Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 711, 2005, с.127–131

On H_2 strongly regular operators pairs and stability of semigroups of operators

Z.D.Arova

Odessa State Academy of Food Technology , Ukraine

In the paper some previous results of author, obtained for the Livsic-Brodskii J-nodes with strongly regular J-inner characteristic matrix functions are extended onto the case of operator valued characteristic functions. This is done after investigation more general problem for the class of strongly H_2-regular pairs of operators $A \in L(X)$ and $C \in L(X,Y)$ that give condition on such a pair, when the semigroup of operators $T(t) = e^{iAt}, t \geq 0$, is bi-stable.
2000 Mathematics Subject Classification 47A57, 42A82.

1 Introduction

In[1] we studied LB(Livsic-Brodskii) J-nodes $\Sigma = [A, C; X, \mathbb{C}^m]$ with strongly regular in the sense [1] J-inner matrix valued characteristic functions from Hardy space $H_2^{m\times m}(\frac{d\mu}{1+\mu^2})$. For these nodes we have:

1) the spectrum $\sigma(A)$ of operator A belongs to the closed upper half plane $\overline{\mathbb{C}}_+$;

2) operator Φ defined by the formula

$$(\Phi x)(z) = C(I - zA)^{-1}x, x \in X \tag{1}$$

is a linear bounded operator acted from X into H_2^m ($\Phi \in L(X, H_2(\mathbb{C}^m))$.

In this paper the results from [1] are extended onto LB J-nodes $\Sigma = [A, C; X, Y]$ where instead the exterior space $\mathbb{C}^m$ is considered a separable Hilbert space Y. An LB J-node $\Sigma = [A, C; X, Y]$ is called H_2-regular in $\mathbb{C}_+$ if for this node condition 1) is satisfied and in condition 2) we have $\Phi \in L(X, H_2(Y))$. A pair of linear bounded operators $\{C, A\}$ for which these conditions are satisfied is called a H_2-regular pair in $\mathbb{C}_+$.

Main results of this paper are on H_2-regular pairs. More precisely, we have interest to the conditions on a pair of operators $\{C, A\}$ which guarantee that the semigroup of operators $T(t) = e^{iAt}$, $t \geq 0$ is bi-stable.

2 Preliminaries

2.1 J-$*$-inner functions

By $L(X,Y)$ we denote the set of all bounded linear operators acting from separable Hilbert space X into separable Hilbert space Y, and we use $L(X)$ instead of $L(X,X)$. Let J be a signature operator in Y, i,e, $J = J^* = J^{-1} \in L(Y)$. Let $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ be upper half plane of the complex plane $\mathbb{C}$.

Definition 1. *A function W with values from $L(Y)$ that is meromorphic in $\mathbb{C}_+$ is called*

1) J-contractive if $W(z)^*JW(z) \leq J$ at holomorphic points $z \in \mathbb{C}_+$.

2) J-$*$-contractive if $W(z)JW(z)^* \leq J$ at holomorphic points $z \in \mathbb{C}_+$.

3) J-bi-contractive if W is both J-contractive and J-$*$-contractive.

In the case when $\dim Y < \infty$ the nontangential boundary values $W(\zeta)$ of J-contractive matrix functions exists for almost all $\zeta \in \mathbb{R}$. In the case $\dim Y = \infty$ it can happen that such function doesn't have nontangential boundary values $W(\zeta)$ for almost all $\zeta \in \mathbb{R}$ not even in the weak sense. For this reason the notions of J-inner, J-$*$-inner and J-bi-inner functions are introduced as follows:

Definition 2. *A meromorphic in $\mathbb{C}_+$ bi-contractive function W is called*

1) J-inner if for each $y \in Y$ we have $\lim\limits_{z\to\zeta}(JW(z)y, W(z)y) = (Jy,y)$ for almost all $\zeta \in \mathbb{R}$, i.e., if $w - \lim\limits_{z\to\zeta} W(z)^*JW(z) = J$ for almost all $\zeta \in \mathbb{R}$.

2) J-$*$-inner if for each $y \in Y$ we have $\lim\limits_{z\to\zeta}(JW(z)^*y, W(z)^*y) = (Jy,y)$ for almost all $\zeta \in \mathbb{R}$, i.e., if $w - \lim\limits_{z\to\zeta} W(z)JW(z)^* = J$ for almost all $\zeta \in \mathbb{R}$.

3) bi-inner if W both J-inner and J-$*$-inner.

In the case $J = I_Y$ such a function W is called bi-inner.

2.2 Livsic-Brodskii (LB) nodes and its characteristic functions

Let $A \in L(X), C \in L(X,Y)$.

Definition 3. *A colligation $\Sigma = [A, C; X, Y]$ is called a Livsic-Brodskii* LB *J-*node *if , J is a signature operator on Y and*

$$A - A^* = iC^*JC,$$

see [4].

Let Λ_A be the set of z, in which $z(I - zA)^{-1} \in L(X)$ included $z = \infty$ if $A^{-1} \in L(X)$. The operator function

$$W_\Sigma(z) = I + zC(I - zA)^{-1}C^*J, \ z \in \Lambda_A$$

is called the *characteristic function* of the node. We consider W_Σ as a $\mathcal{L}(Y)$-valued function which is analytic on Λ_A. Recall that a node $\Sigma = [A, C, ; X, Y]$ is called *minimal* if

$$X = \bigvee_{k=0}^{\infty} A^k C^* Y = \bigvee_{k=0}^{\infty} A^{*k} C^* Y,$$

where $\bigvee \mathcal{L}_k$ denotes the closed linear span of the sets $\mathcal{L}_k \subset X$.

Let $\Sigma = [A, C; X, Y]$ be an LB J-node. Then its characteristic function W_Σ has the following properties

$$J - W_\Sigma(z)^* J W_\Sigma(w) = -i(w - \bar{z}) J C^* (I - \bar{z}A^*)^{-1}(I - wA)^{-1} C^* J, \qquad (2)$$

$$J - W_\Sigma(z) J W_\Sigma(w)^* = -i(z - \bar{w}) C (I - zA)^{-1}(I - \bar{w}A^*)^{-1} C^*. \qquad (3)$$

for $z, \omega \in \Lambda_A$. An LB J-node Σ is called dissipative if $J = I$. In this case the characteristic function $W_\Sigma(z)$ of the node $\Sigma = [A, C; X Y]$ is holomorphic and contractive in $\mathbb{C}_+$ and $W_\Sigma(\mu) = \lim\limits_{\nu \to 0} W_\Sigma(\mu + i\nu)$ exists. Let $A \in L(X)$ and $T(t) = e^{itA}$.

Definition 4. *A semigroup $T(t) = e^{itA}$ $(t \geq 0)$ is called* bi-stable, *if*

$$a) \;\; s\text{-}\lim_{t \to +\infty} T(t) = 0, \qquad b) \;\; s\text{-}\lim_{t \to +\infty} T^*(t) = 0.$$

If condition a) holds we will say that the semigroup $T(t)$ is stable. *If condition b) holds we will say that semigroup $T(t)$ is* $*$-stable.

Proposition 1. ([5]) *The semigroup $T(t) = e^{itA}$ $(t \geq 0)$ which corresponds to the main operator A of the minimal dissipative LB node $\Sigma = [A, B, C; X, Y]$ is bi-stable (or stable, or $*$-stable) if and only if its characteristic function W_Σ is bi-inner (or inner, or $*$-inner, respectively).*

2.3 Strongly H_2-regular pairs of operators

Let $H_2(Y)$ is the Hardy space of the Y-valued analytic functions $y(z)$ on $\mathbb{C}_+$ that have representation

$$y(z) = \int_0^\infty e^{izt} \check{y}(t)dt, \quad \check{y}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+; Y), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Definition 5. *The pair $\{C, A\}$ is called strongly H_2-regular in $\mathbb{C}_+$ if it is H_2-regular pair, i.,e.,*

1) *the spectrum $\sigma(A)$ of operator A contains in $\overline{C}_+$;*

2) *operator Φ defined by the formula (1) belongs to $L(X, H_2(Y))$;*

and if also take place condition:

$$m\|x\| \leq \|\Phi x\|_{H_2} \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

for some $m > 0$ and $M \geq m$.

Theorem 1. *[3] The following are equivalent:*

1) *the pair $\{C, A\}$ is strongly H_2-regular in $\mathbb{C}_+$;*

2) *the semigroup* $T(t) = e^{itA}$ *is stable end there exist a dissipative operator* $A_0 \in \mathcal{L}(X_0)$, *bounded operators* $C_0 \in L(X_0, Y)$ *and* $R \in \mathcal{L}(X, X_0)$ *with* $R^{-1} \in \mathcal{L}(X_0, X)$ *such that*

$$A = R^{-1} A_0 R, \quad C = C_0 R, \quad A_0 - A_0^* = i C_0^* C_0. \tag{4}$$

2.4 Main results

Theorem 2. *Let the pair* $\{C, A\}$ *be strongly* H_2*-regular in* $\mathbb{C}_+$. *Then for all* $y \in Y$

$$g(\mu, y) := \overline{\lim_{\nu \downarrow 0}} (\nu)^{\frac{1}{2}} \|(I - (\mu - i\nu)A^*)^{-1} C^* y\| \tag{5}$$

exists for almost all $\mu \in \mathbb{R}$. *Moreover, for all* $y \in Y$

$$\lim_{\nu \downarrow 0} (\nu)^{\frac{1}{2}} \|(I - (\mu - i\nu)A^*)^{-1} C^* y\| = 0 \text{ for almost all } \mu \in \mathbb{R} \tag{6}$$

if and only if the semigroup $T(t) = e^{itA}$ $(t \geq 0)$ *is* $*$*-stable.*

Proof. Let the pair $\{C, A\}$ be strongly H_2-regular in $\mathbb{C}_+$. Then condition 2) in Theorem 1 holds, i.e., there exist operators $A_0 \in \mathcal{L}(X_0)$, $C_0 \in L(X_0, Y)$, $R \in L(X, X_0)$ with $R^{-1} \in L(X_0, X)$ such that (4) hold. Then $\Sigma_0 = [A_0, C_0; X_0, Y]$ is a dissipative LB node. For this node the characteristic function W_{Σ_0} satisfies the identity

$$I - W_{\Sigma_0}(z) W_{\Sigma_0}(z)^* = (\mathrm{Im} z) C_0 (I - z A_0)^{-1} (I - \bar{z} A_0^*)^{-1} C_0^*.$$

It is known that the function W_{Σ_0} belongs to the Schur class of holomorphic contractive $L(Y)$-valued functions and, consequently, for all $y \in Y$ limit

$$g_0(\mu, y) = \lim_{\nu \uparrow 0} (\nu)^{\frac{1}{2}} \|(I - (\mu - i\nu)A_0^*)^{-1} C_0^* y\| \text{ for almost all } \mu \in \mathbb{R}$$

exists. By (4) we have that $A_0^* = R^{-*} A^* R^*$ and $R^* C_0^* = C^*$ and, consequently, we have

$$g_0(\mu, y) = \lim_{\nu \uparrow 0} (\nu)^{\frac{1}{2}} \|R^{-*}(I - (\mu - i\nu)A^*)^{-1} C^* y\| \text{ for almost all } \mu \in \mathbb{R}.$$

Notice that $1 - r < 1 - r^2 < 2(1 - r)$ for $0 < r < 1$ and

$$\begin{aligned} \|(I - (\mu - i\nu)A^*) C^* y\| &= \|R^* R^{-*} (I - (\mu - i\nu)A^*)^{-1} C^* y\| \\ &\leq \|R^*\| \|R^{-*} (I - (\mu - i\nu)A^*)^{-1} C^* y\|. \end{aligned}$$

These inequalities guarantee that the $\overline{\lim}$ in (5) exists. Moreover, there exist $c_1 > 0$ and $c_2 > c_1$ such that for every $y \in Y$

$$c_1 g_0(\mu, y) \leq g(\mu, y) \leq c_2 g_0(\mu, y) \quad \text{for almost all } \mu \in \mathbb{R}.$$

Consequently, $g(\mu, y) = 0$ for almost all $\mu \in \mathbb{R}$ if and only if $g_0(\mu, y) = 0$ for almost all $\mu \in \mathbb{R}$. Finally, from Proposition it follows that the characteristic function W_{Σ_0} is $*$-inner if and only if the semigroup $T_0(t) = e^{itA_0} \quad (t \geq 0)$ is $*$-stable. This implies that $g(\mu, y) = 0$ for almost all $\mu \in \mathbb{R}$ for all $y \in Y$ if and only if the semigroup $T(t) = e^{itA} \quad (t \geq 0)$ is $*$-stable.

Theorem 3. *Let $\Sigma = [A, C; X, Y]$ be an LB J-node with characteristic function W_Σ. The following statements are equivalent:*

1) *the node Σ is strongly H_2-regular in $\mathbb{C}_+$;*

2) *the evolution semigroup $T(t) = e^{itA} \quad (t \geq 0)$ is stable and there exist a dissipative operator $A_0 \in \mathcal{L}(X_0)$, and an operator $R \in \mathcal{L}(X, X_0)$ with $R^{-1} \in \mathcal{L}(X_0, X)$ such that $A = R^{-1}A_0R, \quad iC^*C = R^*(A_0 - A_0^*)R$;*

If at least one of these conditions is satisfied then the group $T(t) = e^{itA}$ is bi-stable if and only if the characteristic function W_Σ of the node Σ belongs to the class of J-$*$-inner function in $\mathbb{C}_+$

Proof. The proof immediately follow from previous theorems.

Corollary 1. *Let $\Sigma = [A, C; X, Y]$ be a strongly H_2-regular LB J-node. If the evolution semigroup $T = e^{itA}$ is bi-stable, then W_Σ is J-$*$-inner function in $\mathbb{C}_+$.*

REFERENCES

1. Arov D.Z., Dym H. J-inner matrix functions, interpolation and inverse problems // Integral Equations Operator Theory.– 1997.– **29**. – P. 373-454.

2. Arova Z.D. On Livšic Brodskii nodes with strongly regular J-inner characteristic matrix functions in the Hardy class // Recent advances in operator theory and related topics. – Birkhäuser Verlag, Basel.– 2001. – **127**. – P. 83-97.

3. Arova Z.D., Operator nodes with strongly regular characteristic functions. - Vrije Universitet of Amsterdam, the Netherlands. –2003.

4. Brodskii M.S., Triangular and Jordan representations of linear operators. - Nayka, 1969. – 450 p.

5. Nagy B. Sz. and Foias C. Harmonic analysis of operators on Hilbert space. – North-Holland, Amsterdam, 1970 550 p.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 711, 2005, с.132–155

О рангах радиусов предельных кругов Вейля, ассоциированных с проблемой моментов Гамбургера

Ю.М. Дюкарев
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Целью этой статьи является исследование рангов радиусов матричных кругов Вейля, ассоциированных с матричной проблемой моментов Гамбургера. В частности, мы изучили мультипликативную структуру радиусов. Пусть m обозначает размер матричных моментов. Как известно, ранги предельных радиусов m_+ и m_- удовлетворяют неравенствам $0 \le m_+, m_- \le m$ и максимального значения m они достигают одновременно. Пусть m_+ и m_- обозначают произвольные целые числа, которые удовлетворяют неравенствам $0 \le m_+, m_- \le m - 1$. В статье показано, что существует такая проблема моментов Гамбургера, что m_+ и m_- являются рангами предельных радиусов.
2000 Mathematics Subject Classification 47A57, 42A82.

1. Введение. Основным результатом этой статьи является полное описание возможных значения рангов радиусов предельных кругов Вейля в матричной проблеме моментов Гамбургера. Ранги m_+ и m_- радиусов предельных кругов удовлетворяют неравенствам $0 \le m_+, m_- \le m$, здесь m обозначает размер матричных моментов. Из [1] и [2] следует, что максимального значения m они достигают одновременно. Однако вопрос о возможных значениях рангов радиусов предельных кругов в не экстремальном случае оставался открытым. Основным результатом этой статьи является доказательство того факта, что в не экстремальном случае ранги радиусов предельных кругов Вейля m_+ и m_- могут быть произвольными целыми числами, которые удовлетворяют неравенствам $0 \le m_+, m_- \le m-1$. И, таким образом, оказалась полностью решенной проблема возможных значений рангов радиусов предельных кругов Вейля в матричной проблеме моментов Гамбургера.

Доказательство основного результата базируется на мультипликативных формулах для радиусов кругов Вейля. Впервые такого типа формулы были получены в статье И.В. Ковалишиной и В.П. Потапова [3] для задаче Неванлинны-Пика и в этой же статье, опираясь на мультипликативные формулы, авторы дали полное описание возможных значений радиусов предельных кругов Вейля в задаче Неванлинны-Пика. В статье [4] (подробное изложение см. в монографии [5]) были получены мультипликативные формулы для радиусов кругов Вейля в задаче Шура.

Однако методы, с помощью которых были получены мультипликативные формулы в статье [3], нельзя непосредственно применить в проблеме моментов Гамбургера. Здесь автору пришлось преодолеть ряд дополнительных трудностей, связанных со спецификой проблемы моментов. Это прежде всего отражено в доказательстве теоремы 3 с использованием леммы 7. Как следствие этой специфики вид мультипликативных формул (82), (83) и (86), (87) существенно отличается от вида мультипликативных формул в [3] и [4]. После получения мультипликативных формул доказательство результата о возможных значениях рангов радиусов предельных кругов в проблеме моментов Гамбургера проводится по схеме, впервые предложенной в [3] для случая проблемы Неванлинны-Пика.

2. Матричная проблема моментов Гамбургера. Введем необходимые определения и обозначения. Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbb{C}^{m\times m}$ обозначим множество комплексных квадратных матриц m-го порядка, а символом $\mathbb{C}^m$ обозначим m-мерные столбцы комплексных чисел со стандартным определением операций линейного пространства над полем $\mathbb{C}$. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$ зададим формулой $(f,g) = f^*g$. Матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ называется эрмитовой, если $(f, Ag) = (Af, g)$, $\forall f, g \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_H^{m\times m}$ обозначим множество эрмитовых матриц m-го порядка. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ называется неотрицательной, если $(f, Af) \geq 0$, $\forall f \in \mathbb{C}^m$. Символом $\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ обозначим множество эрмитовых неотрицательных матриц m-го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ называется строго положительной, если $(f, Af) > 0$ для всех ненулевых векторов $f \in \mathbb{C}^m$. Символом $\mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ обозначим множество эрмитовых строго положительных матриц m-го порядка. Через I и O обозначим соответственно единичную и нулевую матрицы. Тот факт, что $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ (соотв. $A \in \mathbb{C}_{>}^{m\times m}$) мы будем записывать в виде $A \geq O$ (соотв. $A > O$). И пусть $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$.

В матричной проблеме моментов Гамбургера по заданной последовательности матриц $s_0, \ldots, s_k, \cdots \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ требуется описать множество монотонно возрастающих матриц-функций (м.ф.) $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_H^{m\times m}$ таких, что

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t), \ \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \qquad (1)$$

Можем считать, не изменяя значений интегралов, что м.ф. σ удовлетворяет следующим условиям нормировки: $\sigma(t)$ непрерывна слева при $t \in \mathbb{R}$ и $\sigma(-\infty) = 0$. Множество нормированных решений σ проблемы моментов (1) обозначим символом $\mathcal{M}_\infty$. С каждой $\sigma \in \mathcal{M}_\infty$ свяжем м.ф.

$$w(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \qquad (2)$$

М.ф. w определена и голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (1). Множество м.ф. w, ассоциированных с проблемой (1), обозначим символом $\mathcal{F}_\infty$. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что соответствие, устанавливаемое между $\mathcal{F}_\infty$ и $\mathcal{M}_\infty$ формулой (2), является взаимно однозначным. Поэтому, вместо описания множества $\mathcal{M}_\infty$, мы можем ограничится описанием множества $\mathcal{F}_\infty$.

Вместе с бесконечной проблемой моментов (1) будем рассматривать и усеченные матричные проблемы моментов Гамбургера. В таких проблемах фиксируется число $n \geq 0$ и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие м.ф. $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_H^{m\times m}$ и матрицы $M \in \mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ такие, что

$$s_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq 2n-1, \quad s_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} d\sigma(t) + M. \tag{3}$$

Проблема моментов (3) называется усеченной проблемой моментов Гамбургера, а множество ее решений σ обозначается символом $\mathcal{M}_n$. Как и в случае проблемы моментов (1), с каждой $\sigma \in \mathcal{M}_n$ свяжем ассоциированную м.ф. w вида (2) Множество всех м.ф. w, ассоциированных с проблемой (3), обозначим символом $\mathcal{F}_n$.

Усеченной проблеме моментов (3) поставим в соответствие следующие блок-матрицы (каждый блок является $m \times m$ матрицей):

$$K_n = \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, \quad u_n = \underbrace{\begin{bmatrix} O \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix}}_{m}, \quad B_n = \underbrace{\begin{bmatrix} s_n \\ s_{n+1} \\ \vdots \\ s_{2n-1} \end{bmatrix}}_{m},$$

$$v_n = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}}_{m}, \quad T_n = \underbrace{\begin{bmatrix} O & \cdots & O & O \\ I & \cdots & O & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & \cdots & I & O \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, \quad R_{T_n}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \cdots & O & O \\ zI & \cdots & O & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^n I & \cdots & zI & I \end{bmatrix}}_{(n+1)m}.$$

Усеченная проблема моментов (3) называется *вполне неопределенное*, если $K_n > O$. Всюду в дальнейшем предполагаем, что все усеченные проблемы моментов (3) являются вполне неопределенными. В этих условиях $\mathcal{M}_n \neq \emptyset$ и $\mathcal{M}_\infty \neq \emptyset$ (см. [6]).

3. Матричные многочлены 1 и 2 рода. Рассмотрим две последовательности матричных многочленов ($k \in \mathbb{N}$)

$$P_0(z) \equiv s_0^{-\frac{1}{2}}, \; P_k(z) = \left(s_{2k} - B_k^* K_{k-1}^{-1} B_k\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-B_k^* K_{k-1}^{-1} \;\; I\right) R_k(z) v_k, \tag{4}$$

$$Q_0(z) \equiv O, \; Q_k(z) = -\left(s_{2k} - B_k^* K_{k-1}^{-1} B_k\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-B_k^* K_{k-1}^{-1} \;\; I\right) R_k(z) u_k. \tag{5}$$

Многочлены P_k являются обобщенными ортонормальными многочленами в следующем смысле (см. [3]). Пусть даны произвольные числа $j, r, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

такие, что $j, k < r$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(t) d\sigma(t) P_k^*(t) = \begin{cases} O, & j \neq k \\ I, & j = k, \end{cases} \quad \forall\, \sigma \in \mathcal{M}_r. \tag{6}$$

Из явных формул (4) и соотношений обобщенной ортогональности (6) следует, что матричные многочлены P_k удовлетворяют рекуррентным формулам

$$zP_k(z) = B_{k-1}^* P_{k-1}(z) + A_k P_k(z) + B_k P_{k+1}(z), \ k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

и начальными условиями

$$P_0(z) \equiv S > O, \quad P_1(z) = B_0^{-1}(zI - A_0)S. \tag{8}$$

Причем матрицы A_k являются эрмитовыми, а B_k - невырожденными.

Приведем явные формулы для $P_0(z)$ и $P_1(z)$

$$P_0(z) \equiv s_0^{-\frac{1}{2}}, \quad P_1(z) = \left(s_2 - s_1^* s_0^{-1} s_1\right)^{-\frac{1}{2}} s_0^{\frac{1}{2}} \left(zI - s_0^{-\frac{1}{2}} s_1 s_0^{-\frac{1}{2}}\right) s_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Непосредственными вычислениями с использованием формул (4) и (5) убеждаемся в том, что многочлены Q_k связаны с многочленами P_k следующей формулой (при всех $k < r$)

$$Q_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_k(z) - P_k(t)}{z - t}\, d\sigma(t), \quad \forall \sigma \in \mathcal{M}_r. \tag{9}$$

Из (9), (7) и формул (5) следует, что матричные многочлены Q_k удовлетворяют рекуррентным формулам

$$zQ_k(z) = B_{k-1}^* Q_{k-1}(z) + A_k Q_k(z) + B_k Q_{k+1}(z), \ k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

и начальными условиями

$$Q_0(z) \equiv O, \quad Q_1(z) = \left(s_2 - s_1^* s_0^{-1} s_1\right)^{-\frac{1}{2}} s_0. \tag{11}$$

Причем матрицы A_k и B_k те же, что и в (7).

Многочлены P_k (соотв. Q_k) называются многочленами 1 (соотв. 2) рода, ассоциированными с проблемой моментов (1). Мы показали, что многочлены первого рода удовлетворяют соотношениям (7), (8), а многочлены второго рода – соотношениям (10), (11). Имеет место и обратное утверждение (см. [1]).

Лемма 1. *Пусть заданы коэффициенты рекуррентных соотношений (7) и (8), удовлетворяющие сформулированным выше условиям. И пусть, далее, матричные многочлены P_k и Q_k определены с помощью рекуррентных формул (7), (8) и (10), (11).*

Тогда существует проблема моментов (1) такая, что многочлены P_k и Q_k являются многочленами 1 и 2 рода, ассоциированными с проблемой моментов (1).

Из (7), (8) и (10), (11) вытекают следующие тождества Кристоффеля-Дарбу (см. [2])

$$(z-\bar\lambda)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar z)P_k(\bar\lambda) = P_{n+1}^*(\bar z)B_n^*P_n(\bar\lambda) - P_n^*(\bar z)B_nP_{n+1}(\bar\lambda), \tag{12}$$

$$(z-\bar\lambda)\sum_{k=0}^{n} Q_k^*(\bar z)Q_k(\bar\lambda) = Q_{n+1}^*(\bar z)B_n^*Q_n(\bar\lambda) - Q_n^*(\bar z)B_nQ_{n+1}(\bar\lambda), \tag{13}$$

$$-I+(z-\bar\lambda)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar z)Q_k(\bar\lambda) = P_{n+1}^*(\bar z)B_n^*Q_n(\bar\lambda) - P_n^*(\bar z)B_nQ_{n+1}(\bar\lambda), \tag{14}$$

$$I+(z-\bar\lambda)\sum_{k=0}^{n} Q_k^*(\bar z)P_k(\bar\lambda) = Q_{n+1}^*(\bar z)B_n^*P_n(\bar\lambda) - Q_n^*(\bar z)B_nP_{n+1}(\bar\lambda). \tag{15}$$

4. Резольвентные матрица и матрицы Вейля. Рассмотрим последовательность резольвентных матриц

$$U_n(z) = \left[\begin{array}{c|c} P_{n+1}^*(\bar z)B_n^* & P_n^*(\bar z) \\ \hline -Q_{n+1}^*(\bar z)B_n^* & -Q_n^*(\bar z)\end{array}\right], \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{16}$$

Введем матрицы

$$J = \left[\begin{array}{c|c} O & -iI \\ \hline iI & O\end{array}\right] \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}, \quad j = \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & -I\end{array}\right] \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}. \tag{17}$$

Очевидно, что

$$J^2 = I, \quad J^* = J, \quad j^2 = I, \quad j^* = j.$$

Матрицы J и j связаны соотношениями

$$\mathcal{V}J\mathcal{V}^* = j, \quad \mathcal{V}^*j\mathcal{V} = J. \tag{18}$$

Здесь унитарная матрица $\mathcal{V}$ имеет вид

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{array}{c|c} iI & I \\ \hline -iI & I\end{array}\right]. \tag{19}$$

С помощью тождеств Кристоффеля-Дарбу (12)-(15) убеждаемся в том, что

$$U_n(z)JU_n^*(\lambda) - J = i(\lambda - z)\left[\begin{array}{c|c} \sum_{k=0}^n P_k^*(\bar z)P_k(\bar\lambda) & -\sum_{k=0}^n P_k^*(\bar z)Q_k(\bar\lambda) \\ \hline -\sum_{k=0}^n Q_k^*(\bar z)P_k(\bar\lambda) & \sum_{k=0}^n Q_k^*(\bar z)Q_k(\bar\lambda)\end{array}\right]. \tag{20}$$

Подставим в (20) $\bar{z}$ вместо λ. Получим $U_n(z)JU_n^*(\bar{z})-J=O$. Отсюда следует обратимость матрицы $U_n(z)$ при всех $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и что

$$U_n^{-1}(z)=JU_n^*(\bar{z})J=\left[\begin{array}{c|c}-Q_n(z) & -P_n(z)\\ \hline B_nQ_{n+1}(z) & B_nP_{n+1}(z)\end{array}\right]. \tag{21}$$

Подставим в (20) $\bar{z}$ вместо z и $\bar{z}$ вместо λ. Умножив получившееся равенство слева и справа на J, получим

$$\begin{aligned}&JU_n(\bar{z})JJJU_n^*(\bar{z})J-J\\ &=i(z-\bar{z})J\left[\begin{array}{c|c}\sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z) & -\sum_{k=0}^n P_k^*(z)Q_k(z)\\ \hline -\sum_{k=0}^n Q_k^*(z)P_k(z) & \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)Q_k(z)\end{array}\right]J.\end{aligned}$$

Отсюда и из (21) имеем

$$\begin{aligned}&U_n^{-1^*}(z)JU_n^{-1}(z)-J\\ &=i(z-\bar{z})\left[\begin{array}{c|c}\sum_{k=0}^n Q_k^*(z)Q_k(z) & \sum_{k=0}^n Q_k^*(z)P_k(z)\\ \hline \sum_{k=0}^n P_k^*(z)Q_k(z) & \sum_{k=0}^n P_k^*(z)P_k(z)\end{array}\right].\end{aligned} \tag{22}$$

Теорема 1. *Пусть дана проблема моментов (1) и матрицы A_k, $B_k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ определены соотношениями (7). И пусть, далее, м.ф. U_n^{-1} задана формулой (21). Рассмотрим элементарные множители Бляшке-Потапова*

$$b_0^{-1}(z)=\left[\begin{array}{c|c}O & -B_{-1}^{-1}\\ \hline B_{-1}^* & (zI-A_0)B_{-1}^{-1}\end{array}\right],\ b_1^{-1}(z)=\left[\begin{array}{c|c}O & -B_0^{-1}\\ \hline B_0^* & (zI-A_1)B_0^{-1}\end{array}\right],\dots,$$

$$b_n^{-1}(z)=\left[\begin{array}{c|c}O & -B_{n-1}^{-1}\\ \hline B_{n-1}^* & (zI-A_n)B_{n-1}^{-1}\end{array}\right]. \tag{23}$$

Здесь $B_{-1}=s_0^{-\frac{1}{2}}>O$.

Тогда для всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ имеют место равенства

$$U_n^{-1}(z)=b_n^{-1}(z)b_{n-1}^{-1}(z)\dots b_1^{-1}(z)b_0^{-1}(z). \tag{24}$$

Доказательство. Для $U_0^{-1}(z)$ формула (24) очевидна. Пусть формула (24) выполнена для $U_{n-1}^{-1}(z)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}&b_n^{-1}(z)b_{n-1}^{-1}(z)\dots b_1^{-1}(z)b_0^{-1}(z)\\ &=\left[\begin{array}{c|c}O & -B_{n-1}^{-1}\\ \hline B_{n-1}^* & (zI-A_n)B_{n-1}^{-1}\end{array}\right]U_{n-1}^{-1}(z)\\ &=\left[\begin{array}{c|c}O & -B_{n-1}^{-1}\\ \hline B_{n-1}^* & (zI-A_n)B_{n-1}^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}-Q_{n-1}(z) & -P_{n-1}(z)\\ \hline B_{n-1}Q_n(z) & B_{n-1}P_n(z)\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{c|c}-Q_n(z) & -P_n(z)\\ \hline -B_{n-1}^*Q_{n-1}(z)+(zI-A_n)Q_n(z) & -B_{n-1}^*P_{n-1}(z)+(zI-A_n)P_n(z)\end{array}\right]\\ &=\left[\begin{array}{c|c}-Q_n(z) & -P_n(z)\\ \hline B_nQ_{n+1}(z) & B_nP_n(z)\end{array}\right]=U_n^{-1}(z).\end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе и последнее равенства следуют из (21), а четвертое равенство следует из (7) и (10). □

Матрицей Вейля называется

$$W_n(z) = U_n^{-1^*}(z) J U_n^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{25}$$

Из формулы (22) имеем

$$W_n(z) = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ \hline a_{12}^*(z) & a_{22}(z) \end{array}\right]. \tag{26}$$

Здесь

$$a_{11}(z) = i(z-\bar{z}) \sum_{k=0}^{n} Q_k^*(z) Q_k(z) \tag{27}$$

$$a_{12}(z) = -iI + i(z-\bar{z}) \sum_{k=0}^{n} Q_k^*(z) P_k(z) \tag{28}$$

$$a_{22}(z) = i(z-\bar{z}) \sum_{k=0}^{n} P_k^*(z) P_k(z). \tag{29}$$

Из (25) и (21) следует, что $W_n(z) J W_n(\bar{z}) J = I$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Поэтому

$$W_n^{-1}(z) = J W_n(\bar{z}) J = \left[\begin{array}{c|c} a_{22}(\bar{z}) & -a_{12}^*(\bar{z}) \\ \hline -a_{12}(\bar{z}) & a_{11}(\bar{z}) \end{array}\right]. \tag{30}$$

Теорема 2. *При всех $z \in \mathbb{C}_+$ матрица Вейля (25) допускает представление*

$$\begin{aligned} W_n(z) = {} & \left[\begin{array}{c|c} I & a_{12}(z) a_{22}^{-1}(z) \\ \hline O & I \end{array}\right] \\ & \times \left[\begin{array}{c|c} \{i(\bar{z}-z)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar{z}) P_k(\bar{z})\}^{-1} & O \\ \hline O & -\{i(\bar{z}-z)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z) P_k(z)\} \end{array}\right] \\ & \times \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline a_{22}^{-1}(z) a_{12}^*(z) & I \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Доказательство. Из (29) и (8) следует , что в (26) матрица $a_{22}(z)$ невырождена при всех $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому

$$\begin{aligned} W_n(z) = {} & \left[\begin{array}{c|c} I & a_{12}(z) a_{22}^{-1}(z) \\ \hline O & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} a_{11}(z) - a_{12}(z) a_{22}^{-1}(z) a_{12}^*(z) & O \\ \hline O & a_{22}(z) \end{array}\right] \\ & \times \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline a_{22}^{-1}(z) a_{12}^*(z) & I \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (26) и (30) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ \hline a_{12}^*(z) & a_{22}(z) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} a_{22}(\bar z) & -a_{12}^*(\bar z) \\ \hline -a_{12}(\bar z) & a_{11}(\bar z) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & I \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$a_{11}(z)a_{22}(\bar z) - a_{12}(z)a_{12}(\bar z) = I, \quad a_{12}^*(z)a_{22}(\bar z) - a_{22}(z)a_{12}(\bar z) = O.$$

Из этих двух равенств последовательно получим

$$a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{12}(\bar z)a_{22}^{-1}(\bar z) = a_{22}^{-1}(\bar z), \quad a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z)a_{22}(\bar z) = a_{12}(\bar z).$$

Подставим выражение для $a_{12}(\bar z)$ из второго равенства в первое. Получим

$$a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z)a_{22}(\bar z)a_{22}^{-1}(\bar z) = a_{22}^{-1}(\bar z).$$

Окончательно

$$a_{11}(z) - a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) = a_{22}^{-1}(\bar z).$$

Теперь (32) можно записать в виде

$$W_n(z) = \left[\begin{array}{c|c} I & a_{12}(z)a_{22}^{-1}(z) \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} a_{22}^{-1}(\bar z) & O \\ \hline O & a_{22}(z) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline a_{22}^{-1}(z)a_{12}^*(z) & I \end{array}\right]$$

Отсюда и из (29) следует (31). □

5. Предварительные леммы. В этом разделе будут сформулированы важные для дальнейшего изложения леммы. Элементарные доказательства лемм 2-6 мы опускаем.

Пусть заданы эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m\times m}$ и невырожденная матрица $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Рассмотрим элементарный множитель Бляшке-Потапова $b(z)$ и обратный множитель $b^{-1}(z)$ следующего вида

$$b(z) = \left[\begin{array}{c|c} {B^*}^{-1}(zI - A) & {B^*}^{-1} \\ \hline -B & O \end{array}\right], \quad b^{-1}(z) = \left[\begin{array}{c|c} O & -B^{-1} \\ \hline B^* & (zI - A)B^{-1} \end{array}\right]. \tag{33}$$

Очевидно, что $b(z)b^{-1}(z) = I$. Рассмотрим матрицу Вейля

$$W(z) = b^{-1^*}(z)Jb^{-1}(z). \tag{34}$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что

$$W(z) = \left[\begin{array}{c|c} O & -iI \\ \hline iI & i(z-\bar z){B^*}^{-1}B^{-1} \end{array}\right] = J + \left[\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & i(z-\bar z){B^*}^{-1}B^{-1} \end{array}\right]. \tag{35}$$

Лемма 2. *При всех $z \in \mathbb{C}_+$ имеет место следующее представление для матрицы Вейля (34)*

$$\begin{aligned} W(z) \;=\; & \left[\begin{array}{c|c} I & -C^*(z) \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R(z) & O \\ \hline O & R^{-1}(z) \end{array}\right] \\ & \times j\left[\begin{array}{c|c} R(z) & O \\ \hline O & R^{-1}(z) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C(z) & I \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь

$$C(z) = \frac{1}{(\bar z - z)} BB^*, \quad R(z) = \left(\frac{1}{i(\bar z - z)} BB^* \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Лемма 3. *Пусть м.ф. $b^{-1}(z)$ определена формулой (33) и пусть*

$$\tilde b^{-1}(z) = I + izJ \begin{bmatrix} O \\ B^{*^{-1}} \end{bmatrix} [O \; B^{-1}] = \left[\begin{array}{c|c} I & zB^{*-1}B^{-1} \\ \hline O & I \end{array} \right]. \tag{38}$$

Тогда

$$\tilde b^{-1}(z) = \left[\begin{array}{c|c} B^{*-1} & O \\ \hline O & B \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} -A & I \\ \hline -I & O \end{array} \right] b^{-1}(z), \tag{39}$$

$$b^{-1}(z) = \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} B^* & O \\ \hline O & B^{-1} \end{array} \right] \tilde b^{-1}(z), \tag{40}$$

$$b^{-1^*}(z) J b^{-1}(z) = \tilde b^{-1^*}(z) J \tilde b^{-1}(z). \tag{41}$$

Лемма 4. *Пусть м.ф. $\tilde b^{-1}(z)$ определена формулой (38), а матрицы j и $\mathcal{V}$ – формулами (17) и (19). И пусть, далее,*

$$\hat b^{-1}(z) = I + \frac{iz}{2} j \begin{bmatrix} B^{*^{-1}} \\ B^{*^{-1}} \end{bmatrix} \cdot [B^{-1} \; B^{-1}]. \tag{42}$$

Тогда

$$\hat b^{-1}(z) = \mathcal{V} \tilde b^{-1}(z) \mathcal{V}^*. \tag{43}$$

Матрицей Вейля, ассоциированной с $\hat b^{-1}(z)$, называется

$$\mathcal{W}(z) = \hat b^{-1^*}(z) j \hat b^{-1}(z). \tag{44}$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{W}(z) = j - \frac{(z - \bar z)}{2i} \left[\begin{array}{c|c} B^{*^{-1}} B^{-1} & B^{*^{-1}} B^{-1} \\ \hline B^{*^{-1}} B^{-1} & B^{*^{-1}} B^{-1} \end{array} \right]. \tag{45}$$

Лемма 5. *Матрица Вейля (44) допускает представление ($\forall z \in \mathbb{C}_+$)*

$$\mathcal{W}(z) = \left[\begin{array}{c|c} I & -C^*(z) \\ \hline O & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R(z) & O \\ \hline O & R^{-1}(z) \end{array} \right] j$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} R(z) & O \\ \hline O & R^{-1}(z) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C(z) & I \end{array} \right]. \tag{46}$$

Здесь

$$C(z) = -\left(I + \frac{2i}{z - \bar z} BB^* \right)^{-1}, \quad R(z) = \left(I + \frac{z - \bar z}{2i} B^{*^{-1}} B^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{47}$$

причем матрица $R(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$O < R(z) < I. \tag{48}$$

Матрица $\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ называется j-унитарной, если $\mathcal{U}^* j\mathcal{U} = j$. Легко видеть, что произведение двух j- унитарных матриц является j-унитарной матрицей. Отметим (см. [7]), что

$$\mathcal{U}^* j\mathcal{U} = j \Longleftrightarrow \mathcal{U} j\mathcal{U}^* = j \Longleftrightarrow \mathcal{U}^{-1^*} j\mathcal{U}^{-1} = j \Longleftrightarrow \mathcal{U}^{-1} j\mathcal{U}^{-1^*} = j. \tag{49}$$

Равенства (49) остаются в силе, если в них j заменить на J.

Лемма 6. *Пусть даны две невырожденные матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$ такие, что $A^*JA = B^*jB$.*

Тогда матрица $\mathcal{U} = \mathcal{V}AB^{-1}$ является j- унитарной и

$$A = \mathcal{V}^*\mathcal{U}B. \tag{50}$$

Здесь матрица $\mathcal{V}$ определена формулой (19).

Лемма 7. *Пусть дана J-унитарная матрица*

$$\mathcal{M} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{2m\times 2m},\ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}^{m\times m} \tag{51}$$

такая, что матрица a_{21} невырождена.

Тогда существует невырожденная матрица $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и эрмитовы матрицы $N \in \mathbb{C}^{m\times m}_H$, $A \in \mathbb{C}^{m\times m}_H$ такие, что матрица $\mathcal{M}$ допускает единственное представление в виде произведения трех J- унитарных матриц

$$\mathcal{M} = \left[\begin{array}{c|c} T^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & N \\ \hline O & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A \end{array}\right]. \tag{52}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы

$$T = a_{21},\ A = -a_{21}^{-1} a_{22},\ N = a_{21}^* a_{11}.$$

По условию матрица $T = a_{21}$ невырождена. Отсюда и из (51) имеем

$$\mathcal{M} = \left[\begin{array}{c|c} T^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline I & -A \end{array}\right],\ X = a_{21}^* a_{12} \in \mathbb{C}^{m\times m}. \tag{53}$$

Матрица $\mathcal{M}$ и первый сомножитель в правой части (53) являются J-унитарными матрицами. Но тогда и второй сомножитель в правой части (53) является J-унитарной матрицей. Отсюда и из (49) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline I & -A \end{array}\right] J \left[\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline I & -A \end{array}\right]^* = J,\ \left[\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline I & -A \end{array}\right]^* J \left[\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline I & -A \end{array}\right] = J.$$

Или

$$\left[\begin{array}{c|c} -NX^*+XN^* & NA^*+X \\ \hline -X^*-AN^* & A^*-A \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & O \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{c|c} N^*-N & N^*A+X \\ \hline -X^*-A^*N & X^*A-A^*X \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & O \end{array}\right].$$

Отсюда

$$N=N^*,\ A=A^*,\ X=-I-NA.$$

Из этих формул и из (53) имеем

$$\mathcal{M}=\left[\begin{array}{c|c} T^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} N & X \\ \hline I & -A \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} T^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} N & -I-NA \\ \hline I & -A \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} T^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A \end{array}\right].$$

Таким образом, доказано представление (52). Ясно, что все сомножители в правой части (52) являются J-унитарными матрицами.

Докажем единственность матриц T, N и A. Действительно, пусть наряду с (52) существует еще одно представление $\mathcal{M}$ вида (52) с матрицами T_1, N_1 и A_1

$$\mathcal{M}=\left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_1 \end{array}\right].$$

Тогда имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{*^{-1}}N & T^{*^{-1}}(-I-NA) \\ \hline T & -TA \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}}N_1 & T_1^{*^{-1}}(-I-N_1A_1) \\ \hline T_1 & -T_1A_1 \end{array}\right].$$

Отсюда и из невырожденности T последовательно получаем $T=T_1$, $N=N_1$, $A=A_1$. □

6. Мультипликативные формулы. В дальнейшем мы будем рассматривать значения множителей Бляшке-Потапова, матриц Вейля и других функций в фиксированной точке $z_0\in\mathbb{C}_+$. Для упрощения записей мы часто будем опускать зависимость от z_0.

Теорема 3. *Пусть дано число $m\in\mathbb{N}$, зафиксирована некоторая точка $z_0\in\mathbb{C}_+$ и даны последовательность унитарных $m\times m$ матриц*

$$v_0=I,\ v_1,\dots,v_n,\dots,\quad \det(I-iv_1)\neq 0,\ \det(I-v_k)\neq 0,\ k\geq 2, \tag{54}$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\hat{B}_{-1}>o,\ \hat{B}_0,\ \hat{B}_1,\dots,\hat{B}_n,\dots\in\mathbb{C}^{m\times m}. \tag{55}$$

И пусть, далее,

$$R_0 = \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}^*_{-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{56}$$

$$C_0 = \frac{1}{(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}^*_{-1}, \tag{57}$$

$$R_k = \left(I + \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} \hat{B}^{*-1}_{k-1} \hat{B}^{-1}_{k-1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \ k \in \mathbb{N}, \tag{58}$$

$$C_k = -\left(I + \frac{2i}{z_0 - \bar{z}_0} \hat{B}_{k-1} \hat{B}^*_{k-1} \right)^{-1}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{59}$$

Тогда существуют последовательность эрмитовых матриц

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \mathbb{C}^{m\times m}_H \tag{60}$$

и последовательность невырожденных матриц

$$B_{-1} > O, B_0, \ldots, B_n, \cdots \in \mathbb{C}^{m\times m} \tag{61}$$

такие, что при всех целых $n \geq 0$ имеют место равенства

$$\left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} \left[\begin{array}{c|c} R_k & O \\ \hline O & R_k^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_k & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_k \end{array} \right] \right\}^* j$$
$$\times \left\{ \overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} \left[\begin{array}{c|c} R_k & O \\ \hline O & R_k^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_k & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_k \end{array} \right] \right\}$$
$$= b_0^{-1^*} b_1^{-1^*} \cdots b_n^{-1^*} J b_n^{-1} \cdots b_1^{-1} b_0^{-1}. \tag{62}$$

Здесь

$$b_0^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} O & -B_{-1}^{-1} \\ \hline B_{-1}^* & (z_0 I - A_0) B_{-1}^{-1} \end{array} \right], \ b_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} O & -B_0^{-1} \\ \hline B_0^* & (z_0 I - A_1) B_0^{-1} \end{array} \right], \ldots,$$
$$b_n^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} O & -B_{n-1}^{-1} \\ \hline B_{n-1}^* & (z_0 I - A_n) B_{n-1}^{-1} \end{array} \right], \ldots. \tag{63}$$

Доказательство. Доказательство проведем по шагам.

Шаг 1 ($n = 0$). Пусть $B_{-1} = \hat{B}_{-1}$. По матрице B_{-1} построим множитель Бляшке-Потапова

$$\tilde{b}_0^{-1} = I + iz_0 J \begin{bmatrix} O \\ B_{-1}^{*^{-1}} \end{bmatrix} [O \ B_{-1}^{-1}] = \left[\begin{array}{c|c} I & z_0 B_{-1}^{*^{-1}} B_{-1}^{-1} \\ \hline O & I \end{array} \right]. \tag{64}$$

Из (41) и (34) следует, что в левой части (36) можно заменить $W(z)$ на $\tilde{b}^{-1^*}(z) J \tilde{b}^{-1}(z)$. Теперь из (36) и (37) следует, что

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^* \\ \hline O & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array} \right] j \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array} \right] = \tilde{b}_0^{-1^*} J \tilde{b}_0^{-1}. \tag{65}$$

Причем R_0 и C_0 определяются по формулам (56) и (57) соответственно.

Следует особо отметить, что мы определили множитель Бляшке- Потапова $\tilde{b}_0^{-1}$, но не определили b_0^{-1} (см. (63) и (40))

$$b_0^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} O & -B_{-1}^{-1} \\ \hline B_{-1}^* & (z_0 I - A_0)B_{-1}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array}\right] \tilde{b}_0^{-1}.$$

Для определения множителя b_0^{-1} нужна матрица A_0, к определению которой мы и приступаем.

Легко видеть, что

$$\tilde{b}_0^{-1^*} J \tilde{b}_0^{-1} = \tilde{b}_0^{-1^*} \left[\begin{array}{c|c} B_{-1} & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1^*} \end{array}\right] J \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array}\right] \tilde{b}_0^{-1}. \qquad (66)$$

Из (66) и (65) следует, что

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^* \\ \hline O & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] j \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right]$$

$$= \tilde{b}_0^{-1^*} \left[\begin{array}{c|c} B_{-1} & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1^*} \end{array}\right] J \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array}\right] \tilde{b}_0^{-1}.$$

По лемме 6 существует j–унитарная матрица $\mathcal{U}_1$ такая, что

$$\left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array}\right] \tilde{b}_0^{-1} = \mathcal{V}^* \mathcal{U}_1 \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right]. \qquad (67)$$

Отсюда, из унитарности матрицы $\mathcal{V}$ и из (64) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{-1}\mathcal{V} &= \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] \tilde{b}_0 \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^{-1^*} & O \\ \hline O & B_{-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^{-1^*} & -zB_{-1}^{*-1} \\ \hline O & B_{-1} \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Матрицу $\mathfrak{M}_1$ *определим* равенством (a_{11}, a_{12}, a_{21}, $a_{22} \in \mathbb{C}^{m\times m}$)

$$\mathfrak{M}_1 = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right] \mathcal{U}_1^{-1}\mathcal{V}. \qquad (68)$$

Из двух последних равенств имеем

$$\mathfrak{M}_1 = \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^{-1^*} & -zB_{-1}^{*-1} \\ \hline O & B_{-1} \end{array}\right]. \qquad (69)$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} -iI & iI \\ \hline I & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline -v_1 R_0^{-1} C_0 & v_1 R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^{-1^*} & -zB_{-1}^{*-1} \\ \hline O & B_{-1} \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} -iI & iI \\ \hline I & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 B_{-1}^{-1^*} & -zR_0 B_{-1}^{*-1} \\ \hline -v_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1^*} & zv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{*-1} + v_1 R_0^{-1} B_{-1} \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{-iR_0 B_{-1}^{-1^*} - iv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1^*}}{R_0 B_{-1}^{-1^*} - v_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1^*}} \right|$$

$$\left| \frac{izR_0 B_{-1}^{*-1} + izv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{*-1} + iv_1 R_0^{-1} B_{-1}}{-zR_0 B_{-1}^{*-1} + zv_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{*-1} + v_1 R_0^{-1} B_{-1}} \right].$$

Отсюда и из (68) имеем

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} a_{21} &= R_0 B_{-1}^{-1^*} - v_1 R_0^{-1} C_0 B_{-1}^{-1^*} \\
&= R_0 B_{-1}^{-1^*} - v_1 \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}_{-1}^* \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}_{-1}^* B_{-1}^{-1^*} \\
&= R_0 B_{-1}^{-1^*} - iv_1 \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}_{-1}^* \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}_{-1}^* \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}_{-1}^* \right)^{\frac{1}{2}} B_{-1}^{-1^*} \\
&= R_0 B_{-1}^{-1^*} - iv_1 \left(\frac{1}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \hat{B}_{-1} \hat{B}_{-1}^* \right)^{\frac{1}{2}} B_{-1}^{-1^*} = \{I - iv_1\} R_0 B_{-1}^{-1^*}.
\end{aligned}$$

Теперь из (54) следует, что матрица a_{21} невырождена. Из j-унитарности матриц $\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array} \right]$ и $\mathcal{U}_1^{-1}$ следует, что матрица $\mathfrak{M}_1 = \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array} \right] \mathcal{U}_1^{-1} \mathcal{V}$ является J-унитарной (см. (18)). По лемме 7 существуют невырожденная матрица T_1 и эрмитовы матрицы N_1 и A_0 такие, что

$$\mathfrak{M}_1 = \left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array} \right]. \tag{70}$$

Последовательно воспользовавшись (68) и (70), получим

$$\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array} \right] = \mathcal{V} \mathfrak{M}_1 \mathcal{V}^* \mathcal{U}_1 = \mathcal{V} \left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array} \right] \mathcal{V}^* \mathcal{U}_1. \tag{71}$$

Теперь определим матрицу b_0^{-1} формулой

$$b_0^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array} \right] \tilde{b}_0^{-1}. \tag{72}$$

Матрицы $\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array} \right]$ и $\left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array} \right]$ являются J-унитарными. Отсюда и из (72) следует, что $\tilde{b}_0^{-1^*} J \tilde{b}_0^{-1} = b_0^{-1^*} J b_0^{-1}$. Теперь (65) можно записать в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^* \\ \hline O & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array} \right] j \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array} \right] = b_0^{-1^*} J b_0^{-1}.$$

При $n = 0$ последняя формула совпадает с формулой (62), т.к. $v_0 = I$.

Шаг 2 ($n=1$). Пусть

$$B_0^{-1}=\hat{B}_0^{-1}T_1,\quad \tilde{b}_1^{-1}=I+iz_0J\begin{bmatrix} O \\ {B_0^*}^{-1}\end{bmatrix}[O\ B_0^{-1}]. \tag{73}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^* \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & -C_1^* \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] j \\
&\quad\times\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] \\
&\quad=\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^* \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right]\mathcal{U}_1^*\mathcal{V}\left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline -I & -A_0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^* \end{array}\right] \\
&\quad\times\mathcal{V}^*\left[\begin{array}{c|c} I & -C_1^* \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] j\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right] \\
&\quad\times\mathcal{V}\left[\begin{array}{c|c} {T_1^{-1}}^* & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array}\right]\mathcal{V}^*\mathcal{U}_1\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] \\
&\quad={\tilde{b}_0^{-1}}{}^*\left[\begin{array}{c|c} B_{-1} & O \\ \hline O & {B_{-1}^{-1}}^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline -I & -A_0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^* \end{array}\right] \\
&\quad\times\mathcal{V}^*\left\{I-\frac{i\bar{z}_0}{2}\begin{bmatrix} {\hat{B}_0^*}{}^{-1} \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[\hat{B}_0^{-1}\ \hat{B}_0^{-1}]j\right\} j\left\{I+\frac{iz_0}{2}j\begin{bmatrix} {\hat{B}_0^*}{}^{-1} \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[\hat{B}_0^{-1}\ \hat{B}_0^{-1}]\right\} \\
&\quad\times\mathcal{V}\left[\begin{array}{c|c} {T_1^{-1}}^* & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{-1}^* & O \\ \hline O & B_{-1}^{-1} \end{array}\right]\tilde{b}_0^{-1} \\
&\quad={b_0^{-1}}^*\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^* \end{array}\right]\mathcal{V}^*\left\{I-\frac{i\bar{z}_0}{2}\begin{bmatrix} {\hat{B}_0^*}{}^{-1} \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[\hat{B}_0^{-1}\ \hat{B}_0^{-1}]\mathcal{V}J\mathcal{V}^*\right\} \\
&\quad\times\mathcal{V}J\mathcal{V}^*\left\{I+\frac{iz_0}{2}\mathcal{V}J\mathcal{V}^*\begin{bmatrix} {\hat{B}_0^*}{}^{-1} \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[\hat{B}_0^{-1}\ \hat{B}_0^{-1}]\right\} \\
&\quad\times\mathcal{V}\left[\begin{array}{c|c} {T_1^{-1}}^* & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right] b_0^{-1} \\
&\quad={b_0^{-1}}^*\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^* \end{array}\right]\left\{I-i\bar{z}_0\begin{bmatrix} O \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[O\ \hat{B}_0^{-1}]J\right\} \\
&\quad\times J\left\{I+iz_0J\begin{bmatrix} O \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[O\ \hat{B}_0^{-1}]\right\}\left[\begin{array}{c|c} {T_1^{-1}}^* & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right] b_0^{-1} \\
&\quad={b_0^{-1}}^*\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^* \end{array}\right]\left\{I-i\bar{z}_0\begin{bmatrix} O \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[O\ \hat{B}_0^{-1}]J\right\} \\
&\quad\times\left[\begin{array}{c|c} T_1 & O \\ \hline O & {T_1^{-1}}^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -N_1 & I \end{array}\right] J\left[\begin{array}{c|c} I & -N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^* & O \\ \hline O & T_1^{-1} \end{array}\right] \\
&\quad\times\left\{I+iz_0J\begin{bmatrix} O \\ {\hat{B}_0^*}{}^{-1}\end{bmatrix}[O\ \hat{B}_0^{-1}]\right\}\left[\begin{array}{c|c} {T_1^{-1}}^* & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right] b_0^{-1}
\end{aligned}$$

$$= b_0^{-1*}\left\{I - i\bar{z}_0\begin{bmatrix} O \\ B_0^{*-1}\end{bmatrix}[O\,\hat{B}_0^{-1}]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1*} & O \\ \hline O & T_1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I\end{array}\right] J\right\}$$

$$\times J\left\{I + iz_0 J\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^{*}\end{array}\right]\begin{bmatrix} O \\ \hat{B}_0^{*-1}\end{bmatrix}[O\,B_0^{-1}]\right\} b_0^{-1}$$

$$= b_0^{-1*}\left\{I - i\bar{z}_0\begin{bmatrix} O \\ B_0^{*-1}\end{bmatrix}[O\,B_0^{-1}]J\right\} J$$

$$\times\left\{I + iz_0 J\begin{bmatrix} O \\ B_0^{*-1}\end{bmatrix}[O\,B_0^{-1}]\right\} b_0^{-1} = b_0^{-1*}\tilde{b}_1^{-1*}J\tilde{b}_1^{-1}b_0^{-1}. \tag{74}$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (71), второе - из (67), (58), (59), (46), (42), третье - из (72) и (18), четвертое - из вида (19) матрицы $\mathcal{V}$ и ее унитарности, пятое - из J-унитарности матриц $\left[\begin{array}{c|c} T_1^{*} & O \\ \hline O & T_1^{-1}\end{array}\right]$ и $\left[\begin{array}{c|c} I & -N_1 \\ \hline O & I\end{array}\right]$, шестое - из (73) и непосредственно проверяемого равенства

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -N_1 \\ \hline O & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{*} & O \\ \hline O & T_1^{-1}\end{array}\right] J = J\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_1 & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & O \\ \hline O & T_1^{*}\end{array}\right],$$

седьмое и восьмое - из (73).

Таким образом, из (74) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^{*} \\ \hline O & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1^{*}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & -C_1^{*} \\ \hline O & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1}\end{array}\right] j$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I\end{array}\right]$$

$$= b_0^{-1*}\tilde{b}_1^{-1*}J\tilde{b}_1^{-1}b_0^{-1}. \tag{75}$$

Из J-унитарности матрицы $\left[\begin{array}{c|c} \hat{B}_0^{*} & O \\ \hline O & \hat{B}_0^{-1}\end{array}\right]$ следует, что

$$b_0^{-1*}\tilde{b}_1^{-1*}J\tilde{b}_1^{-1}b_0^{-1} = b_0^{-1*}\tilde{b}_1^{-1*}\left[\begin{array}{c|c} \hat{B}_0 & O \\ \hline O & \hat{B}_0^{-1*}\end{array}\right] J\left[\begin{array}{c|c} B_0^{*} & O \\ \hline O & B_0^{-1}\end{array}\right]\tilde{b}_1^{-1}b_0^{-1}.$$

Из последнего равенства, равенства (75) и леммы 6 следует, что существует j–унитарная матрица $\mathcal{U}_2$ такая, что

$$\left[\begin{array}{c|c} B_0^{*} & O \\ \hline O & B_0^{-1}\end{array}\right]\tilde{b}_1^{-1}b_0^{-1}$$

$$= \mathcal{V}^{*}\mathcal{U}_2\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I\end{array}\right].$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_2^{-1}\mathcal{V} &= \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right] \\
&\qquad \times \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] b_0\tilde{b}_1 \left[\begin{array}{c|c} B_0^{-1^*} & O \\ \hline O & B_0 \end{array}\right].
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Матрицу $\mathfrak{M}_2$ *определим* равенством

$$
\mathfrak{M}_2 = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ \hline b_{21} & b_{22} \end{array}\right] = \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_2 \end{array}\right] \mathcal{U}_2^{-1}\mathcal{V}, \quad b_{11},\ b_{12},\ b_{21},\ b_{22} \in \mathbb{C}^{m\times m}.
$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_2 &= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right] \\
&\times \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] b_0\tilde{b}_1 \left[\begin{array}{c|c} B_0^{-1^*} & O \\ \hline O & B_0 \end{array}\right] \\
&= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right] \mathcal{V} \\
&\times \left\{ \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & -z_0\hat{B}_{-1}^{-1^*}\hat{B}_{-1}^{-1} \\ \hline O & I \end{array}\right] \right. \\
&\times \left. \left[\begin{array}{c|c} \hat{B}_{-1}^{-1^*} & O \\ \hline O & \hat{B}_{-1} \end{array}\right] \right\} \left[\begin{array}{c|c} -A_0 & I \\ \hline -I & O \end{array}\right] \tilde{b}_1 \left[\begin{array}{c|c} B_0^{-1^*} & O \\ \hline O & B_0 \end{array}\right] \\
&= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right] \mathcal{V} \\
&\times \mathfrak{M}_1 \left[\begin{array}{c|c} -A_0 & I \\ \hline -I & O \end{array}\right] \tilde{b}_1 \left[\begin{array}{c|c} B_0^{-1^*} & O \\ \hline O & B_0 \end{array}\right] \\
&= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right] \mathcal{V} \left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I \end{array}\right] \\
&\times \left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} -A_0 & I \\ \hline -I & O \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & -z_0B_0^{*-1}B_0^{-1} \\ \hline O & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_0^{-1^*} & O \\ \hline O & B_0 \end{array}\right] \\
&= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline -v_2R_1^{-1}C_1 & v_2R_1^{-1} \end{array}\right] \mathcal{V} \left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}} & T_1^{*^{-1}}N_1 \\ \hline O & T_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_0^{-1^*} & -z_0B_0^{*-1} \\ \hline O & B_0 \end{array}\right] \\
&= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline -v_2R_1^{-1}C_1 & v_2R_1^{-1} \end{array}\right] \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c|c} iI & I \\ \hline -iI & I \end{array}\right] \\
&\times \left[\begin{array}{c|c} T_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & -T_1^{*^{-1}}z_0B_0^{*-1} + T_1^{*^{-1}}N_1B_0 \\ \hline O & T_1B_0 \end{array}\right] \\
&= \mathcal{V}^* \left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline -v_2R_1^{-1}C_1 & v_2R_1^{-1} \end{array}\right] \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & iT_1^{*^{-1}}[-z_0B_0^{*-1}+N_1B_0]+T_1B_0 \\ \hline -iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & -iT_1^{*^{-1}}[-z_0B_0^{*-1}+N_1B_0]+T_1B_0 \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} -iI & iI \\ \hline I & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} iR_1T_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & \cdots \\ \hline -v_2R_1^{-1}C_1iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*}-iv_2R_1^{-1}T_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & \cdots \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \hline [-v_2R_1^{-1}C_1-v_2R_1^{-1}+R_1]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & \cdots \end{array}\right].$$

В этой цепочке равенств первое равенство следует из (76) и определения матрицы $\mathfrak{M}_2$, второе - из унитарности матрицы $\mathcal{V}$ и формул (72), (64), третье - из (69) и четвертое из (70). Многоточием обозначены те матричные элементы матрицы $\mathfrak{M}_2$, конкретный и громоздкий вид которых мы не используем.

Таким образом,

$$\mathfrak{M}_2=\left[\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ \hline b_{21} & b_{22} \end{array}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \hline [-v_2R_1^{-1}C_1-v_2R_1^{-1}+R_1]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} & \cdots \end{array}\right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
2b_{21} &= [-v_2R_1^{-1}C_1-v_2R_1^{-1}+R_1]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} \\
&= [v_2R_1^{-1}\{-C_1-I\}+R_1]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} \\
&= \left[v_2R_1^{-1}\left\{\left(I+\frac{2i}{z_0-\bar{z}_0}\hat{B}_0\hat{B}_0^*\right)^{-1}-I\right\}+R_1\right]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} \\
&= \left[v_2R_1^{-1}\left(I+\frac{2i}{z_0-\bar{z}_0}\hat{B}_0\hat{B}_0^*\right)^{-1}\left(I-I-\frac{2i}{z_0-\bar{z}_0}\hat{B}_0\hat{B}_0^*\right)+R_1\right] \\
&\quad \times iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} \\
&= \left[-v_2R_1^{-1}\left(I+\frac{z_0-\bar{z}_0}{2i}\hat{B}_0^{-1^*}\hat{B}_0^{-1}\right)^{-1}+R_1\right]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*} \\
&= \left[-v_2R_1^{-1}R_1^2+R_1\right]iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*}=\left[-v_2+I\right]R_1iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*}.
\end{aligned}$$

Здесь третье равенство следует из (59), а шестое - из (58).

Таким образом, $2b_{21}=[-v_2+I]\,R_1iT_1^{*^{-1}}B_0^{-1^*}$. Отсюда и из (54) следует, что матрица b_{21} невырождена. Матрица $\mathfrak{M}_2$ является J-унитарной (см. аналогичные рассуждения для матрицы $\mathfrak{M}_1$ при доказательстве шага 1). По лемме 7 существуют невырожденная матрица T_2 и эрмитовы матрицы N_2 и A_1 такие, что

$$\mathfrak{M}_2=\left[\begin{array}{c|c} T_2^{*^{-1}} & O \\ \hline O & T_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & N_2 \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_1 \end{array}\right].$$

Теперь определим матрицу b_1^{-1} формулой

$$b_1^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \hat{B}_0^* & O \\ \hline O & \hat{B}_0^{-1} \end{array}\right]\tilde{b}_1^{-1}. \qquad (77)$$

Матрица $\left[\begin{array}{c|c} O & -I \\ \hline I & -A_1 \end{array}\right]$ J-унитарна. Отсюда и из (75) и (77) имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -C_0^* \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1^* \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & -C_1^* \\ \hline O & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right] j$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} R_1 & O \\ \hline O & R_1^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_1 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_0 & O \\ \hline O & R_0^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_0 & I \end{array}\right]$$

$$= b_0^{-1^*} b_1^{-1^*} J b_1^{-1} b_0^{-1}.$$

Формула (62) доказана при $n = 1$. Очевидное применение индукции по n приводит к доказательству (62) при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Теорема 4. *Пусть для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы матрицы $R_k \in \mathbb{C}_>^{m\times m}$, $C_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и унитарные матрицы $v_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $v_0 = I$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место равенства*

$$\left\{\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}}\left[\begin{array}{c|c} R_k & O \\ \hline O & R_k^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_k & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_k \end{array}\right]\right\}^* j$$

$$\times\left\{\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}}\left[\begin{array}{c|c} R_k & O \\ \hline O & R_k^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_k & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & v_k \end{array}\right]\right\}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & -\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^*\right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l\right)\right\}^* \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{cc} \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right)^*\left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right) & O \\ O & -\left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\right)^*\left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\right) \end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -\sum_{k=0}^{n}\left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^*\right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l\right) & I \end{array}\right]. \tag{78}$$

Если в этих формулах в матричных произведениях верхний индекс окажется меньше нижнего, то такое произведение считается равным единичной матрице.

Доказательство. Мы воспользуемся очевидным перестановочным соотношением ($A, D_1, D_2 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\det D_2 \neq 0$)

$$\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} D_1 & O \\ \hline O & D_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & O \\ \hline O & D_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline D_2^{-1} A D_1 & I \end{array}\right].$$

Имеет место формула

$$\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}}\left[\begin{array}{c|c} R_k & O \\ O & R_k^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_k & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ O & v_k\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \overleftarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} R_k & O \\ O & -\overleftarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^*\right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l\right) & I\end{array}\right].$$

Эта формула доказывается последовательной перестановкой вправо матриц $\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C_k & I\end{array}\right]$. Из последней формулы следует (83). □

Лемма 8. *Пусть дана матрица*

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22}\end{array}\right],\ a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} \in \mathbb{C}^{m\times m},\ \det a_{22} \neq 0.$$

И пусть, далее, матрица A представлена в виде

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline O & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} D_1 & O \\ \hline O & D_2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline N_2 & I\end{array}\right]. \tag{79}$$

Тогда матрицы в правой части (84) определены единственным образом.

Доказательство этой леммы очевидно.

Теорема 5. *Пусть дана точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$, последовательность унитарных $m \times m$ матриц*

$$v_0 = I,\ v_1, \ldots, v_n, \ldots,\quad \det(I - iv_1) \neq 0,\ \det(I - v_k) \neq 0,\ k \geq 2, \tag{80}$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\hat{B}_{-1} > O,\ \hat{B}_0,\ \hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_n, \cdots \in \mathbb{C}^{m\times m}. \tag{81}$$

И пусть матрицы R_k построены по матрицам (86) с помощью формул (56) и (58).

Тогда существует проблема моментов (1) такая, что для ассоциированных многочленов $P_k(z)$ выполняются равенства ($\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar{z}_0) P_k(\bar{z}_0)\right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0)\left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right) \times \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right), \tag{82}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z_0) P_k(z_0)\right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0)\left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^{n}} v_k^* R_k\right) \times \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k v_k\right). \tag{83}$$

Доказательство. По теореме 3 существуют последовательности матриц (60) и (61) такие, что выполнены соотношения (62). Рассмотрим рекуррентные соотношения (7)-(8), коэффициентами которых являются матрицы (60), (61) и $S = B_{-1}$. И пусть матричные многочлены $P_k(z)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определены из введенных рекуррентных соотношений. Тогда выражение в правой части (62) будет матрицей Вейля(см. (25) и (24)). Далее в правую часть (62) запишем представление матрицы Вейля (31), а левую часть (62) преобразуем с помощью (83). Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} I & -\left\{\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^*\right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l\right)\right\}^* \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} \left(\overleftarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} R_k\right)^* \left(\overleftarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} R_k\right) & O \\ \hline O & -\left(\overleftarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\right)^* \left(\overleftarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\right) \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\overrightarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l v_{l+1}^*\right) C_k \left(\overleftarrow{\prod}_{l=0}^{k-1} R_l\right) & I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & a_{12}(z_0)a_{22}^{-1}(z_0) \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} \{i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar{z}_0)P_k(\bar{z}_0)\}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & -\{i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z_0)P_k(z_0)\} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & a_{12}(z_0)a_{22}^{-1}(z_0) \\ \hline O & I \end{array}\right]^*.$$

Из этих равенств и леммы 8 имеем

$$\left(i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar{z}_0)P_k(\bar{z}_0)\right)^{-1} = \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right)^* \times \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right),$$

$$-\left(i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z_0)P_k(z_0)\right) = -\left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\right)^* \times \left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k^{-1} v_k\right).$$

По лемме 1 в этих формулах все многочлены P_k можно считать ассоциированными с некоторой проблемой моментов (1). Отсюда следуют мультипликативные формулы (82) и (83). □

По аналогии с теоремой 5 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть дана точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$, последовательность унитарных $m \times m$ матриц*

$$u_0 = I,\ u_1, \ldots, u_n, \ldots, \quad \det(u_1 - iI) \neq 0,\ \det(u_k - I) \neq 0,\ k \geq 2, \tag{84}$$

и последовательность невырожденных матриц

$$\hat{B}_{-1},\ \hat{B}_0,\ \hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_n, \cdots \in \mathbb{C}^{m\times m}. \qquad (85)$$

И пусть матрицы R_k построены по матрицам (90) с помощью формул (56) и (58).

Тогда существует проблема моментов (1) такая, что для ассоциированных многочленов $P_k(z)$ выполняются равенства $(\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} P_k^*(\bar{z}_0)P_k(\bar{z}_0)\right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0)\left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^{n}} u_k^* R_k\right)\times\left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k u_k\right) \qquad (86)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z_0)P_k(z_0)\right)^{-1} = i(\bar{z}_0 - z_0)\left(\overrightarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right)\times\left(\overleftarrow{\prod_{k=0}^{n}} R_k\right). \qquad (87)$$

Формулы (82), (83) и (86), (87) связывают аддитивные выражения в левых частях с мультипликативными в правых частях. Поэтому они называются мультипликативными формулами.

7. Ранги радиусов предельных кругов. Пусть некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+$. Рассмотрим множество матриц $\{w(z_0) : w \in \mathcal{F}_n\}$. Используя хорошо известные рассуждения (см. [6], [5]), приходим к следующему результату. Для любой матрицы $w(z_0)$ существует матрица V такая, что

$$w(z_0) = c_n(z_0) + r_n(z_0)V\rho_n(z_0), \quad V^*V \le I. \qquad (88)$$

Здесь

$$c_n(z_0) = \left[i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z_0)P_j(z_0)\right]^{-1}$$
$$\times\left[-i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{j=0}^{n} Q_j^*(z_0)P_j(z_0) - iI\right]^*$$

$$r_n(z_0) = \left[i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{j=0}^{n} P_j^*(z_0)P_j(z_0)\right]^{-\frac{1}{2}} > O, \qquad (89)$$

$$\rho_n(z_0) = \left[i(\bar{z}_0 - z_0)\sum_{j=0}^{n} P_j^*(\bar{z}_0)P_j(\bar{z}_0)\right]^{-\frac{1}{2}} > O.$$

С геометрической точки зрения соотношение (88) означает, что матрица $w(z_0)$ принадлежат матричному кругу с центром в точке $c_n(z_0)$, левым радиусом $r_n(z_0)$ и правым радиусом $\rho_n(z_0)$. Такой круг обозначим символом $K_n(z_0)$ и будем называть *кругом Вейля* в точке z_0.

Зафиксируем некоторую точку $z_0 \in \mathbb{C}_+$ и рассмотрим круги Вейля $\mathcal{K}_n(z_0)$. Известно (см. [6], [5]), что с ростом n круги Вейля вкладываются друг в друга и их пересечение является снова матричным кругом Вейля $\mathcal{K}_\infty(z_0)$, который называется *предельным кругом Вейля в точке* z_0. Центр и радиусы предельного круга Вейля задаются формулами

$$c_\infty(z_0) := \lim_{n\to\infty} c_n(z_0),\ r_\infty(z_0) := \lim_{n\to\infty} r_n(z_0),\ \rho_\infty(z_0) := \lim_{n\to\infty} \rho_n(z_0). \tag{90}$$

Из (89) следует, что последовательности в двух последних предельных переходах являются монотонно убывающими и строго положительными. Поэтому $r_\infty(z_0) \geq O$, $\rho_\infty(z_0) \geq O$.

Зафиксируем две произвольные точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_+$. По теореме С.А. Орлова (см. [6], [8]) $\operatorname{rank} r_\infty(z_1) = \operatorname{rank} r_\infty(z_2)$, $\operatorname{rank} \rho_\infty(z_1) = \operatorname{rank} \rho_\infty(z_2)$. Числа

$$m_+ = \operatorname{rank} r_\infty(z_1) = \operatorname{rank} r_\infty(z_2),\ m_- = \operatorname{rank} \rho_\infty(z_1) = \operatorname{rank} \rho_\infty(z_2). \tag{91}$$

служат мерой вырожденности матричной проблемы моментов (1).

Если $m_+ = m_- = m$, то проблема моментов (1) называется вполне неопределенной. Можно доказать (см. [1], [2]), что если хотя бы в одной точке $z_0 \in \mathbb{C}_+$ ранг хотя бы одного из радиусов предельного круга Вейля равен m, то проблема моментов (1) является вполне неопределенной. Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть дано число $m \in \mathbb{N}$ и пусть целые числа m_+ и m_- удовлетворяют условиям*

$$0 \leq m_+ \leq m - 1, \quad 0 \leq m_- \leq m - 1.$$

Тогда существует такая проблема моментов Гамбургера (1), что ранги левого и правого радиусов предельных кругов Вейля равны m_+ и m_- соответственно.

Доказательство этой теоремы основано на мультипликативных формулах (82), (83) и (86), (87) и формулах (89) для радиусов. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующего результата в [3]. Отметим только тот нюанс, что перестановочные матрицы, которые используются в [3], нужно умножать на i.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г. Бесконечные J матрицы и матричная проблема моментов // ДАН СССР. – 1949. – **69**. – N3. – С. 125-128.

2. Коган В.И. Об операторах, порожденных J_p - матрицами в случае максимальных индексов дефекта // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1970. – **11**. – С. 103-107.

3. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны-Пика // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр. – Киев: Наукова думка, 1981. – С.25-49.

4. Дубовой В.К. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. II // Теория функций, функ. анализ и их приложения. – 1982. – **37.** – С. 14-26.

5. Dubovoj V.K., Fritzsche B., Kirstein B. Matricial version of the classical Schur problem. Stuttgart-Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1992. – **129.** – 355 p.

6. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1983. – **47.** – С. 455-497.

7. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц // Исследования по теории операторов и их приложениям. Сб. науч. тр.- Киев: Наукова думка. – 1979. – С. 75-97.

8. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1976. – **40.** – N3. – С.593-644.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.928 № 711, 2005, с.156–168

Асимптотические решения сингулярно возмущенной нетеревой краевой задачи с вырождениями

Г.В. Завизион

Кировоградский педагогический университет, Украина

Предлагается способ асимптотического интегрирования сингулярно возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений с нетеровыми краевыми условиями и с вырожденной матрицей при производной. Коэффициенты решения системы дифференциальных уравнений находятся с алгебраических систем уравнений. Рассматриваются возможные случаи действия линейного краевого функционала на общее решение системы. В каждом случае показываеться метод нахождения неизвестных величин с краевых условий.
2000 Mathematics Subject Classification 34E05.

1. Введение и постановка задачи

Методом пограничных функций [1,2] строятся асимптотические решения линейной сингулярно возмущенной системы с нетеровыми краевыми условиями в критических и некритических случаях [3,4]. В данной статье предлагается способ интегрирования сингулярно возмущенной линейной нетеревой краевой задачи с вырожденной матрицей при производной.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + g(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$lx(\cdot) = a, a \in R^m, \tag{2}$$

где $\varepsilon(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$ малый параметр, $t \in [0; L]$, $h \in N$; $B(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$ - $n \times n$ матрицы, $g(t,\varepsilon)$, $x(t,\varepsilon)$ - n мерные вектора, $\alpha(t)$-скалярная функция; l - линейный ограниченный m - мерный векторный функционал $l = col(l^1 \dots l^m)$:

$C_{[0;L]} \longrightarrow R^m$, который на пространстве $C_{[0;L]}$ представим [5] интегралом Римана-Стильеса

$$lx(\cdot) = \int_0^L d\Psi(t)dt,$$

где $\Psi(t)$ - $(m \times n)$ - мерная матрица, компоненты которой есть функции ограниченной на $[0; L]$ вариации. Предполагаем выполнение условий: У$_1$) матрицы $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, вектор $g(t,\varepsilon)$ имеют разложения

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t), B(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r B_r(t), g(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r g_r(t);$$

У$_2$) функции $A_r(t)$, $B_r(t)$, $g_r(t)$, $\alpha(t)$ $(r = 0,1\ldots)$ бесконечно-дифференцируемые;

У$_3$) $det B_0(t) \equiv 0$; У$_4$) характеристическое уравнение

$$det\|A_0(t) - \omega(t)B_0(t)\| = 0$$

имеет $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, n-1})$ различных корней; У$_5$) справедливо, что

$$(B_1(t)\varphi_n(t), \psi_n(t)) \neq 0,$$

где $\varphi_n(t), \psi_n(t)$ собственные вектора с нулевыми собственными значениями соответственно матрицы $B_0(t)$ и спряженной матрицей $B_0^*(t)$; У$_6$) выполняются неравенства

$$Re\omega_i(t) < 0, Re(B_1(t)\varphi_n(t), \psi_n(t)) < 0.$$

В дальнейшем, если D - $m \times n$ мерная матрица, то через D^+ обозначим псевдообратную по Муру Пенроузу матрицу к матрице D, а через P_D и P_{D^*} ортопроекторы $P_D : R^n \to kerD$; $P_{D^*} : R^n \to kerD^*$, $D^* = D^T$. Если $rank\ P_D = r$, $rank\ P_{D^*} = d$, то обозначим через P_{D_r} и $P_{D_d^*}$ $(n \times r)$ и $(d \times m)$ - мерные матрицы, которые составлены из r линейно независимых столбцов матрицы P_D и d линейно независимых строк матрицы P_{D^*} соответственно [5].

2. Формальные разложения решений

Общее решение системы (1) имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau)\overline{c_i}(\varepsilon) +$$

$$+u_n(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda_n(\tau,\varepsilon)})\overline{c_n}(\varepsilon) + f(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau)d\tau), \qquad (3)$$

где вектора $u(t,\varepsilon)$ и скалярная функция $\lambda_j(t,\varepsilon)$ $(j=\overline{1,n})$ имеют разложения

$$u_j(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_{sj}(t), \lambda_j(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\lambda_{sj}(t), f(t,\varepsilon)=\sum_{s=\triangle}^{\infty}\varepsilon^s f_s(t); \qquad (4)$$

$\triangle=0$, если $\alpha(t)\neq\lambda_j(t)$ $(i=\overline{1,n})$; $\triangle=-1$, если $\alpha(t)$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Используя У$_1$) - У$_5$), методом из [6], находим коэфициенты разложений (4):

$\lambda_{si}=-(F_{si},\psi_i)$, $u_{sj}=H_j b_{sj}$, $b_{si}=\lambda_{si}B_0\varphi_i+F_{si}$,

$F_{si}=\sum\limits_{r=0}^{s-i}\sum\limits_{r_1=0}^{s-r}\lambda_{ri}B_{r_1}u_{s-r-r_1,i}+\lambda_{si}\sum\limits_{r=0}^{s}B_r u_{s-j,i}-\sum\limits_{r=0}^{s}A_r u_{s-r,i}+\sum\limits_{r=0}^{s-h}B_i u'_{s-h-r,i}$,

$\lambda_{sn}=-(F_{s+1,n},\psi_n)$, $b_{sn}=\lambda_{s-1,n}A_0\psi_n+F_{sn}$, $F_{sn}=\sum\limits_{r=0}^{s-2}\sum\limits_{r_1=0}^{s-1-r}\lambda_{rn}A_{r_1}u_{s-1-r-r_1,n}-$

$\sum\limits_{r=0}^{s}B_r u_{s-r,n}-\sum\limits_{r=0}^{s-h-1}\sum\limits_{r_1=0}^{s-h-1-r}\lambda_{rn}B_{r_1}u'_{s-h-1-r-r_1,n}$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,n}$

где $H_i(t)$, $H_n(t)$ полуобратные матрицы соответственно к матрицам A_0- $-\omega_i B_0(t), B_0(t)$. Обозначим

$$l(u_{si}(\cdot)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^{\cdot}\lambda_{mi}(\tau,\varepsilon)d\tau))=d_{si}(\varepsilon),$$

$$l(u_{sn}(\cdot)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^{\cdot}\frac{d\tau}{\lambda_{mn}(\tau,\varepsilon)}))=d_{sn}(\varepsilon),$$

$$l(f_s(\cdot)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^{\cdot}\alpha(\tau)d\tau))=k_s(\varepsilon), \overline{c_j}(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r c_{rj}, \qquad (5)$$
$$s=0,1\ldots, i=\overline{1,n-1}, j=\overline{1,n},$$

где $\lambda_{mj}(\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s\lambda_{sj}(t)$, $j=\overline{1,n}$.

Тогда подставляя (3) ,(4) в (2)и согласно (5) получим

$$D_0(\varepsilon)c_0(\varepsilon)=a-k_0(\varepsilon), \qquad (6)$$

$$D_0(\varepsilon)c_{l_1}(\varepsilon)=-\sum_{s=1}^{l_1}D_s(\varepsilon)c_{l_1-s}-k_{l_1}(\varepsilon), \qquad (7)$$

где $D_s(\varepsilon)$ - $m\times n$ матрица, столбцы которой векторы $d_{si}(\varepsilon)$; $c_s(\varepsilon)$ - n мерный вектор с элементами c_{si} $(s=0,1\ldots,i=\overline{1,n})$.

В зависимости от функционала l расмотрим два случая.

2.1. Пусть $d_{si}(\varepsilon)=d_{si}+O(\varepsilon^{s_1}\exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h}))$, $d_{sn}(\varepsilon)=d_{sn}+O(\varepsilon^{s_2}\exp(-\frac{\beta}{\varepsilon^{h+1}}))$,

$$k_s(\varepsilon)=k_s+O(\varepsilon^{s_1}\exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h})), s_1,s_2\in N, \alpha>0, \beta>0. \qquad (8)$$

Тогда

$$D_s(\varepsilon) = D_s + O(\varepsilon^{s_1} \exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h})) + O(\varepsilon^{s_2} \exp(-\frac{\beta}{\varepsilon^{h+1}})), \tag{9}$$

где D_s - $m \times n$ матрица, столбцы которой d_{si} $(s = 0, 1 \ldots, i = \overline{1, n})$. Под $O(\varepsilon^{s_1} \exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h})), O(\varepsilon^{s_2} \exp(-\frac{\beta}{\varepsilon^{h+1}}))$ понимают $m \times n$ матрицы, элементы которых имеют указанный порядок.

После отбрасывания экспоненционально малых елементов в (7), (8) из (6) получим

$$D_0 c_0 = a - k_0. \tag{10}$$

Предполагаем выполнение условий

У$_7$) $rank D_0 = n_1 < min(m, n)$;

У$_8$) $P_{D^*_{0_d}}(a - k_0) = 0$,

где $d = m - n_1$, $r = n - n_1$. Тогда решение уравнения (10) можно записать

$$c_0 = P_{D_{0_r}} \xi_0 + D_0^+(a_0 - k_0), \xi_0 \in R^r. \tag{11}$$

Подставим (11) в (7) при $l_1 = 1$ и пренебрегая экспоненционально малыми членами, получим

$$D_0 c_1 = -D_1 P_{D_{0_r}} \xi_0 - D_1 D_0^+(a - k_0) - k_1 \tag{12}$$

Условие существования решения уравнения (12) имеет вид

$$R\xi_0 = a_1, \tag{13}$$

где $R = P_{D^*_{0_d}} D_1 P_{D_{0_r}}$ - $d \times r$ матрица,

$$a_1 = -P_{d^*_{0_d}} D_1 D_0^+(a - k_0) - P_{D^*_{0_d}} k_1$$

Пусть выполняется условие

У$_9$) $r = d$ и $det R \neq 0$

Тогда из (13), (11) имеем

$$\xi_0 = R^{-1} a_1, c_0 = P_{D_{0_r}} R^{-1} a_1 + D_0^+(a - k_0) \tag{14}$$

Пусть найдены

$$c_s = P_{D_{0_r}} \xi_s + \overline{a}_s, s < l_1, \tag{15}$$

где
$$\overline{a_s} = -D_0^+(\sum_{j=1}^{s} D_j C_{s-j} + k_j),$$

и $\xi_s \in R^r$ определены из условия существования $s+1$ уравнения (7). Из l_1 уравнения (7) имеем
$$c_{l_1} = P_{D_{0_r}} \xi_{l_1} + D_0^+ \overline{a}_{l_1}, \tag{16}$$

ξ_{l_1} находится из условия существования решения $l_1 + 1$ уравнения (7):
$$R\xi_{l_1} = a_{l_1+1}, \tag{17}$$

где
$$a_{l_1} = -P_{D^*_{0_d}} D_1 D_0^+ \overline{a}_{l_1} - \sum_{r=2}^{l_1} P_{P^*_{0_d}} D_r c_{l_1-r} - P_{D^*_{0_d}} k_{l_1+1}.$$

Согласно условию У$_8$), из уравнения (17) найдем
$$\xi_{l_1} = R^{-1} a_{l_1+1}. \tag{18}$$

Тогда подставляя (18) в (16) имеем
$$c_j^*(\varepsilon) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \varepsilon^{l_1} \{P_{D_{0_r}} R^{-1} a_{l_1} + D_0^+ \overline{a}_{l_1}\}_j, j = \overline{1, n},$$

где $\{b\}_j$ - j координата вектора b.

Пусть вместо условия У$_9$) выполняются условия У$_{10}$) $rankR = r < d$; У$_{11}$) $P_{R^*} P_{D^*_{0_d}} = 0$. Согласно условиям У$_{10}$), У$_{11}$) существует единственное решение уравнений (13), (17) вида
$$\xi_{l_1} = R^+ a_{l_1+1}, l_1 = 0, 1 \ldots. \tag{19}$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия У$_1$) - У$_6$) и соотношение (8). Тогда краевая задача (1), (2) имеет асимптотическое решение вида (3), (4). При выполнении условий У$_7$) - У$_9$) векторы c_{l_1}, ξ_{l_1} ($l_1 = 0, 1 \ldots$) определяются по формулам (11), (14), (16), (18). При выполнении условий У $_{10}$) - У$_{11}$) векторы c_{l_1}, ξ_{l_1} определяются по формулам (16), (19).

Замечание 1. Пусть вместо условия У$_7$) выполняется условие У$_{12}$) $rankD_0 = n$. Согласно У$_8$), У$_{12}$) уравнение(10) имеет единственное решение
$$c_0 = D_0^+(a - k_0).$$

Уравнение (7) принимает вид
$$D_0 c_1 = a_1,$$

где $a_1 = -D_1 D_0^+(a - k_0) - k_1$.
Пусть выполняется условие У$_{13}$) $P_{D^*_{0_d}} a_{l_1} = 0$, $l_1 = 1, 2 \ldots$, где $a_{l_1} = -\sum\limits_{s=1}^{l_1} D_s c_{l_1 - s} - k_{l_1}$.
Тогда $c_{l_1} = D_0^+ a_{l_1}$.

Замечание 2. Пусть $rankD_0 = m$. Тогда уравнения (6), (7) всегда разрешимы и

$$c_{l_1} = P_{D_{0r}} \xi_{l_1} + D_0^+ a_{l_1}, l_1 = 0, 1 \ldots,$$

где ξ_{l_1} - произвольные r мерные векторы. Если $rankD_0 = m = n$, то c_{l_1} определяется однозначно

$$c_{l_1} = D_0^{-1} a_{l_1}.$$

Замечание 3. Если $m = n$, то при выполнении условий У$_7$) - У$_9$) теорема 1 дает возможность построить асимптотическое решение краевой задачи (1),(2).

2.2 Пусть

$$d_{ri}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} d_{rij}\varepsilon^j + O(\varepsilon^{s_1} \exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h})),$$

$$d_{rn}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} d_{rnj}\varepsilon^j + O(\varepsilon^{s_2} \exp(-\frac{\beta}{\varepsilon^{h+1}})), \tag{20}$$

$$k_r(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} k_{rj}\varepsilon^j + O(\varepsilon^{s_3} \exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h})), i = \overline{1, n-1}, s_3 \in N, r = 0, 1 \ldots .$$

Для нахождения коэффициентов разложений (20) используем идеи из [7]. После отбрасывания экспоненционально малых членов матрицу $D_0(\varepsilon)$ представим

$$D_0(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} D_{0j}\varepsilon^j,$$

где $D_{0j} = (d_{01j}, d_{02j}, \ldots, d_{0,n-1,j}, d_{0nj})$, $j = \overline{0, s}$.
Величины $c_{0i}(\varepsilon)$ $(i = \overline{1, n})$ будем искать в виде

$$c_{0i}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} c_{0ij}\varepsilon^j,$$

и тогда $c_0(\varepsilon)$ имеет вид

$$c_0(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} \overline{c}_{0j}\varepsilon^j, \tag{21}$$

где $\overline{c}_{0j} = (c_{01j}, c_{02j}, \ldots, c_{0nj})$, $j = \overline{0, s}$. Учитывая (20), (21) систему (6) запишем

$$Q\overline{c}_0 = \overline{a}_0, \tag{22}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} D_0 & & & & \\ D_{01} & D_{00} & & 0 & \\ D_{02} & D_{01} & D_{00} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{0s} & D_{0,s-1} & \dots & \dots & D_{00} \\ 0 & D_{0s} & \dots & \dots & D_{01} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & D_{0s} \end{pmatrix}$$

-$(2s+1)m\times(s+1)n$ - мерная матрица, $\overline{c}_0 = (\overline{c}_{00}, \overline{c}_{01}, \dots, \overline{c}_{0s})^T$ - $(s+1)n$- мерный вектор, $\overline{a}_0 = (a - k_{00}, -k_{01}, \dots, -k_{0s}, 0, \dots 0)^T$ – $(2s+1)$- мерный вектор, Пусть выполняется условие: У$_{15}$) $rankQ = (s+1)n = (2s+1)m$. Тогда $detQ \neq 0$ и уравнение (22) имеет решение

$$\overline{c}_0 = Q^{-1}\overline{a}_0.$$

Отсюда $\overline{c}_{0j} = [Q^{-1}\overline{a}_0]_j$ - вектор, который содержит от $1 + jn$ до $(j+1)n$ $(j = \overline{0,s})$ элементов вектора $Q^{-1}\overline{a}_0$. Пренебрегая экспоненционально малыми членами и учитывая (21) правую часть уравнения (7) при $l_1 = 1$ запишем в виде

$$a_1(\varepsilon) = D_1(\varepsilon)c_0 - k_1(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2s} a_{1j}\varepsilon^j,$$

где

$$a_{1j} = -\sum_{r=0}^{j} D_{1r}\overline{c}_{0,j-r} - k_{1j}$$

Величины $c_{1i}(\varepsilon)$ $(i = \overline{1,n})$ ищем в виде

$$c_{1i}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} c_{1ij}\varepsilon^j,$$

и тогда

$$c_1(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} \overline{c}_{1j}\varepsilon^j, \tag{23}$$

где $\overline{c}_{1j} = (c_{11j}, c_{12j}, \dots, c_{1nj})$ $j = \overline{0,s}$.

Учитывая (23), систему (7) при $l_1 = 1$ перепишем

$$Q\overline{c}_1 = \overline{a}_1, \tag{24}$$

где $\overline{c}_1 = (\overline{c}_{10}, \overline{c}_{11}, \dots, \overline{c}_{1s})$ - $(s+1)n$ мерный вектор, $\overline{a}_1 = (a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1,2s})$ - $(2s+1)m$ мерный вектор. Тогда из (24) получим

$$\overline{c}_{1j} = [Q^{-1}\overline{a}_1]_j.$$

Правую часть уравнения (7) запишем

$$a_{l_1} = -\sum_{r=1}^{l_1} D_r(\varepsilon)c_{l_1-r}(\varepsilon) - k_{l_1}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2s} a_{l_1 j}\varepsilon^j,$$

где

$$a_{l_1 j} = -\sum_{r=0}^{j} D_{l_1 r}\overline{c}_{l_1, j-r} - k_{l_1 j}, D_r(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} D_{rj}\varepsilon^j, c_{l_1-r}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{s} \overline{c}_{l_1-r,j}\varepsilon^j, \quad (25)$$

$D_{rj} = (d_{r1j}, d_{r2j}, \ldots, d_{rnj}), \overline{c}_{l_1-r,j} = (c_{l_1-r,1j}, c_{l_1-r,2j}, \ldots, c_{l_1-r,nj})$.
Система (7) принимает вид

$$Q\overline{c}_{l_1} = \overline{a}_{l_1}, \quad (26)$$

где $\overline{c}_{l_1} = (\overline{c}_{l_1 0}, \ldots, \overline{c}_{l_1 s})^T$ - $(s+1)n$ мерный вектор, $\overline{a}_{l_1} = (a_{l_1 0}, \ldots, a_{l_1, 2s})^T$ - $(2s+1)m$ мерный вектор.
Тогда из (26) получим

$$\overline{c}_{l_1 j} = [Q^{-1}\overline{a}_{l_1}]_j, j = \overline{0, s}. \quad (27)$$

Пусть вместо У$_{15}$) выполняются условия

У$_{16}$) $rankQ = n_1 \le min((s+1)n, (2s+1)m)$,

У$_{17}$) $P_{Q_d^*}\overline{a}_0 = 0$,

где $d = (2s+1)m - n_1$, $r = (s+1)n - n_1$.
Решение уравнения (22) запишем

$$\overline{c}_0 = P_{Q_r}\xi_0 + Q^+\overline{a}_0, \xi_0 \in R^r$$

и тогда

$$\overline{c}_{0j} = [P_{Q_r}]_j\xi_0 + [Q^+\overline{a}_0]_j, j = \overline{0, s}. \quad (28)$$

Пренебрегая экспоненционально малыми членами правая часть уравнения (7) при $l_1 = 1$ имеет вид

$$a_1(\varepsilon) = -\sum_{j=0}^{2s}(F_j\varepsilon_0 + b_{1j})\varepsilon^j$$

где $F_j = \sum_{i=0}^{j} D_{1i}[P_{Q_r}]_{j-i}$ - $m \times r$ матрица, $b_{1j} = \sum_{i=0}^{j} D_{1i}[Q^+\overline{a}_0]_{j-1} - \delta_{js}k_{1j}$ - $(m \times 1)$ матрица, $\delta_{js} = \{^{1, 0 \le j \le s}_{0, j > s}$.
Тогда уравнение (26) при $l_1 = 1$ перепишем

$$Q\overline{c}_1 = -F\xi_0 - \overline{b}_1 \quad (29)$$

где $\overline{F}$, $\overline{b}_1$ векторы, соответственно с компонентами F_j, b_{1j} $(j = \overline{0, 2s})$.
Условие существования решения уравнения (29) приводит к уравнению

$$R\xi_0 = -P_{Q_d^*}\overline{b}_1, \tag{30}$$

где $R = P_{Q_d^*}\overline{F}$ - $(d \times r)$ матрица.
При выполнении условия $У_9$) из (30) найдем

$$\xi_0 = -R^{-1}P_{Q_d^*}\overline{b}_1.$$

Если уравнение (26) имеет решение, тогда получим

$$\overline{c}_{l_1} = P_{Q_r}\xi_{l_1} + Q^+\overline{a}_{l_1}, \xi_{l_1} \in R^r, \tag{31}$$

и

$$\overline{c}_{l_1} = [P_{Q_r}]_j\xi_l + [Q^+\overline{a}_{l_1}]_j, j = \overline{0, s}.$$

правую часть $(l_1 + 1)$ уравнения (7) запишем

$$a_{l_1+1} = -\sum_{j=0}^{2s}(F_j\xi_l + b_{l_1+1,j})\varepsilon^j$$

где

$$b_{l_1+1,j} = \sum_{i=0}^{j}(D_{1i}[Q^+\overline{a}_{l_1}]_{j-i} - \sum_{r_1=2}^{l_1+1} D_{r_1 i}c_{l_1+1-r_1,j-i} - \delta_{js}k_{l_1+1,j}).$$

Тогда $(l_1 + 1)$ уравнение (7) запишем

$$Q\overline{c}_{l+1} = -F\xi_l - b_{l+1}. \tag{32}$$

При выполнении $У_9$) из условия существования решения уравнения (32) найдем

$$\xi_l = -R^{-1}P_{Q_d^*}\overline{b}_{l+1} \tag{33}$$

Если условие $У_9$) не выполняется, а выполняется $У_{10}$) и условие $У_{18}$) $P_{R^*}P_{Q_d^*} = 0$, то уравнение (30) имеет единственное решение

$$\xi_0 = -R^+P_{Q_d^*}\overline{b}_1, \tag{34}$$

для любого вектора $\overline{b}_1$.
Для нахождения $\overline{c}_{l_1}$ из (31) вектор $\xi_{l_1} \in R^r$ имеет вид

$$\xi_{l_1} = -R^+P_{Q_d^*}\overline{b}_{l_1+1}. \tag{35}$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $У_1$) - $У_6$) и соотношения (20). Тогда краевая задача (1), (2) имеет асимптотическое решение вида (3), (4). При выполнении условия $У_{15}$) величины c_{l_1} определяются по формулам (25), (27). Если вместо условия $У_{15}$) справедливы $У_{16}$), $У_{17}$), $У_9$) то имеют место равенства (28), (30), (31), (33). Если условие $У_9$) не выполняется, а выполняются $У_{10}$), $У_{18}$), то ξ_{l_1} $(l_1 = 0, 1\ldots)$ определяется с (31), (34), (35).

3. Асимптотическое свойство формальных решений

Имеет место следующая лемма.

Лемма. Если выполняются неравенства

$$Re(\sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^r \lambda_{ri}(t)) \leq 0, Re\lambda_{mn}(t,\varepsilon) \leq 0, \forall t \in [0,L], i=\overline{1,n-1}, \tag{36}$$

то справедливы равенства

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} - A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}P(t,\varepsilon), \tag{37}$$

$$ly(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}T(\varepsilon) \tag{38}$$

где $P(t,\varepsilon), T(\varepsilon) - n$ мерные вектора, ограничены при $\varepsilon \to 0$, причем $T(\varepsilon) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=r}^{m} \varepsilon^{r-1}D_j(\varepsilon)C_{m+r-j}(\varepsilon) = 0(1), \varepsilon \to 0$; вектор $y(t,\varepsilon)$ определяется равенством $y(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)$, а $x(t,\varepsilon), x_m(t,\varepsilon)$ соответственно точное решение и $m-$тое приближение системы (1). Сделаем в уравнении (37) замену по формуле

$$y(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) \tag{39}$$

где $U_m(t,\varepsilon) - n \times n$ матрица, которая состоит из столбцов $u_{mj}(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r u_{rj}(t), j = \overline{1,n}$. Тогда уравнение (37) имеет вид

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = (A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t,\varepsilon)U'_m(t,\varepsilon))z(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}P(t,\varepsilon). \tag{40}$$

Прибавим и вычтем в скобках правой части равенства (40) выражение $B(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)\Lambda_m(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon)$ и упрощая получим

$$\varepsilon^h\frac{dz}{dt} = \Lambda_m(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + \varepsilon^m P_1(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + \varepsilon^m P_2(t,\varepsilon), \tag{41}$$

где

$$P_1(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m}(B(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon))^{-1}(A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t,\varepsilon)U'_m(t,\varepsilon) -$$

$-U_m(t,\varepsilon)\Lambda_m(t,\varepsilon)) = O(1)$, при $\varepsilon \to 0$,
$P_2(t,\varepsilon) = \varepsilon(B(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon))^{-1}P(t,\varepsilon) = O(1)$, при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим

$\overline{\Lambda}(\varepsilon) = \max\limits_{t\in[0;L]} \|exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^{t} \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)\|$ при $0 \leq t_1 \leq t, P_i(\varepsilon) = \max\limits_{[o;L]}\|P_i(t,\varepsilon)\|$, $i = 1,2; q(\varepsilon) = \varepsilon^{m-h}LP_1(\varepsilon)\overline{\Lambda}(\varepsilon), \|z\| = \max\limits_{t,\varepsilon}\|z(t,\varepsilon)\|$;

$$\overline{D}(\varepsilon) = l(U_m(\cdot,\varepsilon)exp(\varepsilon^h\int_0^{t_1} \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)) = \overline{D} + O(\varepsilon^{s_1}exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon^h}))+$$

$$+O(\varepsilon^{s_2}exp(-\frac{\beta}{\varepsilon^{h+1}})),$$

$$\overline{g}(\varepsilon) = -\varepsilon^{m-h}l(U_m(\cdot,\varepsilon)\int\limits_0^{\cdot} exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{\cdot}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau))(P_1(t_1,\varepsilon)U_m(t_1,\varepsilon)z(t_1,\varepsilon)+$$
$$+P_2(t_1,\varepsilon))dt_1$$

где $\overline{D} - m \times n$ постоянная матрица.

Пусть выполняются условия:
$У_{18})q(\varepsilon) < \frac{1}{2}$; $У_{19})\overline{\Lambda}(\varepsilon)\|\eta(\varepsilon)\| + \varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_2(\varepsilon) + R\varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_1(\varepsilon) \leq R$;
$У_{20})\|\overline{D}^+\| \leq d_1, \|l(\psi)\| \leq d_2\psi$; $У_{21})rank\overline{D} = n$; $У_{22})P_{\overline{D}^*}(\overline{g}(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}T(\varepsilon)) = 0$;
$У_{23})d_1\overline{\Lambda}(\varepsilon)\varepsilon^{m-h}(d_2L\overline{\Lambda}(\varepsilon)(P_1(\varepsilon)R + P_2(\varepsilon)) + \varepsilon^{h+1}T(\varepsilon)) + \varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_2(\varepsilon) \leq \frac{R}{2}$,
где $R, d_i(i = 1,2)-$ положительные числа, $\eta(\varepsilon)-$ векторная величина которая зависит только от ε.

Запишем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (41):

$$z(t,\varepsilon) = exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)\eta(\varepsilon)+ \qquad (42)$$

$$+\varepsilon^{m-h}\int\limits_0^t exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)(P_1(t_1,\varepsilon)z(t_1,\varepsilon) + P_2(t_1,\varepsilon))dt_1$$

Выясним условие существования решения уравнения (42). Для этого найдем

$$\|\overline{R}z_2 - \overline{R}z_1\| \leq q(\varepsilon)\|z_2 - z_1\| \qquad (43)$$

где $\overline{R}-$правая часть уравнения (42). Согласно условию $У_{18}$), неравенства (43) и принципа сжатых отображений, следует существование решения уравнения (42). Используя (42) оценим норму

$$\|z\| \leq \overline{\Lambda}(\varepsilon)\|\eta(\varepsilon)\| + \varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_1(\varepsilon)\|z\| + \varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_2(\varepsilon)$$

Согласно $У_{19}$) с последнего неравенства найдем

$$\|z\| \leq \frac{\overline{\Lambda}(\varepsilon)\|\eta(\varepsilon)\| + \varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_2(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)} \leq R \qquad (44)$$

Подставим (39), (42) в (38), используя явный вид $\overline{D}(\varepsilon)$ и пренебрегая в полученом равенстве экспоненционально малыми членами, имеем

$$\overline{D}\eta(\varepsilon) = \overline{g}(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}T(\varepsilon). \qquad (45)$$

Условия $У_{21}$), $У_{22}$) обеспечивают существование единственного решения $\eta(\varepsilon)$ уравнения (45):

$$\eta(\varepsilon) = \overline{D}^+(\overline{g}(\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}T(\varepsilon)) \qquad (46)$$

Используя условие $У_{20}$) с уравнения (46) оценим норму

$$\|\eta(\varepsilon)\| \leq d_1 \varepsilon^{m-h}(d_2 L\overline{\Lambda}(\varepsilon)(P_1(\varepsilon)R + P_2(\varepsilon)) + \varepsilon^{h+1}T(\varepsilon)) \quad (47)$$

Решение уравнения (42) найдем с помощью итерраций:

$$z^{(0)}(t,\varepsilon) = 0,$$

$$z^{(l)}(t,\varepsilon) = exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)\eta(\varepsilon) + \quad (48)$$

$$+\varepsilon^{m-h}\int_0^t exp(\varepsilon^{-h}\int_{t_1}^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau)(P_1(t_1,\varepsilon)z^{(l-1)}(t_1,\varepsilon) + P_2(t_1,\varepsilon))dt_1, l = 1,2...$$

Используя итерации (48) и воспользовавшись условиями $У_{23}$), $У_{18}$) и оценкою (47) получим следующие оценки

$$\|z^{(1)} - z^{(0)}\| \leq \overline{\Lambda}\|\eta(\varepsilon)\| + \varepsilon^{m-h}L\overline{\Lambda}(\varepsilon)P_2(\varepsilon) \leq \frac{R}{2}, \quad (49)$$

$$\|z^{(l+1)} - z^{(l)}\| \leq q^l\|z^{(1)} - z^{(0)}\| \leq \frac{R}{2^{l+1}}, l = 0,1...$$

Неравества (49) обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость последовательных приближений (48). С неравенств (49), следует что

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq \sum_{l=0}^{\infty}\|z^{(l+1)} - z^{(l)}\| \leq R. \quad (50)$$

С неравенств (47), (50) и уравнения (42) имеем оценку

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq C_1\varepsilon^{m-h}, \quad (51)$$

где C_1– постоянная, которая не зависит от ε. С (39) и (51) получим оценку

$$\|y(t,\varepsilon)\| = \|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{m-h}, \quad (52)$$

где $C = C_1 \max_{t,\varepsilon}\|U_m(t,\varepsilon)\|$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Если выполняется неравенство (36) и условия $У_{18}$)-$У_{23}$), то справедливо неравенство (52).

4. Выводы

Построены асимптотические решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с нетеровыми краевыми условиями и вырождениями. При этом коэффициенты решения сисетмы находятся с алгебраической системы уравнений. Перспективно использовать предложенный метод в случае кратных корней характеристического уравнения и нелинейных систем дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука,– 1973.–272 с.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М: Изд-во Моск. ун-та,– 1978. – 106 с.

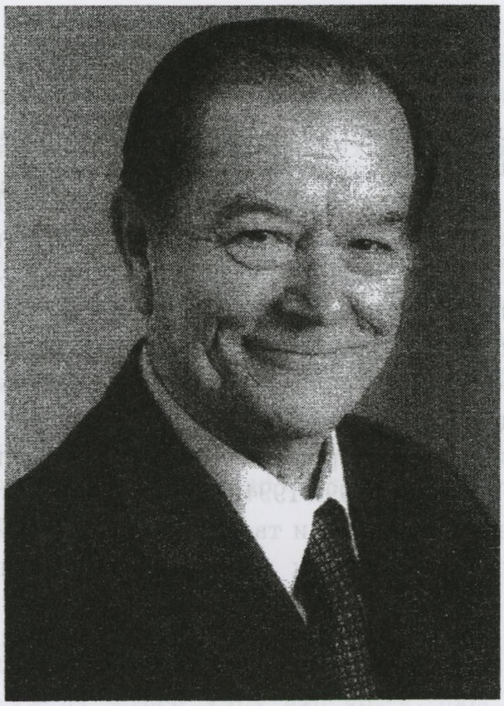
3. Самойленко А.М,Бойчук А.А., Каранджулов Л.И. Линейные нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением. // Дифференц. уравнения., – 2001. АС-37, **9** – С. 1186 – 1193.

4. Каранджулов Л.И., Бойчук А.А, Божко В.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной ленейной краевой задачи // Докл. НАН Украины. – 1994. – **4** – С. 7–10.

5. Бойчук А.А., Журавлев Б.Ф, Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. - Киев: Ин-т математики НАН Украины,– 1995. –320 с.

6. Самойленко А.М, Шкіль М.І, Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., – 294 с.

7. Karandzhulov L.I. Asymptotic solution of defenite class of singularly perturbed linear boundary-value problems for ordinary differential equations // Annuaire de l'universite de Sofia , Mathematiques et mecanique.-1997.–**91**–P. 79–95.



ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ЩЕРБИНА

К 70-летнему юбилею профессора Щербины Владимира Александровича.

Щербина В.А. родился 3 февраля 1935 года в городе Макеевка Донецкой области в семье инженера-строителя. Мама была бухгалтером. В 1952 году с медалью окончил 131 среднюю школу города Харькова и был принят на инженерно физический факультет ХПИ. В то время там читал лекции по математике чл.-корр. АН УССР Н. И. Ахиезер и доцент И. М. Глазман. В 1954 году по совету Наума Ильича Владимир Александрович перешёл на физико-математический факультет ХГУ, который окончил в 1957 году и стал аспирантом профессора М. С. Лившица. Уже через год Владимир Александрович прикомандировался к академику Н. Н. Боголюбову в МГУ. В 1962 году защитил кандидатскую диссертацию по квантовой теории поля. Основным результатом диссертации стала регуляризация коэффициентов ряда теории возмущений для матрицы рассеяния системы взаимодействующих полей. По окончании аспирантуры Владимир Александрович до 1974 года работал в математическом отделе физико-технического института низких температур. Основные результаты докторской диссертации были получены Владимиром Александровичем во время работы во ФТИНТе. В 1974 году перешёл на работу в ХГУ на должность заведующего кафедрой математической физики механико-математического факультета. В 1976 году защитил докторскую диссертацию в Математическом институте им. В. А. Стеклова в Москве. Основной результат работы: решение задачи построения матрицы рассеяния для систем взаимодействующих полей в классе формальных степенных рядов без ультрафиолетовых расходимостей. Под руководством Щербины В. А. защищены 10 кандидатских диссертаций и три его бывших аспиранта - доктора наук, профессора ХНУ. Уже более 10 лет научные интересы Щербины В. А. связаны с краевыми задачами электродинамики и механики сплошных сред и их численным моделированием их решений. Владимир Александрович активно участвовал в общественной и политической жизни независимой Украины. С 1990 по 1994 г.г. - депутат Верховной Рады и Харковской областной Рады. Председатель фракции Новой Украины в Верховной Раде и сопредседатель объединения "Новая Украина"(1991-1994 г.г.). Свой юбилей Владимир Александрович встретил в расцвете сил и творческой энергии. Друзья и сотрудники желают Щербине В. А. долгих лет жизни, активной и плодотворной работы.

АНОТАЦІЇ

УДК 517.9

Про деяку властивість сім'ї унитарних операторів, що комутують з точністю до сталої

Г е ф т е р С. Л. , Щ е р б и н а Т. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–7 .

Ми вивчаємо сім'ї унитарних операторів у гільбертовому просторі H, що комутують з точністю до сталої. Якщо така сім'я породжує у рівномірній топології алгебру $B(H)$ усіх обмежених лінійних операторів, то ми доводимо, що розмірність простору H скінченна і існують деякі унітарні оператори $v_1, v_2, \ldots, v_m \in S$, що породжують $B(H)$, і такі, що $(\lambda_j v_j)^n = I$ $(j = 1, \ldots, m)$, де $n = \dim H$ і λ_j - деякі сталі з одиничним модулем.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.9

Оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса

М а с с а л і т і н а Є. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 8–16 .

Дана оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса з даними на характеристиках.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.948

О классе нестаціонарних кривих в гильбертовому просторі

Х а т а м л е х Р. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 17–22 .

Досліджується характер нестаціонарності кривої у гильбертовому просторі, які визначаються неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням. Права частина рівняння $L_t y = x(t)$ задається напівгрупою операторів з обмеженим інфінітезимальним оператором. Для вивчення нестаціонарності вводиться інфінітезимальна функція, для якої за допомогою трикутних моделей квазиунітарних операторів отримані канонічні зображення.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.977

Робастні системи. Синтез обмеженого управління

К о р о б о в В. І., Г а в р и л я к о В. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 23–27 .

Для керованої робастной системи розв'язується задача синтезу обмеженого управління, що задовольняє заданим обмеженням і переводячого будь-яку точку фазового простору в початок координат за кінцевий час. Рішення засновано на методі функцій керованості.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.934

Стабілізація лінійних автономних дискретних систем

К о р о б о в В. І., Л у ц е н к о А. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту, 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 28–36 .

У роботі досліджуються умови, при яких дискретна автономна система $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ може бути стабілізована. Доведено теорему, що містить декілька еквівалентних алгебраїчних та геометричних необхідних і достатніх умов стабілізуємості.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.9

Інтервали Вейля, асоційовані з задачею Неванліни-Піка у класі $R[a,\ b]$

С є р і к о в а І. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 37–54 .

У цій статті введено матричні інтервали Вейля, асоційовані з урізаною повністю невизначеною задачею Неванліни-Піка у класі R[a, b]. Показано, що при додаванні інтерполяційних умов інтервали Вейля вкладаються один у другий. Доведено, що інтервали Вейля повністю заповнюються значеннями рішень задачі Неванліни-Піка у відповідній точці. Введені граничні інтервали Вейля, які повністю заповнюються значеннями рішень відповідної задачі. Отриман критерій повної невизначенності нескінченної задачі Неванліни-Піка.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.96

Глобальний атрактор сингулярно збуреної системи Захарова

Щ е р б и н а О. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 55–67 .

У данній роботі розглядається регуляризація системи Захарова на основі сингулярного збурення оператора Лапласа бігармонічним оператором з малим коефіцієнтом. Головним результатом є доказ збіжності атракторів сингулярно збурених систем до атрактора двомірної системи Захарова.

Бібліогр.: 14 найм.

УДК (531.36+539.3): 534.1

Дискретне моделювання стаціонарних хвильових процесів у тонкому шарі за симетричною деформацією

Л и м а р е н к о Ю. О., Ш а м р о в с ь к и й О. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 68–79 .

Запропоновано дискретну модель тонкого пружного шару. Розглянено задачу про поширення поздовжньої гармонічної хвилі в тонкому шарі. Представлено графіки дисперсійних співвідношень, які отримано на основі дискретної моделі та альтернативних континуальних моделей. Результати досліджень показали, що запропонована дискретна модель не поступається континуальним моделям теорії пластин та наближається, за своїми характеристиками, до моделі, що базується на рівняннях теорії пружності.

Мал.: 3. Бібліогр.: 15 найм.

УДК 517.948

Перетворення де Бранжа відносно кола

З о л о т а р ь о в В. О., С и р о в а ц ь к и й В. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 80–92 .

Для операторів близьких до унітарних побудован аналог перетворення Л. де Бранжа. У цьому випадку гільбертовий простір цілих функцій утворюють двомірні вектор-функції. Знайден вигляд відтворювального ядра в цьому гільбертовому просторі та отримано рівність Парсеваля для побудованого узагальнення перетворення Л. де Бранжа.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.574

Функція Йєссена субгармонійної майже періодичної функції

Р а х н і н А. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 93–103 .

Для субгармонійної майже періодичної функції $u(z)$ вводиться аналог функції Йєссена та вивчається зв'язок цієї функції з асимптотичними властивостями функції $u(z)$.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 517.968.519.6

Чисельно аналітичний метод для спектрального аналізу електромагнітного поля в пласкому резонаторі

М і т і н а І. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 104–120 .

В роботі запропоновано чисельно аналітичний метод спектрального аналізу електромагнітного поля в пласкому резонаторі. Метод забезпечує швидку збіжність та високу точність у випадку гладких меж резонатору. Порушено питання про побічні еффекти методу потенціалів, які призводять до появи паразитних частот у спектрі. Проведено аналіз результатів чисельних експериментів, ілюструючих можливості запропонованої методиці.

Мал.: 5. Бібліогр.: 6 найм.

УДК 514

Комплексні підмноговиди з цілком геодезичним грасмановим образом

Л е й б і н а О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 121–126

Отримано класифікацію комплексних підмноговидів $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ з невиродженим цілком геодезичним грасмановим образом.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.5

H_2 регулярні пари операторів і стійки півгрупи операторів

А р о в а З. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 127–131 .

У даній статті деякі попередні результати автора, одержані для J-узлів Лівшица-Бродського із строго регулярними характеристичними матрицями-функціями, узагальнюються на випадок операторнозначних характеристичних функцій. Дані результати отримані у зв'язку з рішенням більш загальної проблеми для класу строго H_2 -регулярных пар операторів $A \in L(X)$, у наслідок чого одержана умова для таких пар, при якій півгрупа операторів $T(t) = e^{iAt}, t \geq 0$ є стійкою.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.5

Про ранги радіусів граничних кіл Вейля, асоційованих з матричною проблемою моментів Гамбургера

Д ю к а р е в Ю. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 132–155 .

Метою цієї статті є повне дослідження радіусів матричних кол Вейля, асоційованих з матричною проблемою моментів Гамбургера. Зокрема, ми вивчили мультиплікативну структуру радіусів. Нехай m визначає розмір матричних моментів. Як відомо, ранги граничних радіусів m_+ та m_- задовольняють нерівностям $0 \leq m_+, m_- \leq m$ і максимального значення m вони досягають одночасно. Нехай m_+ та m_- визначають довільні цілі числа, які задовольняють нерівностям $0 \leq m_+, m_- \leq m - 1$. У статті доведено, що існує така проблема моментів Гамбургера, що m_+ та m_- являються рангами граничних радіусів.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.928

Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної нетерової крайової задачі з виродженими

З а в і з і о н Г. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2005, № 711. Математика, прикладна математика і механіка, с. 156–168 .

Пропонується спосіб асимптотичного інтегрування сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з нетеровими краевими умовами та з виродженою матрицею при похідній. Коефіцієнти формального роз'язку системи диференціальних рівнянь знаходяться з алгебраїчної системи рівнянь. Розглядаються можливі випадки дії краевого лінійного функціонала на загальний розв'язок системи. В кожному випадку показується метод знаходження невідомих величин з краевих умов.

Бібліогр.: 7 найм.

ЗМІСТ

CONTENTS

Visit our Web-page

http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

to find

- **Information for Manuscript Preparation**
- **Abstracts**
- **Editorial Board**

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету імені. В.Н.Каразіна
№ 711 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 30.12.05 р.
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Друк ризограф.
Умовн.– друк. арк. – 11,6
Обл.– вид. арк. – 13,5
Наклад 100 прим.
Ціна договірна

20-50

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет імені. В.Н.Каразіна
Видавничий центр ХНУ.

Надруковано ФОП "Петрова І.В."
61144, м. Харків, вул. Гв. Широнінців, 79в, к. 137
Свідоцтво про держреєстрацію В00 № 948011 від 03.01.03р.