УДК 512.831:517.941.92

В. В. ОВЧАРЕНКО, Н. П. МАКАРУЩЕНКО

О КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Описание математических моделей в электротехнике, автоматике, механике приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений [ДУ] вида

$$\left(A + B\frac{d}{dt}\right)\vec{x} = \vec{f}(t), \tag{1}$$

где A, B — квадратные матрицы размера n; $\vec{x}$, $\vec{f}$ — n-мерные вектор-функции времени t. Согласно [1, с. 349] системе ДУ (1) соответствует пучок матриц $A + B\lambda$. Для корректных физических моделей пучок обычно обладает свойством $\det(A + B\lambda) \neq 0$, т. е. он и соответствующая ему система ДУ являются регулярными [1, с. 332].

Регулярные и сингулярные системы ДУ в настоящее время интенсивно изучаются в направлении создания эффективных алгоритмов их решения на ЭВМ [2—7]. Однако для анализа качественных свойств решений вырожденных систем обыкновенных ДУ важное значение имеет приведение их к каноническому виду. Этому отвечает приведение соответствующего пучка матриц $A + B\lambda$ к некоторой канонической форме $K(\lambda)$. Если для этого используются постоянные невырожденные матрицы U, V, $U(A + B\lambda)V = K(\lambda)$ (напомним, что матрице U отвечает линейная замена переменных в системе ДУ [1], а матрице V — линейное преобразование самих уравнений), то в случае регулярного пучка [1, с. 334]

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \operatorname{diag}\{N^{(u_1)}(\lambda), \ldots, N^{(u_r)}(\lambda), J^{(v_1)}(\lambda), \ldots, J^{(v_s)}(\lambda)\} = \\ &= \operatorname{diag}\{N(\lambda), J(\lambda)\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$N^{(u)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad J^{(v)}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i - \lambda \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$u_1 \geqslant \cdots \geqslant u_r \geqslant 1; \quad v_1 \geqslant \cdots \geqslant v_s \geqslant 2, \tag{4}$$

причем состав блоков $N^{(u)}(\lambda)$, $J^{(v)}(\lambda)$ однозначно определяется пучком $A + B\lambda$.

В то же время для приведения λ-матрицы к каноническому виду можно применить унимодулярные матрицы $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ [8, с. 371], которым соответствуют «дифференциальные» линейные преобразования переменных и уравнений в системе ДУ [1]. Унимодулярные преобразования позволяют получить для матричного пучка $A + B\lambda$

более простую каноническую форму $K_0(\lambda)$, в которой все блоки $N^{(u)}(\lambda)$ имеют размер 1×1, а жордановы блоки $J^{(v)}(\lambda)$ не меняются. Практически важным является построение простейших унимодулярных матриц, преобразующих $A + B\lambda$ в $K_0(\lambda)$. Такие матрицы строятся в данной работе. Показано, что $A + B\lambda$ преобразуется в $K_0(\lambda)$ с помощью унимодулярной матрицы $U(\lambda)$ степени $u_1 - 1$ и постоянной невырожденной матрицы V. Кроме того, приводится способ построения матриц $U(\lambda)$ и V, что дает эффективный метод решения регулярной системы ДУ [1].

Переходя к доказательству нашего основного результата, заметим, что в качестве исходного матричного пучка мы можем взять $K(\lambda)$ благодаря тому, что известный способ приведения $A + B\lambda$ к $K(\lambda)$ [1, с. 334] использует только невырожденные постоянные матрицы U и V. Кроме того, так как $K(\lambda)$ и $K_0(\lambda)$ квазидиагональны и имеют одинаковые жордановы части $J(\lambda)$, то задача сводится к нахождению простейших унимодулярных матриц, преобразующих $N(\lambda)$ в $E^{(u)}$. Из приведенной ниже теоремы вытекает существование и структура линейных унимодулярных матриц $P(\lambda)$, Q (Q не зависит от λ), преобразующих $N^{(u)}(\lambda)$-блоки матрицы $N(\lambda)$ в $N^{(u-1)}(\lambda)$-блоки преобразованной матрицы $\tilde{N}(\lambda)$. Это дает возможность привести $N(\lambda)$ и $E^{(u)}$ путем последовательного применения $u_1 - 1$ раз линейных унимодулярных преобразований к матрице $N(\lambda)$.

Доказательство теоремы будет основано на следующей лемме о структуре решения матричного уравнения с $N^{(u)}(\lambda)$-блоками.

Лемма. *Матрицы X, Y, Z размера $v \times u$, удовлетворяющие матричному уравнению*

$$(X + Y\lambda)\, N^{(u)}(\lambda) = N^{(v)}(\lambda)\, Z \tag{5}$$

имеют вид

а) *при* $2 \leqslant v \leqslant u$

$$Y = \begin{bmatrix} -a^1 \\ -a^2 \\ \vdots \\ -a^v \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$X = Z = \begin{bmatrix} a^v\,(a^{v-1} + b^v) & \dots & (a^1 + b^2) & b^1 \\ \cdot & \ddots & (a^2 + b^3) & b^2 \\ & \cdot \quad \ddots & \vdots & \vdots \\ & \cdot \quad \cdot & (a^{v-1} + b^v) & b^{v-1} \\ & & \cdot \;\; a^v & b^v \end{bmatrix}, \tag{7}$$

б) *при* $v \geqslant u \geqslant 2$

$$Y = \begin{bmatrix} -a^1 \\ -a^2 \\ \vdots \\ -a^{v-1} \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{8}$$

$$
X = Z = \begin{bmatrix} (a^{u-1}+b^u) & \dots & (a^1+b^2) & b^1 \\ & \ddots & (a^2+b^3) & b^2 \\ & & \dots & \dots \\ & & (a^{u-1}+b^u) & b^{u-1} \\ & & & b^u \\ & & & -a^u \\ & & & \vdots \\ & & & -a^{v-1} \end{bmatrix}, \qquad (9)
$$

в) *при* $v \geqslant 2$, $u = 1$

$$X = Z = \operatorname{colon}\{a^1, a^2, \dots, a^v\};$$
$$Y = \operatorname{colon}\{a^2, a^3, \dots, a^v, 0\};$$

г) *при* $v = 1$, $u \geqslant 2$

$$X = Z = [0 \dots 0 \; a^1 \; b^1], \quad Y = [0 \dots 0 \, (-a^1)],$$

д) *при* $v = u = 1$

$$X = Z = a^1, \; Y = 0,$$

где a^i, b^i *— произвольные числа, а ненаписанные элементы матриц равны нулю.*

Доказательство. Подставляя в (5) выражения [1, с. 334]

$$N^{(u)}(\lambda) = E^{(u)} + H_1^{(u)}\lambda, \quad N^{(v)}(\lambda) = E^{(v)} + H_1^{(v)}\lambda$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем три матричных уравнения:

$$X = Z, \; Y + X \cdot H_1^{(u)} = H_1^{(v)} \cdot Z, \; Y \cdot H_1^{(u)} = 0. \qquad (10)$$

Из (10.3) следует (6) и (8). Подставив (10.1) и Y в виде (6) или (8) в (10.2), получим линейное матричное уравнение относительно одной неизвестной матрицы X. Сравнивая соответственно элементы в левой и правой частях этого уравнения, получим (7) и (9).

Аналогично, но гораздо проще, доказываются утверждения в), г), д).

Замечание 1. Если $v \geqslant u - 1 \geqslant 1$, то у матрицы Z элемент $\overset{1}{z_1} = a^v$ и, следовательно, он может быть не равным нулю. Остальные элементы первого столбца матрицы Z равны нулю. Если же $1 \leqslant v < u - 1$, то у матрицы Z первые $u - 1 - v$ столбцов состоят из нулей.

Теорема. *Матричное уравнение*

$$P(\lambda) \cdot K(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) \cdot Q, \qquad (11)$$

где

$$K(\lambda) = \operatorname{diag}\{N^{(u_1)}(\lambda), \dots, N^{(u_r)}(\lambda), E^{(u_0)}\}; \qquad (12)$$
$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant u_r \geqslant 2; \; u_0 \geqslant 0; \; u_1 + \dots + u_r + u_0 = n; \qquad (13)$$
$$\tilde{K}(\lambda) = \operatorname{diag}\{N^{(v_1)}(\lambda), \dots, N^{(v_s)}(\lambda)\}; \qquad (14)$$
$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant \dots \geqslant v_s \geqslant 1, \; v_1 + \dots + v_s = n \qquad (15)$$

имеет неособенное решение $P(\lambda)$, Q, где $P(\lambda)$ — линейная унимодулярная λ-матрица, а Q — постоянная невырожденная матрица, тогда и только тогда, когда $s \geqslant r \geqslant 1$ и $v_i \geqslant u_i - 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, r$ **(16)**.

Доказательство. Пусть матрицы $P(\lambda)$ и Q удовлетворяют перечисленным в теореме условиям. Разбиваем столбцы матриц $P(\lambda)$, Q на вертикальные полосы, как у матрицы $K(\lambda)$, а строки — на горизонтальные полосы, как у матрицы $\tilde{K}(\lambda)$. Тогда уравнение (11) распадается на конечное число матричных уравнений вида (5). Согласно лемме, каждое из них имеет решение, поэтому матричное уравнение (11) при любых матрицах $K(\lambda)$ и $\tilde{K}(\lambda)$ вида (12) и (14) также имеет решение. Следовательно, задача сводится к выяснению условий существования неособенного решения уравнения (11). Покажем, что для существования такого решения условия (16) являются необходимыми и достаточными.

Необходимость. Любое решение $P(\lambda)$, Q уравнения (11) однозначно определяются матрицей Q, так как

$$P(\lambda) = \tilde{K}(\lambda) Q K^{-1}(\lambda) \tag{17}$$

в силу унимодулярности матриц $K(\lambda)$ и $\tilde{K}(\lambda)$. Из этой формулы видно, что матрицы $P(\lambda)$ и Q могут быть одновременно либо вырожденными, либо невырожденными и что из невырожденности Q следует унимодулярность $P(\lambda)$. Таким образом, нужно найти необходимые условия существования невырожденной матрицы Q, удовлетворяющей уравнению (11). Согласно лемме эта матрица состоит из блоков Q^{α}_{β}; $\alpha = 1, \ldots, s$; $\beta = 1, \ldots, r$ вида Z. Первая вертикальная полоса матрицы Q в силу (13) имеет максимальную ширину, равную u_1. Согласно замечанию 1 и условию (15) $v_1 \geqslant u_1 - 1$, так как в противном случае первый столбец q_1 матрицы Q будет равен нулю.

Предположим, что $1 \leqslant v_i < u_i - 1$ для некоторого натурального $i: 2 \leqslant i \leqslant r$, причем $v_j \geqslant u_j - 1$ для $j = 1, \ldots, i-1$. Тогда нижние части столбцов

$$q_1,\ q_{u_1+1},\ q_{u_1+u_2+1},\ \ldots,\ q_{u_1+u_2+\cdots+u_{i-1}+1}, \tag{18}$$

принадлежащие горизонтальным полосам $Q^i, Q^{i+1}, \ldots, Q^s$, будут нулевыми, так как вертикальный размер каждого из блоков Q^{α}_{β}, $\alpha = i, i+1, \ldots, s$; $\beta = 1, 2, \ldots (i-1)$ будет меньше горизонтального по крайней мере на 2 (см. (13), (15), замечание 1). В то же время верхняя часть каждого из столбцов (18), принадлежащая горизонтальным полосам $Q^1, Q^2, \ldots, Q^{i-1}$, содержит неравных нулю не более, чем $i-1$ элементов, находящихся согласно замечанию 1 в $i-1$ строках: $q^1, q^{v_1+1}, q^{v_1+v_2+1}, \ldots, q^{v_1+v_2+\cdots+v_{i-2}+1}$. Поэтому i столбцов (18) линейно зависимы. Таким образом, если матрица Q невырождена, то $v_i \geqslant u_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$.

Теперь предположим, что $s<r$. Тогда каждый из столбцов

$$q_1,\ q_{u_1+1},\ q_{u_1+u_2+1},\ \ldots,\ q_{u_1+u_2+\cdots+u_{r-1}+1} \qquad (19)$$

будет иметь не равных нулю не более s элементов, находящихся в s строках: q^1, q^{v_1+1}, $q^{v_1+v_2+1}$, ..., $q^{v_1+v_2+\cdots+v_{s-1}+1}$, поэтому столбцы (19) линейно зависимы. Таким образом, из невырожденности матрицы Q следует неравенство $s \leqslant r$.

Достаточность. Пусть $v_i \geqslant u_i - 1$ для любого $i = 1, \ldots, r$ и $s \geqslant r \geqslant 1$. Покажем, что в этом случае можно построить неособенную матрицу Q, которая вместе с $P(\lambda)$, определяемой формулой (17), удовлетворяет уравнению (11). Разбиваем столбцы и строки матрицы Q так же, как у матриц $K(\lambda)$ и $\tilde{K}(\lambda)$, соответственно. Множество диагональных блоков Q_i^i разобьем на два подмножества так, что для блоков первого подмножества $v_i = u_i - 1$, а для блоков второго — $v_i > u_i - 1$. Заполним единицами главные диагонали матриц первого подмножества всюду, а второго — всюду, за исключением последнего места, куда поставим 0,5 (см. (7) и (9)). Теперь выделим подматрицу, образованную пересечением незаполненных строк и столбцов и поставим на ее главной диагонали единицы. Так как полученная матрица Q в каждой строке и в каждом столбце имеет только по одному элементу, не равному нулю, то $\det Q \neq 0$. Кроме того, используя лемму, нетрудно проверить, что Q (совместно с $P = \tilde{K}QK^{-1}$) удовлетворяет уравнению (11).

Следствие. *Пусть невырожденные матрицы R и S^{-1} преобразуют матричный пучок $A + B\lambda$ к его канонической форме:*

$$R(A+B\lambda)S^{-1} = K(\lambda) =$$
$$= \operatorname{diag}\{N^{(u_1)}(\lambda),\ \ldots,\ N^{(u_r)}(\lambda),\ E^{(u_0)},\ J^{(v_1)}(\lambda),\ \ldots,\ J^{(v_s)}(\lambda)\} =$$
$$= \operatorname{diag}(N(\lambda),\ J(\lambda)), \qquad (20)$$

где $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_r \geqslant 2$, $u_0 \geqslant 0$. Тогда существуют унимодулярная $U(\lambda)$ и невырожденная V матрицы такие, что

$$U(\lambda)(A+B\lambda)V = K_0(\lambda) = \operatorname{diag}\{E^{(u)},\ J(\lambda)\},$$

где $u = u_1 + \cdots + u_r + u_0$, причем степень λ-матрицы $U(\lambda)$ не выше $u_1 - 1$.

Доказательство. Согласно теореме существуют унимодулярная линейная $P_1(\lambda)$ и невырожденная постоянная Q_1^{-1} матрицы, которые понижают на единицу размер всех блоков $N^{(u)}(\lambda)$ в $K(\lambda)$ с $u_i \geqslant 2$, т. е. $P_1(\lambda)K(\lambda)Q_1^{-1} = K_1(\lambda) = \operatorname{diag}\{N_1(\lambda),\ J(\lambda)\}$, причем максимальный размер блоков λ-матрицы $N_1(\lambda)$ на единицу меньше максимального размера блоков λ-матрицы $N(\lambda)$. Продолжая аналогичные построения мы на u_1 — 1-м шаге получим $N_{u_1-1}(\lambda) = E^{(u)}$. Следовательно, матрицы

$$U(\lambda) = P_{u_1-1}(\lambda)\cdot P_{u_1-2}(\lambda)\ \ldots\ P_1(\lambda)R, \qquad (21)$$

$$V = S\cdot Q_1Q_2\ \ldots\ Q_{u_1-1} \qquad (22)$$

преобразуют $A+B\lambda$ в $K_0(\lambda)$. Из формулы (21) следует, что степень λ-матрицы $U(\lambda)$ равна или меньше u_1-1. Покажем, что эта степень не может быть меньше чем u_1-1.

Согласно [1, с. 351] регулярная система ДУ (1), соответствующая пучку $A+B\lambda$ с канонической формой (20), в общем решении содержит производные порядка u_1-1 от компонент вектора в правой части $\vec{f}(t)$. При использовании канонической формы $K_0(\lambda)$ для получения общего решения системы ДУ (1) мы получаем производные от компонент вектора правой части благодаря выполнению дифференциальных линейных преобразований уравнений системы (1) в соответствии с λ-матрицей $U(\lambda)$. Если бы $U(\lambda)$ имела степень меньше чем u_1-1, то в правой части преобразованной системы ДУ

$$K_0\left(\frac{d}{dt}\right)\vec{y}=\vec{l}(t)=U\left(\frac{d}{dt}\right)\vec{f}(t)$$

не было бы производных порядка u_1-1 от компонент вектора $\vec{f}(t)$. Но тогда и в общем решении $\vec{x}(t)=V\vec{y}(t)$ (23) исходной системы ДУ (1) не было бы производных u_1-1-порядка от компонент вектора $\vec{f}(t)$.

Замечание 2. В доказательстве теоремы и следствия содержится эффективный способ вычисления матриц $P(\lambda)$ преобразования уравнений системы ДУ. Однако вычисление матриц V преобразования переменных не является эффективным, так как оно требует обращения матриц. Для устранения этого недостатка целесообразно на каждом этапе решать одновременно два уравнения $P'(\lambda)K(\lambda)=\tilde{K}(\lambda)Q^1$, $P''(\lambda)\tilde{K}(\lambda)=K(\lambda)Q''$, выбирая такие их неособенные решения, для которых $Q'\cdot Q''=E$ и $P'(\lambda)P''(\lambda)=[\tilde{K}(\lambda)Q'K^{-1}(\lambda)]\times\times[K(\lambda)Q''\cdot\tilde{K}^{-1}(\lambda)]=E$.

Замечание 3. Приведение матричного пучка $A+B\lambda$ к канонической форме $K_0(\lambda)$ можно осуществить и с помощью преобразований вида $P^{-1}K(\lambda)Q^{-1}(\lambda)=\tilde{K}(\lambda)$, где $Q(\lambda)$-линейная унимодулярная λ-матрица, P — невырожденная матрица. При этом соответствующие доказатель тва дословно повторяются. Недостатком такого варианта приведения является наличие производных в формулах перехода от новых переменных к старым, чего нет в формулах (23).

Список литературы: 1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— 3-е изд.— М.: Наука, 1967.— 576 с. 2. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 216 с. 3. *Вырожденные* системы обыкновенных дифференциальных уравнений: Сб. статей.— Новосибирск.: Наука. Сиб. отд-ние, 1982.—116 с. 4. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейных систем дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.— Укр. мат. журн., 1975, 27, № 1, с. 137—140. 5. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 2, с. 168—174. 6. *Чистяков В. Ф.*

О решении линейных сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом исключения неизвестных.— В кн.: Методы оптимизации и их приложение.— Иркутск: АН СССР, 1979, с. 100—165. 7. *Campbell S. L.* Linear system of differential equations with singular coefficients.— SLAM J. Math. Anal., 1977, 8, № 6, p. 1057—1066. 8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1968.—432 с.

Поступила в редколлегию 03.04.85.

УДК 517.98+519.2

О. В. УВАРОВ, канд. физ.-мат. наук

ОБ УРАВНЕНИИ БАЛАКРИШНАНА ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть функция $x(t)$, представляющая собой случайный вектор размерности $p \times 1$, удовлетворяет задаче Коши:

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + n_2(t),\ x(0) = 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матричная функция размерности $p \times p$ и $n_2(t)$ — белый нормальный векторный шум с ковариационной матрицей (размерности $p \times p$)

$$M[n_2(t)\,n_2^*(s)] = \lambda\delta(t-s)\,I,\ \lambda \geqslant 0.$$

Предполагаем, что наблюдаемый процесс $u(t)$ — случайный вектор размерности $n \times 1$, связан с $x(t)$ линейным преобразованием $u(t) = H(t)\,x(t) + n_1(t)$, причем $H(t)$ — неслучайная матричная функция размерности $n \times p$ и $n_1(t)$ — белый нормальный шум размерности $n \times 1$ с единичной спектральной плотностью. При указанных предположениях требуется построить наилучшую линейную оценку $\hat{x}(t)$ значения $x(t)$ в момент t, обеспечивающую минимум средней квадратичной ошибки и основанную на результатах наблюдения $u(t)$ вплоть до момента t. $\hat{x}(t)$ ищем в виде

$$\hat{x}(t) = \int_0^t W(\xi)\,u(\xi)\,d\xi,$$

где $W(\xi)$ принадлежит гильбертову пространству $L_2(t, E_{pn})$ измеримых относительно меры Лебега матричных функций размерности $p \times n$, интегрируемых в квадрате на интервале $(0, t)$. Скалярное произведение в $L_2(t, E_{pn})$ определяется формулой

$$(W_1, W_2) = Sp\int_0^t W_1(\xi)\,W_2^*(\xi)\,d\xi.$$

В работе [1] показано, что $W(\xi)$ можно определить как решение интегрального уравнения

$$v(\tau)=\int_0^t W(\xi)\,H(\xi)\,\Psi(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Здесь

$$\Psi(\xi,\tau)=\begin{cases}\Phi(\xi)\,\Phi^{-1}(\tau), & \xi\geqslant\tau\\ 0 & , \xi<\tau\end{cases}$$

и $\Phi(t)$ — матричное фундаментальное решение уравнения

$$\frac{d\Phi(t)}{d(t)}=A(t)\,\Phi(t),$$

а $v(\tau)$, в свою очередь, определяется как решение уравнения

$$\varphi(\tau)=\int_0^\tau v(\xi)\,[\Phi^*(\xi)]^{-1}\,d\xi. \tag{2}$$

Причем для $\varphi(\tau)$ имеет место интегро-дифференциальное уравнение

$$-\int_\tau^t \varphi(\xi)\,\dot{Q}(\xi)\,d\xi\Phi^{-1}(\tau)+\frac{1}{\lambda}\,\varphi(\tau)\,\Phi^*(\tau)=\Phi(t)\,\Phi^{-1}(\tau), \tag{3}$$

где

$$Q(\tau)=\int_\tau^t \Phi^*(\xi)\,H^*(\xi)\,H(\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi.$$

В данной работе анализируется уравнение (3) при некоторых предположениях относительно матричных функций $A(t)$ и $H(t)$. Преобразуем (3) к виду, удобному для дальнейшего исследования. Умножив обе части (3) слева на $\Phi(\tau)$ и продифференцировав по τ, получим однородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}(\tau)\,\Phi^*(\tau)\,\Phi(\tau)+\dot{\varphi}(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\,[\Phi^*(\tau)\,\Phi(\tau)]+\lambda\varphi(\tau)\,\dot{Q}(\tau),\quad \lambda\neq 0. \tag{4}$$

Причем, как следует из (3) при $\tau=t$ $\dot{\varphi}(t)=\lambda\,[\Phi^*(t)]^{-1}$, а в силу (2) $\varphi(0)=0$.

Ниже будем предполагать, что $A(t)$ и $H(t)$ не зависят от t и включены в операторный матричный узел [2] (A, E_p, H, E_n, I): $A\in[E_p, E_p]$, $H\in[E_p, E_n]$, т. е. $A+A^*=H^*H$. Поскольку в этом случае $\Phi(t)=e^{tA}$ и

$$Q(\tau)=\int_\tau^t e^{\xi A^*}H^*He^{\xi A}\,d\xi,$$

уравнение (4) принимает вид

$$\ddot{\varphi}(\tau)\,e^{\tau A^*}+\dot{\varphi}(\tau)\,e^{\tau A^*}(A+A^*)-\lambda\varphi(\tau)\,e^{\tau A^*}H^*H=0.$$

Предположив дополнительно, что A и A^* коммутируют, получим уравнение оптимального фильтра следующего вида

$$\ddot{\varphi}(\tau) + \dot{\varphi}(\tau)(A + A^*) - \lambda\varphi(\tau)(A + A^*) = 0 \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$\varphi(0) = 0, \tag{6}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda e^{-tA^*}. \tag{7}$$

Поскольку $\varphi(\tau)$ есть некоторая функция от A и A^*, то в силу наших предположений, очевидно, что коммутаторы

$$[\varphi(\tau), A] = [\varphi(\tau), A^*] = 0.$$

Если

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} F_1(\tau) \\ F_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(\tau) \\ \dot{\varphi}(\tau) \end{bmatrix},$$

то уравнение (5) эквивалентно системе уравнений первого порядка

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau} = LF(\tau), \tag{8}$$

где оператор L — блочная матрица с блоками одинаковой размерности $p \times p$:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \lambda(A + A^*) & -(A + A^*) \end{bmatrix}.$$

Решение системы (8) ищем в виде

$$F(\tau) = e^{\tau L} F_0. \tag{9}$$

Здесь $F_0 = \begin{bmatrix} F_1^{(0)} \\ F_2^{(0)} \end{bmatrix}$ — не зависит от τ и определяется с помощью краевых условий (6)—(7).

В частности, из (6) следует $F_1^{(0)} = 0$, т. е.

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Как известно [3], для операторных функций имеет место интегральное представление

$$e^{\tau L} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_L} e^{\tau\xi} R(\xi, L)\, d\xi,$$

Γ_L — гладкий контур, охватывающий спектр оператора L, а $R(\xi, L) = (\xi I - L)^{-1}$ — его резольвента. Поскольку $(\xi I - L) R(\xi, L) = I$, нетрудно получить выражение для $R(\xi, L)$ в блочной форме

$$R(\xi, L) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi}[I + \lambda B(\xi)(A + A^*)] & B(\xi) \\ \lambda B(\xi)(A + A^*) & \lambda B(\xi) \end{bmatrix},$$

где $B(\xi) = [\xi^2 I + (\xi - \lambda)(A + A^*)]^{-1}$. Тогда в силу (9)—(10)

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} T(\tau) F_2^{(0)} \\ \dot{T}(\tau) F_2^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Здесь $T(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_L} e^{\tau\xi} B(\xi)\, d\xi$. Определим $F_2^{(0)}$. Из (7) следует

$$\lambda e^{-tA^*} = \dot{T}(t) F_2^{(0)}. \tag{12}$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t. Получим

$$-\lambda A^* e^{-tA^*} = \ddot{T}(t) F_2^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_L} \xi^2 B(\xi)\, d\xi F_2^{(0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(A + A^*) \oint\limits_{\Gamma_L} (\lambda - \xi) e^{t\xi} B(\xi)\, d\xi F_2^{(0)}$$

или с учетом (12)

$$-\lambda A^* e^{-tA^*} = \lambda (A + A^*) T(t) F_2^{(0)} - \lambda (A + A^*) e^{-tA^*}.$$

Отсюда $F_2^{(0)} = T^{-1}(t)(A + A^*)^{-1} A e^{-tA^*}$. Итак показано, что если: 1) A и A^* коммутируют; 2) $\det \| A + A^* \| \neq 0$; 3) $T(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_L} e^{t\xi} [\xi^2 I + (\xi - \lambda)(A + A^*)]^{-1} d\xi$ обратимая матричная функция, то уравнение с краевыми условиями (6)—(7) имеет решение $\varphi(\tau) = T(\tau) T^{-1}(t)(A + A^*)^{-1} A e^{-tA^*}$.

Полученные результаты допускают обобщение на случай уравнения (5) в гильбертовом пространстве, когда A и H — линейные ограниченные операторы, действующие в соответствующих гильбертовых пространствах.

Список литературы: 1. *Теория связи.* Под ред. А. В. Балакришнана: Пер. с англ.— М.: Связь, 1972. —392 с. 2. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Операторные узлы в гильбертовых пространствах.— Х.: Изд-во ХГУ, 1971. —160 с. 3. *Далецкий Ю. А., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 536 с.

Поступила в редколлегию 25.04.85.

УДК 517.5:512.643

И. Т. ЗАРЕЦКАЯ

О ФАКТОРИЗАЦИИ И РЕАЛИЗАЦИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

Рассматриваются представления рациональной матрицы-функции

$$\text{а) } v(\lambda) = B_1(\lambda) \ldots B_q(\lambda); \quad \text{б) } v(\lambda) = D + C(\lambda I - A)^{-1} B. \tag{1}$$

Здесь $B_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, q)$ — рациональные функции первой степени. Представление (1, *б*) с постоянными матрицами A $(m \times m)$,

$B(n \times m)$, $C(m \times n)$, $D(n \times n)$ называется реализацией функции $v(\lambda)$, а пространство $H = C^m$, в котором с матрицей A связывается линейный оператор A, — пространством реализации. Реализация (1, б) минимальна, если $m = \deg v(\lambda)$ [1 — 3].

1°. В случае простых полюсов $v(\lambda)$ всегда существует минимальная* факторизация (1, а) [2, 3]. В случае кратных полюсов может не существовать факторизация (1, а) на множители первой степени. Вообще не гарантируется отщепление множителя степени k, понижающее кратность полюса на k единиц. Известные критерии факторизуемости даются в терминах заданных реализаций (1, б) функций $v(\lambda)$, $w(\lambda) = v^{-1}(\lambda)$ [2, 3]. В следующих двух теоремах приводится критерий факторизуемости функции $v(\lambda)$ в терминах ее нулей и канонических жордановых наборов. Точка λ_0 называется нулем матрицы-функции $w(\lambda)(n \times n)$, если существует аналитическая в точке λ_0 вектор-функция $x(\lambda)$ (называемая корневой) со значениями в C^n такая, что вектор-функция $\psi(\lambda) = w(\lambda)\,x(\lambda)$ аналитична в точке λ_0, $x(\lambda_0) \neq 0$ и $\psi(\lambda_0) = 0$. Кратность корневой функции $x(\lambda)$ есть порядок λ_0 как нуля $\psi(\lambda)$. Вектор $x_0 = x(\lambda_0)$ называется собственным для матрицы-функции $w(\lambda)$. Линейная оболочка множества собственных векторов в нуле λ_0 обозначается через $\operatorname{Ker}(w;\ \lambda_0)$, ее размерность через $p = \dim \operatorname{Ker}(w;\ \lambda_0)$. Рангом собственного вектора x_0 называется максимальная из кратностей всех корневых функций $x(\lambda)$ таких, что $x(\lambda_0) = x_0$. Первые k коэффициентов $\{x_j\}_{j=0}^{k-1}$ тейлоровского разложения вектор-функции $x(\lambda) = \sum x_j (\lambda - \lambda_0)^j$ называются жордановым набором функции $w(\lambda)$ в нуле λ_0. Векторы $\{x_{ij}\}_{j=0,i=1}^{r_i-1,p}$ называются канонической системой жордановых наборов в нуле λ_0, если ранг r_1 собственного вектора x_{10} — максимальный из рангов всех собственных векторов, а ранг r_{j0} собственного вектора x_{j0} ($j = 2, \ldots, p$) — максимальный из рангов всех собственных векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $\operatorname{Ker}(w;\ \lambda_0)$ к л. о. $\{x_{10}, \ldots, x_{j-1,0}\}$. Число $r = r_1 + \cdots + r_p$ называется кратностью λ_0 как нуля $w(\lambda)$ [2].

Будем предполагать, что функция $v(\lambda)$ аналитична в точке $\lambda = \infty$ и $D = v(\infty)$ — обратимая матрица. Тогда, изучая мультипликативное представление (1, а), можно положить $D = I$. Пусть λ_0 — нуль кратности r матрицы-функции $w(\lambda) = v^{-1}(\lambda)$, $\{x_{ij}, y_{ij}\}_{j=0,i=1}^{r_i-1,\,p}$ — системы канонических жордановых наборов функций $w(\lambda)$ и транспонированной $w^T(\lambda)$. Обозначим через J_0 блочно-диагональную матрицу с λ_0-блоками Жордана порядка r_i ($i = 1, \ldots, p$) на главной диагонали и введем матрицы

$$Q_- = [x_{10}, \ldots, x_{pr_p-2}];\ R_- = [y_{1r_1-1}, \ldots, y_{10}, y_{2r_2-1}, \ldots, y_{p1}]^T;$$
$$J_- = J_0 - \lambda_0;\ \varphi = [\underbrace{0, \ldots, 0,}_{r-1}\ 1];\ G = \varphi - R_- x_{pr_p-1}; \tag{2}$$
$$E = y_{p0} Q_-;\ F = R_- Q_- + (\lambda_0 - y_{p0} x_{pr_p-1})\, T_{r=1} - J_-.$$

* $\deg v(\lambda) = \sum \deg B_k(\lambda)$

Теорема 1. *Если* λ_0 — *единственный нуль кратности* r *рациональной матрицы-функции* $w(\lambda)$, *то разрешимость векторного уравнения*

$$ZEZ+FZ+G=0,\ Z=\operatorname{col}\{Z_j\}_{j=1}^{r-1} \tag{3}$$

с матричными коэффициентами E, F, G *из* (2) *эквивалентна представимости*

$$v(\lambda)=w^{-1}(\lambda)=v_1(\lambda)\cdot[I+R/(\lambda-\lambda_0)], \tag{4}$$

где $\operatorname{rg} R=1$, *а функция* $w_1(\lambda)=v_1^{-1}(\lambda)$ *имеет в точке* λ_0 *нуль кратности* $r-1$.

Доказательство. В силу теоремы 2.1 из [2] матрицы

$$Q_0=\operatorname{row}\{x_{ij}\}_{j=0,i=1}^{r_i-1,p}=[Q_-,\ x_{pr_p-1}];$$

$$R_0=\operatorname{col}\{y_{ij}^T\}_{j=0,i=1}^{r_i-1,p}=[R_-,\ y_{p0}]^T;\ J_0=J_-\oplus\lambda_0 \tag{5}$$

в обозначениях (2) обеспечивают минимальную реализацию

$$v(\lambda)=w^{-1}(\lambda)=I+Q_0(\lambda I-J_0)^{-1}R_0 \tag{6}$$

в пространстве $H=C^r=C^{r-1}\oplus C^1=H_1\oplus H_2$.

1. (4)$\Rightarrow$(3). Представление (4) обеспечивает существование минимальной реализации

$$v(\lambda)=I+C(\lambda I-A)^{-1}B \tag{7}$$

в пространстве $H=H_1\oplus H_2$ с помощью матриц

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix};\ C=[C_1,\ C_2];\ b=b_1C_2. \tag{8}$$

Реализации (6), (7) эквивалентны друг другу:

$$A=T_0JT^{-1};\ B=TR_0;\ C=Q_0T^{-1}. \tag{9}$$

Здесь $T=\{t_{ij}\}_{i,j=1}^2$ — некоторая невырожденная матрица $(r\times r)$. Поскольку $\dim H_2=1$, можно считать $t_{22}=1$. Из первого равенства в (9), переписанного в обозначениях (5), (8), следует, что $t_{21}\varphi=0$; $t_{21}J_-=\lambda_0t_{21}$ (φ из (2)), откуда $t_{21}=0$. Положим $z=t_{11}^{-1}t_{12}$. Тогда уравнение (3) есть равенство $b=B_1C_2$ из (8), записанное с учетом (5), (8), (9).

2. (3)$\Rightarrow$(4). Реализацию (1, б) в пространстве $H=H_1\oplus H_2$ с матрицами

$$A=\{A_{ij}\}_{i,j=1}^2;\ B=\operatorname{col}\{B_j\}_{j=1}^2;\ C=\operatorname{row}\{C_j\}_{j=1}^2 \tag{10}$$

будем называть факторизуемой, если

$$A_{21}=0,\ A_{12}=B_1C_2. \tag{11}$$

Разрешимость уравнения (3) обеспечивает существование эквивалентной к (6) факторизуемой реализации (7), (8) с матрицей подобия

$T = \begin{bmatrix} I & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (9), а следовательно, и представления (4) с матрицей $R = C_2 B_2$; $\mathrm{rg}\, R = 1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Две эквивалентные реализации с блочно-диагональной матрицей подобия $T = \mathrm{diag}\{T_1 T_2\}$; T_i: $H_i \to H_i$, $i = 1,2$ факторизуемы либо не факторизуемы одновременно.

Совокупность матриц (Q_0, J_0, R_0) из теоремы 1 называется *канонической жордановой тройкой* в нуле λ_0 [2]. Для факторизации матрицы-функции $w(\lambda)$ с m нулями λ_j кратностей ρ_j введем обозначения: (Q_j, J_j, R_j) — каноническая жорданова тройка в нуле λ_j ($j = 1, \ldots, m$);

$$\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_m; \; J_- = J_1 \oplus \cdots \oplus J_{m-1}; \; J = J_- \oplus J_m$$
$$Q_- = \mathrm{row}\,\{Q_i\}_{i=1}^{m-1}; \; R_- = \mathrm{col}\,\{R_i\}_{i=1}^{m-1}; \tag{12}$$
$$Q = [Q_-, Q_m]; \; R = [R_-, R_m]^T, \; G = J_- - R_- Q_-;$$
$$E = -R_m Q_-; \; L = R - Q_m; \; F = R_m Q_m - J_m.$$

Теорема 2. *Разрешимость матричного уравнения* $ZEZ + GZ + ZF + L = 0$; $Z = \{Z_{ij}\}_{i,j=1}^{\rho-\rho_m, \rho_m}$ *с коэффициентами* E, F, G, L *из (12) эквивалентна представимости* $v(\lambda) = w^{-1}(\lambda) = v_2(\lambda) \times v_1(\lambda)$, *где функция* $w_2(\lambda) = v_2^{-1}(\lambda)$ *имеет единственный нуль в точке* λ_m *кратности* ρ_m, *а функция* $w_1(\lambda) = v_1^{-1}(\lambda)$ *имеет нули в точках* λ_j *кратностей* ρ_j ($j = 1, \ldots, m-1$).

С учетом замечания 1 доказательство этой теоремы повторяет рассуждения теоремы 1, где $H_1 = C^{\rho-\rho_m}$; $H_2 = C^{\rho_m}$.

2°. Реализацию (7) функции $v(\lambda)$ назовем *произведением* реализаций $v_i(\lambda) = I + C_i(\lambda I) - A_{ii})^{-1} B_i$, $i = 1,2$ если выполнено (10, 11). При этом $v(\lambda) = v_1(\lambda) \cdot v_2(\lambda)$. Реализация (1, б) матрицы-функции $v(\lambda)$ с *верхне-треугольной* матрицей A строится путем перемножения реализаций элементарных множителей $B_k(\lambda)$ ($k = 1, \ldots q$) из представления (1, *а*) при выполнении условий факторизуемости теорем 1,2.

3°. Условие аналитичности функции $v(\lambda)$ в точке $\lambda = \infty$ можно снять введением функций $\tilde{v}(\lambda) = v(1/\lambda)$, если $\lambda = 0$ не является полюсом функции $v(\lambda)$, и $\tilde{v}(\lambda) = v((q - s\lambda)/(r\lambda - p))$, $ps - qr \neq 0$ в противном случае. Элементарный множитель $B(\lambda)$ с полюсом в точке $\lambda = \infty$ имеет вид линейного $B(\lambda) = \lambda M + N$ матричного пучка.

4°. Если вещественная матрица-функция $v(\lambda)$ второго порядка степени l допускает отщепление множителей первой степени $B(\lambda) = I + R/(\lambda - \tau)$, где

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Im}\, R - \mathrm{Im}\, \tau \cdot I) = 2, \; \mathrm{Im}\, R \neq 0, \tag{13}$$

то она обладает, вообще говоря, неминимальной факторизацией (1, а) на вещественные множители степени не выше двух, причем

$$\sum \deg B_i(\lambda) - l \leqslant l.$$

Действительно, пусть $v(\lambda) = v_1(\lambda) B_1(\lambda)$, где $B_1(\lambda) = I + \frac{R}{\lambda - \tau}$; $R = F + iG$; $\operatorname{rg} R = 1$; $\deg v_1(\lambda) = l - 1$. Если $\beta = \operatorname{Im} \tau \neq 0$ и $G = \operatorname{Im} R \neq 0$ то условие (13) обеспечивает существование функции $Z(\lambda) = I + Q/(\lambda - \bar{\tau})$, $Q = (G - \beta I) \bar{R} (G - \beta I)^{-1}$, $\operatorname{rg} Q = 1$ такой, что можитель $B_2(\lambda) = Z(\lambda) B_1(\lambda)$ вещественный и $\deg B_2(\lambda) = 2$. В силу вещественности $v(\lambda)$, функция $v_2(\lambda) = v_1(\lambda) Z^{-1}(\lambda)$ также вещественная и $\deg v_2(\lambda) = l - 1 = \deg v_1(\lambda)$. При этом $v(\lambda) = v_2(\lambda) B_2(\lambda)$. Таким образом, элементарный вещественный множитель $B(\lambda)$ с полюсом τ имеет вид

$$B(\lambda) = I + R/(\lambda - \tau); \ \operatorname{rg} R = 1, \ \deg B(\lambda) = 1, \tag{14}$$

либо

$$B(\lambda) = I + \frac{\lambda M + N}{(\lambda - \tau)(\lambda - \bar{\tau})}; \ \deg B(\lambda) = 2. \tag{15}$$

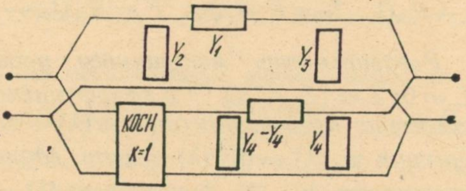

Рис. 1

Минимальная вещественная реализация (1, *б*) функции $v(\lambda)$ получается выделением минимальной части [2, 3] из произведения вещественных реализаций элементарных множителей вида (14), (15) в мультипликативном представлении (1, *а*).

5°. Предположим, что симметрическая рациональная матрица-функция $v(\lambda) = \{v_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{2}$ допускает адмиттансные преобразования — переход к матрице импедансов $Z(\lambda)$ либо проводимостей $Y(\lambda)$:

$$Z(\lambda) = \begin{bmatrix} v_{11} v_{21}^{-1} & v_{11} v_{21}^{-1} v_{22} - v_{12} \\ v_{21}^{-1} & v_{21}^{-1} v_{22} \end{bmatrix};$$

$$Y(\lambda) = \begin{bmatrix} v_{22} v_{12}^{-1} & v_{21} - v_{22} v_{12}^{-1} v_{11} \\ -v_{12}^{-1} & v_{12}^{-1} v_{11} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Известно, что такая функция является передаточной для некоторой активно-пассивной электрической цепи [4, 5]. С помощью метода факторизации по *произвольной* матрице-функции $v(\lambda)$ *второго порядка* (не обязательно симметрической) можно построить четырехполюсную цепь с элементами $\pm(L, C, R)$, КОС, передаточная функция которой совпадает с $v(\lambda)$. Если $v(\lambda)$ допускает переход к матрице $Y(\lambda)$ (16), то $v(\lambda)$ является передаточной функцией для цепи рис. 1, образованной параллельным соединением симметричного и несимметричного четырехполюсников с проводимостями $Y_i = Y_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) и $Y_4 = Y_4(\lambda)$ соответственно. Первый из них реализует симметрическую, а второй — кососимметрическую компоненты матрицы $Y(\lambda)$. Если возможен переход к $Z(\lambda)$, то вместо рис. 1 используется последовательное соединение симметричного и несимметричного четырехполюсников, реализующих симметрическую и несимметрическую компоненты матрицы $Z(\lambda)$. Если не существует ни одно из адмиттансных преобразований, то функция $v(\lambda)$ диагональна, и для нее существует минимальная вещественная факторизация (1, *a*). Элементарные множители $B_k(\lambda)$ ($k = 1, \ldots, q$) из мультипликативного представления (1, *a*) реализуются четырехполюсниками вида рис. 1. Для множителей типа (14) двухполюсники с функциями проводимостей $Y_i = Y_i(\lambda)$ ($i = 1, \ldots, 4$)

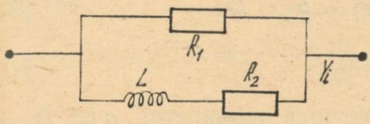

Рис. 2

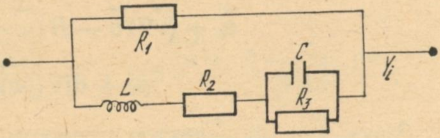

Рис. 3

на рис. 1 имеют вид рис. 2. Для множителей типа (15) двухполюсники с функциями продимостей $Y_i = Y_i(\lambda)$ ($i = 1, \ldots, 4$) на рис. 1 имеют вид рис. 3. В частном случае J-внутренней матрицы-функции $v(\lambda)$ всегда существует минимальное вещественное представление (1, а) [7]. С помощью метода факторизации здесь функция $v(\lambda)$ реализуется пассивной электрической цепью из $+(L, C)$-элементов, трансформаторов, гираторов [6].

Список литературы: 1. *Kalman R. E.* Grreducible Realizations and the degree of a Rational Matrix. — J. soc In. Appl. Math., 1965, **13**, № 2, p. 520 — 524. 2. *Bart H., Gohberq J., Kaashoek M. A.* Minimal Factorization of Matrix and Operator Function. — Operator Theory: Adv. and Appl., 1979. — Bd. 1. 227 p. 3. *Сахнович Л. А.* О факторизации передаточной оператор-функции. — Докл. АН СССР, 1976, **226**, № 4, с. 781 — 784. 4. *Матханов П. Н.* Основы синтеза линейных электрических цепей. — М.: Высш. шк., 1976.—208 с. 5. *Хьюлсман Л.* Теория и расчет активных *RC*-цепей. — М.: Связь, 1973. — 239 с. 6. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-нерастягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории цепей. — Успехи мат. наук, 1973, 28, вып. 1, с. 65 — 130. 7. Вещественная реализация J-внутренней матрицы-функции/ И. Т. Зарецкая. Рукопись деп. в УКРНИИНТИ 19.09. 83. — 83 Доп.

Поступила в редколлегию 28.12.84

УДК 517.9

В. А. ЛЬВОВ

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СУСПЕНЗИЙ

В работе изучается двухжидкостная модель движения твердых мелких частиц в вязкой несжимаемой жидкости [1,2]:

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\nabla)\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + A\rho(\vec{u} - \vec{v}) - \nabla p = \vec{f}(x, t); \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0; \tag{2}$$

$$\vec{v}_t + (\vec{v}\nabla)\vec{v} - B(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{g}(x, t); \tag{3}$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\vec{u}(x, t)$ — вектор скорости несущей жидкости; $p(x, t)$ — давление; $\vec{v}(x, t)$ — вектор скорости «жидкости частиц»; $\rho(x, t)$ — концентрация «жидкости частиц»; $\vec{f}(x, t)$, $\vec{g}(x, t)$ — заданные векторы внешних сил, действующих на несущую жидкость и «жидкость частиц»; ν, A, $B > 0$ — заданные коэффициенты; уравнение (3) и вектор $\vec{v}$ рассматриваются лишь на носителе функции $\rho(x, t)$.

Пусть $\Omega \subset R_3$ ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в $Q_T = \Omega \times [0, T]$ для некоторого $T > 0$ начально-краевую задачу для системы (1) — (4), дополнив ее условиями:

$$\vec{u}(x, t) = 0, \ (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \stackrel{\text{def}}{=} S_T; \tag{5}$$

$$\rho(x, t)(\vec{v}(x, t), \vec{n}(x)) \geqslant 0, \ (x, t) \in S_T; \tag{6}$$

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}^0(x); \tag{7}$$

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}^0(x); \tag{8}$$

$$\rho(x, 0) = \rho^0(x); \tag{9}$$

где $\vec{n}(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$; (6) означает, что пришедшие к $\partial\Omega$ частицы от нее не уходят. Однозначная разрешимость задачи (1) — (9) понимается в смысле существования и единственности $\rho(x, t)$, $\vec{u}(x, t)$ заданных всюду в Q_T и $\vec{v}(x, t)$ заданной на носителе $\rho(x, t)$ в Q_T, удовлетворяющих (1) — (9) и принадлежащих соответствующим классам функций (для удобства считаем, что $\vec{v}(x, t)$ определена всюду в Q_T, но единственность $v(x, t)$ будем требовать лишь на носителе $\rho(x, t)$).

Введем для $\alpha \in (0, 1)$ пространства $H^{\alpha}(Q_T)$, $H^{1+\alpha}(Q_T)$, $H^{2+\alpha}(Q_T)$ вектор-функций, заданных в Q_T и имеющих конечные нормы:

$$|\vec{u}|_{Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{Q_T} |\vec{u}(x, t)| + [\vec{u}]_{Q_T}^{(\alpha)}; \quad |\vec{u}|_{Q_T}^{(1+\alpha)} = \sup_{t<T} |\vec{u}|_{\Omega}^{(1+\alpha)} +$$

$$+ \sup_{Q_T} \sum_{i=1}^{3} \frac{|\vec{u}_{x_i}(x, t) - u_{x_i}(x, t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}} + \sup_{Q_T} \frac{|\vec{u}(x, t) - \vec{u}(x, t')|}{|t-t'|^{\frac{1+\alpha}{2}}};$$

$$|\vec{u}|_{Q_T}^{(2+\alpha)} = \sum_{|\mu|<2} \sup_{Q_T} |D_x^{\mu} \vec{u}(x, t)| + \sup_{Q_T} |D_t \vec{u}(x, t)| +$$

$$+ \sum_{\mu=2} [D_x^{\mu} \vec{u}]_{Q_T}^{(\alpha)} + [D_t \vec{u}]_{Q_T}^{(\alpha)},$$

где

$$[\vec{u}]_{Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{Q_T} \frac{|\vec{u}(x, t) - \vec{u}(x', t)|}{|x-x'|^{\alpha}} + \sup \frac{|\vec{u}(x, t) - \vec{u}(x, t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}};$$

$$[\vec{u}]_{\Omega}^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mu|<k} \sup_{\Omega} |D_x^{\mu} \vec{u}(x)| + \sum_{|\mu|=k} \frac{|D_x^{\mu} \vec{u}(x) - D_x^{\mu} \vec{u}(x')|}{|x-x'|^{\alpha}};$$

$$(k = 0, 1, 2) \quad |x| = [\sum_{i=1}^{3} x_i^2]^{1/2}; \quad |\vec{u}(x, t)| = [\sum_{i=1}^{3} u_i^2(x, t)]^{1/2}.$$

Аналогично определяются пространства $H^{\alpha}(\Omega)$, $H^{1+\alpha}(\Omega)$, $H^{2+\alpha}(\Omega)$ вектор-функций заданных в Ω. Наконец, примем обозначения: $\mathring{I}^{\alpha}(\Omega)$, $\mathring{I}^{\alpha}(Q_T)$ — подпространства вектор-функций из $H^{\alpha}(\Omega)$, $H^{\alpha}(Q_T)$ удовлетворяющих условиям $(\vec{u}, \vec{n}) = 0$, $x \in \partial\Omega$ и $\operatorname{div}_x \vec{u} = 0$ (в обобщенном смысле); $P_{\mathring{I}^{\alpha}(\Omega)}$, $P_{\mathring{I}^{\alpha}(Q_T)}$ — соответствующие ортопроекторы.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $\alpha \in (0, 1)$ $\vec{f}(x, t) \in \mathring{I}^{\alpha}(Q_T)$, $\vec{u}^{\circ}(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega) \cap I^{\alpha}(\Omega)$, $\vec{g}(x, t) \in H^{2+\alpha}(Q_T)$, $\vec{v}^{\circ}(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega)$, $\rho^{\circ}(x) \in H^{1+\alpha}(\Omega)$; ρ° — *финитна в* Ω *и выполнены условия согласования*

$$[\vec{f}(x, 0) + P_I(\nu\Delta\vec{u}^0 - (\vec{u}^0\nabla)\vec{u}^0 + A\rho^0(\vec{u}^0 - \vec{v}^0)]_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда, при $T < T_0 = T_0(|\vec{f}|_{Q_T}^{(\alpha)}, |\vec{g}|^{(2+\alpha)}, |\rho^0|_{\Omega}^{(1+\alpha)}, |\vec{v}^0|_{\Omega}^{(2+\alpha)})$

задача (1) — (9) *имеет единственное решение* $\vec{u}(x, t)$, $\vec{v}(x, t) \in H^{2+\alpha}(Q_T)$, $\rho(x, t) \in H^{1+\alpha}(Q_T)$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *однозначная разрешимость задачи (1) — (9) имеет место при любом конечном T, если условие достаточной малости T заменить условием достаточной малости норм*

$$|\vec{f}|_{Q_T}^{(\alpha)}, \ |\vec{g}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}, \ |\vec{u}^0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}, \ |\vec{v}^0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}, \ |\rho^0|_{\Omega}^{(1+\alpha)}.$$

Наметим схему доказательства разрешимости задачи (1) — (9) в условиях теоремы 1 и сходной с ней теоремой 2, основанного на методе последовательных приближений:

$$\vec{v}_t^{(n)} + (\vec{v}^{(n)}\nabla)\vec{v}^{(n)} + B\vec{v}^{(n)} = \vec{g} + B\vec{u}^{(n)},$$

$$\vec{v}^{(n)}(x,\ 0) = \vec{v}^0(x); \tag{I}$$

$$\rho_t^{(n)} + (\vec{v}^{(n)}\nabla)\rho^{(n)} + \rho^{(n)}\operatorname{div}\vec{v}^{(n)} = 0,$$

$$\rho^{(n)}(x,\ 0) = \rho^0(x),\ \rho^{(n)}(x,\ t)(\vec{v}^{(n)}(x,\ t),$$

$$\vec{n}(x))|_{\partial\Omega} \geqslant 0; \tag{II}$$

$$\vec{u}_t^{(n+1)} - \nu\Delta\vec{u}^{(n+1)} - \nabla_p^{(n+1)} = \vec{f} - (\vec{u}^{(n)}\nabla)\vec{u}^{(n)} - A\rho^{(n)}(\vec{u}^{(n)} - \vec{v}^{(n)}),$$

$$\operatorname{div}\vec{u}^{(n+1)} = 0,\ \vec{u}^{(n)}(x,\ 0) = \vec{u}^0(x),\ \vec{u}^{(n)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{III}$$

где в итерационном процессе по заданному $\vec{u}^{(n)}(x,\ t)$ $(\vec{u}^{(0)}(x,\ t) = \vec{u}^0(x))$, решая последовательно задачи I, II, находим $\vec{v}^{(n)}(x,\ t)$, $\rho^{(n)}(x,\ t)$, затем, решая задачу III, находим $\vec{u}^{(n+1)}(x,\ t)$ и т. д.

Сначала решаем задачи I и II во всем пространстве R_3. Для этого продолжим функции $\vec{g}(x,\ t)$ и $\vec{u}^{(n)}(x,\ t)$ на $R_3[0,\ T]$, а $\vec{u}^0(x)$, $\vec{v}^0(x)$ и $\rho^0(x)$ на R_3 так, чтобы их различные нормы при этом увеличились не более чем в конечное число раз, зависящее лишь от Ω, причем $\rho^0(x)$ продолжаем нулем.

Нетрудно показать, что решение задачи 1 в $R_3 \times [0,\ T]$ можно представить в виде

$$\vec{v}^{(n)}(x,\ t) = \int_0^t e^{-B(t-s)}[\vec{g}(\vec{y}^{(n)}(s,\ t,\ x) +$$

$$+ B\vec{u}^{(n)}(\vec{y}^{(n)}(s,\ t,\ x),\ s)]\,ds + \vec{v}^0(\vec{y}^{(n)}(0,\ t,\ x))\,e^{-Bt}, \tag{10}$$

и, соответственно, решение задачи II в $R_3 \times [0,\ T]$ в виде

$$\rho^{(n)}(x,\ t) = \rho^0(\vec{y}^{(n)}(0,\ t,\ x))\exp\left\{\int_0^t \operatorname{div}_x\vec{v}^{(n)}(\vec{y}^{(n)}(s,\ t,\ x),\ s)\,ds\right\}, \tag{11}$$

где $\vec{y}^{(n)}(\tau,\ t,\ x) \in R_3$ — интегральная кривая векторного поля $\{\vec{v}^{(n)}(x,\ t),\ 1\}$ в R_3, проходящая через точку $(x,\ t)$, т. е. $\vec{y}^{(n)}(\tau,\ t,\ x) = \vec{v}^{(n)}(\vec{y}^{(n)}(\tau,\ t,\ x),\ \tau)$, $\vec{y}^{(n)}(t,\ t,\ x) = \vec{x}$. Очевидно $y^{(n)}(\tau,\ t,\ x)$ является решением задачи $\vec{y}_{\tau\tau}^{(n)} + B\vec{y}_\tau^{(n)} = \vec{g}(\vec{y}^{(n)},\ \tau) + B\vec{u}^{(n)}(\vec{y}^{(n)},\ \tau)$,

$\vec{y}_\tau^{(n)}(0,\ t,\ x)=\vec{v}^0(\vec{y}^{(n)}(0,\ t,\ x)),\ \vec{y}^{(n)}(t,\ t,\ x)=\vec{x}$ и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\vec{y}^{(n)}(\tau,\ t,\ x)=-\int\limits_\tau^t\int\limits_0^\tau e^{-B(r-s)}[\vec{g}(\vec{y}^{(n)}(s,\ t,\ x),\ s)+$$

$$+B\vec{u}^{(n)}(\vec{y}^{(n)}(s,\ t,\ x),\ s]\,ds\,dr+\vec{v}^0(\vec{y}^{(n)}(0,\ t,\ x))\frac{e^{-Bt}-e^{-B\tau}}{B}+\vec{x}. \quad (12)$$

Можно показать, что в условиях теоремы 1, уравнение (12) однозначно разрешимо при любых $x\in R_3$ и $\tau,\ t\in[0,\ T]$, где T определяется из условия $\sqrt{3}\,|D_x\vec{v}^0|\,T+\frac{\sqrt{3}}{2}\,|D_x(\vec{g}+B\,\vec{u}^{(n)})|\,T^2<1$.

Полученные решения задач I и II $\vec{v}^{(n)}(x,\ t)\in H^{2+\alpha}(R_3\times\ [0,T]$ и $\rho^{(n)}(x,\ t)\in H^{1+\alpha}(R_3\times[0,\ T])$ ограничиваем на $\Omega\times[0,\ \tilde{T}]$, где $\tilde{T}\leqslant T$ выбирается так, чтобы при $t\leqslant\tilde{T}$ выполнялось граничное условие $\rho^{(n)}(\vec{v}^{(n)},\ \vec{n})|_{\partial\Omega}\geqslant 0$. В силу финитности $\rho^0(x)$ в Ω такое положительное $\tilde{T}$ существует, причем $\tilde{T}>d\,|\vec{v}^{(n)}|_{Q_T}^{-1}$, где d — расстояние от $\operatorname{supp}\rho^0(x)$ до $\partial\Omega$. Для сокращения в дальнейшем волну над T опускаем.

Решение задачи III существует и единственно [3], для нее справедлива оценка

$$|\vec{u}^{(n+1)}|_{Q_T}^{2+\alpha}\leqslant c_1(1+e^{c_2T})\,(|\vec{f}|_{Q_T}^{(\alpha)}+|\vec{u}^0|_{Q_T}^{(2+\alpha)}+$$

$$+c\,|\vec{u}^{(n)}|_{Q_T}|\vec{u}^{(n)}|_{Q_T}^{(1+\alpha)}+A\,|\rho^{(n)}|_{Q_T}^{(\alpha)}\,|\vec{u}^{(n)}|_{Q_T}^{(\alpha)}+$$

$$+A\,|\rho^{(n)}|_{Q_T}^{(\alpha)}|\vec{v}^{(n)}|_{Q_T}^{(\alpha)}),$$

где c_1 и c_2 зависят лишь от Ω, α и ν.

Отсюда, воспользовавшись известным мультипликативным неравенством

$$|\vec{u}|_{Q_T}^{(1+\alpha)}\leqslant c\,(|\vec{u}|_{Q_T})^{\frac{1}{2+\alpha}}\,(|\vec{u}|_{Q_T}^{(2+\alpha)})^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}},$$

полученными ранее оценками решений задачу I и II в нормах пространства $H^\alpha(Q_T)$, рядом очевидных неравенств и неравенством Юнга, для величины $\xi^{(n)}=|\vec{u}^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$ получим неравенство

$$\xi^{(n+1)}\leqslant\Psi_T(\xi^{(n)}),$$

где функция $\Psi_T(\xi)$ определена равенствами

$$\Psi_T(\xi)=\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\xi+(1+e^{cT})^{2+\alpha}\,\Psi_0+(1+e^{cT})\,\frac{(2T)^{\frac{3+\alpha}{2+\alpha}}}{2+\alpha}\,\xi^2+$$

$$+(1+e^{cT})\,(1+T)^4\,\Psi_1\,\frac{[N_2+(T+T^{1-\alpha/2})\,\xi]^2\,[1+N_2+T\xi]^3}{(1-TN_1-cT^2\xi)^5}\times$$

$$\times \exp\left\{\frac{TN_1 + cT^2\xi}{1 - TN_1 - cT^2\xi}\right\}, \quad \Psi_0 = c\,[\,|\vec{u}^0|_\Omega^{(2+\alpha)} + (|\vec{u}^0|_\Omega)^{3+\alpha} + |\vec{f}|_{Q_T}^{(\alpha)}],$$

$$\Psi_1 = c\,|\rho^0|_\Omega^{(2+\alpha)}(1 + |\vec{u}^0|_\Omega^{(\alpha)}), \; N_1 = c\,(|D_x\vec{v}^0|_\Omega +$$

$$+ T\,|D_x\vec{g}|_{Q_T}), \; N_2 = c\,[\,|\vec{v}^0|_\Omega^{2+\alpha} + (T+1)\,|\vec{g}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}].$$

Здесь постоянная c зависит от области Ω и коэффициентов A, B, ν и α.

Очевидно, что $\Psi_T(\xi)$ выпуклая, монотонно возрастающая функция ξ, определенная на $\left[0, \frac{1 - TN_1}{cT^2}\right)$, и при достаточно малых T (либо при любом фиксированном T, но при достаточно малых $\vec{u}^0$, $\vec{v}^0$, ρ^0, $\vec{f}$ и $\vec{g}$) уравнение $\xi = \Psi_T(\xi)$ имеет решений.

Пусть $\bar{\xi}$ больший корень этого уравнения. Тогда, если начальное приближение $\xi^{(0)}$ не превосходит $\bar{\xi}$, то и все $\xi^{(n)}$ будут меньше $\bar{\xi}$. Таким образом, нормы $|\vec{u}^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$ ограничены равномерно по n. Соответствующим образом может быть установлена равномерная ограниченность $|\vec{v}^{(n)}|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$ и $|\rho|_{Q_T}^{(1+\alpha)}$.

Наконец, устанавливается сходимость последовательностей приближений $\vec{u}^{(n)}(x, t)$, $\vec{v}^{(n)}(x, t)$, $\rho^{(n)}(x, t)$ соответственно $H^{2+\alpha}(Q_T)$, $H^{1+\alpha}(Q_T)$, $H^{\alpha}(Q_T)$ при достаточно малом T, чем и завершается доказательство разрешимости в теоремах 1 и 2.

Список литературы: 1. *Львов В. А., Хруслов Е. Я.* О возмущении вязкой несжимаемой жидкости мелкими частицами. — В кн.: Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры. К., 1978, с. 173—177. 2. *Lvov V., Chruslow E.* Über die Störung Zäher Inkompressibler Flüssigkeiten Durcheinen Strom Kleiner Teilchen. — Zourn. Angew. Math. und Mech., 1978, **58**, T 289 — T 290. 3. *Солонников В. А.* Оценки решений нестационарной системы Навье — Стокса. — В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л., 1973, с. 153—231.

Поступила в редколлегию 25.01.85.

УДК 517.938+577.21

Ю. И. ЛЮБИЧ, д-р физ.-мат. наук

ДАРВИНОВСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ

Дарвиновскими системами называются согласно [1] гиперциклы с линейным оператором роста, т. е. системы вида

$$\dot{x} = Ax - s(Ax)\,x \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где A — линейный оператор; s — линейный функционал в $\boldsymbol{R}^n$ ($A \neq 0$), $s \neq 0$. При этом

$$\dot{z} = Az \quad (t \geqslant 0) \tag{2}$$

может быть названа *мальтузианской системой*, соответствующей (1). Для ее решений характерна экспоненциальная асимптотика при $t \to \infty$, чего не может быть для дарвиновской системы, поскольку из (1) следует

$$\dot{s} = s(Ax)(1 - s), \tag{3}$$

откуда видно, что, если $s|_{t=0} = 1$, то $s \equiv 1$. Функционал s определяет *отбор*, ограничивающий рост (см. [1]).

Систему (1) удалось явно решить (см. [1]) путем диагонализации оператора A (при условии, что это возможно). Мы дадим решение в инвариантной форме, не предполагающей диагонализуемости и допускающей непосредственное обобщение на бесконечномерное фазовое пространство и нелинейные (но однородные) операторы роста.

Теорема 1. (Принцип нормировки). *Решение системы* (1) *с начальным условием* x_0, $s(x_0) = 1$, *дается формулой*

$$x(t) = \frac{z(t)}{s(z(t))}, \tag{4}$$

где $z(t) = e^{At}x_0$ — *решение соответствующей системы* (2) *при том же начальном условии.*

Для доказательства достаточно подставить (4) в (1).

Отметим, что время жизни решения $x(t)$ может оказаться конечным за счет обращения $s(z(t))$ в нуль при некотором t.

В приложениях оператор A обычно задается неотрицательной (поэлементно) матрицей, функционал s — положительной (покоэффициентно) линейной формой *. Тогда, очевидно, если начальный вектор x_0 неотрицателен (покоординатно), то

$$z(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!} \geqslant x_0,$$

откуда $s(z(t)) \geqslant 1$ и время жизни решения $x(t)$ бесконечно. В этой ситуации существенный интерес представляет асимптотика решения $x(t)$ при $t \to +\infty$. Ее исследование, изложенное в [1], неполно и не совсем корректно.

Несколько обобщая постановку вопроса, предположим, что в $\boldsymbol{R}^n$ выделен замкнутый телесный конус K и тем самым $\boldsymbol{R}^n$ снабжено структурой упорядоченного векторного пространства. Предположим, что $A \geqslant 0$ ($A \neq 0$) и $s > 0$. Пусть L_0 — циклическое относительно

---

* Основной пример: $s(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ (ξ_k — координаты вектора x).

A подпространство, порождаемое начальным вектором $x_0 \geqslant 0$ $(s(x_0) = 1)$, $A_0 = A | L_0$, ρ_0 — спектральный радиус оператора A_0. Оператор A_0 неотрицателен относительно замкнутого конуса $K_0 = K \cap L$. Этот конус в L_0 телесен, так как в L_0 существует базис из неотрицательных векторов, а именно,— базис вида $\{A^j x_0\}_{j=0}^{l-1}$ $(l = \dim L_0)$. По теореме Перрона—Фробениуса ρ_0 является собственным значением для A_0. Пусть P — соответствующий корневой проектор, d — порядок жордановой клетки, связанной с вектором Px_0. Тогда $v_0 = (A_0 - \rho_0 E)^{d-1} \cdot Px_0$ — собственный вектор оператора A_0, отвечающий ρ_0.

Теорема 2. $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = v_0/s(v_0)$.

Доказательство. Так как все собственные значения оператора A_0, отличные от ρ_0, лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < \rho_0$, то из жордановой формы следует

$$z(t) \equiv e^{At}x_0 = t^{d-1}e^{\rho_0 t}v_0 + o(t^{d-1}e^{\rho_0 t}). \tag{5}$$

Отсюда

$$v_0 = \lim_{t\to+\infty} t^{1-d}e^{-\rho_0 t}e^{At}x_0 \geqslant 0.$$

Так как, кроме того, $v_0 \neq 0$, то $s(v_0) > 0$. Из (5) получаем

$$s(z(t)) = t^{d-1}e^{\rho_0 t}s(v_0) + o(t^{d-1}e^{\rho_0 t}). \tag{6}$$

Из формул (5), (6) и принципа нормировки вытекает требуемый результат.

Рассмотрим функцию $\overline{E}(t) = s(Ax(t))$, называемую в [1] *средней продуктивностью*. Из теоремы 2 вытекает

Следствие. $\lim\limits_{t\to+\infty} \overline{E}(t) = \rho_0$.

Это соотношение в [1] называется экстремальным принципом, однако, вопреки сказанному там, функция $\overline{E}(t)$, вообще говоря, не является растущей и ρ_0 не есть ее максимум. Прежде чем приводить соответствующий пример, отметим общую формулу для $\overline{E}(t)$, вытекающую из принципа нормировки:

$$\overline{E}(t) = \frac{d}{dt}\ln s(z(t)). \tag{7}$$

Действительно, в силу (4) и (2)

$$Ax(t) = \frac{Az(t)}{s(z(t))} = \frac{\dot z(t)}{s(z(t))},$$

откуда

$$\overline{E}(t) = \frac{s(\dot z(t))}{s(z(t))} = \frac{d}{dt}\ln s(z(t)).$$

Пример. Пусть $n = 2$, конус $K \equiv R_+^2$ — координатный, оператор A задается матрицей $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $s(x) = \xi_1 + \xi_2$, $x_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Тогда spec $A = \{\rho, \lambda\}$, где $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Решение $z(t)$ системы (2) с начальным условием x_0 есть

$$\frac{1}{\rho-\lambda}\begin{pmatrix} e^{\rho t} - e^{\lambda t} \\ \rho e^{\rho t} - \lambda e^{\lambda t}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$s(z(t)) = \frac{(\rho+1)\, e^{\rho t} - (\lambda+1)\, e^{\lambda t}}{\rho-\lambda}.$$

Отсюда по формуле (7) получаем после элементарных вычислений

$$\dot{\bar{E}}(t) = \frac{\ddot{s}s - s^2}{s^2} = -s^{-2}e^t < 0.$$

Ошибка в рассуждениях, приведенных в [1], состоит в неверном допущении, будто бы диагонализующее преобразование сохраняет неотрицательность координат. С этим допущением связано также представление о квазивидах, отвечающих всевозможным собственным значениям оператора роста. На самом же деле понятие квазивида как смеси реальных молекулярных видов в определенных пропорциях приложимо только к предельному распределению. В остальных случаях возникают, вообще говоря, отрицательные численности, что физически бессмысленно. «Доказательство» роста $\bar{E}(t)$ в [1] предполагает положительность численностей всех квазивидов.

Рассмотрим дискретный аналог дарвиновской системы. Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задан линейный оператор A и линейный функционал s. Итерации оператора A аналогичны мальтузианской системе, а их нормировка на s, или, что равносильно, итерации дробно-линейного отображения

$$\hat{A}x = Ax/s(Ax) \tag{8}$$

— дарвиновской системе*. Вновь предположим теперь, что в $\boldsymbol{R}^n$ задан замкнутый телесный конус K и что $A \geqslant 0$, $A^m \neq 0$ при всех натуральных m; $s > 0$. Тогда определена траектория

$$\hat{A}^m x = \frac{A^m x}{s(A^m x)} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{9}$$

при любом начальном $x \geqslant 0$ $(s(x) = 1)$.

Если $A > 0$ (т. е. $Ax > 0$ при $x \geqslant 0$) или, если, по крайней мере, A примитивен (т. е. $A^q > 0$ при некотором q), то все рассматриваемые траектории сходятся к неподвижной точке $v > 0$ $(s(v) = 1)$. Действительно, в этом случае

$$A^m x = \rho^m v^*(x)\, v + o(\rho^m), \tag{10}$$

где ρ — спектральный радиус оператора A; v — соответствующий

* Принцип нормировки в этой ситуации самоочевиден.

собственный вектор ($v > 0$, $s(v) = 1$). Сформулированное утверждение вытекает из (10) и (9).

Если u — периодическая точка отображения $\hat{A}$, p — ее период, то ее траектория сводится к циклу u, $\hat{A}u$, ..., $\hat{A}^{p-1}u$. Будем говорить, что траектория (9) *стремится* к этому циклу, если

$$\lim_{k \to \infty} \hat{A}^{pk+r}x = \hat{A}^r u \quad (r = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Теорема 3. *Если конус K — многогранный, то при любом $x \geqslant 0$ ($s(x) = 1$) траектория $\{\hat{A}^m x\}$ стремится к некоторому циклу.*

В основе доказательства лежит следующий факт.

Теорема 4. *Если оператор A неотрицателен относительно многогранного конуса $K \subset \boldsymbol{R}^n$ и спектральный радиус $r(A)$ равен единице, то все собственные значения, лежащие на окружности $|\lambda| = 1$, являются натуральными корнями из единицы.*

В случае $K = \boldsymbol{R}^n_+$ — это классическая теорема Фробениуса. Для любого многогранного K, но при условии, что степени оператора ограничены, теорема 4 является частным случаем одного результата М. А. Красносельского [2].

Если $r(A) = 1$, то множество собственных значений оператора A, лежащих на единичной окружности, называется его *граничным спектром**. Теорема 4 утверждает, что при определенных условиях граничный спектр «рационален». Ее доказательство мы сведем к теореме Фробениуса с помощью некоторой общей линейно-алгебраической конструкции.

Пусть T — любой линейный оператор в n-мерном линейном пространстве X (над произвольным полем $\mathbf{k}$). Возьмем любую полную (т. е. содержащую базис) систему векторов $u_1, \ldots, u_N$ и как-нибудь разложим образы $Tu_1, \ldots, Tu_N$ по этой системе:

$$Tu_j = \sum_{i=1}^{N} \tau_{ij} u_i \quad (j = 1, \ldots, N).$$

Матрицу $\tilde{T} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^{N}$ можно назвать *матрицей оператора* T относительно данной полной системы, хотя $\tilde{T}$ по T определяется неоднозначно. В арифметическом пространстве $\tilde{X} = \mathbf{k}^N$ матрица $\tilde{T}$ трактуется как линейный оператор

$$(\tilde{T}\xi)_i = \sum_{j=1}^{N} \tau_{ij} \xi_j \quad (i = 1, \ldots, N)$$

* При любом $\rho = r(A)$ *граничный спектр* определяется как множество собственных значений, лежащих на окружности $|\lambda| = \rho$.

(ξ — столбец с компонентами $\xi_1, \ldots, \xi_N$). Связь между $\tilde{T}$ и T можно описать коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi, \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array} \tag{11}$$

где π — естественная сюръекция: $\pi\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j u_j$. Поэтому подпространство $M = \operatorname{Ker} \pi$ («модуль линейных зависимостей» для системы $u_1, \ldots, u_N$) инвариантно для $\tilde{T}$. Следовательно, определен фактор-оператор $\tilde{T}/M$, действующий в подпространстве $\tilde{X}/M$.

Лемма. *Оператор T подобен фактор-оператору $\tilde{T}/M$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Im} \pi = X$, то существует естественный изоморфизм $\tilde{\pi}$: $\tilde{X}/M \to X$. Из коммутативной диаграммы (11) вытекает $\tilde{\pi}\tilde{T} = T\tilde{\pi}$, т. е. $T = \tilde{\pi}\tilde{T}\tilde{\pi}^{-1}$.

Следствие 1. $\operatorname{spec} T \subset \operatorname{spec} \tilde{T}$.

Следствие 2*. *$r(T) \leqslant r(\tilde{T})$ и, если $r(T) = r(\tilde{T})$, то граничный спектр оператора T содержится в граничном спектре оператора $\tilde{T}$.*

Отметим, кроме того, что если $\lambda \in \operatorname{spec} \tilde{T}$ и значению λ принадлежит собственный вектор $\xi \bar{\in} M$, то $\lambda \in \operatorname{spec} T$. Действительно, $\pi\xi \neq 0$ и $T(\pi\xi) = \pi(\tilde{T}\xi) = \lambda(\pi\xi)$.

Возвращаясь теперь к теореме 4, возьмем в качестве $u_1, \ldots, u_N$ какую-нибудь систему образующих конуса K, не содержащую нуля. Тогда матрица $\tilde{A} = (\alpha_{ij})_{i,\,j=1}^{N}$, такая, что

$$Au_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} u_i,$$

может быть выбрана неотрицательной. По доказанному $\operatorname{spec} A \subset \subset \operatorname{spec} \tilde{A}$. Кроме того, для значения $\lambda = r(\tilde{A}) \geqslant 1$ существует собственный вектор $\xi \geqslant 0$. При этом $\xi \bar{\in} M$, иначе бы некоторый вектор u_j был бы комбинацией некоторых других с отрицательными коэффициентами, т. е. $(-u_j) \in K$, что невозможно, так как $u_j \neq 0$. Следовательно, $\lambda \in \operatorname{spec} A$, откуда $\lambda = 1$, т. е. $r(\tilde{A}) = 1$. Теперь ясно, что поскольку доказываемое утверждение справедливо для $\tilde{A}$ (теорема Фробениуса), то оно справедливо и для A.

Докажем теорему 3. Обозначим линейную оболочку траектории $\{A^m x\}$ через L. Подпространство L инвариантно для A и A неотрицателен относительно многогранного конуса $Q = K \cap L$. Конус

* Для основного поля $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$.

Q телесен, а функционал $s | L$ положителен относительно Q. Поэтому можно далее считать, что $L = \boldsymbol{R}^n$ (но $Q \neq \boldsymbol{R}^n_+$, вообще говоря).

По теореме 4 существует такое натуральное p, что граничный спектр A^p состоит из одной точки $\lambda = 1$. Если подпоследовательность $\{\hat{A}^{pk}x\}_{k=0}^{\infty}$ окажется сходящейся к некоторой точке u, то вся траектория $\{\hat{A}^m x\}_{m=0}^{\infty}$ будет стремиться к циклу $\{u, \hat{A}u, \ldots, \hat{A}^{p-1}u\}$, причем $\hat{A}^p u = u$. Поэтому можно заменить A на A^p, т. е. с самого начала считать $p = 1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2.

Так как A — орбита вектора x порождает все пространство, то собственному значению $\lambda = 1$ соответствует ровно одна жорданова клетка. Обозначим ее порядок через d. Пусть P — спектральный проектор на соответствующее этой клетке корневое подпространство, $v = (A - E)^{d-1} Px$. Тогда $v \neq 0$ и $Av = v$. Имеет место асимптотика

$$A^m x = m^{d-1} v + h_m, \tag{12}$$

где h_m экспоненциально стремится к нулю (ибо остальные собственные значения лежат в круге $|\lambda| < 1$). Отсюда

$$v = \lim_{m \to \infty} m^{1-d} A^m x \geqslant 0.$$

Следовательно, $s(v) > 0$ и

$$s(A^m x) = m^{d-1} s(v) + s(h_m). \tag{13}$$

Из (12) и (13) вытекает

$$\lim_{m \to \infty} \hat{A}^m x = \frac{v}{s(v)},$$

и теорема 3 доказана.

Список литературы: 1. *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл.— М.: Мир, 1982.— 270 с. 2. *Красносельский М. А.* Об одном спектральном свойстве линейных вполне непрерывных операторов в пространстве непрерывных функций.— Пробл. мат. анализа сложных систем, 1968, вып. 2, с. 68—71.

Поступила в редколлегию 07.01.85.

УДК 512.547.214

Э. М. ЖМУДЬ

О ГРУППОВЫХ ХАРАКТЕРАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ

Как известно [7], множество нулей нелинейного неприводимого характера χ группы G непусто*. Пусть n_χ число нулей характера χ. Получены следующие результаты: (I) $|G| \leqslant n_\chi (n_\chi - 1)$ и,

* В работе рассматриваются только конечные группы и их комплексные характеры.

следовательно, класс $\mathcal{K}_n$ групп, обладающих неприводимым характером с заданным числом $n > 0$ нулей конечен (II) $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_4 = \varnothing$, $\mathcal{K}_n \neq \varnothing$, если $n \notin \{1, 2, 4\}$, $\mathcal{K}_p = D_p$ при $p \in \{3, 5, 7\}$, $\mathcal{K}_6 = \{D_4, Q_8, D_6, \langle 2, 2, 3\rangle, \mathrm{SL}(2, 3)\}$, $\mathcal{K}_8 = \{A_4, S_4\}$. Здесь D_m — группа диэдра порядка $2m$, Q_8 — группа кватернионов, $\langle 2, 2, 3\rangle$ — дициклическая группа 12-го порядка (см. [6] стр. 19).

Кроме перечисленных в работе используются обозначения: G — неабелева группа, $|G|$ — ее порядок; $0(g)$ — порядок элемента $g \in G$; $Z(G)$ — центр группы G; $\mathrm{Inv}(G)$ — множество инволюций группы G; $H \leqslant G$ — «H — подгруппа группы G»; G-классы — классы сопряженных элементов группы G; g^G — G-класс элемента $g \in G$; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$; $G(n)$ — циклическая группа n-го порядка; $\mathrm{Char}(G)$ — множество всех характеров, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров группы G; $\mathrm{Lin}(G)$ — группа линейных характеров группы G; $\mathrm{Ker}\,\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$ — ядро характера χ; $Z(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$; χ_H — ограничение χ на $H \leqslant G$; $T_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = 0\}$ — множество нулей, $U_\chi = \{g \in G \mid |\chi(g)| = 1\}$ — множество унитарных элементов характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$; $n_\varkappa = |T_\varkappa|$; $k_\varkappa$ — число G - классов нулей характера χ; $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$; $\mathrm{Irr}_1(G) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid N_\chi = G\}$ — множество всех неприводимых характеров 1-го рода, $\mathrm{Irr}_2(G) = \mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{Irr}_1(G)$ — множество всех неприводимых характеров 2-го рода группы G; $\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\boldsymbol{Z}$ — кольцо целых чисел; $\mathcal{J}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел; $\boldsymbol{C}$ — поле комплексных чисел; $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle = |G|^{-1} \sum\limits_{g \in G} \theta_1(g) \overline{\theta_2(g)}$ — скалярное произведение функций θ_i: $G \to \boldsymbol{C}$ $(i = 1, 2)$; (a, b) — наибольший общий делитель чисел $a, b \in \boldsymbol{N}$; $a \mid b$ — «a делит b»; $\subset$ — символ строгого включения.

1. О нулях групповых характеров. В этом параграфе предполагается, что $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\chi(1) > 1$. В основе изложения лежит следующее утверждение.

(1.1) Предложение [1]. Если $H \leqslant G$, то

$$\langle \chi_H, \chi_H \rangle \leqslant 1 + \frac{|T_\chi \setminus H|}{|H|}. \tag{1}$$

Знак равенства в (1) достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

(1.2) Следствие [7]. $T_\chi \neq \varnothing$.

Доказательство. Если $T_\chi = \varnothing$, то (1) при $H = \{1\}$ дает $\chi(1) = 1$ — противоречие.

(1.3) Следствие [1]. Если $H \leqslant G$ и $|H| > |T_\chi \setminus H|$, то $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$. В частности, $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$, если $|H| > n_\chi$.

(1.4) Предложение [8]. Имеет место неравенство

$$\frac{n_\chi}{|Z(\chi)|} \geqslant (\chi(1))^2 - 1. \tag{2}$$

Знак равенства в (2) достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus Z(\chi) \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство. Все утверждения вытекают из (1.1) при $H = Z(\chi)$.

(1.5) Следствие. $n_\chi \geqslant 3$.

(1.6) **Предложение.** $|Z(\chi)|$ *(а потому и* $|\mathrm{Ker}\,\chi|$), *строго делит* n_χ.

Доказательство. Если $g \in G$, $z \in Z(\chi)$, то $|\chi(zg)| = |\chi(g)|$, откуда вытекает, что T_χ разбивается на смежные классы $Z(\chi)g$. Поэтому $|Z(\chi)| \mid n_\chi$. Равенство $|Z(\chi)| = n_\chi$ невозможно, ввиду (2) и $\chi(1) > 1$.

(1.7) **Предложение** [9] (I) $\chi_{N_\chi} \in \mathrm{Irr}(N_\chi)$; (II) $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$.

Доказательство. Так как $|N_\chi| > n_\chi$, то ввиду (1.3) $\chi_{N_\chi} \in \mathrm{Irr}(N_\chi)$. Поэтому $\langle \chi_{N_\chi}, \chi_{N_\chi} \rangle = 1 = 1 + |T_\chi \setminus N_\chi| \, |N_\chi|^{-1}$ и, следовательно, в силу (1.1) $G \setminus N_\chi \subseteq T_\chi \cup U_\chi$. Так как $(G \setminus N_\chi) \cap T_\chi = \varnothing$, то $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$.

1.8 Следствие. $\mathrm{Ker}(\chi_{N_\chi}) = \mathrm{Ker}\,\chi$, $Z(\chi_{N_\chi}) = Z(\chi)$. *Если* $\mathrm{Ker}\,\chi = \{1\}$, *то* $Z(N_\chi) = Z(G)$.

Доказательство. В силу (1.7) $\mathrm{Ker}\,\chi \subset N_\chi$, $Z(\chi) \subset N_\chi$, откуда вытекают первые два утверждения. Если $\mathrm{Ker}\,\chi = \{1\}$, то $Z(\chi) = Z(G)$ и $Z(\chi_{N_\chi}) = Z(N_\chi)$. Поэтому $Z(N_\chi) = Z(G)$.

(1.9) **Предложение.** *Если* $g \in T_\chi$, *то* $C_G(g) \subset N_\chi$.

Доказательство. Включение $C_G(g) \subseteq N_\chi$ доказано в [3]. Из $C_G(g) = N_\chi$ вытекает, ввиду (1.8), что $g \in Z(N_\chi) \subseteq Z(\chi_{N_\chi}) = Z(\chi)$. Это невозможно, так как $Z(\chi) \cap T_\chi = \varnothing$. Поэтому $C_G(g) \subset N_\chi$.

(1.10) **Предложение.** $|G : N_\chi|$ *строго делит порядки* h_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$ *G — классов нулей характера* χ.

Доказательство. Пусть C_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$ — G-классы нулей характера χ, $h_i = |C_i|$. Если $g_i \in C_i$, то в силу (1.9) $C_G(g_i) \subset N_\chi$. Поэтому $h_i = |G : C_G(g_i)| = |G : N_\chi| \, m_i$, где $m_i = |N_\chi : C_G(g_i)| > 1$.

(1.11) Следствие. $|G : N_\chi|$ строго делит n_χ. Точнее, $n_\chi = |G : N_\chi| \, m_\chi$, где $m_\chi \in \mathbf{N}$, $m_\chi \geqslant 2k_\chi$.

Доказательство. $n_\chi = \sum h_i = |G : N_\chi| \, m_\chi$, где $m_\chi = \sum m_i \geqslant 2k_\chi$.

(1.12) Следствие. $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, *если выполнено одно из условий:* (I) T_χ *содержит G-инвариантное подмножество простого порядка (в частности, если n_χ — простое число)*; (II) $(h_1, \ldots, h_{k_\chi}) = 1$.

(1.13) **Лемма.** *Пусть p — простое число,* $k \in \mathbf{N}$, *ε — первообразный корень p^k-й степени из единицы,* $\lambda = 1 - \varepsilon$. *Если* $a \in \mathbf{Z}$ *и* $\lambda \mid a$ *в кольце I,* то $p \mid a$ *в кольце* $\mathbf{Z}$.

Доказательство. Нетрудно показать, что $p = \lambda^r \alpha$, где $r = \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ и α — обратимый элемент кольца I. Если $p \nmid a$ в $\mathbf{Z}$, то найдутся такие u, $v \in \mathbf{Z}$, что $pu + av = 1$. Поэтому $\lambda \mid 1$ в I. Следовательно, $\frac{1}{p} \in I$, откуда $\frac{1}{p} \in \mathbf{Z}$ — противоречие. Поэтому $p \mid a$ в $\mathbf{Z}$.

(1.14) **Предложение.** *Пусть* $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$ *и* p — *простой делитель числа* $|G:N_\chi|$. *Тогда* $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod p$.

Доказательство. Если $P \in \mathrm{Syl}_p(g)$, то, очевидно, $P \cap \cap (G \setminus N_\chi) \neq \varnothing$. Если $g \in P \cap (G \setminus N_\chi)$, то в силу (1.7) $|\chi(g)| = 1$. Пусть $0(g) = p^k$ $(k \in \boldsymbol{N})$, ε — первообразный корень степени p^k из 1, $\lambda = 1 - \varepsilon$. Если Γ — неприводимое представление группы G, порождающее χ, то $\chi(g) = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{\chi(1)}$, где ε_i $(i = 1, \ldots, \chi(1))$ — корни p^k-й степени из 1. Так как $\varepsilon_i \equiv 1 \pmod \lambda$ $(i = 1, \ldots, \chi(1))$, то $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod \lambda$. Заменяя g на g^{-1}, получим $\overline{\chi(g)} \equiv \chi(1) \pmod \lambda$. Поэтому $(\chi(1))^2 \equiv \chi(g)\overline{\chi(g)} = 1 \pmod \lambda$, т. е. $\lambda \mid (\chi(1))^2 - 1$ в кольце I. В силу (1.13) $p \mid (\chi(1))^2 - 1$ в $\boldsymbol{Z}$ и, следовательно, $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod p$.

(1.15) Следствие. $(\chi(1), |G:N_\chi|) = 1$. *В частности, по крайней мере, одно из чисел* $\chi(1)$, $|G:N_\chi|$ *нечетно.*

(1.16) **Предложение.** *Если* $\dfrac{n_\chi}{|Z(\chi)|}$ *нечетно, то* $\chi(1)$ *четно.*

Доказательство. Множество T_χ является объединением смежных классов $Z(\chi)g_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, причем наряду с $Z(\chi)g_i$ в T_χ входит смежный класс $Z(\chi)g_i^{-1}$. Так как $k = \dfrac{n_\chi}{|Z(\chi)|}$ нечетно, то для некоторого номера i будет $Z(\chi)g_i = Z(\chi)g_i^{-1}$, откуда $g_i^2 \in Z(\chi)$. Если Γ — неприводимое представление группы G, порождающее χ и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\chi(1)}\}$ — спектр матрицы $\Gamma(g_i)$, то $\{\varepsilon_1^2, \ldots \ldots, \varepsilon_{\chi(1)}^2\}$ — спектр $\Gamma(g_i^2)$. Последняя скалярна, так как $g_i^2 \in Z(\chi)$. Поэтому $\varepsilon_1^2 = \cdots = \varepsilon_{\chi(1)}^2$, откуда $\varepsilon_i = \delta_i\varepsilon_1$, где $\delta_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots \ldots, \chi(1))$. Так как $\chi(g_i) = 0$, то $\delta_1 + \cdots + \delta_{\chi(1)} = 0$, откуда следует, что $\chi(1)$ четно.

(1.17) Следствие. *Если* $\dfrac{n_\chi}{|Z(\chi)|}$ *нечетно, то и* $|G:N_\chi|$ *нечетно.*

Примечание. Из доказательства (1.16) видно, что если n_χ нечетно, то $T_\chi \cap \mathrm{Inv}(G) \neq \varnothing$. Действительно, так как $g \in T_\chi$ влечет $g^{-1} \in T_\chi$, то $g = g^{-1}$ для некоторого $g \in T_\chi$, откуда $g \in T_\chi \cap \cap \mathrm{Inv}(G)$.

Пусть $H < G$ и $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$. Тогда в силу (1.3) $|H| \leqslant n_\chi$. Назовем подгруппу H χ-максимальной, если $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$ и $|H| = n_\chi$.

1.18 **Предложение.** *Подгруппа* $H < G$ χ — *максимальна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:* (I) $H \cap \cap T_\chi = \varnothing$; (II) $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2$; (III) $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство. 1°. Допустим, что $H\chi$ χ-максимальна. Если $H \cap T_\chi \neq \varnothing$, то $|H| = n_\chi > |T_\chi \setminus H|$, откуда вытекает в силу (1.3), что $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$ — противоречие. Таким образом, $H \cap T_\chi = \varnothing$. Следовательно, $|T_\chi \setminus H| = n_\chi$. Неравенство (2) поэтому дает $\langle \chi_H, \chi_H \rangle \leqslant 2$. С другой стороны, так как $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$, то $\langle \chi_H, \chi_H \rangle \geqslant 2$.

Поэтому $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2$. Отсюда следует, что $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}$ $(=2)$. Ввиду (1.1), отсюда вытекает, что $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

2°. Допустим, что выполнены условия (I) — (III). Из (II) вытекает, что $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$. Из (III) и (II) в силу (1.1) следует, что $2 = \langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}$. Так как, ввиду (I) $|T_\chi \setminus H| = n_\chi$, то $|H| = n_\chi$. Таким образом, подгруппа H χ — максимальна.

(1.19) **Предложение.** *Если $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$ и H — χ — максимальная подгруппа группы G, то подгруппа H максимальна.*

Доказательство. Пусть $H \subset K \leqslant G$. Так как $|K| > |H| = n_\chi$, то на основании (1.3) $\chi_K \in \mathrm{Irr}(K)$ и, следовательно, $\langle \chi_K, \chi_K \rangle = 1$. Далее, так как в силу (1.1) $G \setminus K \subset G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$, то применяя (1.1) к подгруппе K, получаем $\langle \chi_K, \chi_K \rangle = 1 + |T_\chi \setminus K| \cdot |K|^{-1}$. Ввиду $\langle \chi_K, \chi_K \rangle = 1$ имеем $T_\chi \setminus K = \varnothing$. Следовательно, $T_\chi \subset K$, откуда вытекает ввиду $\langle T_\chi \rangle = G$, что $K = G$. Таким образом, H — максимальная подгруппа группы G.

(1.20) **Предложение.** *Если $g \in G \setminus Z(\chi)$, то $|C_G(g)| \leqslant n_\chi - \tau_\chi(g)$, где $\tau_\chi(g) = |C_G(g) \cap T_\chi|$.*

Доказательство. Положим $H = C_G(g)$. Так как $g \in Z(H)$, то $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$: в противном случае $|\chi(g)| = \chi(1)$, т. е. $g \in Z(\chi)$. В силу (1.3) имеем $|H| \leqslant |T_\chi \setminus H| = n_\chi - \tau_\chi(g)$.

(1.21) Следствие. *Если $g \in T_\chi$, то $|C_G(g)| \leqslant n_\chi - 1$.*

(1.22) **Предложение.** *Имеет место неравенство*

$$|G| \leqslant (n_\chi - 1) \min h_i, \tag{3}$$

где h_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$ — порядки G-классов нулей характера χ.

Доказательство. Пусть C_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$ — G-классы, входящие в T_χ, $|C_i| = h_i$. Если $g_i \in C_i$ $(i = 1, \ldots, k_\chi)$, то $|G| = |C_G(g_i)| h_i$, откуда при помощи (1.21) получаем (3).

Примечание. Так как $T_\chi \cap Z(G) = \varnothing$, то $\min h_i \geqslant 2$. Ввиду $n_\chi = \sum h_i$, отсюда следует, что $k_\chi \leqslant \frac{n_\chi}{2}$.

(1.23) **Предложение.** *Справедливо неравенство*

$$|G| \leqslant \frac{n_\chi (n_\chi - 1)}{k_\chi}. \tag{4}$$

Доказательство. Неравенство (4) вытекает из (3), если учесть, что $n_\chi = \sum h_i \geqslant k_\chi \min h_i$.

(1.24) Следствие. $n_\chi > \sqrt{|G|}$.

Обозначим через $\mathcal{K}_n$ класс групп, обладающих хотя бы одним неприводимым характером имеющим n нулей.

1.25 Следствие. *Если $n > 0$, то $|\mathcal{K}_n| < \infty$.*

Примечание. Пусть α — целое алгебраическое число из некоторого кругового поля. Если $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, положим $T_\chi^\alpha = \{g \in G \mid \chi(g) = \alpha\}$, $n_\chi^{(\alpha)} = |T_\chi^{(\alpha)}|$. Обозначим через $\mathcal{K}_n^{(\alpha)}$ класс конечных групп, обладающих хотя бы одним неприводимым характером χ, для которого $n_\chi^{(\alpha)} = n$. (В частности, $\mathcal{K}_n^{(0)} = \mathcal{K}_n$). Нетрудно доказать, что если $\alpha \neq 0$ и $\mathcal{K}_n^{(\alpha)} \neq \varnothing$, то $|\mathcal{K}_n^{(\alpha)}| = \infty$.

Утверждение (1.25) вытекает также из следующего предложения, которое будет использовано в дальнейшем.

(1.26) **Предложение.** *Пусть* h_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$ — *порядки* G-*классов, входящих в* T_χ. *Тогда*

$$G/Z(N_\chi) \cong \mathcal{G} \leqslant S_{h_1} \times \cdots \times S_{h_{k_\chi}}. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим действие γ группы G сопряжениями на T_χ. Ядро $\operatorname{Ker}\gamma$ действия γ совпадает с $C_G(T_\chi)$. Так как, ввиду (1.9) $C_G(T_\chi) = C_{N_\chi}(T_\chi) = Z(N_\chi)$, то $\operatorname{Ker}\gamma = Z(N_\chi)$. Так как орбитами действия γ являются G-классы C_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$, входящие в T_χ, то полагая $|C_i| = h_i$ $(i = 1, \ldots, k_\chi)$, получим (5).

(1.27) Следствие. $|G| \mid n_\chi \cdot h_1! \ldots h_{k_\chi}!$. *Если* $Z(\chi) = \{1\}$, *то* $|G| \mid h_1! \ldots h_{k_\chi}!$.

Доказательство. Так как в силу (1.7) (I) $Z(N_\chi) \subseteq Z(\chi)$, то на основании (1.6) $|Z(N_\chi)| \mid n_\chi$. Из (5) поэтому вытекает, что $|G| \mid n_\chi \cdot h_1! \ldots h_{k_\chi}!$. Если $Z(\chi) = \{1\}$, то $Z(N_\chi) = \{1\}$ и в силу (5) $|G| \mid h_1! \ldots h_{k_\chi}!$.

(1.28) **Предложение.** *Если* $\chi(1) = 2$, *то* (I) $T_\chi = \{g \in G \setminus Z(\chi) \mid g^2 \in Z(\chi)\}$; (II) $\frac{n_\chi}{|Z(\chi)|}$ *нечетно.*

Доказательство. Очевидно, $T_\chi \subseteq G \setminus Z(\chi)$. Пусть Γ — неприводимое представление (степени 2) группы G, порождающее характер χ, $g \in G$ и $\{\alpha, \beta\}$ — спектр $\Gamma(g)$. Тогда $\{\alpha^2, \beta^2\}$ — спектр $\Gamma(g^2)$. Следовательно, $\chi(g) = \alpha + \beta$, $\chi(g^2) = \alpha^2 + \beta^2$. Если $g \in T_\chi$, то $\chi(g) = 0$, и, следовательно, $\alpha = -\beta$. Поэтому $\chi(g^2) = 2\alpha^2$, откуда вытекает, ввиду $|\alpha| = 1$, что $g^2 \in Z(\chi)$. Наоборот, если $g \in G \setminus Z(\chi)$, $g^2 \in Z(\chi)$, то матрица $\Gamma(g)$ не является скалярной, а матрица $\Gamma(g^2)$ — скалярна. Поэтому $\alpha \neq \beta$ и $\alpha^2 = \beta^2$, откуда $\alpha = -\beta$ и, следовательно, $\chi(g) = 0$. Таким образом, $g \in G \setminus Z(\chi)$, $g^2 \in Z(\chi)$ влечет $g \in T_\chi$. Тем самым, доказано (I). Пусть $x \mapsto \tilde{x}$ — естественный гомоморфизм группы G на $\tilde{G} = G/Z(\chi)$. Из (I) вытекает, что $\tilde{T}_\chi = \operatorname{Inv}(\tilde{G})$. Так как $|\tilde{T}_\chi| = \frac{n_\chi}{|Z(\chi)|}$ и $|\operatorname{Inv}(\tilde{G})|$ нечетно, то (II) доказано.

(1.29) Следствие. Если $\chi(1) = 2$ и $Z(\chi) = \{1\}$, то $T_\chi = \operatorname{Inv}(G)$ и, следовательно, n_χ нечетно.

(1.30) **Предложение.** *Если* $p \in \pi(G)$ *и* $n_\chi = p$, *то* $p \neq 2$ *и* $G \cong D_p$.

Доказательство. В силу (1.5) $p \geqslant 3$. Из (1.6) и (1.12) вытекает, ввиду простоты p, что $Z(\chi) = \{1\}$ и $\chi \in \operatorname{Irr}_1(G)$. Пусть $|G| = pm$, $m \in \mathbb{N}$. Так как G неабелева, то $m > 1$. Далее, из (1.23) вытекает, что $m \leqslant p - 1$ и, в частности, $(m, p) = 1$. Если $H \in \operatorname{Syl}_p(G)$, то $|H| = p$, т. е. $H \cong C(p)$. Следовательно, $\chi_H \notin \operatorname{Irr}(H)$.

Все это показывает, что подгруппа $H\chi$ — максимальна. Так как $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, то в силу (1.19) H — максимальная подгруппа группы G. В предположении, что $H \ntriangleleft G$ будем поэтому иметь $N_G(H) = H$. Следовательно, $m = |G : H| = |G : N_G(H)| = |\mathrm{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod p$, что противоречит неравенствам $1 < m < p$. Таким образом, $H \triangleleft G$. Так как H абелева и в силу (1.18) $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2$, то $\chi_H = \varphi + \varphi'$, где $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Lin}(H)$, $\varphi \neq \varphi'$. В частности, $\chi(1) = 2$. Если $I_G(\varphi)$ — группа инерции характера φ, то $|G : I_G(\varphi)| = 2$. Так как $I_G(\varphi) \supseteq H$ и H — максимальная подгруппа группы G, то $I_G(\varphi) = H$ и, следовательно, $m = |G : H| = 2$, $|G| = 2p$. Так как χ индуцируется из H ($\chi = \varphi^G$) и $H \triangleleft G$, то $G \setminus H \subseteq T_\chi$. Так как в силу (1.18) $H \cap T_\chi = \varnothing$, отсюда следует, что $T_\chi = G \setminus H$. Кроме того, ввиду $\chi(1) = 2$, $Z(\chi) = \{1\}$, из (1.29) вытекает, что $T_\chi = \mathrm{Inv}(G)$. Пусть $x \in H^\#$. Так как H абелева, максимальна и $Z(G) = \{1\}$, то $C_G(x) = H$. Следовательно, G — группа Фробениуса с ядром H. Положим $H = \langle a \rangle$, $b \in G \setminus H$. Так как b порождает в H регулярный автоморфизм и $b \in \mathrm{Inv}(G)$, то $b^{-1}ab = a^{-1}$. Таким образом, $G = \langle a, b \rangle$, $a^p = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|G| = 2p$. Следовательно, $G \cong D_p$.

(1.31) **Предложение.** [4, 5] *Если $G \neq G'$, $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, $\mathrm{Ker}\,\chi = \{1\}$ и T_χ является G-классом, то $G \cong D_m$ (m нечетно).*

2. **Описание классов $\mathscr{K}_n$ ($n \leqslant 8$).** Пусть $N \triangleleft G$ и $\theta \in \mathrm{Char}(G/N)$. Обозначив через $\tilde{g}$ образ элемента $g \in G$ при естественном гомоморфизме $G \to G/N$, определим функцию $\chi : G \to \boldsymbol{C}$, полагая $\chi(g) = \theta(\tilde{g})$. Как известно, $\chi \in \mathrm{Char}(G)$. Характер χ называется инфляцией характера θ и обозначается символом $\inf \theta$. Очевидно, $\mathrm{Ker}\,\chi \supseteq N$. Отображение $\theta \mapsto \inf\theta$ является биекцией множества $\mathrm{Char}(G/N)$ на множество $\mathrm{Char}_N(G) = \{\chi \in \mathrm{Char}(G) / \mathrm{Ker}\,\chi \supseteq N\}$. Легко видеть также, что $\inf\theta \in \mathrm{Irr}(G)$ тогда и только тогда, когда $\theta \in \mathrm{Irr}(G/N)$.

(2.1) **Предложение.** *Пусть $N \triangleleft G$, $\theta \in \mathrm{Irr}(G/N)$, $\chi = \inf\theta$. Тогда $n_\chi = |N| n_\theta$.*

Доказательство. Если $g \in G$, то $g \in T_\chi$ тогда и только тогда, когда $\tilde{g} \in T_\theta$. Поэтому T_χ является объединением смежных классов Ng_i ($i = 1, \ldots, l$), число l которых равно n_θ. Остается заметить, что $l = \dfrac{n_\chi}{|N|}$.

(2.2) Следствие. *Если $G \in \mathscr{K}_n$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $|\mathrm{Ker}\,\chi| = d$, $n_\chi = n$, то $G/\mathrm{Ker}\,\chi \in \mathscr{K}_{\frac{n}{d}}$.*

2.3 **Предложение.** *Пусть $N \triangleleft G$, $|N| = d$, $G \setminus N \in \mathscr{K}_m$. Тогда $\in \mathscr{K}_{md}$.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \mathrm{Irr}(G/N)$, $n_\theta = m$. Полагая $\chi = \inf\theta$, будем иметь $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Так как в силу (2.1) $n_\chi = md$, то $G \in \mathscr{K}_{md}$.

(2.4) Следствие. *Пусть $m, n \in \boldsymbol{N}$, $m \mid n$, $\mathscr{K}_m \neq \varnothing$. Тогда $\mathscr{K}_n \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $G_0 \in \mathcal{K}_m$, H — любая группа порядка $d=\frac{n}{m}$; G — какое-нибудь расширение группы H при помощи G_0. Тогда $G_0 \cong G/N$, где $N \lhd G$, $N \cong H$. Так как $G/N \in \mathcal{K}_m$ и $|N|=d$, то в силу (2.3) $G \in \mathcal{K}_n$. Таким образом, $\mathcal{K}_n \neq \varnothing$.

2.5 **Предложение.** $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}_2=\mathcal{K}_4=\varnothing$.

Доказательство. $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}_2=\varnothing$ в силу (1.5). Допустим, что $\mathcal{K}_4 \neq \varnothing$, $G \in \mathcal{K}_4$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $n_\chi=4$. Так как $\chi(1)>1$ и в силу (1.4) $\frac{4}{|Z(\chi)|} \geqslant (\chi(1))^2-1$, то $\chi(1)=2$ и $|Z(x)|=1$. Отсюда вытекает в силу (1.29), что $4=n_\chi$ нечетно. Следовательно, $\mathcal{K}_4=\varnothing$.

2.5 **Предложение.** *Если* $n \in N$, $n \notin \{1, 2, 4\}$, *то* $\mathcal{K}_n \neq \varnothing$.

Доказательство. 1°. Если $m \geqslant 3$ нечетно, то $\mathcal{K}_m \neq \varnothing$, так как $D_m \in \mathcal{K}_m$. 2°. Пусть $n=2^\alpha m$, где m нечетно. Если $m>1$, то $\mathcal{K}_m \neq \varnothing$ на основании п. 1°. Отсюда вытекает в силу (2.4), что $\mathcal{K}_n \neq \varnothing$. Если $m=1$, то $n=2^\alpha$, $\alpha \geqslant 3$. Так как $\mathcal{K}_8 \neq \varnothing$ (например, $S_4 \in \mathcal{K}_8$), то $\mathcal{K}_n \neq \varnothing$ в силу (2.4).

(2.7) **Предложение.** *Если* $p \in \{3, 5, 7\}$, *то* $\mathcal{K}_p=\{D_p\}$.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, $D_p \in \mathcal{K}_p$. Допустим, что $G \in \mathcal{K}_p$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $n_\chi=p$. Из (1.4) и (1.6) вытекает, что $\chi(1)=2$, $|Z(\chi)|=1$. Отсюда следует, что $|G|$ четно и, ввиду (1.29), $T_\chi=\mathrm{Inv}(G)$. Кроме того, в силу (1.12) $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$.

Случай 1: $p=3$. Из (1.23) вытекает, что $|G| \leqslant 3(3-1)=6$, откуда, ввиду неабелевости G, следует, что $G \cong D_3$. Таким образом, $\mathcal{K}_3=\{D_3\}$.

Случай 2: $p=5$. Так как $Z(G) \cap T_\chi=\varnothing$, то T_χ является либо объединением двух G — классов C_1 и C_2 порядков $h_1=2$ и $h_2=3$, либо T_χ — G-класс. В первом случае, ввиду (1.23), $|G| \leqslant (5-1)\times \times \min\{2, 3\}=8$. Так как группа G неабелева и $D_3 \notin \mathcal{K}_5$, то $|G|=8$ и, следовательно, $G \cong Q_8$ или $G \cong D_4$. Так как Q_8, $D_4 \notin \mathcal{K}_5$, то рассматриваемый случай невозможен. В случае, если T_χ — G-класс, $5 \in \pi(G)$ и в силу (1.30) $G \cong D_5$. Таким образом, $\mathcal{K}_5=\{D_5\}$.

Случай 3: $p=7$. Так как (см. примечание после (1.22)) $k_\chi \leqslant \leqslant \frac{n_\chi}{2}=\frac{7}{2}$, то $k_\chi \in \{1, 2, 3\}$. Если $k_\chi=1$, т. е. T_χ — G-класс, то $7 \in \pi(G)$ и, следовательно, в силу (1.30) $G \cong D_7$. Допустим теперь, что $k_\chi>1$. Если h_i $(i=1, \ldots, k_\chi)$ — порядки классов нулей характера χ, то возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I})\ k_\chi=3, \quad h_1=h_2=2, \quad h_3=3\\
&(\mathrm{II})\ k_\chi=2, \quad h_1=2, \quad h_2=5 \qquad\qquad (6)\\
&(\mathrm{III})\ k_\chi=2, \quad h_1=3, \quad h_2=4.
\end{aligned}$$

Из (6) и (1.27) вытекает, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$. Далее, из (6) и (1.22) следует, что

$$|G| \leqslant \begin{cases} 12 \text{ в случаях (I) и (II)} \\ 18 \text{ в случае (III)} \end{cases}$$

Поэтому группа G разрешима. Так как $|G|$ четно и $D_3, D_4, Q_8 \notin K_7$, то $|G| \geqslant 10$. Пусть F — минимальный нормальный делитель группы G. Так как G разрешима, то F абелев. Пусть $\chi_F = e(\varphi_1 + \cdots \cdots + \varphi_l)$, где $e \in N$, φ_i $(i = 1, \ldots, l)$ — различные G-сопряженные линейные характеры подгруппы F; $l = |G:N|$, где $N = I_G(\varphi_1)$ — группа инерции характера φ_1. Так как $Z(x) = \{1\}$, то $l > 1$ и из $\chi(1) = 2$ следует, что $e = 1$, $l = 2$. Таким образом, $|G:N| = 2$ и, следовательно, $N \lhd G$. Как известно, χ индуцируется из N ($\chi = \psi^G$, где $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$, $\psi_F = \varphi_1$). Отсюда вытекает, ввиду $N \lhd G$, что $G \setminus N \subseteq T_\chi$. Поэтому $|N| = |G \setminus N| \leqslant n_\chi = 7$. С другой стороны, так как $|G| \geqslant 10$, то $|N| = \frac{1}{2}|G| \geqslant 5$. Так как $7 \notin \pi(G)$, то $|N| \in \in \{5, 6\}$. Если $|N| = 5$, то $N \cap T_\chi = N \cap \mathrm{Inv}(G) = \varnothing$. Поэтому $G \setminus N = = T_\chi$, откуда $5 = |N| = |G \setminus N| = n_\chi = 7$ — противоречие. Если $|N| = 6$, то $|N \cap T_\chi| = 1$, ибо $G \setminus N \subseteq T_\chi$, $|T_\chi| = 7$ и $|G \setminus N| = 6$. Полагая $N \cap T_\chi = \{g\}$, ввиду G-инвариантности $N \cap T_\chi$ получим $g \in Z(G)$, что невозможно, так как $g \in T_\chi$. Итак, случай, когда $k_\chi > 1$ невозможен. Тем самым доказано, что $\mathscr{K}_7 = \{D_7\}$.

2.8 **Предложение.** $\mathscr{K}_6 = \{D_4, Q_8, D_6, \langle 2, 2, 3\rangle, SL(2, 3)\}$.

Доказательство. 1°. Каждая из перечисленных выше групп входит в $\mathscr{K}_6$. Группы D_4 и Q_8 обладают точным неприводимым характером 2-й степени, исчезающим вне центра и поэтому имеющим 6 нулей. Если $G \cong D_6$ или $G \cong \langle 2, 2, 3\rangle$, то $|Z(G)| = 2$ и $G/Z(G) \cong D_3$; так как $D_3 \in \mathscr{K}_3$, то в силу (2.3) $G \in \mathscr{K}_6$. Группа $\mathrm{SL}(2, 3)$ содержит нормальный делитель $Q \cong Q_8$ и имеет три неприводимых характера 2-й степени, являющихся продолжениями точного неприводимого характера группы Q; все они отличны от нуля вне Q и, следовательно, имеют ровно 6 нулей. Таким образом, $\mathrm{SL}(2, 3) \in \mathscr{K}_6$.

2°. Пусть $G \in \mathscr{K}_6$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $n_\chi = 6$. Из (1.4) и (1.6) вытекает, что $\chi(1) = 2$, $|Z(\chi)| \leqslant 2$. Группа G разрешима, так как в силу (1.23) $|G| \leqslant 6(6-1) = 30$. Так как $\chi(1) = 2$, то $|G|$ четно. Если $|Z(\chi)| = 1$, то в силу (1.29) n_χ нечетно. Таким образом, $|Z(\chi)| = 2$. Поэтому $Z(\chi) \subseteq Z(G)$. Так как $Z(G) \subseteq Z(\chi)$, то $Z(\chi) = Z(G)$. Так как $\mathrm{Ker}\,\chi \subseteq Z(\chi)$, то $|\mathrm{Ker}\,\chi| \leqslant 2$.

Случай 1: $|\mathrm{Ker}\,\chi| = 2$. В силу (2.2) $G/\mathrm{Ker}\,\chi \in \mathscr{K}_3$, откуда в силу (2.7) $G/\mathrm{Ker}\,\chi \cong D_3$. Поэтому $|G| = 12$. Существуют ровно три неабелевы группы 12-го порядка: A_4, D_6 и $\langle 2, 2, 3\rangle$. Так как A_4 не имеет неприводимых характеров 2-й степени, то $G \cong D_6$ или $G \cong \langle 2, 2, 3\rangle$. Обе группы D_6 и $\langle 2, 2, 3\rangle$ действительно обладают неприводимым характером с ядром порядка 2 и с шестью нулями.

Случай 2: $|\mathrm{Ker}\,\chi| = 1$. Согласно примечанию после (1,22) $k_\chi \leqslant \leqslant \frac{n_\chi}{2} = 3$. Пусть h_i $(i = 1, \ldots, k_\chi)$ — порядки G-классов, входящих в T_χ. Возможны следующие случаи:

$$\begin{gathered}(\mathrm{I})\ k_\chi = 3,\ h_1 = h_2 = h_3 = 2,\quad (\mathrm{II})\ k_\chi = 2,\ h_1 = 2,\ h_2 = 4,\\ (\mathrm{III})\ k_\chi = 2,\ h_1 = h_2 = 3,\quad (\mathrm{IV})\ k_\chi = 1.\end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим сначала случаи (I) — (III). В силу (1,26) имеем

$$G/Z(G) \cong \mathcal{G} \leqslant \begin{cases} C(2) \times C(2) \times C(2) & \text{в случае (I)} \\ S_2 \times S_4 & \text{в случае (II)} \\ S_2 \times S_3 & \text{в случае (III).} \end{cases}$$

Так как $|Z(G)| = 2$, отсюда следует, что G — (2, 3)-группа. Неравенство $|G| \leqslant (n_\chi - 1) \min h_i$ в случаях (I) и (II) дает $|G| \leqslant \leqslant (6-1) 2 = 10$. Так как G неабелева и четного порядка, то $|G| \in \{6, 8, 10\}$. Случай $|G| = 6$ исключается, так как $D_3 \notin \mathcal{K}_6$. Если $|G| = 8$, то $G \cong Q_8$ или $G \cong D_4$. Обе эти группы подпадают под случай (I); каждая из них обладает точным неприводимым характером с шестью нулями.

В случае (III) $\min h_i = 3$ и, следовательно, $|G| \leqslant (6-1) 3 = = 15$. Так как G-неабелева (2, 3) — группа и $D_3 \notin \mathcal{K}_6$, то $|G| \in \{8, 12\}$. Если $|G| = 8$, то $G \cong Q_8$ или $G \cong D_4$. Так как в обоих случаях $k_\chi = 3$, то $|G| = 12$, откуда $G \cong D_6$ или $G \cong \langle 2, 2, 3 \rangle$. Каждая из этих групп действительно обладает точным неприводимым характером с шестью нулями.

Перейдем к случаю (IV), когда T_χ является G-классом. Рассмотрим две возможности:

(*i*) $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$. Так как G разрешима, $\mathrm{Ker}\,\chi = \{1\}$ и T_χ — G-класс, то в силу (1.31) $G \cong D_m$, где $m \geqslant 3$ и нечетно. Так как каждый точный неприводимый характер группы D_m имеет ровно m нулей, то $n_\chi = m$, что невозможно, так как $n_\chi = 6$ и m нечетно. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

(*ii*) $\chi \in \mathrm{Irr}_2(G)$, т. е. $|G : N_\chi| > 1$. Пусть $\chi_1 = \chi_{N_\chi}$. В силу (1, 7) $\chi_1 \in \mathrm{Irr}_1(N_\chi)$, причем $n_{\chi_1} = n_\chi = 6$. Так как $|G : N_\chi|$ в силу (1.11) строго делит $n_\chi = 6$, то $|G : N_\chi| \in \{2, 3\}$. С другой стороны, так как $\chi(1) = 2$, то в силу (1.15) $|G : N_\chi|$ нечетно. Поэтому $|G : N_\chi| = 3$. Если $g \in T_\chi$, то в силу (1.9) $C_G(g) = C_{N_\chi}(g)$. Поэтому $|g^{N_\chi}| = = \frac{1}{|G : N_\chi|} |g^G| = \frac{1}{3} n_\chi = 2$. Таким образом, $T_{\chi_1} = T_\chi$ разбивается на три N_χ-класса порядка 2. Так как $|\mathrm{Ker}\,\chi_1| = 1$, $n_{\chi_1} = 6$, то характер χ_1 удовлетворяет условию (1) из (7). Поэтому $N_\chi \cong Q_8$ или D_4. При этом $T_\chi = T_{\chi_1} = N_\chi \setminus Z(N_\chi) = N_\chi \setminus Z(G)$, ибо, ввиду $|\mathrm{Ker}\,\chi| = 1$, $Z(N_\chi) = Z(G)$. Если $N_\chi \cong D_4$, то $T_\chi = N_\chi \setminus Z(N_\chi)$ будет содержать как инволюции, так и элементы 4-го порядка, что невозможно, так как T_χ — G-класс. Таким образом, $N_\chi \cong Q_8$. Так как $|G : N_\chi| = 3$ и $|Z(G)| = |Z(N_\chi)| = 2$, то $G \cong \mathrm{SL}(2, 3)$. Таким образом, $\mathcal{K}_6 = \{D_4, Q_8, D_6, \langle 2, 2, 3 \rangle, \mathrm{SL}(2, 3)\}$.

2.9 **Предложение.** $\mathcal{K}_8 = \{A_4, S_4\}$.

Доказательство. 1°. A_4 и S_4 обладают неприводимым характером 3-й степени с 8-ю нулями. Поэтому A_4, $S_4 \in \mathcal{K}_8$.

2°. Пусть $G \in \mathcal{K}_8$, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $n_\chi = 8$. Из (2) вытекает, что $2 \leqslant \leqslant \chi(1) \leqslant 3$. Пусть $|\mathrm{Ker}\,\chi| = d$. В силу (1.6) $d \mid 8$. Так как, ввиду (2.2) $G/\mathrm{Ker}\,\chi \in \mathcal{K}_{\frac{8}{d}}$, то $d = 1$, ибо в противном случае, ввиду (2.5),

$\mathcal{K}_8 = \varnothing$. Таким образом, характер χ точный. Допустим, что $\chi(1) = 2$. Так как в силу (1.28) $\frac{8}{|Z(\chi)|}$ должно быть нечетным, то $|Z(\chi)| = 8$, что противоречит предложению (1.6). Таким образом, рассматриваемый случай невозможен и, следовательно, $\chi(1) = 3$. Так как $n_\chi = 8 = 3^2 - 1 = (\chi(1))^2 - 1$, то, ввиду (1.4), $|Z(\chi)| = 1$ и $G^\# = T_\chi \cup U_\chi$. Это означает, что G — VZ-группа [2]. Полагая $f_\chi = \chi(1)\,(=3)$, $|G| = f_\chi \cdot g_\chi$, в силу предложения 2.10 статьи [2] будем иметь $g_\chi \mid f_\chi^2 - 1$. Следовательно, $g_\chi \mid 8$. Так как G неабелева, то $g_\chi \in \{2, 4, 8\}$ и, следовательно, $|G| \in \{6, 12, 24\}$. Так как $|G| = 6$ влечет $G \cong D_3 \notin \mathcal{K}_8$, то $|G| \in \{12, 24\}$. Ввиду следствия 2.8 статьи [2], имеем $T_\chi = \{g \in G \mid o(g) = 3\}$. Поэтому, если $\mathrm{Syl}_3(G) = \{P_1, \ldots, P_r\}$, то $T_\chi = \bigcup P_i^\#$, откуда вытекает, что $\sum |P_i^\#| = n_\chi = 8$. Так как $|P_i^\#| = 2$ $(i = 1, \ldots, r)$, то $2r = 8$, и, следовательно, $r = 4$. Таким образом, $\mathrm{Syl}_3(G) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$.

Случай 1: $|G| = 12$. Поскольку $|G : N_G(P_i)| = |\mathrm{Syl}_3(G)| = 4$, то $N_G(P_i) = P_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Пусть γ — действие группы G сопряжениями на $\mathrm{Syl}_3(G)$. Действие γ точное, так как $\mathrm{Ker}\,\gamma = \bigcap N_G(P_i) = \bigcap P_i = \{1\}$. Поэтому $G \cong$ некоторой подгруппе группы S_4. Так как $|G| = 12$, то $G \cong A_4$.

Случай 2: $|G| = 24$. Поскольку $|G : N_G(P_i)| = 4$, то $|N_G(P_i)| = 6$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Если γ — действие группы G сопряжениями на $\mathrm{Syl}_3(G)$, то $\mathrm{Ker}\,\gamma = \{1\}$. Действительно, так как $\mathrm{Ker}\,\gamma = \bigcap N_G(P_i)$ и $P_i \cap P_j = \{1\}$ при $i \neq j$, то $3 \nmid |\mathrm{Ker}\,\gamma|$. Поэтому $|\mathrm{Ker}\,\gamma| \leqslant 2$. Отсюда следует, что $\mathrm{Ker}\,\gamma \subseteq Z(G) \subseteq Z(\chi) = \{1\}$. Итак, $\mathrm{Ker}\,\gamma = \{1\}$, т. е. действие γ — точное. Следовательно, $G \cong$ некоторой подгруппе группы S_4. Ввиду того, что $|G| = 24$, то $G \cong S_4$. Тем самым доказано, что $\mathcal{K}_8 = \{A_4, S_4\}$.

Список литературы: 1. *О нулях* неприводимых характеров конечных групп/ А. И. Вейцблит. Рукопись деп. в ВИНИТИ 12.12.78, № 3767 — 78 Деп. 2. *Вейцблит А. И., Жмудь Э. М.* Обобщенные группы Цассенхауза.— Мат. публ., 1982, **29**, вып. 1—2, с. 201—217. 3. *Жмудь Э. М.* О нулях групповых характеров.— Успехи мат. наук, 1977, **32**, вып. 6, с. 223—224. 4. *Жмудь Э. М.* О конечных группах, обладающих неприводимым характером, разделяющим классы сопряженных элементов.— Вопр. теории групп и гомолог. алгебры, 1979, вып. 2, с. 81—90. 5. *Жмудь Э. М.* Конечные группы, обладающие неприводимым характером с сопряженными нулями.— Мат. публ., 1983, **30**, вып. 1—2, с. 185—201. 6. *Коксетер Г. С., Мозер У. О.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп.— М.: Наука, 1980.— 260 с. 7. *Burnside W.* On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its applications to group characteristics. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 1 (1904), p. 112—116. 8. *Gallagher P. X.* Group characters and commuta — tors.— Math. Zeitschr. 79 (1962), p. 122—126. 9. *Gallagher P. X.* Zeros of characters of finite groups.— J. Algebra 4 (1966), p. 42—45.

Поступила в редколлегию 15.01.85.

УДК 519.1

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

О НЕКОТОРЫХ СУММАХ С ЧИСЛАМИ СТИРЛИНГА И БЕРНУЛЛИ

Числа Стирлинга и Бернулли находят применение в различных разделах математики: в классическом анализе, в теории чисел, теории вероятностей, комбинаторике и т. д. Получению тождеств с этими числами посвящена значительная литература (см. [1—7] и цитируемые там источники). Для их доказательства употребляются разнообразные средства от рутинной алгебраической и комбинаторной техники до весьма изощренных приемов, таких как например комплексно-аналитический подход, развиваемый в [2]. У автора настоящей статьи тождества с числами Стирлинга и Бернулли возникли в процессе занятий теорией p-адического интегрирования. Так, соотношение (II) первоначально появилось как равенство между степенными моментами мер из примеров 1, 3 работы [8]. Использованный при этом метод содержал комбинаторную основу, которую удалось освободить от p-адической оболочки. Выработанный прием используется в первой части статьи для получения более общих тождеств (мы не касаемся обратного вопроса об интерпретации полученных результатов как соотношений для подходящих p-адических мер). В принципе наш подход является разновидностью метода производящих функций. Вместе с тем он наследует идею «регуляризации» от p-адического варианта метода. Там ее назначение состояло в преобразовании неограниченной меры в ограниченную [9]. В исчислении производящих функций эта идея может быть реализована по-разному. Так, в доказательстве теоремы 2 регуляризация проявляется в действии разностного оператора $F(X) \to F(X) - F(rX)$, что в итоге позволяет избавиться от нежелательного множителя $\log(1+X)$ (имеющего в p-адической метрике неограниченные коэффициенты). Дальнейшая часть статьи посвящена получению следствий и обобщений исходных результатов.

Напомним, что числа Бернулли B_n определяются разложением $\dfrac{X}{e^X-1} = \sum\limits_{n\geqslant 0} B_n \dfrac{X^n}{n!}$. Числа Стирлинга первого рода $s(n, k)$ определяются соотношениями $(X)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k) X^k$ $(k \geqslant 0)$, где $(X)_n = X(X-1)\ldots(X-n+1)$ $(n \geqslant 1)$, $(X)_0 = 1$, и характеризуются тождествами $\dfrac{1}{k!}\log^k(1+X) = \sum\limits_{n\geqslant k} s(n, k)\dfrac{X^n}{n!}$ $(k \geqslant 0)$, где $\log(1+X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n} \in K[[X]]$. Двойственным образом за-даются числа Стирлинга второго рода $S(n, k)$. Пусть D — оператор дифференцирования в пространстве формальных степенных рядов $K[[X]]$, $\binom{X}{n} = \frac{(X)_n}{n!}$, ε-первообразный корень из единицы r в поле K нулевой характеристики.

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n} = \frac{1}{n!}\left\{\sum_{j=0}^{n} s(n, j)\frac{(-1)^{j+1}}{j+1} + \frac{1}{2}(-1)^n rn! + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{k} r^k \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k+1}\binom{j}{k-1} s(n, j)\right\} \quad (n \geqslant 0). \tag{1}$$

Доказательство. Производящая функция левых частей равенств (I) имеет вид:

$$\sum_{n\geqslant 0} X^n \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n} = \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\varepsilon^i X}{1-\varepsilon^i}\right)^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{1-\frac{\varepsilon^i X}{1-\varepsilon^i}} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varepsilon^{rk}}{(x+1)-\varepsilon^k} - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\varepsilon^k}{(x+1)-\varepsilon^k} = \tag{2}$$

$$= r\,\frac{(x+1)^{r-1}-1}{(x+1)^r-1}.$$

На последнем шаге мы воспользовались формулами разложения на простейшие дроби. Имея в виду правую часть тождества (2), рассмотрим следующее выражение

$$r\,\frac{e^{(r-1)X}-1}{e^{rX}-1} = re^{-X} + \frac{e^{-X}-1}{X}\cdot\frac{rX}{e^{rX}-1} =$$

$$= r\left(\sum_{j\geqslant 0}\frac{(-1)^j}{j!}X^j\right) + \left(\sum_{i\geqslant 0}\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\cdot\frac{X^i}{i!}\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} B_k r^k \frac{X^k}{k!}\right) =$$

$$= \sum_{j\geqslant 0}\left\{(-1)^j r + \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} B_k \frac{(-1)^{j-k+1}}{j-k+1} r^k\right\}\frac{X^j}{j!} = \sum_{j\geqslant 0} A_j \frac{X^j}{j!},$$

где

$$A_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} + \frac{1}{2}(-1)^j r + \sum_{k=2}^{j}(-1)^{j-k+1}\binom{j}{k-1}\frac{B_k}{k} r^k.$$

Положим здесь $X = \log(1+X)$. Тогда

$$r\,\frac{(X+1)^{r-1}-1}{(X+1)^r-1} = \sum_{j\geqslant 0} A_j \frac{\log^j(1+x)}{j!} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{j\geqslant 0}^{n} s(n, j) A_j\right)\frac{X^n}{n!}.$$

Приравнивая коэффициенты при X^n в последнем тождестве и в (2), получим соотношения (1).

Теорема 2. *Выполняются равенства*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k s(n, k)(1-r^k)\frac{B_k}{k}.$$

Доказательство. Заметим вначале, что

$$\sum_{n\geqslant k} s(n, k)\frac{X^n}{(n-1)!} = XD\left(\sum_{n\geqslant k} s(n, k)\frac{X^n}{n!}\right) =$$

$$= XD\left(\frac{\log^k(1+X)}{k!}\right) = \frac{X}{1+X}\frac{k}{k!}\log^{k-1}(1+X) \quad (k \geqslant 1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n\geqslant 1} X^n \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k s(n, k)(1-r^k)\frac{B_k}{k} =$$

$$= \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k(1-r^k)\frac{B_k}{k}\sum_{n\geqslant k} s(n, k)\frac{X^n}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{X}{(1+x)\log(1+x)}\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k(1-r^k)\log^k(1+x)\frac{B_k}{k!} =$$

$$= \frac{X}{(1+X)\log(1+x)}\left\{\sum_{k\geqslant 0} B_k\frac{(-\log(1+x))^k}{k!} -\right.$$

$$\left.-\sum_{k\geqslant 0} B_k\frac{(-r\log(1+X))^k}{k!}\right\} = \frac{X}{(1+X)\log(1+X)}\times$$

$$\times\left\{\frac{-\log(1+X)}{\exp(-\log(1+X))-1} - \frac{-r\log(1+X)}{\exp(-r\log(1+X)-1}\right\} =$$

$$= \frac{X}{(1+X)}\left\{\frac{r(1+X)^r}{1-(1+X)^r} + \frac{1+X}{X}\right\} = r\frac{(X+1)^{r-1}-1}{(X+1)^r-1} - r + 1 =$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} X^n \sum_{i=1}^{r-1}\frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n}.$$

На последнем шаге мы воспользовались тождеством (2). Остается приравнять коэффициенты при X^n $(n \geqslant 1)$.

Следствие 1. *Имеют место равенства*

$$\sum_{j=1}^{n} s(n, j)\frac{(-1)^{j+1}}{j+1} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k s(n, k)\frac{B_k}{k} \quad (n \geqslant 1), \tag{4}$$

$$B_m = (-1)^m m\sum_{n=1}^{m}\frac{s(m, n)}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}s(n, i). \tag{5}$$

Доказательство. Приравняем правые части соотношений (1) и (3), и будем рассматривать их как тождества по r при фиксированном n. Тогда (4) выражает совпадение свободных членов этих многочленов. Прямое доказательство равенства (4) можно провести, домножая его на $\frac{X^n}{n!}$ и суммируя по $n \geqslant 1$.

Соотношение (5) получается из (4) по формулам обращения Стирлинга.

Предложение 1.

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k-1} s(n, j) = ns(n, k). \tag{6}$$

Равенства (6) означают совпадение коэффициентов при $r^k \frac{B_k}{k}$ (с точностью до множителя $(-1)^k$) в тождестве, рассматривавшимся в доказательстве следствия I. Однако, приравнивание этих коэффициентов будет корректно только при четном k (в этом случае $(-1)^k = 1$), когда $B_k \neq 0$. Тем самым сравнение коэффициентов играет всего лишь эвристическую роль. Для доказательства (6) его нужно домножить на X^k и просуммировать по k от 1 до n. Аналогично можно доказать соотношение

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} s(n, j) = s(n+1, k+1). \tag{7}$$

Впрочем, с помощью рекуррентных формул для чисел Стирлинга можно показать, что (6) и (7) эквивалентны. Отметим также, что (6) эквивалентно равенству [6, f] из [7, p. 50].

Рассмотрим более общие суммы. Имеют место следующие утверждения, доказательства которых подобны предыдущим.

Теорема 3. *Для* $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$ *выполняются равенства*

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{it}}{(\varepsilon^i - 1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{s(n, k)}{k+1} \left(B_{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_j r^j (t-1)^{k+1-j} \right) \tag{8}$$

или эквивалентные им равенства

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{it}}{(\varepsilon^i - 1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1, k)}{k+1} (B_{k+1} - (t - 1^{k+1}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j} r^j \sum_{k=j-1}^{n-1} s(n-1, k) \binom{k}{j-1} (t-1)^{k+1-j} \Bigg]. \tag{9}$$

Теорема 4. *Для* $t \in \{1, \ldots, r-1\}$ *справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{it}}{(\varepsilon^i - 1)^n} = -\frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\frac{t^{k+1} - (t-1)^{k+1}}{k+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j} r^j \sum_{k=j}^{n} s(n, k)\binom{k}{j-1}\left(t^{k+1-j} - (t-1)^{k+1-j}\right)\right]. \qquad (10)$$

Следствие 2.

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^i}{(\varepsilon^i - 1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\left(1 - r^{k+1}\right)\frac{B_{k+1}}{k+1}. \qquad (11)$$

Это равенство получается из (8) при $t = 1$. С помощью рекуррентных соотношений для чисел Стирлинга можно показать, что формулы (3) и (11) эквивалентны.

Для получения дальнейших следствий сравним правые части (9) и (10) как многочлены фиксированной степени n от r и $(t-1)$. Приравнивая коэффициенты при $r^{\circ}(t-1)^0$, получим

Следствие 3. *Выполняются равенства*

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{s(n, k)}{k+1} = n\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)\frac{B_{k+1}}{k+1}, \qquad (12)$$

$$B_m = -m\sum_{n=1}^{m} \frac{S(m-1, n-1)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s(n, k)}{k+1}.$$

Предложение 2. *Выполняются равенства*

$$\sum_{k=i}^{n} s(n, k)\binom{k}{i-1} = ns(n-1, i-1) \quad (n \geqslant i \geqslant 1), \qquad (13)$$

$$\sum_{k=i}^{n} s(n, k)\binom{k}{i} = s(n-1, i) + s(n-1, i-1). \qquad (14)$$

Для доказательства достаточно приравнять коэффициенты при $r^0(t-1)^i$. Равенство (13) можно также доказать, домножая его на X^{i-1} и суммируя по i от 1 до n. Легко видеть, что равенство (14) эквивалентно равенству (13).

Отметим, что сравнение коэффициентов при $r^j(t-1)^i$ дает формулы, совпадающие с (13) с точностью до обозначений.

Следствие 4. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(\varepsilon^i - 1)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1,\ k)}{k+1}\ (B_{k+1} - (n-1)^{k+1}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j}\ r^j \sum_{k=j-1}^{n-1} s(n-1,\ k)\binom{k}{j-1}(n-1)^{k+1-j}\right] \qquad (15)$$

Оно вытекает из (9) при $t = n$.

Следствие 5. *Выполняется равенство*

$$(-1)^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^j s(n,\ j)\ \frac{B_j}{j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1,\ k)}{k+1}\ (B_{k+1} - (n-1)^{k+1}). \quad (16)$$

Для доказательства нужно приравнять коэффициенты при r^0 в соотношениях (3) и (15).

Следствие 6.

$$\sum_{j=0}^{n-1} s(n-1,\ \ j)\ \frac{(n-1)^{j+1}}{j+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{s(n,\ i)}{i+1}\ [(-1)^{n-i} - 1].$$

Результат вытекает из формул (4), (12), (16).

Предложение 3.

$$\sum_{k=1}^{m} s(m,k)\binom{k}{i} m^{k-i} = (-1)^{m-i} s(m+1,\ i+1) \qquad (17)$$

Для $m = n-1$, $i = j-1$ и четных j это равенство является результатом приравнивания коэффициентов при r^j в (3) и (15). Приведем прямое доказательство:

$$\sum_{i=0}^{m} X^{i+1} \sum_{k=i}^{m} s(m,k)\binom{k}{i} m^{k-i} = X \sum_{k=0}^{m} s(n,\ k) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i m^{k-i} =$$

$$= X \sum_{k=0}^{m} s(n,\ k)\,(X+m)^k = (X+m)_m X = (-1)^{m+1}(-X)_{m+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} s(m+1,\ i+1)\, X^{i+1}.$$

Следствие 7. *Выполняются равенства*

$$n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,\ k)\ \frac{B_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} s(n,\ k)\ \frac{(n-1)^{k+1} - n^{k+1}}{k+1},$$

$$B_m = m \sum_{n=1}^{m} (-1)^{m-n} S(m,\ n) \sum_{k=1}^{n} s(n,\ k)\ \frac{(n-1)^{k+1} - n^{k+1}}{n(k+1)}$$

Для доказательства первого соотношения нужно приравнять свободные члены по r в (3) и равенстве, вытекающим из (10) при $t = n$.

Предложение 4. *Имеет место формула*

$$\sum_{k=j}^{n} s(n, k)\binom{k}{j-1}\left(n^{k+1-j} - (n-1)^{k+1-j}\right) = (-1)^{n-j} ns(n, j).$$

При четных j это равенство получается сравнением коэффициентов при r^j в тождестве, фигурировавшим в предыдущем доказательстве. Для непосредственного доказательства нужно домножить обе части равенства на x^j и просуммировать по j от 1 до n. Получится верное соотношение

$$(x+n)_n - (x+n-1)_n = n(x+n-1)_{n-1}.$$

Установим полиномиальное тождество, которое будет иметь точки соприкосновения с некоторыми из предыдущих равенств.

Теорема 5.

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{s(j, k)}{k!}\binom{X}{n-j} = \sum_{j=k}^{n} \frac{s(n, j)}{n!}\binom{j}{k} X^{j-k}. \tag{18}$$

Для доказательства нужно приравнять коэффициенты при Y^k в соотношении

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{s(j, k)}{j!}\binom{X}{n-j}\right) Y^k = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j} \frac{s(j, k)}{j!} Y^k\right)\binom{X}{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{X}{n-j}\binom{Y}{j} = \binom{X+Y}{n} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} s(n, j)(X+Y)^j =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} s(n, j)\binom{j}{k} X^{j-k}\right) Y^k.$$

Отметим, что в третьем переходе мы воспользовались теоремой сложения Вандермонда [3, с. 120]. Заметим также, что при $X = 1$ тождество (18) содержит равенство (14).

Следствие 8.

$$\sum_{j=k}^{m} \frac{s(j, k)}{j!}\binom{m}{j} = \sum_{j=k}^{m} \frac{s(m, j)}{m!}\binom{j}{k} m^{j-k} \tag{19}$$

Эта формула вытекает из (18) при $X = n = m$.

Следствие 9.

$$\sum_{j=k}^{m}\binom{m}{j}\frac{s(j, k)}{j!} = \frac{(-1)^{m-k} s(m+1, k+1)}{m!} \tag{20}$$

Равенство (20) следует из соотношений (19) и (17).

Следствие 10. *Справедливо равенство*

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\frac{s(j,k)}{j!}\binom{m+n-j-1}{n-j}=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\frac{s(n,j)}{n!}\binom{j}{k}m^{j-k}.$$

Для доказательства положим $X=-m\,(m\in N)$ в (18).

Следствие 11. $$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\frac{s(j,k)}{j!}=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\frac{s(n,j)}{n!}\binom{j}{k}.$$

Данное равенство содержится при $m=1$ в предыдущем.

Следствие 12. $$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\frac{s(j,k)}{j!}=\frac{s(n+1,k+1)}{n!}.$$

Требуемое равенство вытекает из следствия 11 и формулы (7).

Применим сейчас теорему 5 к выводу соотношения, двойственного равенству (2. 4. 9. п. ж) [2, с. 85].

Предложение 5. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{j=k}^{n-i}\binom{n}{j}s(j,k)\,s(n-j,i)=\binom{k+i}{k}s(n,k+i).$$

Доказательство вытекает из тождества

$$\sum_{i=0}^{n-k}\frac{s(n,k+i)}{n!}\binom{k+i}{k}Y^{i}=\sum_{j=k}^{n}\frac{s(n,j)}{n!}\binom{j}{k}Y^{j-k}=$$

$$=\sum_{j=k}^{n}\frac{s(j,k)}{j!}\binom{Y}{n-j}=\sum_{j=k}^{n}\frac{s(j,k)}{j!}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{s(n-j,i)}{(n-j)!}Y^{i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=k}^{n-i}\binom{n}{j}s(j,k)\,s(n-j,i)\,Y^{i}\right.,$$

в котором второй переход совершен на основании равенства (18).

Список литературы: 1. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975. — 480 с. 2. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск: Наука, 1977. —286 с. 3. *Сачков Ю. В.* Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.— 320 с. 4. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения.— М.: Наука, 1979.— 152 с. 5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества.— М.: Мир, 1982.— 256 с. 6. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с. 7. *Comtet L.* Analyse combinatoire — II. — Paris: PUF, 1970.— 190 p. 8. *Калюжный В. Н.* Степенная проблема моментов на *p*-адическом диске.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, вып 39. Харьков: Вища школа. 1983, с. 56—61. 9. *Коблиц Н.* *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции.—М.: Мир, 1982. — 192 с.

Поступила в редколлегию 13. 12. 83.

УДК 681.32.06

С. А. КАЛЮЖНАЯ

ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА НА АЛГЕБРЕ КОДДА

Вводится отношение порядка на алгебре Кодда, для которого инфимум двух отношений совпадает с их естественным соединением, и изучаются свойства получившейся решетки. Как правило, предполагаем знакомство с основными понятиями теории решеток в объеме [1] и теории реляционных баз данных в объеме [2]. Через $|U|$ будем обозначать число элементов конечного множества U. Знак $\subset$ будет служить для обозначения нестрогого включения.

1. Пусть U — конечное множество ($|U| \geqslant 2$), интерпретируемое в теории баз данных как множество атрибутов. С каждым $a \in U$ связано множество D_a, состоящее минимум из двух элементов — домен атрибута a. Для $A \subset U$ рассмотрим множество D_A всех отображений μ: $A \to \bigcup\limits_{a \in A} D_a$, таких что $\mu(a) \in D_a$ для всех $a \in A$. Множество $s(\mu) = A$ будем называть носителем функции μ. Домен D_a естественным образом отождествляется с множеством $D_{\{a\}}$. В случае $s(\mu_1) \cap s(\mu_2) = \varnothing$ обозначим через $\mu_1 \times \mu_2$ функцию, определяемую равенствами $(\mu_1 \times \mu_2)(x) = \mu_i(x)$ $(x \in s(\mu_i))$. Пусть $\mu[B]$ — ограничение функции μ на $B \cap s(\mu)$. Заметим, что если зафиксировать линейное упорядочение множества U, то функция $\mu \in D_A$ отождествляется с кортежем своих значений, т. е. элементом из декартова произведения доменов D_a $(a \in A)$, взятых в соответствующем порядке [2, с. 73].

Отношением с носителем $s(\rho) = A$ будем называть произвольное подмножество $\rho \subset D_A$. В частности определено пустое отношение $\varnothing_A$ с носителем A. В случае $s(\rho_1) \cap s(\rho_2) = \varnothing$ положим $\rho_1 \times \rho_2 = \{\mu_1 \times \mu_2 : \mu_1 \in \rho_1, \mu_2 \in \rho_2\}$. Например, $D_A \times D_B = D_{A \cup B}$ $(A \cap B = \varnothing)$; $\rho \times \varnothing_B = \varnothing_{s(\rho) \cup B}$ $(s(\rho) \cap B = \varnothing)$. Пускай $\rho[B] = \{\mu[B] : \mu \in \rho\}$. Легко видеть, что $\rho[C] = \rho \leftrightarrow s(\rho) \subset C$, и что $(\rho_1 \times \rho_2)[B] = \rho_1[B] \times \rho_2[B]$.

Множество всевозможных отношений с носителями, содержащимися в U, обозначим $\mathrm{Codd}(U)$. Оно является частичной алгеброй с операциями объединения и пересечения отношений, определенными только для отношений с одинаковыми носителями. При этом же условии определено частичное отношение включения. Отметим, что

$$(\rho_1 \cup \rho_2)[B] = \rho_1[B] \cup \rho_2[B] \text{ и } \rho_1 \subset \rho_2 \Rightarrow \rho_1[A] \subset \rho_2[A].$$

2.1. Определение. *Для отношений* $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Codd}(U)$ *будем считать, что* $\rho_1 \leqslant \rho_2$ *тогда и только тогда, когда* $s(\rho_2) \subset s(\rho_1)$ и $\rho_1[s(\rho_2)] \subset \rho_2$.

2.2. Лемма. *Определение* 2.1. *задает отношение порядка в* $\mathrm{Codd}(U)$.

Доказательство. Рефлексивность выполняется по определению. Проверим транзитивность. Пусть $\rho_1 \leqslant \rho_2$ и $\rho_2 \leqslant \rho_3$, т. е. $s(\rho_2) \subset s(\rho_1)$, $\rho_1[s(\rho_2)] \subset \rho_2$; $s(\rho_3) \subset s(\rho_2)$, $\rho_2[s(\rho_3)] \subset \rho_3$. Тогда $s(\rho_3) \subset s(\rho_1)$ и $\rho_1[s(\rho_3)] = \rho_1[s(\rho_2)][s(\rho_3)] \subset \rho_2[s(\rho_3)] \subset \rho_3$, откуда $\rho_1 \leqslant \rho_3$. Наконец, пусть $\rho_1 \leqslant \rho_2$, $\rho_2 \leqslant \rho_1$. Тогда $s(\rho_1) \subset s(\rho_2)$, $\rho_1[s(\rho_2)] \subset \rho_2$; $s(\rho_2) \subset s(\rho_1)$, $\rho_2[s(\rho_1)] \subset \rho_1$. Отсюда $s(\rho_1) = s(\rho_2)$; $\rho_1 \subset \rho_2$, $\rho_2 \subset \rho_1$, т. е. $\rho_1 = \rho_2$.

В дальнейшем множество $\mathrm{Codd}(U)$ будет рассматриваться с введенным в 2.1 отношением порядка.

2.3. Заметим, что для отношений с одинаковыми носителями это отношение порядка совпадает с отношением включения.

2.4. Наибольшим элементом в $\mathrm{Codd}(U)$ является $1 = \varnothing_\varnothing$. Действительно, для любого отношения ρ имеем $\varnothing \subset s(\rho)$, $\rho[\varnothing] \subset \subset \varnothing$, т. е. $\rho \leqslant 1$.

2.5. Наименьшим элементом в $\mathrm{Codd}(U)$ служит $0 = \varnothing_U$. В самом деле, для любого $\rho \in \mathrm{Codd}(U)$ выполняется $s(\rho) \subset U$, $\varnothing_U[s(\rho)] \subset \rho$, т. е. $0 \leqslant \rho$.

2.6. Легко видеть, что $A_1 \subset A_2 \leftrightarrow \varnothing_{A_1} \geqslant \varnothing_{A_2} \leftrightarrow D_{A_1} \geqslant D_{A_2}$.

2.7. Нетрудно показать, что если $\rho \leqslant \varnothing_A \neq 1$, то ρ имеет вид $\rho = \varnothing_B$, где $B \supset A$.

3.1. Коддом была введена операция естественного соединения:

$$\rho_1 \wedge \rho_2 = \{\mu \in D_{s(\rho_1) \cup s(\rho_2)} : \mu[s(\rho_i)] \in \rho_i \ (i = 1, 2)\}.$$

С целью приближения обозначений к используемым в теории решеток, мы будем использовать знак $\wedge$ вместо принятого в данном контексте символа $\rhd\!\lhd$ [2, с. 102].

Эквивалентным образом можно написать

$$\rho_1 \wedge \rho_2 = (\rho_1 \times D_{s(\rho_2) \setminus s(\rho_1)} \cap D_{s(\rho_1) \setminus s(\rho_2)} \times \rho_2). \qquad (2.1)$$

Заметим, что согласно определению $s(\rho_1 \wedge \rho_2) = s(\rho_1) \cup s(\rho_2)$. Если $s(\rho_1) \cap s(\rho_2) = \varnothing$, то $\rho_1 \wedge \rho_2 = \rho_1 \times \rho_2$. Если же $s(\rho_1) = = s(\rho_2)$, то $\rho_1 \wedge \rho_2 = \rho_1 \cap \rho_2$. Операция естественного соединения ассоциативна, коммутативна и идемпотентна. Известное объяснение этому факту дает следующая теорема.

3.2. **Теорема.** *Для любых* $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Codd}(U)$ *выполняется равенство* $\rho_1 \wedge \rho_2 = \inf\{\rho_1, \rho_2\}$.

Доказательство. Из определения следует, что $s(\rho_i) \subset \subset s(\rho_1 \wedge \rho_2)$, $(\rho_1 \wedge \rho_2)[s(\rho_i)] \subset \rho_i$, т. е. $\rho_1 \wedge \rho_2 \leqslant \rho_i$ $(i = 1, 2)$. С другой стороны, пусть $\rho \leqslant \rho_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда $s(\rho_i) \subset s(\rho)$, $\rho[s(\rho_i)] \subset \rho_i$ $(i = 1, 2)$.

Отсюда $s(\rho_1 \wedge \rho_2) \subset s(\rho)$ и для любых $\mu \in \rho$; $i = 1, 2$ выполняется $\mu[s(\rho_1 \wedge \rho_2)][s(\rho_i)] = \mu[s(\rho_i)] \in \rho_i$, т. е. $\mu[s(\rho_1 \wedge \rho_2)] \in \rho_1 \wedge \rho_2$ или что то же самое $\rho[s(\rho_1 \wedge \rho_2)] \subset \rho_1 \wedge \rho_2$. Это означает, что $\rho \leqslant \rho_1 \wedge \rho_2$.

3.3. Без труда проверяются следующие соотношения:

$$\rho \wedge D_A = \rho \times D_{A \setminus s(\rho)} \qquad (3.1)$$

$$D_A \wedge D_B = D_{A \cup B}, \qquad (3.2)$$

$$\varnothing_A \wedge \rho = \varnothing_{A \cup s(\rho)} \quad (A \neq \varnothing), \qquad (3.3)$$

$$\varnothing_A \wedge \varnothing_B = \varnothing_{A \cup B}. \qquad (3.4)$$

4.1. Введем операцию, двойственную к операции естественного соединения, полагая по определению $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 [\Delta] \cup \rho_2 [\Delta]$, где $\Delta = s(\rho_1) \cap s(\rho_2)$. Тем самым $s(\rho_1 \vee \rho_2) = s(\rho_1) \cap s(\rho_2)$. Если $s(\rho_1) = s(\rho_2)$, то $\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 \cup \rho_2$. Если же $s(\rho_1) \cap s(\rho_2) = \varnothing$, то $\rho_1 \vee \rho_2 = \varnothing_\varnothing = 1$. Непосредственно проверяется, что эта операция ассоциативна, коммутативна, идемпотентна. Это же вытекает из следующей теоремы.

4.2. Теорема. *В упорядоченном множестве* Codd (U) *выполняется соотношение* $\rho_1 \wedge \rho_2 = \sup\{\rho_1, \rho_2\}$.

Доказательство. Из определений вытекает, что $s(\rho_1 \vee \rho_2) \subset s(\rho_i)$, $\rho_i [s(\rho_1 \vee \rho_2)] \subset \rho_1 \vee \rho_2$, т. е. $\rho_i \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$ $(i = 1, 2)$.

Пусть теперь $\rho_i \leqslant \rho$ $(i = 1, 2)$. Тогда, с одной стороны, $s(\rho) \subset s(\rho_i)$ $(i = 1, 2)$, откуда $s(\rho) \subset s(\rho_1 \cup \rho_2) = \Delta$. С другой стороны, $\rho_1 [s(\rho)] \subset \rho$, $\rho_2 [s(\rho)] \subset \rho$, откуда $(\rho_1 \vee \rho_2) [s(\rho)] = (\rho_1 [\Delta] \cup \rho_2 [\Delta]) [s(\rho)] = \rho_1 [s(\rho)] \cup \rho_2 [s(\rho)] \subset \rho$. Таким образом, $\rho_1 \vee \rho_2 \leqslant \rho$.

4.3. Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$D_A \vee \rho = D_{A \cap s(\rho)}, \qquad (4.1)$$

$$D_A \vee D_B = D_{A \cap B}, \qquad (4.2)$$

$$\rho \vee \varnothing_A = \rho [s(\rho) \cap A], \qquad (4.3)$$

$$\varnothing_A \vee \varnothing_B = \varnothing_{A \cap B}. \qquad (4.4)$$

5.1. Подведем некоторый итог. Из леммы 2.2, теорем 3.2, 4.2, замечаний 2.4, 2.5 вытекает

5.2. Теорема. *Множество* Codd (U) *с отношением порядка, определенным в 2.1 образует решетку с нулем и единицей.*

5.3. Дальнейшая часть статьи посвящена изучению этой решетки. Рассмотрим группу вопросов, связанных с выполнением дистрибутивного закона.

6.1. Теорема. *Ненулевой элемент решетки* Codd (U) *является дистрибутивным тогда и только тогда, когда он имеет вид* D_A $(A \subset U)$.

Доказательство. Проверим вначале, что элемент D_A дистрибутивен. На основании формул (4.1), (3.2) имеем:

$$D_A \vee (\rho_1 \wedge \rho_2) = D_{A \cap s(\rho_1 \wedge \rho_2)} = D_{A \cap (s(\rho_1) \cup s(\rho_2))} =$$
$$= D_{(A \cap s(\rho_1)) \cup (A \cap s(\rho_2))} = D_{A \cap s(\rho_1)} \wedge D_{A \cap s(\rho_2)} = (D_A \vee \rho_1) \wedge (D_A \wedge \rho_2).$$

Пусть теперь — дистрибутивный элемент. При любом $B \neq \varnothing$ по формулам (4.3), (3.3), (4.1), (3.1) выполняется:

$$\rho = \rho \bigvee \varnothing_U = \rho \bigvee (\varnothing_B \bigwedge D_U) = (\rho \bigvee \varnothing_B) \bigwedge (\rho \bigvee D_U) =$$
$$= \rho\,[s(\rho) \cap B] \bigwedge D_{s(\rho)} = \rho\,[s(\rho) \cap B] \times D_{s(\rho) \setminus (s(\rho) \cap B)}. \qquad (6.1)$$

Если же $s(\rho) \neq U$, то найдется такое $B \neq \varnothing$, что $s(\rho) \cap B = \varnothing$. При таком B из (6.1) находим, что $\rho = D_{s(\rho)}$.

Если же $s(\rho) = U$, то согласно (6.1) $\rho = \rho\,[B] \times D_{U \setminus B}$ для любого $B \neq \varnothing$. Пусть кроме того $B \neq U$. Из последнего равенства в случае $\rho \neq \varnothing_U$ тогда следует, что $\rho\,[U \setminus B] = D_{U \setminus B}$.

В таком случае $\rho = \rho\,[U \setminus B] \times D_B = D_{U \setminus B} \times D_B = D_U$.

6.2. Теорема. *Ненулевой элемент решетки* Codd (U) *стандартен тогда и только тогда, когда он имеет вид* D_A $(A \subset U)$.

Доказательство. Проверим в начале, что D_A является стандартным элементом. По определению 4.1 для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{Codd}(U)$ имеем $(\rho_1 \bigwedge D_A) \bigvee (\rho_1 \bigwedge \rho_2) = (\rho_1 \bigwedge D_A)\,[s] \cup (\rho_1 \bigwedge \rho_2)\,[s]$, где $s = s(\rho_1) \cup (A \cap s(\rho_2))$. Заметим, что в силу (2.1)

$$(\rho_1 \bigwedge \rho_2)\,[s] \subset (\rho_1 \times D_{s(\rho_2) \setminus s(\rho_1)})\,[s] = \rho_1 \times D_{(s(\rho_2) \setminus s(\rho_1)) \cap s} =$$
$$= \rho_1 \times D_{(A \setminus s(\rho_1)) \cap s} = (\rho_1 \times D_{A \setminus s(\rho_1)})\,[s] = (\rho_1 \bigwedge D_A)\,[s].$$

Поэтому $\quad (\rho_1 \bigwedge D_A) \bigvee (\rho_1 \bigwedge \rho_2) = \rho_1 \times D_{(A \cap s(\rho_2)) \setminus s(\rho_1)} = \rho_1 \bigwedge D_{A \cap s(\rho_2)} = \rho_1 \bigwedge (D_A \bigvee \rho_2)$.

Наоборот, если ρ — стандартный элемент, то по теореме 3 [1, с. 186] ρ — дистрибутивен, а значит, по теореме 6.1 он имеет требуемый вид.

6.3. **Теорема.** *Элемент решетки* Codd (U) *является кодистрибутивным тогда и только тогда, когда он имеет вид* $\varnothing_A\,(A \subset U)$

Доказательство. Проверим вначале, что $\varnothing_A$ — кодистрибутивный элемент. При $A = \varnothing$, т. е. $\varnothing_A = 1$ это очевидно. Если же $A \neq \varnothing$, то в силу (3.3), (4.4) имеем: $\varnothing_A \bigwedge (\rho_1 \bigvee \rho_2) =$

$$= \varnothing_{A \cap s(\rho_1 \vee \rho_2)} = \varnothing_{(A \cup s(\rho_1)) \cap (A \cup s(\rho_2))} = \varnothing_{A \cup s(\rho_1)} \bigvee \varnothing_{A \cup s(\rho_2)} =$$
$$= (\varnothing_A \bigwedge \rho_1) \bigvee (\varnothing_A \bigwedge \rho_2).$$

Наоборот, пусть ρ — кодистрибутивный элемент Codd (U). Тогда для любого отношения ρ_1 такого, что $s(\rho_1) = s(\rho)$, и любого подмножества $A \neq \varnothing$ имеем $\rho \cap \rho_1 = (\rho \cap \rho_1) \bigvee \varnothing_{s(\rho) \cup A} = (\rho \bigwedge \rho_1) \bigvee (\rho \bigwedge \varnothing_A) = \rho \bigwedge (\rho_1 \bigvee \varnothing_A) = \rho \bigwedge \rho_1\,[s(\rho) \cap A] = \rho \cap (\rho_1\,[s(\rho) \cap A] \times D_{s(\rho) \setminus (s(\rho) \cap A)})$. $\qquad$ (6.2)

Положим здесь $\rho_1 = D_{s(\rho) \cap A} \times \{\mu\}$, где $\mu \in D_{s(\rho) \setminus (s(\rho) \cap A)}$. Тогда правая часть равенства (6.2) превращается в $\rho \cap D_{s(\rho)} = \rho$, и значит $\rho \subset \rho_1 = D_{s(\rho) \cap A} \times \{\mu\}$.

Беря такое $A \neq \varnothing$, что $B := s(\rho) \cap A \neq s(\rho)$, и выбирая $\mu_1 \neq \mu_2$ из $D_{s(\rho) \setminus B}$, получим $\rho \subset (D_B \times \{\mu_1\}) \cap (D_B \times \{\mu_2\} = \varnothing$, т. е. $\rho = \varnothing_{s(\rho)}$.

6.4. **Теорема.** *Костандартными элементами в* Codd(U) *являются толькл* **0** и **1**.

Доказательство. Очевидно, что **0** и **1** — костандартные элементы. Наоборот, пусть ρ — костандартный элемент. По теореме двойственной к теореме 3 [1, с. 186] ρ — кодистрибутивный элемент, а значит по предыдущей теореме $\rho = \varnothing_A$ $(A \subset U)$. Покажем, что если $A \neq \varnothing$, т. е. $\rho \neq \mathbf{1}$, то $A = U$, т. е. $\rho = \mathbf{0}$. При $\mu \in D_U$ имеем $\{\mu\} = \{\mu\} \wedge \varnothing_U = \{\mu\} \vee (\varnothing_A \wedge D_U) = (\{\mu\} \vee \varnothing_A) \wedge \wedge (\{\mu\} \vee D_U) = \mu[A] \wedge D_U = \mu[A] \times D_{U \setminus A}$.

Отсюда следует, что $A = U$.

6.5. **Теорема.** *Единственными нейтральными элементами в* Codd(U) *являются* **0** и **1**.

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы, поскольку в силу теоремы 5 [1, с. 190] нейтральный элемент является костандартным.

7. В этом пункте рассмотрим вопросы, связанные с дополняемостью элементов. Для любого $\rho \in$ Codd(U) положим $\rho_* = \varnothing_{U \setminus s(\rho)}$.

Если $s(\rho) \neq U$, то в силу формулы (3.3) имеем $\rho \wedge \rho_* = \mathbf{0}$. Если же $s(\rho) = U$, то $\rho \wedge \rho_* = \rho \wedge \mathbf{1} = \rho$.

7.1. **Теорема.** *Отношение* ρ_* *является псевдокодополнением отношения* ρ. *Тем самым* Codd(U) *является решеткой с псевдокодополнениями.*

Доказательство. Во-первых, $\rho \vee \rho_* = \mathbf{1}$, поскольку $s(\rho) \cap \cap s(\rho_*) = \varnothing$. Далее, пусть $\rho \vee \tau = \mathbf{1}$. Тогда $s(\rho) \cap s(\tau) = \varnothing$, т. е. $s(\tau) \subset U \setminus s(\rho) = s(\rho_*)$ и $\rho_*[s(\tau)] = \varnothing_{s(\tau)} \subset \tau$. Это означает, что $\rho_* \leqslant \tau$.

7.2. **Теорема.** *Элемент* $\rho \neq \mathbf{0}$ *обладает дополнением тогда и только тогда, когда* $s(\rho) \neq U$. *Дополнением отношения* $\varnothing_A \times \times (\varnothing \neq A \neq U)$ *является любое отношение* τ, *такое что* $s(\tau) = = U \setminus A$. *В случае* $\rho \neq \varnothing_{s(\rho)}$ $(s(\rho) \neq U)$ *единственным дополнением к* ρ *является* ρ_*.

Доказательство. Пусть вначале $s(\rho) = U$. Из равенства $\rho \vee \tau = \mathbf{1}$ следует, что $s(\rho) \cap s(\tau) = \varnothing$, т. е. $s(\tau) = \varnothing$, $\tau = \mathbf{1}$. Поэтому соотношение $\rho \wedge \tau = \mathbf{0}$ равносильно тому, что $\rho = \mathbf{0}$. Пусть теперь $s(\rho) \neq U$. Условия $\rho \vee \tau = \mathbf{1}$, $\rho \wedge \tau = \mathbf{0}$ равносильны тому, что $s(\tau) = U \setminus s(\rho)$, $\rho \times \tau = \varnothing_U$. Если $\rho = \varnothing_A$ $(\varnothing \neq \neq A \neq U)$, то в качестве τ может выступать любое отношение с носителем $U \setminus A$. Если же $\rho \neq \varnothing_{s(\rho)}$, то дополнение τ определено однозначно: $\tau = \varnothing_{U \setminus s(\rho)} = \rho_*$.

7.3 Элемент ρ^* называется псевдодополнением элемента ρ, если $\rho \wedge \rho^* = \mathbf{0}$, и из того, что $\rho \wedge x = \mathbf{0}$ вытекает, что $x \leqslant \rho^*$.

7.4. **Теорема.** *Элемент решетки* Codd(U) *обладает псевдодополнением тогда и только тогда, когда либо он имеет вид* $\varnothing_A$ $(A \neq \varnothing)$ *и в этом случае* $\varnothing_A^* = D_{U \setminus A}$, *либо когда он имеет вид* D_A $(A \neq U)$ *и при этом* $D_A^* = \varnothing_{U \setminus A}$.

Доказательство разобьем на четыре случая.

а) Покажем, что если $A \neq \varnothing$, то $\varnothing_A^* = D_{U \setminus A}$. Имеем

$\varnothing_A \wedge D_{U \setminus A} = \varnothing_U = \mathbf{0}$. Если $\varnothing_A \wedge \tau = \varnothing_U$, то $s(\tau) \supset U \setminus A$. Кроме того, очевидно, что $\tau[U \setminus A] \subset D_{U \setminus A}$. Следовательно, $\tau \leqslant D_{U \setminus A}$. Что и требовалось.

б) Покажем, что если $A \neq U$, то $D_A^* = \varnothing_{U \setminus A}$. Имеем $D_A \wedge \wedge \varnothing_{U \setminus A} = \varnothing_U \neq \mathbf{0}$. Далее, если $D_A \wedge \tau = \varnothing_U$, то с одной стороны $s(\tau) \supset U \setminus A$, а с другой стороны $D_{A \setminus s(\tau)} \times \tau = \varnothing_U$ откуда $\tau = \varnothing_{s(\tau)}$, и следовательно, $\tau[U \setminus A] = \varnothing_{U \setminus A}$. Тем самым, $\tau \leqslant \leqslant \varnothing_{U \setminus A}$.

в) Покажем, что если $s(\rho) = U$, $\rho \neq \varnothing_U$, то ρ не имеет псевдодополнения. Предположим противное, что ρ^* существует. Для любого $A \neq \varnothing$ выполняется $\rho \wedge \varnothing_A = \varnothing_U = \mathbf{0}$, откуда по определению псевдодополнения $\varnothing_A \subset \rho^*$, и в частности $s(\rho^*) \subset A$. Поскольку подразумевается, что $|U| \geqslant 2$, то можно подобрать такие $A_1 \neq \varnothing$, $A_2 \neq \varnothing$, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Тогда $s(\rho^*) = \varnothing$, т. е. $\rho^* = \mathbf{1}$. Отсюда $\rho = \rho \wedge \mathbf{1} = \rho \wedge \rho^* = \mathbf{0} = \varnothing_U$ — противоречие.

г) Пусть $s(\rho) \neq U$, $\varnothing_{s(\rho)} \neq \rho \neq D_{s(\rho)}$. Покажем, что ρ не имеет псевдодополнения. Предположим противное. Из того, что $\rho \wedge \rho^* = \mathbf{0}$ следует, что $s(\rho^*) \supset U \setminus s(\rho)$. Из равенства $\rho \wedge \rho^* = \rho \wedge \varnothing_{U \setminus s(\rho)} = \mathbf{0}$ должно вытекать, что $\rho_* \leqslant \rho^*$, откуда $s(\rho^*) \subset \subset s(\rho_*) = U \setminus s(\rho)$. Следовательно, $s(\rho^*) = U \setminus s(\rho)$. Теперь исходное равенство можно переписать в виде $\rho \times \rho^* = \varnothing_U$, откуда $\rho^* = \varnothing_{U \setminus s(\rho)}$. С другой стороны рассмотрим отношение $\tau = (D_{s(\rho)} \setminus \rho) \times D_{U \setminus s(\rho)}$. Имеем $\rho \wedge \tau = (\rho \times D_{U \setminus s(\rho)}) \cap ((D_{s(\rho)} \setminus \rho) \times \times D_{U \setminus s(\rho)}) = \varnothing_U = \mathbf{0}$. По определению псевдодополнения должно выполняться $\tau \leqslant \rho^*$, значит, $D_{U \setminus s(\rho)} = \tau[U \setminus s(\rho)] \subset \rho^*$. Но это противоречит предыдущему равенству для ρ^*.

8. В данном пункте мы рассмотрим отношение покрываемости ($\prec$) в решетке Codd (U). Легко видеть, что в случае $s(\rho_1) = s(\rho_2)$ отношение $\rho_1 \prec \rho_2$ в Codd (U) совпадает с отношением покрываемости в теоретико-множественном смысле.

8.1. **Теорема.** *Для того, чтобы* $\rho_1 \prec \rho_2$ $(s(\rho_1) \neq s(\rho_2))$ *необходимо и достаточно выполнения условий: а)* $s(\rho_2) \prec s(\rho_1)$, б) $\rho_1 = \rho_2 \times D_a$ $(\{a\} = s(\rho_1) \setminus s(\rho_2))$.

Доказательство. Обозначим для краткости $s_i = s(\rho_i)$ $(i = 1, 2)$.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы. Заметим, что из б) следует равенство $\rho_2 = \rho_1[s_2]$. Предположим, что $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$. Это равносильно тому, что $s_2 \subset s \subset s_1$, где $s = s(\rho)$, и включениям

$$\rho_1[s] \subset \rho \quad (8.1), \qquad\qquad \rho[s_2] \subset \rho_2 \quad (8.2).$$

В силу условия а) возможны два случая:

1) Если $s = s_2$, то $\rho_2 = \rho_1[s_2] = \rho_1[s] \subset \rho = \rho[s_2] \subset \rho_2$, откуда $\rho = \rho_2$.

2) Пусть $s = s_1$. Тогда соотношение (8.1) превращается в $\rho_1 \subset \rho$. С другой стороны, в силу (8.2) имеем: $\rho \subset \rho[s_2] \times D_{s_1 \setminus s_2} \subset \rho_2 \times D_a = \rho_1$. Следовательно, $\rho = \rho_1$.

Необходимость. Пусть $\rho_1 \prec \rho_2$ $(s_1 \neq s_2)$, и в частности $s_2 \subset s_1$ $(s_2 \neq s_1)$ и $\rho_1[s_2] \subset \rho_2$. Возьмем такое s, что $s_2 \prec s \subset s_1$. Положим $\rho = \rho_2 \times D_a$ $(\{a\} = s \setminus s_2)$. Имеем $\rho < \rho_2$, т. к. $\rho[s_2] = \rho_2$ и ρ_2 строго содержится в ρ. С другой стороны $\rho_1 \leqslant \rho$, поскольку $\rho_1[s] \subset (\rho_1[s_2] \times D_{s_1 \setminus s_2})[s] \subset (\rho_2 \times D_{s_1 \setminus s_2})[s] = \rho_2 \times D_a = \rho$. Из того, что $\rho_1 \prec \rho_2$ теперь следует, что $\rho_1 = \rho = \rho_2 \times D_a$ и $s_1 = s$, т. е. $s_2 \prec s_1$.

8.2. Следствие. *Атомами решетки* Codd (U) *являются отношения вида* $\{\mu\}$ $(\mu \in D_U)$ *и отношения вида* $\varnothing_A$ $(A \prec U)$.

Доказательство. Отношение ρ является атомом тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = \varnothing_U \prec \rho$. В случае $s(\rho) = U$ это равносильно тому, что ρ покрывает $\varnothing$ в теоретико-множественном смысле, т. е. $\rho = \{\mu\}$ $(\mu \in D_U)$. Если же $s(\rho) = s \neq U$, то по теореме 8.1 это равносильно тому, что $s \prec U$, $\varnothing_U = \rho \times D_a$, т. е. $\rho = \varnothing_s$ $(s \prec U)$.

8.3. Следствие. *Коатомами решетки* Codd (U) *являются отношения вида* D_a $(a \in U)$ *и только они.*

Доказательство. Отношение ρ является коатомом тогда и только тогда, когда $\rho \prec \mathbf{1} = \varnothing_\varnothing$. Случай $s(\rho) = \varnothing$ невозможен, так как тогда ρ строго содержалось бы в $\varnothing$. Поэтому в силу теоремы условие равносильно тому, что $s(\rho) = \{a\}$, $\rho = \varnothing_\varnothing \times D_a = D_a$.

8.4. **Предложение.** *Решетка* Codd (U) *не удовлетворяет условию Жордана Гельдера.*

Доказательство. Рассмотрим $\rho = \{\mu\}$, $\mu \in D_A$, $A = U \setminus \{b\}$. Тогда $\mathbf{0} = \varnothing_U \prec \varnothing_A \prec \rho$ — максимальная цепь длины 2. С другой стороны, те же элементы можно соединить цепью $\mathbf{0} \prec \{\mu\} \times M_1 \prec \ldots \prec \{\mu\} \times M_m \prec \rho$ длины $m+1$, где $m = |D_b|$ и $\varnothing \prec M_1 \prec \ldots \prec M_m = D_b$ — максимальная цепь подмножеств множества D_b.

8.5. Следствие. *Решетка* Codd (U) *не является ни полумодулярной, ни полумодулярной снизу.*

9.1. Элемент решетки называется неразложимым [1, с. 75], если из того, что $a = b_1 \vee b_2$ следует, что $a = b_1$ или $a = b_2$. Нетрудно показать, что элемент неразложим тогда и только тогда, когда он покрывает единственный другой элемент.

9.2. **Теорема.** *Всякий ненулевой неразложимый элемент решетки* Codd (U) *является атомом.*

Доказательство. Рассмотрим ряд возможностей для элемента ρ. Если $|\rho| > 1$, то $\rho \setminus \{\mu\} \prec \rho$ для любого $\mu \in \rho$ и значит такое ρ неразложимо. Если $\rho \neq \varnothing_{s(\rho)}$ и $|U \setminus s(\rho)| = 1$, то $\rho \setminus \{\mu\} \prec \rho$ $(\mu \in \rho)$, и $\rho \times D_{U \setminus s(\rho)} \prec \rho$. Следовательно, такое ρ разложимо. Если $|U \setminus A| > 1$, то $\varnothing_{A \cup \{b\}} \prec \varnothing_A = \rho$ для любого $b \in U \setminus A$. Поэтому ρ — разложимо.

Остаются случаи, дающие в силу 8.2 атомы и нулевой элемент.

9.3. Из доказанной теоремы следует, что решетка $\mathrm{Codd}(U)$ является точечной [1, с. 233].

9.4. Элемент решетки называется простым, если из неравенства $a \leqslant b_1 \vee b_2$ вытекает, что $a \leqslant b_1$ или $a \leqslant b_2$.

9.4. **Теорема**. Элемент решетки $\mathrm{Codd}(U)$ является простым тогда и только тогда, когда он имеет вид $\varnothing_A$ $(A \prec U)$.

Доказательство. Проверим вначале, что элемент $\varnothing_A$ при условии $A \prec U$ является простым. Если $\varnothing_A \leqslant \rho_1 \vee \rho_2$, то $A \supset s(\rho_1) \cap \cap s(\rho_2)$, откуда легко следует, что либо $A \supset s(\rho_1)$, либо $A \supset s(\rho_2)$. Тогда, поскольку $\varnothing_A[s(\rho_i)] \subset \rho_i$, имеем $\varnothing_A \leqslant \rho_i$ для соответствующего $i \in \{1, 2\}$.

Пусть теперь ρ — простой нееединичный элемент. Поскольку всякий простой элемент является неразложимым, элемент ρ по теореме 9.2 является атомом. Но элемент вида $\{\mu\}$ $(\mu \in D_U)$ не является простым. Действительно, возьмем такие $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, что $X \cap Y = \varnothing$. Тогда $\{M\} \leqslant \mathbf{1} = \varnothing_X \vee \varnothing_Y$, но неравенства $\{\mu\} \leqslant \varnothing_X$, $\{\mu\} \leqslant \varnothing_Y$ не верны.

Таким образом, по следствию 8.2 $\rho = \varnothing_A$ $(A \prec U)$.

9.6. **Теорема**. *Конеразложимыми нееединичными элементами в* $\mathrm{Codd}(U)$ *являются коатомы и элементы вида* $D_A \diagdown \{\mu\}$ $(\mu \in D_A, A \subset U)$.

Доказательство. Обозначим для краткости $s = s(\rho)$. Покажем, что если $|D_s \diagdown \rho| = 1$, т. е. $\rho = D_s \diagdown \{\mu\}$ $(\mu \in D_s)$, то ρ — конеразложим. Отметим, что $\rho \prec D_s$ и D_s — единственный элемент, покрывающий ρ и имеющий тот же носитель, что и ρ. Если $\rho \prec \rho_1$, где $s_1 = s(\rho_1) \neq s$, то по теореме 8.1 $s = s_1 \cup \{a\}$ $(a \bar{\in} s)$ и $\rho = \rho_1 \neq D_a$. Последнее равенство противоречит исходному представлению для ρ. Действительно, если $\rho_1 = D_{s_1}$, то $\rho = D_s$. Если же $\rho_1 \subset D_{s_1} \diagdown \{\mu\}$, то $\rho \subset D_s \diagdown \{\mu x y : y \in D_a\}$.

Далее, если $|D_s \diagdown \rho| > 1$, то $\rho \prec \rho \cup \{\mu\}$ для любого $\mu \in \rho$, и значит, ρ — коразложимо.

Наконец, пусть $\rho = D_s$. Если $|s| > 1$, то $s = s_1 \cup s_2$, где $s_1 \neq \varnothing$, $s_2 \neq \varnothing$, $s_1 \cap s_2 = \varnothing$ и значит $D_s = D_{s_1} \times D_{s_2} = D_{s_1} \wedge D_{s_2}$ — коразложимый элемент. Если же $|s| = 1$, то ρ — коатом по следствию 8.3.

9.7. Следствие. *Решетка* $\mathrm{Codd}(U)$ *не является коточечной.*

9.8. **Теорема**. *Элемент решетки* $\mathrm{Codd}(U)$ *является копростым тогда и только тогда, когда он является коатомом.*

Доказательство. Проверим вначале, что D_a $(a \in U)$ — копростой. Если $\rho_1 \wedge \rho_2 \leqslant D_a$, то $s(\rho_1) \cup s(\rho_2) \supset \{a\}$, откуда $\{a\} \subset \subset s(\rho_1)$ или $\{a\} \subset s(\rho_2)$. Пусть для определенности выполняется первое включение. Тогда, поскольку $\rho_1[\{a\}] \subset D_a$, имеем $\rho_1 \leqslant D_a$.

Наоборот, произвольный копростой элемент, будучи конеразложимым, по теореме 9.6 либо является коатомом, либо имеет вид $\delta = D_A \setminus \{\mu\}$ $(\mu \in D_A,\ A \subset U)$. Покажем, что элементы последнего вида не являются копростыми.

Если $|A| > 1$, то пусть A_1, A_2 — разбиение A на непустые подмножества. Тогда $\varnothing_{A_1} \wedge \varnothing_{A_2} = \varnothing_A \leqslant \delta$, но неравенства $\varnothing_{A_k} \leqslant \delta$ $(k = 1, 2)$ не верны. Если же $A = \{a\}$, то для $b \neq a$ имеем $D_a \wedge \varnothing_b = \varnothing_{\{a, b\}} \leqslant \delta$, но неравенства $D_a \leqslant \delta$, $\varnothing_b \leqslant \delta$ не имеют места.

Список литературы: 1. *Гретцер Г.* Общая теория решеток.— М.: Мир, 1982.— 456 с. 2. *Ульман Дж.* Основы систем баз данных.— М.: Финансы и статистика, 1983.— 334 с.

Поступила в редколлегию 03.10.84.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 66.047.7

В. И. САЛЫГА, А. И. РУСЕЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУШКИ ДВИЖУЩЕГОСЯ СЛОЯ ДИСПЕРСНОГО (ВЛАЖНОГО) МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ ПРОТИВОТОКА ПРИ ПОНИЖЕННОМ ДАВЛЕНИИ

Предлагаемая математическая модель описывает процесс сушки движущейся распыленной композиции в потоке горячего газа при пониженном давлении.

Падающий слой состоит из частиц сферической формы одинакового радиуса. Теплоноситель продувается в противоположном направлении (вдоль трубы-сушилки). Скорость теплоносителя считаем установившейся. Предполагаем стационарность процесса и постоянство параметров, характеризующих процесс, в поперечном сечении (одномерная модель). Математическая модель представляет собой следующую систему уравнений:

$$v_0 \frac{dm_1}{dx} = Fj; \tag{1}$$

$$v_0 (c_0 m_0 + c_1 m_1) \frac{dT_0}{dx} = -r_2^s (T_0)\, v_0 \frac{dm_1}{dx} + \alpha_0 (T_{32} - T_0) F; \tag{2}$$

$$(m_0 + m_1) g = \frac{6 l_0^2 (v_0 + v_{23})^2}{\mathrm{Re}} \rho_{32}; \tag{3}$$

$$I_0 = n_0 (x)\, v_0 (x) = n_0 (0)\, v_0 (0); \tag{4}$$

$$I_3 = \rho_3 (x)\, v_{23} (x) = \rho_3 (H)\, v_{23} (H); \tag{5}$$

$$I_0 [m_1 (0) - m_1 (x)] = \rho_2 (0)\, v_{23} (0) - \rho_2 (x)\, v_{23} (x); \tag{6}$$

$$I_0\{[c_0m_0+c_1m_1(0)]\,T_0(0)-[c_0m_0+c_1m_1(x)]\,T(x)\}=$$
$$=\rho_2(x)\,v_{23}(x)\Big[c_1\cdot 273+r^s\Big|_{T=273}-c_2(273-T_{23}(x))\Big]+$$
$$+\rho_3(x)\,v_{23}(x)\,c_3T_{23}(x)-\rho_2(0)\,v_{23}(0)\,[c_1\cdot 273+r-$$
$$-c_2(273-T_{23}(0))]-\rho_3(0)\,v_{23}(0)\,c_3T_{23}(0), \qquad (7)$$

где

$$B_3=\frac{R}{\mu_3};\quad B_2=\frac{R}{\mu_2};\quad \rho_2=\frac{P}{B_2T_{23}};\quad \rho_3=\frac{P_3}{B_3T_{23}};\quad \rho_{32}=\rho_2+\rho_3;$$
$$P=P_2+P_3. \qquad (8)$$

Соотношения (1), (2) являются уравнениями, описывающими соответственно массообмен и теплообмен. Динамика процесса представлена соотношением (3), где правая часть — сопротивление обтеканию тел потоком по закону Стокса [3]: (4), (5), (6), (7) являются соответственно уравнениями баланса количества частиц композиции, массы сухого газа, массы влаги и энтальпии.

Решение предложенной системы возможно численными методами. Для этого, помимо соотношений (8), необходимо знание теплофизических характеристик материала, коэффициентов переноса при определенных упрощающих допущениях и задание начальных условий.

Процесс сушки разбиваем на три периода: I — начальный период, II — период постоянной скорости сушки, III — период падающей скорости сушки.

I. В начальный период сушки температура материала постоянно стремится и в конце периода принимает значения, близкие к температуре мокрого термометра. Пониженное давление в трубе-сушилке обеспечивает низкое значение температуры мокрого термометра. Таким образом, характерной особенностью данного периода является то, что, несмотря на нагревание, температура материала падает.

Массообмен в данном периоде происходит в режиме неравновесного испарения по закону Герца — Кнудсена.

Поток массы, испаряющейся с единицы площади, определяется соотношением [1]:

$$j_1=L\,[T_0-T^s(P)]\,r^s(T_0)/T^s(P),$$

где $L=\chi\rho_2^s(T_0)/\sqrt{2\pi B_2T_2^s(P)}$; $0<\chi\leqslant 1$ — коэффициент аккомодации, для шероховатых поверхностей $\chi\sim 1$.

Уравнение (1) примет вид

$$v_0\frac{dm_1}{dx}=F\frac{\chi\rho_2^s(T_0)\,r_2^s(T_0)\,[T_0-T^s(P)]}{\sqrt{2\pi B_2T^s(P)}\,T^s(P)}. \qquad (9)$$

Система (9), (2) — (8) описывает процесс сушки в начальный период.

II. В период постоянной скорости сушки температура материала принимает значения, близкие к температуре мокрого термометра. Поток жидкости с единичной поверхности задаем уравнением [2]

$$j_{\text{II}} = \beta\,[P_2^s(T_0) - P_2].$$

Уравнение (1) примет вид

$$v_0 \frac{dm_1}{dx} = F\beta\,[P_2^s(T_0) - P_2]. \tag{10}$$

Система (10), (2)—(8) описывает процесс сушки в периоде постоянной скорости сушки. Переход от первого периода ко второму начинается в момент, когда j_{I} достигает значения, равного j_{II}.

III. В периоде падающей скорости сушки температура материала повышается. Фронт влаги углубляется внутрь материала. Поток жидкости

$$j_{\text{III}} = \frac{P_2^s(T_0) - P_2}{\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{8\nu_2\delta}{R_{\text{кап}}^2}},$$

где $8\nu^2\delta/R_{\text{кап}}^2$ — величина, характеризующая сопротивление материала внутри переносу пара; δ — толщина высушиваемого слоя, находится из соотношения $\left(\dfrac{R-\delta(x)}{R}\right)^3 = \dfrac{m_1(x)}{m_1(x_{\text{кр}})}$; $x_{\text{кр}}$ — координата, соответствующая критическому влагосодержанию.

При $x = x_{\text{кр}}$ осуществляется переход к третьему периоду. Уравнение (1) принимает вид

$$v_0 \frac{dm_1}{dx} = F\,\frac{P_2^s(T_0) - P_2}{\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{8\nu_2\delta}{R_{\text{кап}}^2}}. \tag{11}$$

Система (11), (2)—(8) описывает процесс сушки в период падающей скорости.

Отметим, что наиболее интенсивно испарение происходит в I и во II периодах вследствие большой разницы температур материала и сушильного агента.

Начальные условия: $I_0 = I_0(0)$; $I_3 = I_3(H)$; $m_1 = m_1(0)$; $\rho_2 = \rho_2(H)$; $\rho_3 = \rho_3(H)$; $T_{32} = T_{32}(H)$; $T_0 = T_1 = T_0(0)$.

Обозначения: m — масса; T — температура; j — поток; F — поверхность частицы; v — скорость относительно трубы; x — координата текущая; H — высота башни; c — теплоемкость; α — коэффициент теплообмена; r_2^s — теплота испарения; l_0 — длина обтекания, $l_0 = \pi r$, где r — радиус частицы; g — ускорение свободного падения; Re — число Рейнольдса; n_0 — концентрация частиц; P — давление; R — объединенная газовая постоянная; μ — молекулярная масса; B — газовая постоянная; β — коэффициент массообмена; ν — кинематическая вязкость водяного пара; $R_{\text{кап}}$ — радиус капиляра.

Индексы 0, 1, 2, 3 относятся соответственно к материалу, воде в материале, пару, сушильному агенту. s соответствует параметрам на линии насыщения.

Список литературы: 1. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Тепло- и массообмен и волны в газожидкостных системах.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.—301 с. 2. *Киш Ласлоне М. И.* Современное состояние методов расчета тепло- и массообмена в процессах сушки:— В кн.: Тепло- и массоперенос в процессах сушки и термообработки.— Минск: Наука и техника, 1970, с. 80—98. 3. *Петров-Денисов В. Г., Масленников Л. А.* Процессы тепло- и влагообмена в промышленной изоляции.— М.: Энергоиздат, 1983.— 192 с.

Поступила в редколлегию 02.04.85.

УДК 518:512

П. А. БРОВКО, А. К. ШЕВЧЕНКО

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА ФОРСАЙТА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ БЕЗ ДЕЛЕНИЯ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ

[07316]

Изучая процедуру Гауссова исключения при решении линейных уравнений, Дж. Форсайт предлагает несколько усовершенствованный алгоритм, а именно, в результате выполнения матричного умножения достаточное число раз исходная матрица сводится к треугольной [1]. При этом он отмечает и показывает на примере, что алгоритм плохо работает, если какой-либо из ведущих элементов на одной из итераций близок к нулю. По алгоритму Форсайта точное решение системы (I) (0, —1,1)

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + 2{,}099x_2 + 6x_3 = 3{,}901 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

не может быть найдено на гипотетической машине с десятичной плавающей арифметикой с пятью значащими цифрами. Вместо него получается решение (—0,35; —1,50; 0,99993), содержащее грубые погрешности. Первый шаг исключения дает расширенную матрицу (II) с малым элементом (2.2) в сравнении с другими элементами матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0{,}001 & 6 & 6{,}001 \\ 0 & 2{,}5 & 5 & 2{,}5 \end{array}\right). \qquad \text{(II)}$$

Если даже поменять местами третью строку со второй после первого шага, то решение на данной машине получается удовлетворительным, но все равно остается приближенным.

Метод последовательного исключения неизвестных без деления на ведущий элемент [II] позволяет решить этот пример точно на той же самой гипотетической машине. Метод заключается в следующем. Пусть требуется решить систему уравнений, записанную в матричной форме $AX = B$.

Для выделения базисного решения слева умножаем систему на матрицу M_i, у которой на месте элемента a_{ii} ставим цифру 1, все остальные диагональные элементы заменим на a_{ii}, в i-м столбце меняем знаки перед всеми остальными элементами, на месте оставшихся элементов ставим нули. В результате умножения на матрицу M_i в соответствующем столбце матрицы A все элементы становятся нулями, кроме элемента с индексами (ii), который равен a_{ii}.

Умножим уравнения n раз на матрицы M_i, получим диагональную матрицу, откуда неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ легко получить, выполняя деление элементов преобразованной матрицы B на соответствующие диагональные элементы полученной матрицы, т. е. в данном методе деление выполняется только на последней итерации.

Итак, решим пример Форсайта изложенным методом.

Пусть B — расширенная матрица системы (I), т. е.

$$B = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2{,}099 & 6 & 3{,}901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Строим матрицу M_1

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad M_1B = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0{,}01 & 60 & 60{,}01 \\ 0 & 25 & 50 & 25 \end{array}\right).$$

Так как третья строка имеет общий множитель, сократим на него. Получим матрицу B^1

$$B' = \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0{,}01 & 60 & 60{,}01 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Строим матрицу M_2

$$M_2 = \begin{pmatrix} -0{,}01 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -0{,}01 \end{pmatrix},$$

$$M_2B' = \left(\begin{array}{rrr|r} -0{,}1 & 0 & 420 & 420 \\ 0 & -0{,}01 & 60 & 60{,}01 \\ 0 & 0 & -60{,}02 & -60{,}02 \end{array}\right).$$

Третью строку снова сократим на общий множитель

$$B'' = \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}1 & 0 & 420 & 420 \\ 0 & -0{,}01 & 60 & 60{,}01 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Строим M_3

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -420 \\ 0 & 1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3B'' = \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}01 & 0 & 0{,}01 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получаем точное решение системы $X_1 = 0$, $X_2 = -1$, $X_3 = 1$. Таким образом, точное решение этой системы легко может быть получено на машине с десятично плавающей арифметикой с пятью значащими цифрами. Приведенный пример хорошо демонстрирует преимущество метода последовательного исключения неизвестных без деления на ведущий элемент [2]. Этот метод свободен от накопленных погрешностей округления, так как на каждой итерации приходится работать с точными числами.

Список литературы: 1. *Машинные* методы математических вычислений/ Дж. Форсайт и др.: Пер. с англ.— М.: Мир, 1980.—280 с. 2. *Бровко П. А., Шевченко А. К.* Метод последовательного исключения неизвестных без деления на ведущий элемент.— Вестн. Харьк. ун-та, 1983, Механика и упр. динам. систем, № 241, с. 77—80.

Поступила в редколлегию 25.01.85.

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 286

Математика, механика
Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректоры *Л. В. Варавина. В. Л. Светличная*

Н/К
Сдано в набор 18.12.85. Подп. в печать 24.04.86. БЦ 08622. Формат $60\times90/_{16}$. Бумага типогр. №1. Лит. гарн. Выс. печать. 7 печ. л. 7,25 кр.-отт. 8 уч.-изд. л. Тираж 500 экз. Изд. № 1424. Зак. 5-1540. Цена 1 р. 10 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 1058.

РЕФЕРАТЫ

УДК 532.546

Точное решение одной задачи теории фильтрации с предельным градиентом. Басак Н. К., Домбровский Г. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 3—7.

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости с предельным градиентом. Для специального закона фильтрации, позволяющего применять при решении задач аппарат теории функций комплесного переменного, получено точное решение некоторой обобщенной задачи о точечном стоке в полосе.

Ил. 3. Библиогр.: 10 назв.

УДК 538.3:532:538.4

Диаграмма Фридрихса для разрывов в поляризующейся и намагничивающейся непроводящей среде. Ермаков В. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 7—15.

Приводится параметрическое уравнение, описывающее пространственную диаграмму Фридрихса для произвольного разрыва, когда скорость распространения его известна.

Рассмотрено распространение слабых разрывов в изотропной непроводящей среде, способной поляризоваться и намагничиваться во внешнем электромагнитном поле. Для частных законов поляризации и намагничивания даны оценки скорости разрывов и построены соответствующие пространственные диаграммы. Показано, что электромагнитный разрыв может распространяться в среде со скоростью света в вакууме.

Ил. 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.977

Синтез ограниченного управления нелинейными системами с помощью функции управляемости. Гавриляко В. М. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика с. 15—20.

Работа является дальнейшим развитием теории синтеза ограниченного управления по первому приближению В. И. Коробова. Изучается возможность использования уже известных ранее функций управляемости вида $2a_0\theta = (N^{-1}(\theta)\, x,\, x)$ при решении задачи синтеза нелинейной системы.

Библиогр.: 14 назв.

УДК 517.977

Стабилизация линейных неавтономных управляемых систем. Бессонов Г. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 21—22.

Рассмотрена задача стабилизации системы $\dot{x} = A(t)\, x + B(t)\, u$, $x \in R^n$, $u \in R^r$, не предполагая ограниченность матриц $A(t)$ и $B(t)$. Указано управление, стабилизирующее данную систему.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.937.962

Построение решений некоторых классов уравнений $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$. Власенко Л. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 24—28.

Для построения экспоненциально растущих решений уравнения $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$ в банаховом пространстве применяется техника контурного интегрирования с множителями сходимости. В качестве приложения общей теоремы исследуется уравнение типа теплопроводности с переменной плотностью, обращающейся в нуль. Для однородного уравнения при некоторых предположениях удается описать многообразие всех решений.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 512.21 + 517.937

Об одном классе стохастических систем уравнений, неразрешенных относительно производной. Гиря Т. В., Осуала С., Руткас А. Г. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 29—34.

Для стохастического уравнения $A\,dx + Bx\,dt = [\sigma(x) + \sigma_0]\,dw + f\,dt$ с вырожденными, вообще говоря, матрицами A и B найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности в предположении, что $\exists\lambda$: $\det(\lambda A + B) \neq 0$.

Выведены детерминированные уравнения на вторые моменты, которые оказываются также неразрешенными относительно производных.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 681.51:519.8

Метод последовательного усреднения в марковских процессах принятия решений с периодическими стратегиями. Баранов В. В., Третьякова Н. В. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 34—50.

Рассматривается конечномерный марковский процесс принятия решений с неоднородной переходной функцией, удовлетворяющей условию периодичности. Предлагается оптимизационная схема последовательного усреднения, которая порождает оптимизационные процедуры, справедливые в самых общих предположениях относительно переходной функции и обеспечивающие решение задачи за конечное число итераций.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 512. 831:517.941.92

О канонической форме регулярных систем линейных дифференциальных уравнений. Овчаренко В. В., Макарущенко Н. П. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 51—57.

Регулярный пучок матриц $A + B\lambda$, с помощью унимодулярной матрицы $U(\lambda)$ степени не ниже $u_1 - 1$ и невырожденной постоянной матрицы V может быть приведен к канонической форме

$$U(\lambda)(A + B\lambda)V = \operatorname{diag}\{E^{(u)}, y(\lambda)\},$$

где $u = u_1 + \ldots + u_r + u_0$.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.98 + 519.2

Об уравнении Балакришнана оптимальной фильтрации. Уваров О. В. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 57—60.

Проводится анализ Балакришнана оптимальной фильтрации

$$-\int_{\tau}^{t} \varphi(\xi)\dot{Q}(\xi)\,d\xi\,\Phi^{-1}(\tau)+\frac{1}{\lambda}\dot{\varphi}(\tau)\,\Phi^{*}(\tau)=\Phi(t)\,\Phi^{-1}(\tau)$$

при некоторых дополнительных предположениях относительно матричных функций $A(t)$ и $H(t)$, через которые выражаются $Q(t)$ и $\Phi(t)$.

А именно, рассматривается случай, когда $A(t)$ и $H(t)$ коммутируют и не зависят от времени. В этом случае получено явное выражение для функции φ.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.5:512.643

О факторизации и реализации рациональной матрицы-функции. Зарецкая И. Т. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 60—65.

Приведено необходимое и достаточное условие отщепления от рациональной матрицы-функции множителя степени κ, понижающего кратность полюса на κ единиц. По заданной произвольной вещественной матрице-функции $\nu(\lambda)$ второго порядка строится электрическая цепь, передаточная функция которой совпадает с $\nu(\lambda)$.

Ил. 3. Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.9

Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений движения суспензий. Львов В. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 66—70.

Рассматривается математическая модель динамики двухфазной жидкости, состоящей из твердых частиц в вязкой несжимаемой жидкой среде. Существование и единственность решения доказано методом последовательных приближений.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.938 + 577.21

Дарвиновские системы и их дискретные аналоги. Любич Ю. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286. Математика, механика, с. 70—76.

Исследуется динамика гиперциклов (в смысле М. Эйгена) с линейным оператором роста A. Устанавливается «принцип нормировки», дающий явное решение системы в инвариантном виде, обобщаемом на линейный рост. Для $A \geqslant 0$ (относительно некоторого конуса) доказывается сходимость траекторий. Результаты переносятся на аналогичные дискретные системы с помощью теоремы о рациональности граничного спектра.

Библиогр.: 2 назв.

УИБ-1