и $d(u,v)$ вместо каждого интеграла будет стоть сумма интегралов по участкам кривой γ, на которых функции $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ непрерывно дифференцируемы. Далее рассмотрим случаи, когда в теоремах 2.1 - 2.3 в формулах для $\bar{m}(u,v)$ и $d(u,v)$ отсутствуют интегральные члены. Пусть кривые γ_1 и γ_2 задаются следующими уравнениями соответственно:

$$\begin{cases} x = \frac{y(\tau)}{a(b - y(\tau))}, \\ y = y(\tau),\ a < 0,\ b \in (0, y(1)),\ \tau \in [0,1]; \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} x = \tilde{x}(\tau), \\ \tilde{y} = c + d\tilde{x}(\tau),\ d < 0,\ c > -d\tilde{x}(1),\ \tau \in [0,1]; \end{cases} \tag{2.14}$$

В этом случае формулы для $B, \tilde{B}, \tilde{C}(u,v)$ примут следующий вид:

$$B = x(0)y(0) + b(x(1) - x(0)), \tag{2.15}$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{\tilde{x}(0)\tilde{y}(0)} + \frac{d}{c}\left(\frac{1}{\tilde{y}(0)} - \frac{1}{\tilde{y}(1)}\right), \tag{2.16}$$

$$\tilde{C}(u,v) = \frac{d}{c}\left(\frac{1}{\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))} - \frac{1}{\tilde{y}(\tilde{\tau}(v))}\right), \tag{2.17}$$

Теорема 2.4. *Пусть точка (u, v) принадлежит области D_1 и кривые γ_1 и γ_2 задаются уравнениями (2.13) и (2.14) соответственно, тогда (с вероятностью $P = 1$) имеют место следующие равенства:*

$$\bar{m}(u,v) = \tilde{K}_1(u,v)\left[\left(1 - \frac{b}{y(0)}\right)w(0) + \frac{b}{y(1)}w(1)\right] +$$

$$+\tilde{K}_2(u,v)\left[-\left(\frac{1}{\tilde{x}(0)\tilde{y}(0)} + \frac{d}{c}\right)\tilde{w}(0) + \frac{d}{c}\tilde{w}(1)\right] +$$

$$+\left(\alpha\frac{v}{\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))} + \frac{uvd}{c}\right)\tilde{w}(\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))) - \frac{uvd}{c}\tilde{w}(\tilde{y}(\tilde{\tau}(v))),$$

$$d(u,v) = (uv - \tilde{K}_1(u,v))(1 - \alpha v\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))^{-1} - uv\tilde{C}(u,v)),$$

где

$$\tilde{K}_1(u,v) = \frac{1 - v[\tilde{y}(\tilde{\tau}(u))^{-1} - u\tilde{C}(u,v)]}{1 - B\tilde{B}},$$

$$\tilde{K}_2(u,v) = \tilde{K}_1(u,v)B.$$

величины $B, \tilde{B}, \tilde{C}(u,v)$ определются равенствами (2.15) - (2.17).

3. Выводы

Отметим два существенных отличия полученных результатов от результатов описанных в [1]. Так, во-первых, из формул для $\bar{m}(u,v)$ в теоремах 2.1 - 2.2 следует, что значение случайной величины $\bar{m}(u,v)$ зависит от значений поля во всех точках кривых γ_1 и γ_2, в то время как в задачах решенных в случае, когда известны значения поля на одном участке монотонной кривой [1] значение случайной величины $\bar{m}(u,v)$ зависело от значений поля только на отдельном участке кривой, который определялся расположением точки (u, v) относительно этой кривой. Во-вторых, в формулах для $\bar{m}(u,v)$ и $d(u,v)$ в теоремах 2.1 - 2.2 присутствуют коэффициенты, в выражении которых содержатся определенные интегралы от некоторой функции, которая в свою очередь зависит от уравнений кривых γ_1 и γ_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевляков А. Ю. О восстановлении винеровского поля по его реализациям на кривой // Теория случайных процессов. – 1988. – Вып. 16 – С. 87–93.
2. Золотая А. В., Шевляков А. Ю., Шевляков Ю. А. О восстановлении винеровского поля по его значениям на прямоугольном треугольнике. Донецк. Ун-т. – Д., 1994.– 8 с. - Деп. в ГНТБ Украины 01.03.94, №451 – Ук 95.
3. Золота А. В. Про відновлення вінерового поля за його значеннями на прямокутнику // Матеріали VI міжнародної конференції імені академіка М.Кравчука, – Київ. – 1997. – С. 181.

4. Земляк Т. В. Восстановление винеровского поля на плоскости по его реализациям на замкнутой кривой некоторого типа // Вiсник Донецького державного унiверсiтету. Серiя А: Природничi науки. – 1998. –1. – С. 24–30.

5. Земляк Т. В. О восстановлении винеровского поля на плоскости по его значениям на замкнутых кривых // Укр. мат. журнал, – 1999. – Т. 51, 6. – С. 744–752.

6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.21 № 475, 2000, с. 388–393

О близости решения начально-краевой задачи для параболического уравнения с быстрыми случайными осцилляциями и решения уравнения Ито

Б. В. Бондарев, А. А. Симогин

Донецкий государственный университет, Украина
Донбасская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

Найдены оценки скорости сходимости решения начально-краевой задачи для параболического уравнения с быстрыми случайными осцилляциями к решению соответствующего уравнения Ито в равномерной метрике по вероятности.

1. Постановка задачи и основные предположения

Пусть D - некоторая открытая область в R_n, S - ее достаточно гладкая граница. Рассмотрим в цилиндре $D_T = [0,T] \times D$ первую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial U_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = L_{t,x} U_\varepsilon(t,x) + A(t,x,U_\varepsilon(t,x)) + B(t,x,U_\varepsilon(t,x))\,\eta(t/\varepsilon) \\ &U_\varepsilon(0,x) = u_0(x),\, U_\varepsilon(t,x)|_{x\in\Gamma_D} = 0, x \in D, t \in [0,T], \end{aligned} \qquad (1)$$

а также соответствующую задачу для уравнения Ито:

$$\begin{aligned} &\partial_t X_\varepsilon(t,x) = L_{t,x} X_\varepsilon(t,x) + A(t,x,U_0(t,x))\,dt + \sqrt{\varepsilon\sigma} B(t,x,U_0(t,x))\,dw(t) \\ &X_\varepsilon(0,x) = u_0(x),\, X_\varepsilon(t,x)|_{x\in\Gamma_D} = 0, x \in D, t \in [0,T], \end{aligned} \qquad (2)$$

здесь $U_0(t,x)$ - решение задачи:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial U_0(t,x)}{\partial t} = L_{t,x} U_0(t,x) + A(t,x,U_0(t,x)) \\ &U_0(0,x) = u_0(x),\, U_0(t,x)|_{x\in\Gamma_D} = 0, x \in D, t \in [0,T], \end{aligned} \qquad (3)$$

В уравнении (1) $\eta(t)$ - стационарный в узком смысле случайный процесс, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания(р.с.п.) с коэффициентом р.с.п. $\varphi(t)$. В уравнении (2) $w(t)$, $t \in [0,T]$ - стандартный винеровский процесс. Также в обоих уравнениях $\varepsilon > 0$ - малый параметр и $L_{t,x}V = \sum_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}\right] + \sum_i^n b_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}$ - равномерно эллиптический оператор.

Пусть существуют и единственны решения задачи (1) [2], [3] и задачи (2) [4] в классе функций $\overset{\circ}{H}{}^{10}$.

Считаем, что относительно процесса $\eta(t)$ выполнены условия

$$
\begin{gathered}
E\eta(t)=0, E|\eta(t)|=b, D\int_0^T \eta(u)\,du=1, P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta(t)|>R\right\}\le C_1e^{-C_2R},\\
0<\sigma\le E\left(\int_0^T \eta(u)\,du\right)^2+2\sum_{j=1}^{\infty} E\int_0^T \eta(u)\,du\int_{Tj}^{T(j+1)}\eta(u)\,du<+\infty,\\
0<\sigma\le E\left(\int_0^T \eta'(u)\,du\right)^2+2\sum_{j=1}^{\infty} E\int_0^T \eta'(u)\,du\int_{Tj}^{T(j+1)}\eta'(u)\,du<+\infty,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $\eta'(t)=|\eta(t)|-E|\eta(t)|$.

А также пусть выполнено условие теоремы 1 [5]: для некоторого $0<r<5$ справедливо $\varphi(s)\le As^{-g}$, где $g>j(u)(j(u)-1)$, $u=(2+5r)/2(5-r)$, $j(u)=2\min(k\in N: 2k\ge u)$.

Неслучайные коэффициенты $a_{ij}(t,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $b_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, таковы, что для любой точки $z=(z_1,\dots,z_n)\in R^n$ выполнено:

$$
\begin{gathered}
\gamma\sum_{i=1}^n z_i^2\le\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t,x)z_iz_j\le\mu_1\sum_{i=1}^n z_i^2,\gamma,\mu_1>0\\
\sum_{i,j=1}^n|a_{i,j}(t,x)|^2\le A^2<+\infty,\sum_{i=1}^n|b_{i,j}(t,x)|\le B<+\infty\\
\left|\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial a_{i,j}(t,x)}{\partial t}z_iz_j\right|\le\mu_2\sum_{i=1}^n z_i^2,\mu_2>0
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Неслучайные функции $A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$ удовлетворяют условию Липшица:

$$
|A(t,x,y)-A(t,x,z)|\le L|y-z|,|B(t,x,y)-B(t,x,z)|\le L|y-z| \tag{6}
$$

Далее в статье используются следующие обозначения

$$
\|f\|_t^2=\int_D|f(t,x)|^2dx,\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),|||f|||_t^2=\|f\|_t^2+\int_0^t\|\nabla f\|_s^2ds,
$$

$L^*_{t,x}$ - оператор сопряженный к $L_{t,x}$, $\zeta_\varepsilon(t)=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int_0^{t/\varepsilon}\eta(u)du=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\sigma}}\int_0^t\eta(u/\varepsilon)du$

Из результатов работы [5] следует, что при выполнении определенных условий на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ можно построить процесс $\tilde\eta(t)$, имеющий одинаковые с $\eta(t)$ конечномерные распределения такой, что он сходится по вероятности к $w(t)$ в каждой точке отрезка $[0,T]$.

Пусть функция $\beta(\varepsilon)$, такая что $\frac{\beta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\to\infty$ при $\varepsilon\to0$, тогда при выполнении условий теоремы 1 [5] верны следующие два результата.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 [5]. Функция* $\mu(\varepsilon)=C_0\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1}E\left|\int_0^T\eta(u)\,du\right|^r\right)^{1/(r+1)}$. *Тогда, при* $R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)>1$ *верна следующая оценка:*

$$
P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde\zeta_\varepsilon(t)\right|>R\right\}\le\left(1+\tfrac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu(\varepsilon)+
\frac{C_3}{R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon))^2}{2T}\right\},C_3=\frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{7}
$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 [5]. Функция* $\mu'(\varepsilon) = C_0\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1} E\left|\int_0^T \eta'(u)\,du\right|^r\right)^{1/(r+1)}$. *Тогда, при* $R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)>1$ *верна следующая оценка:*

$$P\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma'}}\int_0^{T/\varepsilon}\left(|\eta(u)|-E|\eta(u)|\right)du>R\right\}\le\left(1+\tfrac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+$$
$$\mu'(\varepsilon)+\frac{C_3}{R-\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R-\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon))^2}{2T}\right\}, C_3=\frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{8}$$

2. Основные результаты

Теорема. *Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (2), а также*

i)процесс $\eta(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы 1 [5];*

ii)выполнены условия (4);

iii)$\int_0^T\left(\int_D\left|L^*_{s,x}B(s,x,U_0(s,x))\right|^2dx\right)^{1/2}dt\le A_1$

$\int_0^T\left(\int_D\left|\frac{\partial B(t,x,U_0(t,x))}{\partial t}\right|^2dx\right)^{1/2}dt\le A_2,$

$\sup\limits_{0\le t\le T}\left(\int_D|B(s,x,U_0(s,x))|^2dx\right)^{1/2}\le A_3,$

тогда справедлива оценка:

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\left|\frac{\tilde{U}_\varepsilon-X_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|\right|_t>R\right\}\le\left(1+\tfrac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\frac{N_1+1}{N_1}\mu(\varepsilon)+$$
$$\frac{C_3N_2}{R-(N_2+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(R-(N_2+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)))^2}{2N_2^2T}\right\}+$$
$$\left(1+\tfrac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu'(\varepsilon)+\left(1+\tfrac{3}{\varepsilon}C_1\right)exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon N_1}}\right\}+ \tag{9}$$
$$\frac{C_3\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{\left(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))\right)^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\},$$

где $\tilde{X}_\varepsilon(t,x)$ *- поле построенное на одном вероятностном пространстве с* $w(t)$ *и имеющее одни и те же конечномерные распределения с* $X_\varepsilon(t,x)$.

Прежде, чем переходить непосредственно к доказательству теоремы, докажем справедливость следующих трех утверждений.

Наряду с задачами (1) и (2) рассмотрим задачу для уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Y_\varepsilon(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}Y_\varepsilon(t,x)+A(t,x,U_0(t,x))+B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon)\\&Y_\varepsilon(0,x)=u_0(x), Y_\varepsilon(t,x)|_{x\in\Gamma_D}=0, x\in D, t\in[0,T],\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть также $\tilde{Y}_\varepsilon(t,x)$ поле, построенное на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ и имеющее одинаковые с $Y_\varepsilon(t,x)$ конечномерные распределения.

Лемма 3. *Пусть существуют и единственны [2],[3] решения задач (3) и (10), а также выполнены условия теоремы, тогда справедлива оценка:*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{Y_\varepsilon-U_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_t > R\right\}\le\left(1+\tfrac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu(\varepsilon)+ \frac{C_3N_1}{R-N_1(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(R-1_5(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)))^2}{2TN_1^2}\right\}. \quad (11)$$

Доказательство леммы. Обозначим $\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)=\frac{Y_\varepsilon(t,x)-U_0(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Из (3) и (10) вытекает, что $\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\xi_\varepsilon^{(1)}}{\partial t}(t,x)=L_{t,x}\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}B(t,x,U_0(t,x))\,\eta(t/\varepsilon).$$

Умножим обе части последнего уравнения на $2\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)$ и проинтегрируем в области D_t с учетом условий (5) и (6) получаем

$$\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t^2+2\gamma\int_0^t\left\|\nabla\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s ds\le 2B\int_0^t\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s\left\|\nabla\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s ds+ \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_D B(s,x,U_0(s,x))\,\eta(s/\varepsilon)\,dxds \quad (12)$$

С учетом условий ii) теоремы имеем

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\int_0^t\int_D B(s,x,U_0(s,x))\,\eta(s/\varepsilon)dxds\right|\le\\ &2\sqrt{\sigma}\left|\left[\zeta_\varepsilon(t)\int_D B(s,x,U_0(s,x))\,\xi_\varepsilon^{(1)}dx-\int_0^t\zeta_\varepsilon(s)\int_D\frac{\partial B}{\partial s}(s,x,U_0(s,x))\,\xi_\varepsilon^{(1)}dxds-\right.\right.\\ &\left.\int_0^t\zeta_\varepsilon(s)\int_D L_{s,x}^{*}B(s,x,U_0(s,x))\,\xi_\varepsilon^{(1)}dxds\right]-2\sigma\left[\zeta_\varepsilon^2(t)\int_D B^2(s,x,U_0(s,x))dx-\right.\\ &\left.\left.2\int_0^t\zeta_\varepsilon^2(s)\int_D B(s,x,U_0(s,x))\frac{\partial B}{\partial s}(s,x,U_0(s,x))\,dxds\right]\right|\le\\ &2\sqrt{\sigma}\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|\left\{A_3\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t+(A_1+A_2)\int_0^t\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s ds\right\}+4\sigma A_2A_3\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|^2.\end{aligned} \quad (13)$$

Используя (13) оценку (12) можно переписать в виде

$$\min\{1,2\gamma\}\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t^2\le B\int_0^t\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s^2 ds+2\sqrt{\sigma}(A_1+A_2)\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|\times \int_0^t\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s ds+2A_3\sqrt{\sigma}\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t+4A_2A_3\sigma\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|^2 \quad (14)$$

Воспользуемся фактом: если $V(t),\alpha,\beta,\rho,\iota>0$, $\sup_{0\le t\le T}V(t)<+\infty$ и $V^2(t)\le\alpha\int_0^t V^2(s)\,ds+\beta\int_0^t V(s)\,ds+\rho\sup_{0\le t\le T}V(t)+\iota$, то имеет место оценка

$$\sup_{0\le t\le T}V^{1/2}(t)\le\sqrt{\rho}\exp\left\{\frac{\alpha T}{2}\right\}+\left(\iota^{1/4}+\sqrt{\beta T}\right)\exp\left\{\frac{\alpha T}{4}\right\} \quad (15)$$

Из (14) с учетом (15) вытекает неравенство

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t^{1/2}\le\left(N_1\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|\right)^{1/2}, \quad (16)$$

где

$$N_1 = \frac{2\sqrt{\sigma}}{\min\{1,2\gamma\}} \left(\sqrt{A_3}\exp\left\{\frac{BT}{2\min\{1,2\gamma\}}\right\} + \left[\sqrt[4]{A_2 A_3} + \sqrt{\min\{1,2\gamma\}} + \sqrt{A_1+A_2}\right]\exp\left\{\frac{BT}{4\min\{1,2\gamma\}}\right\}\right)^2$$

Таким образом из (16) следует

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t > R\right\} \le P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)| > R/N_1\right\}$$

Откуда с учетом (7) вытекает (11).

Лемма 4. *Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (10), а также выполнены условия теоремы, тогда справедлива оценка:*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{U_\varepsilon - Y_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_t > R\right\} \le \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\} + \mu(\varepsilon) + \frac{C_3 N_2}{R - N_2(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(R-N_2(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)))^2}{2N_2^2 T}\right\} + \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\} + \mu'(\varepsilon) + \frac{C_3\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{\left(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))\right)^2}{2\varepsilon\sigma' T}\right\} + \tag{17}$$

Доказательство леммы. Пусть теперь $\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x) = \frac{U_\varepsilon(t,x) - Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Из (1) и (10) вытекает, что $\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\xi_\varepsilon^{(2)}}{\partial t}(t,x) = L_{t,x}\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A(t,x,U_\varepsilon(t,x)) - A(t,x,Y_\varepsilon(t,x))\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A(t,x,Y_\varepsilon(t,x)) - A(t,x,U_0(t,x))\right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(B(t,x,U_\varepsilon(t,x)) - B(t,x,Y_\varepsilon(t,x))\right)\eta(t/\varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(B(t,x,Y_\varepsilon(t,x)) - B(t,x,U_0(t,x))\right)\eta(t/\varepsilon)$$

Домножив обе части этого уравнения на $\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)$ и проинтегрировав в D_t получаем

$$\min\{1,2\gamma\}\left\|\xi_\varepsilon^{(2)}\right\|_t^2 \le \int_0^t\left\|\xi_\varepsilon^{(2)}\right\|_s^2 (B+L+3L|\eta(s/\varepsilon)|)\,ds + L\int_0^t\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s^2 (1+|\eta(s/\varepsilon)|)\,ds \tag{18}$$

Из (18) с учетом леммы Гроноулла вытекает

$$\left\|\xi_\varepsilon^{(2)}\right\|_t^2 \le \frac{L}{\min\{1,2\gamma\}}\int_0^T\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_s^2(1+|\eta(s/\varepsilon)|)\,ds \times \exp\left\{\frac{\int_0^T (B+L+3L|\eta(s/\varepsilon)|)\,ds}{\min\{1,2\gamma\}}\right\}$$

Из последнего следует

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\xi_\varepsilon^{(2)}\right\|_t > R\right\} \le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\xi_\varepsilon^{(1)}\right\|_t > R/N_2\right\} + P\left\{\int_0^T(|\eta(s/\varepsilon)| + E|\eta(s/\varepsilon)|)\,ds > 1\right\}, \tag{19}$$

где $N_2 = N_1\sqrt{\frac{L(2+b)}{\min\{1,2\gamma\}}}\exp\left\{\frac{B+4L+3bL}{2\min\{1,2\gamma\}}\right\}$. Из (19) с учетом (8),(11) следует (17).

Лемма 5. *Пусть существуют и единственны решения задач (2) и (10), а также выполнены условия теоремы, тогда справедлива оценка:*

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{\tilde{Y}_\varepsilon - X_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_t > \beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\} \le \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}+\frac{\mu(\varepsilon)}{N_1}. \tag{20}$$

Доказательство леммы. Обозначим $\xi_\varepsilon^{(3)}(t,x) = \frac{\tilde{Y}_\varepsilon(t,x)-X_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Из (3) и (10) вытекает, что $\xi_\varepsilon^{(3)}(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t\xi_\varepsilon^{(3)}(t,x) = L_{t,x}\xi_\varepsilon^{(3)}(t,x)\,dt + \sqrt{\sigma}B(t,x,U_0(t,x))\,d\left(\tilde{\zeta}(t)-w(t)\right)$$

Повторяя выкладки приведенные в доказательстве леммы 3 получим оценку

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\xi_\varepsilon^{(3)}\right\|_t > \beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\} \le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\zeta(t)-w(t)\right| > \frac{\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)}{N_1}\right\}.$$

Используя результат теоремы 1 [5], получим (20).

Доказательство теоремы. Не трудно видеть, что справедливо соотношение

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{\bar{U}_\varepsilon - X_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_t > R\right\} \le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{U_\varepsilon - Y_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_t > R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)\right\} +$$
$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{\tilde{Y}_\varepsilon - X_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|_t > \beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}.$$

Откуда учитывая оценки (17) и (20) следует соотношение (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины – М.: Наука – 1965. – 524с.

2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа – М.: Наука, 1967. – 736с.

3. Гихман Ил. И. О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журнал. – 1980. – Т. 32, **3**, – С. 367–372.

4. Гихман И.И. Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журнал. – 1979. – Т. 31, **5**, – С. 483–489.

5. Бондарев Б. В., Шурко И. А. Диффузионная аппроксимация нормированных интегралов от процессов со слабой зависимостью и ее применения // Укр. мат. журнал. – 1994. – Т. 46, **11**. – С. 1449–1467.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:519.46 № 475, 2000, с. 394–399

Симетрійна редукція двовимірного і тривимірного рівняння Борна-Інфельда

М. І. Сєров, Л. М. Блажко

Полтавський державний технічний університет, Україна

Знайдені інваріанти та проведена редукція двовимірного і тривимірного рівняння Борна-Інфельда.

Розглянемо рівняння Борна-Інфельда, яке в евклідовому просторі узагальнює на n-вимірний випадок рівняння мінімальних поверхонь вперше одержане Лагранжем із варіаційного принципу Ейлера-Лагранжа:

$$(1-u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x)$ - деяка дійсна функція, $x = x(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ - оператор Даламбера, $\mu, \nu = \overline{0, n}$. Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачаґться сумування. Підняття та опускання індексу здійснюґться за допомогою метричного тензору $g_{\mu\nu}$ із сігнатурою (+,–,–,...,–).

Деякі точні розв'язки рівняння (1) у випадку $n = 1$ знайдені в [1]. В роботі [2] досліджені симетрійні властивості багатомірного рівняння (1). В ній встановлено, що максимальною алгеброю інваріантності рівняння (1) є розширена алгебра Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n+1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_A = \frac{\partial}{\partial x_A}, I_{AB} = x^A \partial_B - x^B \partial_A, D = x_A \partial_A \tag{2}$$

при $A, B = \overline{0, n+1}$, $x_{n+1} \equiv u$.

В роботі [3] повний набір інваріантів алгебри (2) використаний для редукції рівняння (1) при $n = 1$. В даній роботі знайдені інваріанти та проведена редукція двовимірного та тривимірного рівняння Борна-Інфельда (1).

Розглянемо рівняння (1) при $n = 2$,тобто $x = (x_0, x_1, x_2) \epsilon R_{1+2}$. із представлення алгебри (2) випливає, що інваріантні розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$z = \varphi(\omega, w), \tag{3}$$

де $\omega = \omega(x_0, x_1, x_2, u)$, $w = w(x_0, x_1, x_2, u)$, $z = z(x_0, x_1, x_2, u)$ - інваріанти даної алгебри, φ - нова невідома функція.

Визначимо інваріанти алгебри $A\tilde{P}(1,3)$, використавши симетрію рівняння (1). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (1) має вигляд

$$X = \xi^A(x)\partial_A = (æx^A - c_{AB}x^B + d_A)\partial_A, \tag{4}$$

де $æ, c_{AB}, d_A$ - довільні сталі, причому $c_{AB} = -c_{BA}$, $A, B = \overline{0,3}$. Застосуґмо метод знаходження інваріантів запропонований в [4]. За допомогою оператора (4) інваріанти ω, w, z визначаґмо як розв'язки системи Лагранжа-Ейлера

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2} = \frac{dx_3}{\xi^3} = dt \tag{5}$$

Перепишемо (5) еквівалентним чином у вигляді лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx_A}{dt} = æx^A - c_{AB}x^B + d_A, \tag{6}$$

або у матричному вигляді

$$\dot{X} = AX + D, \tag{7}$$

де $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} æ & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{01} & æ & c_{12} & c_{13} \\ c_{02} & -c_{12} & æ & c_{23} \\ c_{03} & -c_{13} & -c_{23} & æ \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

Кількість незалежних розв'язків системи (7) визначається виглядом коренів характеристичного рівняння

$$det(A - \lambda E) = 0 \tag{8}$$

та рангом матриці $A - \lambda E$, де E - одинична матриця,λ-власне значення матриці А.

В даному випадку (8) має вигляд

$$(æ - \lambda)^4 + k_1(æ - \lambda)^2 - k_2 = 0, \tag{9}$$

де
$k_1 = {c_{12}}^2 + {c_{13}}^2 + {c_{23}}^2 - {c_{01}}^2 - {c_{02}}^2 - {c_{03}}^2$,
$k_2 = (c_{01}c_{23} - c_{02}c_{13} + c_{03}c_{12})^2$.
Визначивши значення λ із рівняння (9), побудуємо відповідні розв'язки x системи (5); виключаючи із них параметр t, отримаґмо повний набір інваріантів алгебри $\tilde{P}(1,3)$.Запишемо їх в таблицю " Інваріанти алгебри $A\tilde{P}(1,3)$".

Таблиця 1. Інваріанти алгебри $A\tilde{P}(1,3)$

№	ω	w	z
1	$\beta x(\alpha x)^m$	$\frac{x^2}{\alpha x \beta x}$	$2\arctan\frac{cx}{dx} - (m+1)\ln \alpha x, m \neq \pm 1$
2	$\beta x - \ln \alpha x$	$\frac{(cx)^2+(dx)^2}{\alpha x}$	$2\arctan\frac{cx}{dx} - \ln \alpha x$
3	$\frac{dx}{ax}$	$\frac{x^2}{(ax)^2}$	$\arctan\frac{bx}{cx} - \frac{1}{\text{æ}}\ln ax, \text{æ} \neq 0$
4	βx	$(cx)^2 + (dx)^2$	$\arctan\frac{dx}{cx} - ax$
5	$\frac{cx}{\alpha x}$	$\frac{ax}{\alpha x} - \frac{1}{2}\frac{(dx)^2}{(\alpha x)^2}$	$\frac{dx}{\alpha x} + \frac{1}{\text{æ}}\ln cx, \text{æ} \neq 0$
6	dx	$\alpha x \beta x$	$cx + \ln \alpha x$
7	$\frac{dx}{cx}$	$\frac{\alpha x}{(cx)^2}$	$\beta x + \ln cx$
8	$\frac{dx}{cx}$	$\frac{x^2}{(cx)^2}$	$\alpha x(cx)^m, m = -1 - \frac{1}{\text{æ}}, \text{æ} \neq 0$
9	$dx + mcx$	$\frac{(\alpha x)^2}{2} + dx$	$\frac{(\alpha x)^3}{3} + \alpha x dx + ax$
10	$\tilde{\alpha} x$	$\tilde{\beta} x$	$\tilde{\gamma} x$

В таблиці 1 введені наступні позначення:
$ax \equiv a_A x^A = g^{AB} a_A x_B = a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3$,
$x^2 \equiv x_A x^A = g^{AB} x_A x_B = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$,
$a_A, b_A, c_A, d_A, \text{æ}, m$-довільні сталі, такі що:
$a_A a^A = -b_A b^A = -c_A c^A = -d_A d^A = 1$,
$a_A b^A = a_A c^A = a_A d^A = b_A c^A = b_A d^A = c_A d^A = 0$,
$\alpha_A = a_A - b_A, \beta_A = a_A + b_A$.

Підставляючи анзац (3) в рівняння (1), одержимо

$$(F^2\omega_A\omega^A - (F^A\omega_A)^2)\varphi_{\omega\omega} + 2(F^2\omega_A w^A - F^A\omega_A F^B w_B)\varphi_{\omega w} +$$
$$+(F^2 w_A w^A - (F^A w_A)^2)\varphi_{ww} + (F^2\Box\omega - F^A F^B\omega_{AB})\varphi_\omega +$$
$$+(F^2\Box w - F^A F^B w_{AB})\varphi_w - (F^2\Box z - F^A F^B z_{AB}) = 0,$$

де $F_A = \omega_A\varphi_A + w_A\varphi_w - z_A$.

Наведемо приклади редукованих рівнянь. Якщо взяти інваріанти ω, w, z з третього пункту таблиці 1, то одержимо

$$(-4w(\omega^2 + w - 1){\varphi_w}^2 + \frac{4w}{\text{æ}}\varphi_w + \frac{1-\omega^2}{w} - \frac{1}{\text{æ}^2})\varphi_{\omega\omega} +$$
$$+4(-w(\omega^2 + w - 1){\varphi_\omega}^2 + \frac{2\omega w}{\text{æ}}\varphi_\omega - \frac{w}{\text{æ}^2} - w + 1)\varphi_{ww} +$$
$$+4(2w(\omega^2 + w - 1)\varphi_\omega\varphi_w - \frac{2\omega w}{\text{æ}}\varphi_w - \frac{w}{\text{æ}}\varphi_\omega - \omega)\varphi_{\omega w} +$$

$$+2(2-2\omega^2-w){\varphi_\omega}^2\varphi_w-8\omega w\varphi_\omega{\varphi_w}^2-8w(w-1){\varphi_w}^3+$$
$$+\frac{4w}{æ}{\varphi_w}^2-\frac{1}{æ}{\varphi_\omega}^2+\frac{6}{w}\varphi_w-2(\frac{2}{æ^2}+3)\varphi_w-\frac{2\omega}{w}\varphi_\omega+$$
$$+\frac{8\omega}{æ}\varphi_\omega\varphi_w+\frac{1}{æw}=0.$$

У випадку інваріантів з 4 пункту таблиці 1, одержимо наступне редуковане рівняння

$$w\varphi_{\omega\omega}-8w^2\varphi_w\varphi_{\omega w}+4(2w^2\varphi_\omega+w^2-w)\varphi_{ww}-$$
$$-2(4w^2{\varphi_w}^2-4w\varphi_\omega-2w+3)\varphi_w=0.$$

Для інваріантів з пункту 6 таблиці 1 маємо

$$(-4w{\varphi_w}^2+4\varphi_w+1)\varphi_{\omega\omega}+4(2w\varphi_w-1)\varphi_\omega\varphi_{\omega w}-$$
$$-4(w{\varphi_\omega}^2+w+1)\varphi_{ww}-4({\varphi_\omega}^2-2w{\varphi_w}^2+3\varphi_w+1)\varphi_w=0.$$

Розглянемо тривимірне рівняння Борна-Інфельда, тобто

$$x=(x_0,x_1,x_2,x_3)\epsilon R_{1+3}$$

інваріантні розв'язки рівняння (1) мають вигляд

$$\omega_4=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \qquad (10)$$

де $\omega_i = \omega_i(x_0,x_1,x_2,x_3), i = \overline{1,4}$ - інваріанти алгебри $A\tilde{P}(1,4)$, φ - нова невідома функція. Знаходження інваріантів алгебри $A\tilde{P}(1,4)$ суттєво ускладнюється в зв'язку з збільшенням розмірності системи (7). Так, наприклад, характеристичне рівняння (9) має вигляд

$$(æ-\lambda)((æ-\lambda)^4+k_1(æ-\lambda)^2-k_2)=0, \qquad (11)$$

де
$k_1=-m^2-\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2$, $k_2=(\vec{A}\cdot\vec{B})^2+(m\cdot\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C})^2-(\vec{B}\cdot\vec{C})^2$,
$\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$,$\vec{B}=(B_1,B_2,B_3)$, $\vec{C}=(C_1,C_2,C_3)$, m-стала.
Не вдаючись в деталі розв'язування системи (7) наведемо остаточні результати, які подамо у вигляді таблиці "Інваріанти алгебри $A\tilde{P}(1,4)$". В таблиці 2 введені наступні позначення:
$ax\equiv a_Ax^A=g^{AB}a_Ax_B=a_0x_0-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3-a_4x_4$,
$x^2\equiv x_Ax^A=g^{AB}x_Ax_B=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$,
$a_A,b_A,c_A,d_A,e_A,æ,m$-довільні сталі, такі що:
$a_Aa^A=-b_Ab^A=-c_Ac^A=-d_Ad^A=-e_Ae^A=1$,
$a_Ab^A=a_Ac^A=a_Ad^A=a_Ae^A=b_Ac^A=b_Ad^A=b_Ae^A=c_Ad^A=$
$=c_Ae^A=d_Ae^A=0$,

$\alpha_A = a_A - b_A, \beta_A = a_A + b_A, \gamma_A = a_A - e_A, \tau_A = a_A + e_A; A, B = \overline{0,4}.$

Якщо анзац (14) в загальному вигляді підставити в рівняння (1), то одержимо

$$\begin{gathered}
(F^2\omega_{1_A}\omega_1^A - (F_A\omega_1^A)^2)\varphi_{11} + (F^2\omega_{2_A}\omega_2^A - (F_A\omega_2^A)^2)\varphi_{22}+ \\
+(F^2\omega_{3_A}\omega_3^A - (F_A\omega_3^A)^2)\varphi_{33} + 2((F^2\omega_{1_A}\omega_2^A - F_A\omega_1^A F_B\omega_2^B)\varphi_{12})+ \\
+(F^2\omega_{1_A}\omega_3^A - F_A\omega_1^A F_B\omega_3^B)\varphi_{13} + (F^2\omega_{2_A}\omega_3^A - F_A\omega_2^A F_B\omega_3^B)\varphi_{23})+ \\
+(F^2\Box\omega_1 - F^A F^B\omega_{1_{AB}})\varphi_1 + (F^2\Box\omega_2 - F^A F^B\omega_{2_{AB}})\varphi_2+ \\
+(F^2\Box\omega_3 - F^A F^B\omega_{3_{AB}})\varphi_3 - (F^2\Box\omega_4 - F^A F^B\omega_{4_{AB}}) = 0,
\end{gathered}$$

де $F_A = \omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2 + \omega_3\varphi_3 - \omega_4, A, B = \overline{0,4}.$

Таблиця 2. Інваріанти алгебри $A\tilde{P}(1,4)$

№	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	$\frac{dx}{ax}$	$\frac{(bx)^2+(cx)^2}{(ax)^2}$	$\frac{ex}{ax}$	$\arctan\frac{bx}{cx} - \frac{1}{\text{æ}}\ln ax, \text{æ} \neq 0$
2	βx	$(cx)^2 + (dx)^2$	τx	$\arctan\frac{dx}{cx} - ax$
3	$\frac{(cx)^2+(dx)^2}{\gamma x}$	$\frac{bx}{\gamma x} + \frac{1}{\text{æ}}\ln\gamma x$	$\arctan\frac{dx}{cx} - \frac{1}{\text{æ}}\ln\gamma x$	$\frac{ax}{\gamma x} - \frac{bx}{\gamma x}(\frac{2}{\text{æ}}\ln\gamma x + \frac{3}{2}\frac{bx}{\gamma x}), \text{æ} \neq 0$
4	$(cx)^2 + (dx)^2$	$\arctan\frac{cx}{dx} - \gamma x$	$\frac{(\gamma x)^2}{2} + bx$	$\frac{(\gamma x)^3}{3} + \gamma x bx + ax$
5	$\frac{\alpha x\beta x}{(ex)^2}$	$\frac{(cx)^2+(dx)^2}{(ex)^2}$	$\arctan\frac{cx}{dx} - \frac{1}{\text{æ}}\ln ex$	$\frac{\alpha x}{(ex)^m}, m = 1 + \frac{1}{\text{æ}}, \text{æ} \neq 0, \pm 1$
6	$\alpha x\beta x$	$(cx)^2 + (dx)^2$	$\arctan\frac{cx}{dx} + ex$	$ex + \ln\alpha x$
7	$\frac{\alpha x}{(ex)^2}$	$\frac{(cx)^2+(dx)^2}{(ex)^2}$	$\arctan\frac{cx}{dx} - \ln ex$	$\beta x - 2\ln ex$
8	$\frac{(bx)^2+(ex)^2}{(ax)^2}$	$\frac{(cx)^2+(dx)^2}{(ax)^2}$	$\arctan\frac{bx}{ex} - \frac{1}{\text{æ}}\ln ax$	$\arctan\frac{cx}{dx} - \frac{2}{\text{æ}}\ln ax, \text{æ} \neq 0$
9	$(bx)^2 + (ex)^2$	$(cx)^2 + (dx)^2$	$\arctan\frac{bx}{ex} - ax$	$\arctan\frac{cx}{dx} - 2ax$
10	$\frac{(bx)^2+(ex)^2}{(ax)^2}$	$\frac{(cx)^2+(dx)^2}{(ax)^2}$	$\arctan\frac{bx}{ex} - \frac{1}{\text{æ}}\ln ax$	$\arctan\frac{cx}{dx} - \frac{1}{\text{æ}}\ln ax, \text{æ} \neq 0$
11	$(bx)^2 + (ex)^2$	$(cx)^2 + (dx)^2$	$\arctan\frac{bx}{ex} - ax$	$\arctan\frac{cx}{dx} - ax$
12	cx	$\frac{(\alpha x)^2}{2} + dx$	ex	$\frac{(\alpha x)^3}{3} + \alpha x dx + ax$
13	$\frac{ex}{cx}$	$\frac{\beta x}{cx}$	$\frac{dx}{\beta x} + \frac{1}{\text{æ}}\ln cx$	$ax - \frac{(dx)^2}{2\beta x}, \text{æ} \neq 0$
14	$dx - cx$	$ex - cx$	$cx - \ln\beta x$	$\alpha x\beta x$
15	$\frac{dx}{cx}$	$\frac{ex}{cx}$	$\frac{\alpha x}{(cx)^2}$	$\beta x - 2\ln cx$
16	$\frac{dx}{cx}$	$\frac{ex}{cx}$	$\frac{\alpha x}{(cx)^m}$	$\frac{\alpha x\beta x}{(cx)^2}, m = 1 + \frac{1}{\text{æ}}, \text{æ} \neq 0, \pm 1$
17	$\check{\alpha}x$	$\check{\beta}x$	$\check{\gamma}x$	$\check{\tau}x$

Наведемо приклади редукованих рівнянь. У випадку інваріантів 2 пункту таблиці 2 рівняння (16) має вигляд

$$\begin{gathered}
(\varphi_3 + 1)^2\varphi_{11} + 4(2(\varphi_1 + \varphi_3)\omega_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + \omega_2 + 1)\varphi_{22} + (\varphi_1 + 1)^2\varphi_{33}- \\
-8\omega_2(\varphi_3 + 1)\varphi_2\varphi_{12} + 2(4\omega_2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_3 + \frac{1}{\omega_2})\varphi_{13}- \\
-8\omega_2(\varphi_1 + 1)\varphi_2\varphi_{23} - 8\omega_2\varphi_2^3 + 8(\varphi_1\varphi_3 + \varphi_1 + \varphi_3)\varphi_2 - 3(\frac{2}{\omega_2} - 2)\varphi_2 = 0
\end{gathered}$$

Для інваріантів з 12 пункту таблиці 2 одержимо

$$(\varphi_2^2+\varphi_3^2-2\omega_2-1)\varphi_{11}+(\varphi_1^2+\varphi_3^2-2\omega_2-1)\varphi_{22}+(\varphi_1^2+\varphi_2^2-2\omega_2-1)\varphi_{33}-$$
$$-2(\varphi_1\varphi_2\varphi_{12}+\varphi_1\varphi_3\varphi_{13}+\varphi_2\varphi_3\varphi_{23})+\varphi_2=0$$

Якщо розв'язати редуковані рівняння і використати відповідні анзаци, то одержимо точні розв'язки рівняння (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Barbashov B. M. and Chernikov N. A. Solution and quantization of two-dimensioal model of the Born-Infeld type. // Zhurn. Eksperim. and Teoret. Fiziki – 1966. – **5**. – 60 p.

2. Фущич В. И., Серов Н. И. О некоторых точных решениях многомерного нелинейного уравнения Эйлера-Лагранжа // Докл. АН СССР. – 1984. – **4**. – С. 847–851.

3. Серов Н.И. Редукция и точные решения одномерного уравнения Борна-Инфельда. // Докл. АН Украинской ССР. – 1991. – **10**. – С. 26–29.

4. Fushchych W. I., Shtelen V. M. and Serov N. I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, – 1993. – 436 p.

АНОТАЦІЇ

УДК 517.544.8

Крайова задача Рімана у класі голоморфних функцій з n-членною асимптотикою.

А г р а н о в и ч П. З. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 4–12

Розглядається клас $H_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n}$ голоморфних функцій $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, які мають асимптотичне зображення вигляду:

$$f(z) = \Delta_1(\arg z)|z|^{\rho_1} + \Delta_2(\arg z)|z|^{\rho_2} + \ldots + \Delta_n(\arg z)|z|^{\rho_n} + \kappa(z),$$

$$z \to \infty,$$

де $0 < [\rho_1] < \rho_n < \ldots < \rho_1$, та функція $\kappa(z)$ є малою у наступному значенні:

$$\int_T^{2T} \sup_{\arg z\in[0,2\pi]} |\kappa(z)|^q d|z| = o(T^{\rho_n q+1}), \quad T \to \infty, \quad q > 1.$$

У роботі узагальнюються відомі результати М. Говорова, крайова задача Римана розв'язується у класі $H_{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n}$ у випадку, коли усі нулі голоморфної функції $f(z)$ розташовані на скінченій системі променів.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.5

Комлексний аналіз та рівняння у згортках.

В о л ч к о в В. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 13–19 .

Вивчаються рівняння згортки на комплексному гіперболічному просторі $H^n(\mathbb{C})$. Знайдено загальний розв'язок одного класу таких рівнянь та отримана локальна теорема про два радіуси для системи рівнянь згортки.

Бібліогр.: 29 найм.

УДК 517.535.4

Загальні властивості субгармонічних у комплексній півплощині функцій скінченного порядку.

Г р и ш и н А. П., М а л ю т і н а Т. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 20–44 .

Однією з важливих проблем теорії субгармонічних у кутових областях функцій є проблема зв'язку між зростанням субгармонічних функцій і розподілом пов'язаних з ними мір. Ми даємо компактне викладення загальних властивостей субгармонічних у комплексній півплощині функцій, яке засноване на концепції повної міри. Це є нова редакція деяких попередніх результатів одного з авторів.

Бібліогр.: 14 найм.

УДК 517.544.8

Про один варіант теореми Пелі-Вінера.

Д і л ь н и й В. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 45–48 .

Знайдено опис кутових граничних значень класу функцій, аналітичних у півплощині $\operatorname{Re} z > 0$, для яких

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| e^{-\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty, \qquad 0 \le \sigma < +\infty.$$

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.53

Логарифмічна асимптотика поліномів, які є ортогональними на компакті комплексної площини.

Д о в г о ш е й О. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 49–63 .

Нехай $\{P_n\}$ – система поліномів, ортонормованих на компакті K комплексної площини відносно міри $d\mu$. Логарифмічна асимптотика цих поліномів характеризується у термінах нерівностей між супремом та $L^2(d\mu)$ нормами.

Бібліогр.: 12 найм.

УДК 517.53

Асимптотика ньютонового потенціалу нульового роду.

З а б о л о ц ь к и й М. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 64–69 .

При доволі загальній умові на поводження борелівської міри знайдено непокращувані асимптотичні формули її ньютонового потенціалу.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.54

Зауваження про нульові множини абсолютно монотоних функцій.

К а т к о в а О. М., В и ш н я к о в а Г. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 70–75 .

Доведена нова необхідна умова для того, щоб множина була нульовою для абсолютно монотонної функції. Якщо $A \subset \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ є нульовою множиною для абсолютно монотонної функції, то для будь-якого $\beta \in (0, \pi/2)$ існує неперервна невід'ємна функція h_β, $h_\beta \in L^1(-\infty, -1]$, така що

$$\sum_{a \in A \bigcap \{a : |\arg a - \pi| < \beta\}} \frac{1}{(x-a)^2} \le h_\beta(x).$$

Показано, що ця умова не є наслідком умов, що були відомі раніше.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.518.476

Про один клас двовимірних тригонометричних рядів.

К у з н е ц о в а О. І.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 76–85 .

Одержано оцінку зверху p–сильних середніх $(1 \le p \le 2)$ по кругах для рядів Фур'є обмежених майже всюди на двовимірному торі функцій. Для тригонометричних рядів спеціального виду доведено аналог відомої одновимірної теореми Фоміна.

Бібліогр.: 13 найм.

УДК 517.53

Гармонічна апроксимація у $\mathbb{R}^3$ на компактах, доповнення до яких є областями Джона.

Л е н х о р о в а І. А.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 86–95 .

Встановлено оцінки зверху швидкості рівномірної апроксимації гармонічними поліномами функцій, гармонічних на комактах в $\mathbb{R}^3$, доповнення яких є областями Джона. Одержані результати є продовженням досліджень Андрієвського В.В.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.547

Генератори аналітичних уточнених порядків та їх застосування.

М а є р г о й з Л. С.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 96–104 .

В статті дається огляд результатів із §§ 5, 6 препрінту автора (1998). Вивчаються аналітичні уточнені порядки, породжувані цілими або мероморфними функціями. Досліджується асимптотична поведінка асоційованих з ними "гама–функцій та "експонент", які можна розглядати як аналоги функцій Міттаг-Лефлера.

Доведено, що узагальнений індикатор "експоненти" порядку $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$, а також порядку $\rho = 1$ і мінімального типу є тригонометрична функція на проміжку $[-\pi, \pi]$. Наведено два застосування цих результатів.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.547

Ряди Фур'є та справжньо-субгармонічні функції скінченного γ-типу.

М а л ю т і н К. Г., К о л о м і є ц ь С. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 105–112 .

Нехай $\gamma(r)$ — функція зростання, тобто строго додатна, неперервна, зростаюча та необмежена функція, визначена на $[0, \infty)$. Ми запроваджуємо клас справжньо-субгармонічних функцій скінченного γ-типу у півплощині і знаходимо критерії належності функції до даного класу. Ці критерії формулюються в термінах коефіцієтів Фур'є функції.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 517.56

Зростання мероморфних у крузі функцій нескінченного порядку.

М а р ч е н к о І. І., Н і к о л е н к о І. Г. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 113–125 .

Для мероморфних у крузі функцій розглядаються аналоги величин $b(a, f)$, запроваджених А. Єременко. Для цих величин, зокрема, одержані точні оцінки, а також співвідношення дефектів.

Бібліогр.: 13 найм.

УДК 517.5

Нова теорема типа Морери в одиничному крузі.

М а ш а р о в П. А.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 126–132 .

Отримано нове уточнення класичної теореми Морери в одиничному крузі. Інтеграли розглядаються по границях секторів, що конгруентні до даного.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 514.547.5

Про претворення Коші зважених просторів Бергмана.

М е р е н к о в С. А.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 133–140 .

Задача про опис образу простору Бергмана $B_2(G)$ у жордановій області G , була розв'язана Напалковим (мол.) та Юлмухаметовим. Виявилось, що $K(B_2(G)) = B_2^1(C\bar{G})$, де $C\bar{G}$ – доповняльна область до G, тоді і тільки тоді, коли G є квазідиск. Опис $K(B_2(G))$ для жорданових областей G був зроблений автором раніше. Тут ми знаходимо $K(B_2(G, \omega))$ для зважених просторів Бергмана, причому розглядаються тільки ваги, які є сталими на лініях рівня функції Гріна області G. У випадку, коли G є одиничний диск $\mathbb{D}$, і при деяких додаткових обмеженнях на вагу ω виконується рівність $K(B_2(\mathbb{D},\omega)) = B_2^1(C\bar{\mathbb{D}},\omega^{-1})$.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.574

Про одне узагальнення нерівності Бенедікса для гармонічної міри.

Н а з а р о в а Н. Г. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 141–146 .

Одержана оцінка типу Бенедікса–Содіна для гармонічної міри в кубі.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 516.3

Структура просторів максимальних ідеалів деякого класу банахових алгебр.

Н а з и м С а д и к

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 147–152 .

Нехай E є клас нескінченно вимірних напівпростих банахових алгебр з одиничними елементами, що їх підалгебри, породжені довільним не скалярним елементом і одиницею, ізометрично ізоморфні самій алгебрі. У цій статті вивчається структура таких алгебр в E. Показано, що диск-алгебра міститься в E і що нутрощі просторів максимальних ідеалів алгебр в E не порожні. Більше, якщо алгебра в E рівномірно розподілена, тоді можна дати аналітичну структуру просторів максильноних ідеалів.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 539.3

Асимптотичні оцінки канонічних добутків по кореням рівнянь, які містять функції Лежандра.

О с т р и к В. І.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 153–161 .

Розв'язки деяких змішаних осесиметричних задач теорії пружності для конуса можуть бути знайдені у явному вигляді шляхом їх зведення до крайової задачі Рімана для аналітичних функцій. Факторизація коефіцієнта задачі Рімана, який є раціональною функцією відносно функцій Лежандра, проведена у канонічних добутках. Отримані асимптотичні формули для нулів та полюсів коефіцієнта задачі Рімана, за допомогою яких знайдені асимптотичні оцінки канонічних добутків.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.53

Плюрисубгармонічні функції з кратнокруговими сингулярностями.

Р а ш к о в с ь к и й А. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 162–169 .

Вивчається зв'язок між напрямленими й частковими числами Лелона та залишковими мірами Монжа-Ампера плюрисубгармонічних функцій з кратнокруговими сингулярностями.

Бібліогр.: 19 найм.

УДК 539.3

Розв'язання контактної задачі про взаємодію жорсткого клина з пружним шаром.

Т а н ч е н к о М. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 170–176 .

Вивчається крайова задача теорії пружності про контактну взаємодію жорсткого клина с пружним шаром. Отримане інтегральне рівняння задачі розв'язано чисельно. Знайдено розподіл контактних напружень.

Мал.: 4. Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.53

Наближення аналітичних функцій алгебраїчними поліномами із коефіцієнтами із заданої множини.

Т р и г у б Р. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 177–182 .

У статті досліджуються питання про можливість рівномірної апроксимації на компактах комплексної площини аналітичних функцій многочленами з коефіцієнтами з даного променю чи двох променів та про порядок наближення гладких функцій многочленами з додатніми цілими або натуральними коефіцієнтами.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.95

Про можливість стабілізації еволюційних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних на $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ за допомогою позиційного керування.

Ф а р д и г о л а Л. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 183–194 .

У цій роботі для еволюційних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних на $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ досліджено проблему можливості стабілізації за допомогою позиційного керування. Одержано критерій (необхідну та достатню умову) можливості стабілізації таких систем. Для доведення цього критерія використано метод перетворення Фур'є. Щоб застосувати цей метод, довелося досліджувати деформації алгебраїчних гиперповерхонь відносно деяких поліноміальних збурень та оцінювати напівалгебраїчні функції на напівалгебраїчних множинах за допомогою теореми Тарського—Зайденберга та її наслідків. У роботі також проаналізовано одержаний критерій та наведено приклади систем, які можливо та які неможливо стабілізувати.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 517.537.72

Деякі питання терії рядів Діріхле.

Хеденмальм Хокан – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 195–203 .

Представлені перші фрагменти функціонально-аналітичного підходу до класичних рядів Діріхле. Центральним об'єктом розглянутих питаннь є простір Харді рядів Діріхле. Розглядається простір мультиплікаторів, а також сім'я обмежених операторів композиції. Наведено результати про збіжність рядів. Основний акцент зроблено на невирішені проблеми.

Бібліогр.: 20 найм.

УДК 517.5

Про інтерполяційні послідовності деяких класів аналітичних функцій.

Шепарович І. Б.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 204–207 .

Вказано нові критерії існування розв'язку ітерполяційної задачі в класі цілих функцій із спеціальним обмеженням росту. Ми розглядаємо аналогічну задачу для функцій аналітичних у одиничному крузі.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.5

Наближення частковими сумами ряда Тейлора і найкраще наближення деяких класів функцій, аналітичних в одиничному крузі.

Швецова А. М.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 208–217 .

У роботі досліджуються питання щодо наближення класу аналітичних у крузі функцій з обмеженною похідною загального вигляду у просторах H_∞ і H_1 частковими сумами Тейлора та інше.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.5

Екстремальні розв'язки узагальненої задачі Неванліни-Піка.

Д ю к а р е в Ю. М.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 218–229 .

У цей роботі вивчена узагальнена задача Неванліни-Піка у спеціальному подкласі неванліновських функцій. Отримані явні формули для екстремальних розв'язків.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.968+517.956

Граничні рівняння в двох основних задачах динаміки термопружних середовищ.

Ч у д і н о в и ч І. Ю., Д у м і н а О. О.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 230–240 .

Розглянуто дві основні задачі динаміки термопружних середовищ. Їх розв'язки представлено динамічними аналогами термопружних потенціалів простого та подвійного шарів. Такі представлення приводять до систем нестаціонарних граничных рівнянь. Доведено однозначну розв'язуваність цих систем в однопараметричній шкалі функціональних просторів соболєвського типу.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.9:535.4

Про часткове обернення оператора задачі дифракції поля решітки вертикальних магнітних диполів на екранованій кулі.

К у з ь м е н к о С. В., Р е з у н е н к о В. О.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 241–249 .

Оберненням інтегрального оператора типу Абеля та частковим оберненням парних суматорних рівнянь виконана регуляризація задачі дифракції поля решітки вертикальних магнітних диполів на екранованій кулі. Одержана система алгебраїчних рівнянь II роду з компактним в ℓ^2 оператором. Система має високу обчислювальну стійкість.

Бібліогр.: 17 найм.

УДК 517.968+517.956

Граничні рівняння в основних задачах динаміки тонких пружних пластин.

Ч у д і н о в и ч І. Ю., Г а с с а н Ю. С.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 250–258 .

Розглянуто основні задачі динаміки тонких пружних пластин. Розв'язки задач подано динамічними аналогами потенціалів простого та подвійного шарів. Ці подання ведуть до систем нестаціонарних граничних рівнянь відносно невідомих густин потенціалів. Доведена розв'язуваність отриманих систем в однопараметричній шкалі функціональних просторів соболєвського типу.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.956

Крайова задача для систем псевдодифференциальних рівнянь у бішарі.

М а к а р о в А. А.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 259–265 .

У статті одержано критерій коректності крайової задачі у бішарі та доведено існування коректної крайової задачі для будь-якої системи псевдодиффеpенціальних рівнянь. З'ясовано також для яких систем існують параболічні крайові задачі.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 512.54

Про вкладення групи фінітних перестановок зліченної множини у локально компактні групи.

Б о й к о М. С., Г е ф т е р С. Л.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 266–272 .

У роботі вивчається питання про вкладення групи S_f фінітних перестановок зліченної множини у локально компактні групи. Доведено, що групу S_f неможна вкласти у майже зв'язну локально компактну групу і можна щільно вкласти у неперервну цілком незв'язну локально компактну групу.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.9

Про обернення інтегральних операторів одного класу.

М і л и х Н. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 273–281 .

У праці вивчається питання про рішення інтегральних рівнянь з матричним ядром. Дано метод побудови обернених операторів, який заснован на використанні операторних тотожностей.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 514.76

Цілком геодезичні підмноговиди на поверхнях с групою обертання $SO(2) \times SO(2)$.

Я с к і н В. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 282–295 .

В роботі досліджені цілком геодезичні підмноговиди на поверхнях с групою обертання $SO(2) \times SO(2)$ в Евклідовому просторі і геодезичні лінії на поверхнях с групами обертання вигляду $SO(n_1) \times \ldots \times SO(n_k)$.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 513

Грасманів образ багатовимірних поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю.

Л и с и ц я В. Т. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 296–302 .

Стаття присвячена вивченню грасманового образу поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю. Доведено теорему: Якщо F^l – поверхня з нульовою секційною кривиною, з плоскою нормальною зв'язністю та з постійним індексом дефектності у евклідовому просторі E^{l+p}, то грасманів образ $\Gamma(F^l)$ має плоску метрику. У випадку невиродженого грасманового образу ця теорема випливає із результатів робіт Муто, Феруса, Педіта.

Бібліогр.: 21 найм.

УДК 519.6

Стабілізація лінійних повністю керованих систем.

Г у л і к Л. І., М а р і н і ч А. П. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 303–312 .

В роботі показано, що для повністю керованої системи вигляду $\dot{x} = Cx+u, \quad u \in \mathbf{K}$, де K – опуклий замкнутий конус, задача стабілізованості (задача конструювання регулятора) може бути розв'язана з будь-яким наперед заданим степенем стійкості, а, отже, і для керованої системи $\dot{x} = f(x,u), \quad u \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^r$, де існує $u_0 \in U : f(0,u_0) = 0$, знайдеться досить малий окіл початку координат, з будь-якої точки якого задача конструювання регулятора може бути розв'язана з будь-яким наперед заданим степенем стійкості.

Мал.: 3. Бібліогр.: 5 найм.

УДК 514

Деформованість поверхонь із збереженням параболічного грасманового образу.

Г о р ь к а в и й В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 313–322 .

Вивчається існування нетривіальних деформацій поверхні F^2 в E^4 з збереженням грасманового образу та гаусової кривини. Доведено, що поверхня F^2 в E^4 дозволяє нетривіальні деформації з збереженням параболічного грасманового образу та гаусової кривини тоді і тільки тоді, коли вона є лінійчатою.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.977.1+517.935.4

Керованість трикутних систем, нееквівалентних канонічним системам.

К о р о б о в В. І., П а в л и ч к о в С. С.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 323–329

Доведено повну керованість класу систем трикутного вигляду, для яких у загальному випадку не існує локально дифеоморфного в кожній точці відображення траєкторій на траєкторії канонічних систем. Клас трикутних систем, який розглянуто, є більш широким у порівнянні з аналогічними класами, що досліджувались раніше. Розглянуто один приклад.

Бібліогр. 6 найм.

УДК 533.6.011.72

Автомодельний розв'язок рівнянь динаміки циліндричних ударних хвиль.

М і л л е р О. О., П о с л а в с ь к и й С. О.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 330–333 .

Досліджуються спеціальні розв'язки рівнянь динаміки ударних хвиль, що мають вигляд простих хвиль. Отриманий автомодельний розв'язок у випадку циліндричних ударних хвиль описує рух збіжної ударної хвилі зі змінною уздовж фронту інтенсивністю в спіралеподібній порожнині, що звужується. Розв'язок не має осьової симетрії, але кумулятивний ефект досягається такий самий, як і в осесиметричному випадку.

Мал.: 1. Бібліогр. 3 найм.

УДК 517.9

Про асимптотичну поведінку розв'язків вироджених лінійних диференціальних рівнянь.

П і в е н ь О. Л.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 334–340 .

Розглядається диференціальне рівняння $\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$, де A_j–лінійні замкнені оператори у гільбертовому просторі. Оператори A_j можуть мати нетривіальні ядра. Встановлюються умови, при яких розв'язки цього рівняння припускають асимптотичне представлення у вигляді ряда за елементарними розв'язками при $t \to \infty$. Результати застосовуються до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Мал.: 1. Бібліогр. 5 найм.

УДК 517.91

Спектральні розкладання векторних неоднорідних випадкових полів.

Ахієзер О. Б.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 341–346 .

В роботі за допомогою спектральної теорії систем операторів, що комутують, отримані спектральні розкладання векторних еволюційно представлених полів. Побудовані зокрема спектральні представлення систем дисипативних операторів, що комутують.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.977.1

Про синтез керування для деяких рівнянь гіперболічного типу.

Скляр Г. М., Скорик В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 347–357 .

Розглянута задача синтезу позиційного керування для керованого процесу, який описується лінійним диференціальним керуванням з необмеженим оператором у гільбертовому просторі. Вказано обмежене позиційне керування таке, що розв'язок відповідного рівняння з довільною початковою умовою прямує до нуля за скінченний час, рівний значенню функціоналу керованості в початковому стані. Наведено приклади керованих процесів, для яких це керування розв'язує розглянуту задачу.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.983.24+519.248.2

Метод операторних вузлів у задачах фільтрації нестаціонарних стохастичних послідовностей.

Когут Є. О., Янцевич А. А.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 358–365 .

Реализуіється новий підхід до побудування оптимальних середньоквадратичних фільтрів, заснований на теорії операторних вузлів. Знайдено рішення рівнення Вінера-Хопфа в явному вигляді.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.948

Послідовності в гільбертовому просторі, що визначаються рівняннями в частинних різницях.

Черемская Н. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 366–374 .

У статті будується кореляційна теорія нестаціонарних послідовностей у гільбертовому просторі, які породжуються парою двічі переставних операторів. Введено характеристики нестаціонарності, які зв'язані з несамоспряженістю відповідних операторів. Для вивчення деяких класів таких послідовностей використовуються трикутні моделі систем двічі переставних операторів, побудовані В.О.Золотарьовим.

Бібліогр.: 2 найм.

УДК 517.946.9

Про один спосіб розв'язання задачі Діріхле.

Сузіков Г. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 375–377 .

В роботі розв'язок задачі Діріхле зображується у вигляді межі розв'язків задач Неймана для того ж рівняння і в тій же області. При цьому використовується одна методика, запропонована в книзі Гловінскі Р.Г., Ліонса Ж.-Л., Тремольєра Р. "Численное иследование вариационных неравенств" для розв'язання крайових задач для бігармонічного рівняння.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 519.21

Відновлення вінерівського поля на площині по його значенням на двох незростаючих кривих.

Земляк Т. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 378–387 .

У статті розв'язана задача побудови найкращої у середньоквадратичному значенні оцінки для значення вінерівського поля на площині яка базується на значеннях цього поля на двох незростаючих кривих та обчислена її помилка.

Мал.: 1. Бібліогр. 6 найм.

УДК 519.21

Про близкість розв'язку початково-крайової задачі для параболічного рівняння з швидкими випадковими осциляціями і розв'язку рівняння Іто.

Бондарєв Б. В., Сімогін А. А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 388–393

Знайдені оцінки швидкості збіжності розв'язку початково-крайової задачі для параболічного рівняння з швидкими випадковими осциляціями до розв'язку рівняння Іто в рівномірні й метриці за ймовірністю.

Бібліогр. 5 найм.

УДК 517.9:519.46

Симетрійна редукція двовимірного і тривимірного рівняння Борна-Інфельда.

Сєров, М. І., Блажко Л. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2000, № 475. Математика, прикладна математика і механіка, с. 394–399 .

Знайдені інваріанти та проведена редукція двовимірного і тривимірного рівняння Борна-Інфельда.

Бібліогр. 4 найм.

Новые книги

Автор: **Чуешов И. Д.**
профессор Харьковского национального университета

Название: **“Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем”.**

Объем: 434 стр.
32 примера, 410 упражнений.

В книге дается исчерпывающее введение в круг основных идей и методов бурно развивающейся в последние годы теории бесконечномерных диссипативных динамических систем. В качестве примеров рассматриваются системы, порождаемые нелинейными уравнениями в частных производных, возникающими в различных задачах современной механики сплошных сред. Главная цель книги - помочь читателям овладеть основными стратегиями, применяющимися при изучении бесконечномерных диссипативных систем и подготовить их к самостоятельной исследовательской работе в данной области. Специалисты по нелинейной динимике найдут в ней систематическое изложение многих фундаментальных фактов в форме, удобной для работы.

Ядро книги составили материалы специальных курсов, читавшихся автором на мехмате Харьковского университета на протяжении ряда лет. Она снабжена большим количеством упражнений, существенно дополняющих основной текст. Для ее чтения достаточно знакомства с основами функционального анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Содержание

- Основные понятия теории бесконечномерных динамических систем
- Асимптотическое поведение решений некоторого класса полулинейных параболических уравнений
- Инерциальные многообразия
- Задача о нелинейных колебаниях пластины в сверхзвуковом потоке газа
- Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику
- Гомоклинический хаос в бесконечномерных системах

По вопросу приобретения книги обращайтесь в издательство по адресу:

Украина, 61145, Харьков, ул. Новгородская 1, к. 303.
Научное издательство “Акта”.
тел. (0572) 185108 e-mail: acta@online.Kharkov.ua

ЗМІСТ

CONTENTS

Visit our Web-page

http//www.univer.kharkov.ua/math/dep/mechmat/vestnik/ve[illegible]tm

[illegible] te find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

[illegible]

Вісник Харківського національного університету
№ 475
Серія „Математика, прикладна математика і механіка"
[illegible]

Підписано до друку 5.06.2000 р.
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.
12,5 умовн. друк. арк.
20,0 обл.-вид. арк.
Наклад 400 прим.
Ціна договірна.

[illegible], Харків, пл. Свободи, 4, Харківський національний університет.
Видавничий центр ХНУ.
Друкарня [illegible] академії, м. Суми.

Visit our Web-page

http://www.univer.kharkov.ua/main/dep/mechmat/vestnik/vest_m.htm

to find

- **Information for Manuscript Preparation**
- **Abstracts**
- **Editorial Board**

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету
№ 475
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 5.06.2000 р.
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.
32,6 умовн.– друк. арк.
26,0 обл.– вид. арк.
Наклад 400 прим.
Ціна договірна

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет
Видавничий центр ХНУ.
Різо Банківська академія, м. Суми.

8-40