

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА
ННІ «ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ ТА ФІЗИКИ ПЛАЗМИ

Пояснювальна записка

до дипломного проєкту (роботи)

МАГІСТРА

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему:

укр. Власні коливання плазмового циліндра в магнітному полі

англ. Eigen oscillations of a plasma cylinder in a magnetic field

Виконав: студент 2 курсу навчання
за ОНП магістр
спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали
освітня програма: Експериментальна ядерна фізика та
(назва)
фізика плазми

Сморцов М.Ю.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Керівник: д.ф.-м.н., професор КПФФП ННІ «ФТФ»

Гаркуша І.Є.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Консультант: д.ф.-м.н., заст. директора з наукової роботи
ННЦ ХФТІ

Греков Д.Л.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Рецензент: к.ф.-м.н., ст.н.с. ННЦ ХФТІ

Лелеко Я.Ф.

(прізвище, ім'я, по батькові)

(особистий підпис)

Харків – 2025 рік

АНОТАЦІЯ

Ідея застосовувати керований термоядерний синтез в промисловості, хоча й вже давно окупила себе завдяки створенню багатьох дотичних технологій, лишається не втіленою. Однією з перешкод на шляху її реалізації є труднощі з нагріванням плазми. На практиці, вагомих успіхів досягнуто в нагріванні плазми електромагнітними хвилями з частотою порядку циклотронної частоти іонів. Теоретичні дослідження, проведені в цій роботі, є дотичними до згаданого механізму нагрівання, а також до зворотного ефекту, тобто перетворення енергії заряджених частинок на енергію інтенсивного електромагнітного випромінювання.

ABSTRACT

Idea of using a controlled thermonuclear fusion in industry, although have already paid off due to creation of many related technologies, remains unrealized. Among other obstacles on the way of its realization, there are difficulties with heating plasma. In practice, significant successes have been achieved at heating plasma by electromagnetic waves with frequency of order of cyclotron frequency of ions. Theoretical investigations conducted in this work are related to the mentioned heating mechanism, as well as to a reverse effect, which is transformation of energy of charged particles into one of electromagnetic radiation.

	3
ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 ПЛАЗМА ПРЯМОКУТНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	5
1.1. Модель плазми в прямокутній системі координат.....	5
1.2. Поширення хвиль прямокутною плазмою.....	7
РОЗДІЛ 2 ПЛАЗМА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	17
2.1. Модель плазми в циліндричній системі координат.....	17
2.2. Виведення основних рівнянь.....	19
2.3. Поширення поперечно-магнітної хвилі (TMX)	20
2.4. Поширення поперечно-електричної хвилі (TEX).....	25
2.5. Дисперсійні співвідношення TMX і TEX в плазмі.....	30
2.6. Виведення рівняння на резонансні криві та його аналіз	32
ВИСНОВКИ	38
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	39

ВСТУП

Дослідження взаємодії плазми з електромагнітними хвилями являє собою важливу галузь класичної електродинаміки. Серед відомих ефектів, що досягаються завдяки взаємодії плазми з хвилями, особливе місце займає нагрівання плазми, на яку накладено зовнішнє магнітне поле. Актуальність цього питання полягає в тому, що ефективне поглинання плазмою енергії високочастотних хвиль є найбільш вірогідним кандидатом в якості основного методу нагрівання плазми до температур, необхідних для “запалення” керованого термоядерного синтезу.

Незважаючи на велику кількість досліджень стосовно поширення хвиль в плазмі, справедливим є твердження, що існує певна кількість не досліджених конфігурацій можливих установок. Серед таких конфігурацій є і досить прості, тобто такі, що значна частина їх дослідження піддається аналітичним обчисленням.

В першому розділі цієї роботи розглянуто дещо абстрактну задачу – поведінка хвиль на пласкій границі двох напівнескінчених однорідних плазмових середовищ. Тим не менш, цікаво, яких ефектів можна при цьому досягти. Поведінку хвиль поблизу границі квазінейтральних іонізованих середовищ досліджено, наприклад, в [7] і [8].

Натомість дослідження, проведені в другому розділі, стосуються резонансних властивостей циліндричної плазми в циліндричному хвилеводі. Дослідження за схожих умов зустрічаються в [6] і [9]. Роботи [1] і [4] присвячені безпосередньо дослідженню дисперсійних характеристик хвиль в циліндричних плазмових хвилеводах, а в [5], до того ж, враховано вплив поверхневого струму. Зацікавленість щодо обчислення резонансних властивостей циліндричної замагніченої плазми спричинена тим, що енергію власних коливань такої системи можна перетворювати на енергію ВЧ випромінювання, подібно до того, як це відбувається в гіротронах.

РОЗДІЛ 1 ПЛАЗМА ПРЯМОКУТНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Модель плазми в прямокутній системі координат

Дослідження поширення хвиль плазмою слід почати з формування моделі, що характеризує це середовище.

Передусім, спроектуємо осі так, що зовнішнє магнітне поле буде описуватись вектором індукції

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z), \quad (1.1)$$

а хвильовий вектор довільної хвилі – вектором

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel}) \quad (1.2)$$

Тоді в гідродинамічному наближенні плазма характеризуватиметься тензором діелектричної проникності $\varepsilon(\omega)_{ik} = \varepsilon_{ik}$, що має такий явний вид:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

компоненти якого у нерелятивістському безіткневому наближенні визначаються виразами

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \\ \varepsilon_2 = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2}, \\ \varepsilon_3 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \end{cases} \quad (1.4)$$

де $\omega_{p\alpha}^2$ – квадрат плазмової частоти частинки сорту α ,

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha}, \quad (1.5)$$

а $\omega_{c\alpha}$ – циклотронна частота тієї ж частинки,

$$\omega_{c\alpha} = \left| \frac{q_\alpha \mathbf{B}}{m_\alpha c} \right| \quad (1.6)$$

Враховуючи квазінейтральність плазми $\sum_\alpha q_\alpha n_\alpha = 0$, для водневої плазми, за частот порядку циклотронної частоти іонів, $\omega \sim \omega_{ci}$, маємо наступні наближені вирази компонентів діелектричної провідності (1.4):

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega \omega_{pi}^2}{\omega_{ci}(\omega_{ci}^2 - \omega^2)} \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (1.9)$$

Підставляючи у векторні рівняння Максвелла вираз для хвилі $\mathbf{E} \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, з урахуванням закону Ома

$$j_i = \sigma_{ik} E_k = \frac{\omega}{4\pi i} (\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}), \quad (1.10)$$

отримуємо вирази, що характеризують дисперсійні властивості системи:

$$N_+^2 = N_{x,+}^2 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 - N_z^2), \quad (1.11)$$

$$N_-^2 = N_{x,-}^2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - N_z^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - N_z^2)}{\varepsilon_1 - N_z^2}, \quad (1.12)$$

де $N_i^2 = \frac{k_i^2 c^2}{\omega^2}$. Вираз N_+^2 відповідає повільній, або звичайній електромагнітній хвилі, а N_-^2 – швидкій, або незвичайній хвилі.

1.2. Поширення хвиль прямокутною плазмою

Результати, наведені в роботі [2], демонструють, зокрема, що в неоднорідній плазмі з концентрацією, що лінійно зростає, за слабкої неоднорідності зовнішнього магнітного поля, однаковим значенням $N_-^2 > 0$ відповідають різні густини плазми, а також різні значення N_+^2 . При цьому відповідні значення N_+^2 мають різний знак, що й видно на рис. 1.1:

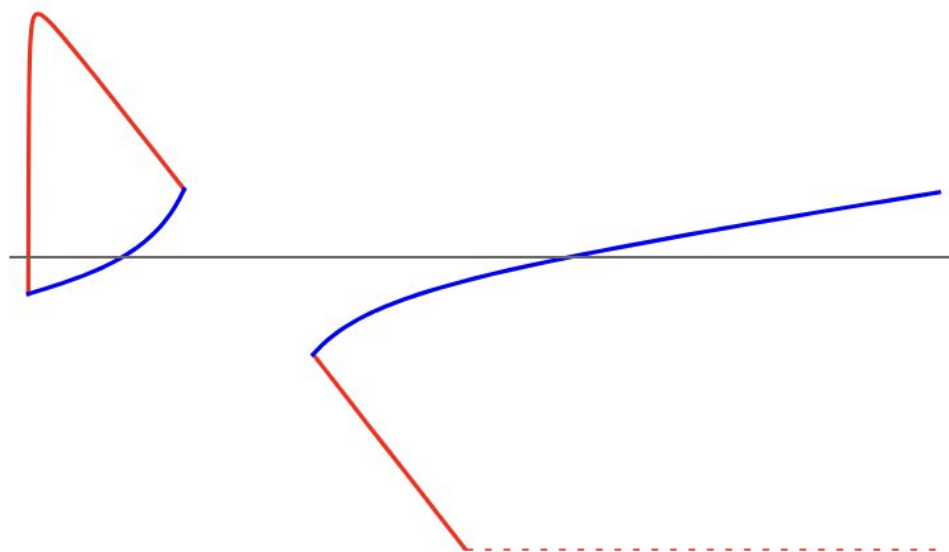


Рис. 1.1. Дисперсійні криві повільної хвилі (має малий бар'єр непрозорості $N_+^2(x \rightarrow 0) < 0$; зображена червоним кольором) і швидкої хвилі (має більший бар'єр непрозорості $N_-^2(x \rightarrow 0) < 0$; зображена синім кольором).

Певний інтерес являє дослідження задачі про поширення електромагнітних хвиль в двох однорідних плазмових середовищах, що граничать одне з одним, і мають різну концентрацію, проте однакові значення N_-^2 . Якщо відомі амплітуда падаючої хвилі і її частота, можна знайти амплітуди решти хвиль, опираючись на модель плазми і на граничні умови.

Задля визначеності, покладемо концентрацію плазми в області «1» ($x < 0$) більшою за концентрацію в області «2» ($x > 0$), тобто задана хвиля, що прямує з $x = -\infty$ в бік другої області, падає на межу з плазмою меншої густини. Тоді $N_+^{(2)^2} = N_+^2 > 0$, і в другій області повільна хвиля є об'ємною, а

$N_+^{(1)2} = N_s^2 < 0$, і в першій області повільна хвиля є поверхневою. Амплітуду E_i падаючої хвилі покладімо такою, що

$$|E_i|^2 = A^2 = 1 \quad (1.13)$$

Представимо розв'язки наявних хвиль. Падаюча швидка хвиля:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0i} = \mathbf{E}_i e^{i(k_-x + k_z z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{0i} = \mathbf{B}_i e^{i(k_-x + k_z z - \omega t)} \end{cases}; \quad (1.14)$$

відбита швидка хвиля:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_r e^{i(-k_-x + k_z z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{0r} = \mathbf{B}_r e^{i(-k_-x + k_z z - \omega t + \pi)} \end{cases}; \quad (1.15)$$

швидка хвиля, що пройшла:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0t-} = \mathbf{E}_- e^{i(k_-x + k_z z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{0t-} = \mathbf{B}_- e^{i(k_-x + k_z z - \omega t)} \end{cases}; \quad (1.16)$$

відбита повільна хвиля:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0s} = \mathbf{E}_s e^{\kappa_s x} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{0s} = \mathbf{B}_s e^{\kappa_s x} e^{i(k_z z - \omega t + \pi)} \\ \kappa_s = \frac{\omega}{c} \text{Im}(N_s) = -i \frac{\omega}{c} N_s \end{cases}; \quad (1.17)$$

повільна хвиля, що пройшла:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{0t+} = \mathbf{E}_+ e^{i(k_+x + k_z z - \omega t)} \\ \mathbf{B}_{0t+} = \mathbf{B}_+ e^{i(k_+x + k_z z - \omega t)} \end{cases} \quad (1.18)$$

Підставляючи наведені розв'язки ((1.14)-(1.18)) до векторних рівнянь Максвелла, отримуємо системи лінійних рівнянь.

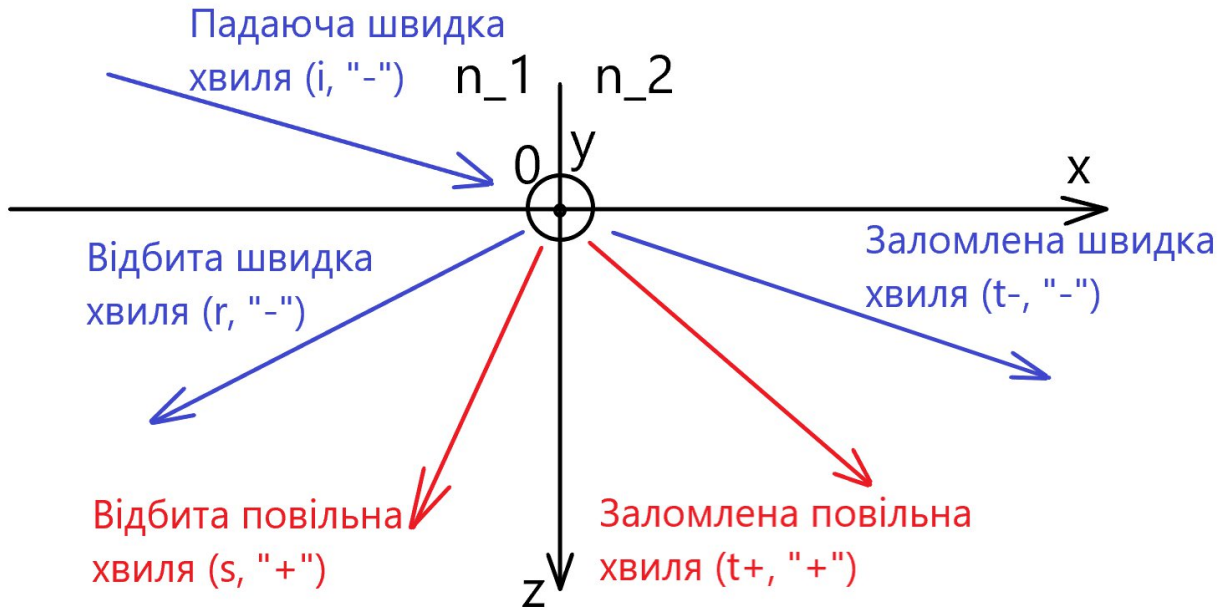


Рис. 1.2. Хвилі поблизу межі двох плазмових середовищ

Для падаючої швидкої хвилі:

$$\begin{cases} N_z B_{y-} = \varepsilon_1^{(2)} E_{x-} + i\varepsilon_2^{(2)} E_{y-} \\ N_z B_{x-} - N_- B_{z-} = i\varepsilon_2^{(2)} E_{x-} - \varepsilon_1^{(2)} E_{y-}, \\ N_- B_{y-} = -\varepsilon_3^{(2)} E_{z-} \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} -N_z E_{y-} = B_{x-} \\ N_z E_{x-} - N_- E_{z-} = B_{y-} \\ N_- E_{y-} = B_{z-} \end{cases} \quad (1.20)$$

Для відбитої швидкої хвилі:

$$\begin{cases} -N_z B_{ry} = \varepsilon_1^{(1)} E_{rx} + i\varepsilon_2^{(1)} E_{ry} \\ N_z B_{rx} + N_- B_{rz} = -i\varepsilon_2^{(1)} E_{rx} + \varepsilon_1^{(1)} E_{ry}, \\ -N_- B_{ry} = \varepsilon_3^{(1)} E_{rz} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\begin{cases} N_z E_{ry} = B_{rx} \\ N_z E_{rx} + N_- E_{rz} = -B_{ry} \\ N_- E_{ry} = B_{rz} \end{cases} \quad (1.22)$$

Для заломленої швидкої хвилі:

$$\begin{cases} N_z B_{y-} = \varepsilon_1^{(2)} E_{x-} + i\varepsilon_2^{(2)} E_{y-} \\ N_z B_{x-} - N_- B_{z-} = i\varepsilon_2^{(2)} E_{x-} - \varepsilon_1^{(2)} E_{y-} , \\ N_- B_{y-} = -\varepsilon_3^{(2)} E_{z-} \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\begin{cases} -N_z E_{y-} = B_{x-} \\ N_z E_{x-} - N_- E_{z-} = B_{y-} \\ N_- E_{y-} = B_{z-} \end{cases} \quad (1.24)$$

Для відбитої повільної хвилі:

$$\begin{cases} -N_z B_{sy} = \varepsilon_1^{(1)} E_{sx} + i\varepsilon_2^{(1)} E_{sy} \\ N_z B_{sx} + N_s B_{sz} = -i\varepsilon_2^{(1)} E_{sx} + \varepsilon_1^{(1)} E_{sy} , \\ -N_s B_{sy} = \varepsilon_3^{(1)} E_{sz} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} N_z E_{sy} = B_{sx} \\ N_z E_{sx} + N_s E_{sz} = -B_{sy} \\ N_s E_{sy} = B_{sz} \end{cases} \quad (1.26)$$

Для заломленої повільної хвилі:

$$\begin{cases} N_z B_{y+} = \varepsilon_1^{(2)} E_{x+} + i\varepsilon_2^{(2)} E_{y+} \\ N_z B_{x+} - N_+ B_{z+} = i\varepsilon_2^{(2)} E_{x+} - \varepsilon_1^{(2)} E_{y+} , \\ N_+ B_{y+} = -\varepsilon_3^{(2)} E_{z+} \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\begin{cases} -N_z E_{y+} = B_{x+} \\ N_z E_{x+} - N_+ E_{z+} = B_{y+} \\ N_+ E_{y+} = B_{z+} \end{cases} \quad (1.28)$$

Розв'язуючи кожен з систем відносно компоненти B_z , отримуємо поляризаційні співвідношення.

Для падаючої швидкої хвилі:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ix} = -\frac{i\varepsilon_2^{(1)}}{N_-(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2)} B_{iz} \\ E_{iy} = \frac{1}{N_-} B_{iz} \\ E_{iz} = \frac{i\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_3^{(1)}(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2)} B_{iz} \\ B_{ix} = -\frac{N_z}{N_-} B_{iz} \\ B_{iy} = -\frac{i\varepsilon_2^{(1)} N_z}{N_-(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2)} B_{iz} \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Для відбитої швидкої хвилі:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{rx} = -\frac{i\varepsilon_2^{(1)}}{N_-(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2)} B_{rz} \\ E_{ry} = \frac{1}{N_-} B_{rz} \\ E_{rz} = -\frac{i\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_3^{(1)}(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2)} B_{rz} \\ B_{rx} = \frac{N_z}{N_-} B_{rz} \\ B_{ry} = \frac{i\varepsilon_2^{(1)} N_z}{N_-(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2)} B_{rz} \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Для заломленої швидкої хвилі:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{x-} = -\frac{i\varepsilon_2^{(2)}}{N_-(\varepsilon_1^{(2)} - N_z^2)} B_{z-} \\ E_{y-} = \frac{1}{N_-} B_{z-} \\ E_{z-} = \frac{i\varepsilon_2^{(2)}}{\varepsilon_3^{(2)}(\varepsilon_1^{(2)} - N_z^2)} B_{z-} \\ B_{x-} = -\frac{N_z}{N_-} B_{z-} \\ B_{y-} = -\frac{i\varepsilon_2^{(2)} N_z}{N_-(\varepsilon_1^{(2)} - N_z^2)} B_{z-} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Для відбитої повільної хвилі:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{sx} = \frac{iN_s}{\varepsilon_2^{(1)}} B_{sz} \\ E_{sy} = \frac{1}{N_s} B_{sz} \\ E_{sz} = \frac{i\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(1)} N_z} B_{sz} \\ B_{sx} = \frac{N_z}{N_s} B_{sz} \\ B_{sy} = -\frac{i\varepsilon_1^{(1)} N_s}{\varepsilon_2^{(1)} N_z} B_{sz} \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Для заломленої повільної хвилі:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{x+} = \frac{iN_+}{\varepsilon_2^{(2)}} B_{z+} \\ E_{y+} = \frac{1}{N_+} B_{z+} \\ E_{z+} = -\frac{i\varepsilon_1^{(2)}}{\varepsilon_2^{(2)} N_z} B_{z+} \\ B_{x+} = -\frac{N_z}{N_+} B_{z+} \\ B_{y+} = \frac{i\varepsilon_1^{(2)} N_+}{\varepsilon_2^{(2)} N_z} B_{z+} \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Варто зазначити, що при отриманні поляризаційних співвідношень для обох повільних хвиль було знехтувано кількома доданками, ґрунтуючись на наступних нерівностях:

$$|N_{s,+}^2| \approx |\varepsilon_3^{(1),(2)}| \gg |\varepsilon_1^{(1),(2)}| \sim |\varepsilon_2^{(1),(2)}| \gg |N_z^2| \quad (1.34)$$

Надалі для розв'язання задачі необхідно залучити граничні умови на поверхні $x = 0$, в яких ми припускаємо, що на межі розділу відсутні поверхневі заряди і струм:

$$\begin{cases} D_x^{(1)} = D_x^{(2)} \\ E_y^{(1)} = E_y^{(2)} \\ E_z^{(1)} = E_z^{(2)} \\ B_x^{(1)} = B_x^{(2)} \\ B_y^{(1)} = B_y^{(2)} \\ B_z^{(1)} = B_z^{(2)} \end{cases}, \quad (1.35)$$

або в явному вигляді:

$$\begin{cases} \varepsilon_1^{(1)} (E_{ix} + E_{rx} + E_{sx}) + i\varepsilon_2^{(1)} (E_{iy} + E_{ry} + E_{sy}) = \\ \quad = \varepsilon_1^{(2)} (E_{x-} + E_{x+}) + i\varepsilon_2^{(2)} (E_{y-} + E_{y+}) \\ E_{iy} + E_{ry} + E_{sy} = E_{y-} + E_{y+} \\ E_{iz} + E_{rz} + E_{sz} = E_{z-} + E_{z+} \\ B_{ix} + B_{rx} + B_{sx} = B_{x-} + B_{x+} \\ B_{iy} + B_{ry} + B_{sy} = B_{y-} + B_{y+} \\ B_{iz} + B_{rz} + B_{sz} = B_{z-} + B_{z+} \end{cases} \quad (1.36)$$

Невідомими є 24 компоненти полів відбитих і заломлених хвиль. Поляризаційні співвідношення забезпечують 20 лінійно незалежних рівнянь, тож необхідно обрати чотири граничні умови з наступних шести $(D_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(1)}}{N_- \varepsilon_1^{(1)}} B_{rz} + \frac{\varepsilon_1^{(1)} N_s}{\varepsilon_2^{(1)}} B_{sz} + \frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(2)}}{N_- \varepsilon_1^{(1)}} B_{z-} - \frac{\varepsilon_1^{(2)} N_+}{\varepsilon_2^{(2)}} B_{z+} = \frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(1)}}{N_- \varepsilon_1^{(1)}} B_{iz} \\ B_{iz} + B_{rz} = B_{z-} \\ \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(1)}} B_{sz} = -\frac{\varepsilon_1^{(2)}}{\varepsilon_2^{(2)}} B_{z+} \\ B_{iz} - B_{rz} = B_{z-} \\ \frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(1)}}{N_- \varepsilon_1^{(1)}} B_{rz} - \frac{\varepsilon_1^{(1)} N_s}{\varepsilon_2^{(1)}} B_{sz} + \frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(2)}}{N_- \varepsilon_1^{(1)}} B_{z-} - \frac{\varepsilon_1^{(2)} N_+}{\varepsilon_2^{(2)}} B_{z+} = \frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(1)}}{N_- \varepsilon_1^{(1)}} B_{iz} \\ B_{iz} + B_{rz} + B_{sz} = B_{z-} + B_{z+} \end{array} \right. , \quad (1.37)$$

де ми нехтуємо « E_z »-компонентами швидких хвиль і « E_y », « B_x »-компонентами повільних хвиль, обґрунтовуючи це нерівностями (1.34).

У системі (1.37) вперше маємо суперечності між граничними умовами. Наприклад, або умови на E_y і B_x суперечать одна одній, або, вочевидь, $B_{rz} = 0$. Щоб виправити таку неоднозначність, застосуємо разом з граничними умовами (1.36) лише системи рівнянь (1.29), (1.30) і (1.31), що утворені з поляризаційних співвідношень лише швидких хвиль, і, таким чином, випробуємо їх у дещо простішій задачі.

Дослідімо, який розв'язок матиме така система рівнянь. Введемо сталу

$$\theta = \frac{(\varepsilon_1^{(1)} - N_z^2) \cdot \varepsilon_2^{(2)}}{(\varepsilon_1^{(2)} - N_z^2) \varepsilon_2^{(1)}} \quad (1.38)$$

Для подальшого аналізу амплітуд слід використовувати саме (1.38), однак для визначення “правильних” граничних умов можна спростити (1.38) до

$$\theta = \frac{\varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_2^{(2)}}{\varepsilon_1^{(2)} \varepsilon_2^{(1)}} \quad (1.39)$$

На 12 невідомих компонент «r» і «t-» хвиль маємо 10 “поляризаційних” лінійно незалежних рівнянь, тож їх слід доповнити двома граничними умовами. З наведених шести граничних умов обираємо умови на тангенціальні

компоненти магнітної індукції, B_y і B_z . Умова на E_y у даному випадку збігається з умовою на B_z ; E_z є малими величинами, оскільки пропорційні $\frac{1}{\varepsilon_3}$; умова на B_x суперечить умові на B_z через знак у виразі для B_{rz} (інакше мали б ще один збіг з B_z); умова на D_x суперечить умовам на B_z (оскільки $\theta \neq 0$ і $B_{z-} \neq 0$) і B_y (оскільки $B_{rz} \neq 0$). Підставляючи відповідні поляризаційні співвідношення у обрані граничні умови, маємо:

$$\begin{cases} B_{rz} + \theta B_{z-} = B_{iz} \\ -B_{rz} + B_{z-} = B_{iz} \end{cases}, \quad (1.40)$$

звідки

$$\begin{cases} B_{z-} = \frac{2}{1+\theta} B_{iz} = \frac{2\varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_1^{(2)}}{\varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)}\varepsilon_1^{(1)}} B_{iz} \\ B_{rz} = \frac{1-\theta}{1+\theta} B_{iz} = \frac{\varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)}\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)}\varepsilon_1^{(1)}} B_{iz} \end{cases} \quad (1.41)$$

Формули (1.41) є аналогічними формулам Френеля, що непрямо свідчить про правильність рівнянь і вибору граничних умов. Ці вирази слід підставити у решту поляризаційних співвідношень, після чого можна порахувати квадрати амплітуд обох полів будь-яких хвиль $|A_a|^2 = |A_{ax}|^2 + |A_{ay}|^2 + |A_{az}|^2$, окрім E_{az} , якою ми нехтуємо, ґрунтуючись нерівностями (1.34). Зокрема:

$$|E_i|^2 = \frac{B_{iz}^2}{N_-^2} \left(\frac{\varepsilon_2^{(1)2} + \varepsilon_1^{(1)2}}{\varepsilon_1^{(1)2}} \right), \quad (1.42)$$

тож величину B_{iz}^2 тепер можна легко вирахувати, застосувавши умову (1.13)

Решта квадратів амплітуд через B_{iz} виражається наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} |B_i|^2 = \frac{B_{iz}^2}{N_-^2} \left(\frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(1)2} + N_z^2 \varepsilon_1^{(1)2} + N_-^2 \varepsilon_1^{(1)2}}{\varepsilon_1^{(1)2}} \right) \\ |E_-|^2 = \frac{4B_{iz}^2}{N_-^2} \cdot \frac{\varepsilon_2^{(1)2} (\varepsilon_1^{(2)2} + \varepsilon_2^{(2)2})}{(\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)})^2} \\ |B_-|^2 = \frac{4B_{iz}^2}{N_-^2} \cdot \frac{\varepsilon_2^{(1)2} (N_z^2 \varepsilon_2^{(2)2} + N_z^2 \varepsilon_1^{(2)2} + N_-^2 \varepsilon_1^{(2)2})}{(\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)})^2} \\ |E_r|^2 = \frac{B_{iz}^2}{N_-^2} \left(\frac{\varepsilon_2^{(1)2} + \varepsilon_1^{(1)2}}{\varepsilon_1^{(1)2}} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)}} \right)^2 \\ |B_r|^2 = \frac{B_{iz}^2}{N_-^2} \left(\frac{N_z^2 \varepsilon_2^{(1)2} + N_z^2 \varepsilon_1^{(1)2} + N_-^2 \varepsilon_1^{(1)2}}{\varepsilon_1^{(1)2}} \right) \left(\frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)}} \right)^2 \end{array} \right. \quad (1.43)$$

Вирази для випадку, коли присутні лише швидкі хвилі, отримані з використанням лише граничних умов на тангенціальні компоненти індукції магнітного поля, і ці вирази принаймні не суперечать один одному. Для включення повільних хвиль до розгляду, необхідно залучити ще дві граничні умови, і виникає гіпотеза, що це мають бути умови на тангенціальні компоненти напруженості електричного поля. Випробуємо цю гіпотезу, розв'язуючи іншу задачу – на власні коливання плазмового циліндра.

РОЗДІЛ 2

ПЛАЗМА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

2.1. Модель плазми в циліндричній системі координат

В цій частині установка являє собою порожній металічний циліндр, на який накладено зовнішнє магнітне поле $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_z B_0$, і в центрі якого знаходиться плазмовий циліндр.

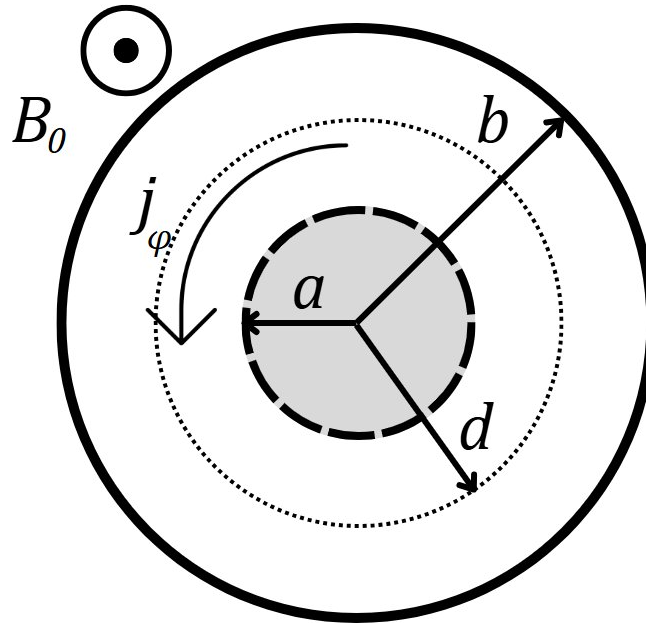


Рис. 2.1. Циліндричний плазмовий потік в циліндричній камері в магнітному полі.

Характеристики плазми, як і раніше, визначаються тензором ε_{ik} . Векторним рівнянням Максвелла

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{cases}, \quad (2.1)$$

де струм визначається законом Ома, (1.10), в циліндричній системі координат відповідає хвильовий розв'язок виду

$$E, B \propto \psi(k_{\perp} r) \cdot \exp(i(m\varphi + k_{\parallel} z - \omega t)) \quad (2.2)$$

Величини $k_{\parallel}$ і ω , а отже, і $N_{\parallel}$, визначаються характеристиками антени, і є постійними. Випадок, коли $N_{\parallel} < 1$, проаналізовано в роботі [5]. В рамках поточної роботи проаналізуємо поширення хвиль і власні коливання при $N_{\parallel} > 1$.

Підставляючи (2.2) в (2.1), маємо систему частково лінеаризованих скалярних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = \frac{-ic}{\omega r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - N_{\parallel} E_{\varphi} \\ B_{\varphi} = N_{\parallel} E_r + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ B_z = \frac{-ic}{\omega r} E_{\varphi} - \frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} + \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_1 E_r + i\varepsilon_2 E_{\varphi} = \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + N_{\parallel} B_{\varphi} \\ i\varepsilon_2 E_r - \varepsilon_1 E_{\varphi} = N_{\parallel} B_r + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \varepsilon_3 E_z = \frac{ic}{\omega r} B_{\varphi} + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial r} - \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Слід зауважити, що камера являє собою циліндричний хвилевід. Електромагнітну хвилю, що поширюється таким хвилеводом, можна надати у вигляді суми ТЕ і ТМ хвиль. Це дві поперечні хвилі, що поширюються вакуумним проміжком незалежно одна від одної. У ТЕ-хвилі дорівнює нулю компонента E_z , а у ТМ-хвилі – компонента B_z . Ці хвилі збуджують відповідні хвилі у плазмі. Отже, поклавши окремо $E_z = 0$ або $B_z = 0$, матимемо два розв'язки задачі. Ці розв'язки мають враховувати геометрію схеми, зображеної на рис. 2.1, відповідно, для кожної хвилі необхідно виконати зшивання полів на трьох границях, що розділяють чотири області: «3» – $r < a$ – плазма, що характеризується тензором ε_{ik} ; «2» і «1» – $a < r < d$ і $d < r < b$ – вакуумні проміжки; «0» – $r > b$ – металева стінка. Вздовж поверхні $r = d$, яка розділяє області «2» і «1», тече поверхневий електричний струм.

2.2. Виведення основних рівнянь

Позбуваючись компонент B_r і B_φ в системі (2.3), маємо наступні вирази для E_r і E_φ :

$$E_r = \frac{c}{\omega N_p^2} \left(-p \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{m}{r} B_z + i N_\parallel \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i p N_\parallel m}{r} E_z \right) \quad (2.4)$$

$$E_\varphi = \frac{c}{\omega N_p^2} \left(-i \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{i p m}{r} B_z - p N_\parallel \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{N_\parallel m}{r} E_z \right), \quad (2.5)$$

$$\text{де } p = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - N_\parallel^2}, \quad N_p^2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - N_\parallel^2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - N_\parallel^2)}{\varepsilon_1 - N_\parallel^2}.$$

Тут ми скористались тим, що, згідно (2.2), для функцій, що визначають компоненти полів, власне значення оператора $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ дорівнює im . Підставляючи щойно отримані E_r і E_φ , повертаємось до B_r і B_φ :

$$B_r = \frac{c}{\omega N_p^2} \left(\frac{m N^2}{r} E_z + N_\parallel \left(\frac{i p m}{r} B_z + p N_\parallel \frac{\partial E_z}{\partial r} + i \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \right) \quad (2.6)$$

$$B_\varphi = \frac{c}{\omega N_p^2} \left(i N^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} + N_\parallel \left(-p \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{i p N_\parallel m}{r} E_z - \frac{m}{r} B_z \right) \right), \quad (2.7)$$

де $N^2 = N_\parallel^2 + N_p^2$. Підстановки (2.4) і (2.5) у вираз на B_z системи (2.3), а (2.6) і (2.7) у вираз на E_z системи (2.3), дають наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} (\varepsilon_1 - N_\parallel^2) \hat{L} B_z + \frac{\omega^2}{c^2} ((\varepsilon_1 - N_\parallel^2)^2 - \varepsilon_2^2) B_z - i N_\parallel \varepsilon_2 \hat{L} E_z = 0 \\ i N_\parallel \varepsilon_2 \hat{L} B_z + (\varepsilon_1 (\varepsilon_1 - N_\parallel^2) - \varepsilon_2^2) \hat{L} E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 - N_\parallel^2)^2 - \varepsilon_2^2) E_z = 0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$\text{де } \hat{L} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2}.$$

2.3. Поширення поперечно-магнітної хвилі (TMX)

Всі компоненти хвилі, для якої $B_z = 0$, зручно виразити через E_z . Для цього достатньо обрати з системи чотири рівняння, наприклад,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_r + i\varepsilon_2 E_\varphi = N_{\parallel} B_\varphi \\ i\varepsilon_2 E_r - \varepsilon_1 E_\varphi = N_{\parallel} B_r \\ B_r = \frac{-ic}{\omega r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - N_{\parallel} E_\varphi \\ B_\varphi = N_{\parallel} E_r + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2.9)$$

Тоді для плазми маємо, зокрема, такі поляризаційні співвідношення:

$$E_r = \frac{c}{\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_p^2} \left(i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{p}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E_z \quad (2.10)$$

$$E_\varphi = \frac{c}{\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_p^2} \left(\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - p \frac{\partial}{\partial r} \right) E_z \quad (2.11)$$

У вакуумному проміжку частково лінеаризовані рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\begin{cases} E_r = N_{\parallel} B_\varphi \\ -E_\varphi = N_{\parallel} B_r \\ B_r = \frac{-ic}{\omega r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - N_{\parallel} E_\varphi \\ B_\varphi = N_{\parallel} E_r + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2.12)$$

Через це, поляризаційні співвідношення ТМ-хвилі в вакуумі мають дещо простіший вигляд:

$$E_r = \frac{ic}{\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{i}{k_{\parallel}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (2.13)$$

$$E_\varphi = \frac{ic}{r\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = -\frac{i}{k_{\parallel} r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \quad (2.14)$$

Нехай поверхневий струм, що тече поверхнею $r = d$, має густину $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi j_\varphi = \mathbf{e}_\varphi (j_{\varphi c} \cos(m\varphi) + j_{\varphi s} \sin(m\varphi))$. Вплив поверхневого заряду на антені автоматично враховується, задовольняючи рівнянню $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, де ρ – густина поверхневого заряду; $\rho \propto e^{-i\omega t}$. Знайдемо вираз, що задовольняє ТМ-хвилі в вакуумі, збудованої цим поверхневим струмом.

У вакуумі для випадку ТМ-хвилі система (2.8) дає рівняння виду

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}\right) E_z + \frac{\omega^2}{c^2} (1 - N_{\parallel}^2) E_z = 0, \quad (2.15)$$

розв'язками якого є циліндричні функції. Оскільки $N_{\parallel} > 1$, хвилі в вакуумі згасають вздовж радіального напрямку і є поверхневими, тож їхні радіальні частини описуються модифікованими функціями Бесселя першого роду, тобто функціями Інфельда $I_m(k_v r)$, і другого роду, тобто функціями Макдональда $K_m(k_v r)$, де $k_v = k_{v\perp} = \frac{\omega}{c} \sqrt{N_{\parallel}^2 - 1}$:

$$E_{z1} = \cos(m\varphi) (A_1^{\sim} I_m(k_v r) + B_1^{\sim} K_m(k_v r)) + \sin(m\varphi) (C_1^{\sim} I_m(k_v r) + D_1^{\sim} K_m(k_v r)) \quad (2.16)$$

Тангенціальні компоненти електричного поля на межі метал-вакуум дорівнюють нулю, тож, зокрема, $E_{z0}(r \geq b) = E_{z0} = 0$, $E_{z1}(r = b) = E_{z0} = 0$. Застосовуючи ці умови, і зважаючи, що граничні умови мають виконуватись для будь-яких значень $m\varphi$, маємо наступний вираз:

$$E_{z1} = (A_1 \cos(m\varphi) + C_1 \sin(m\varphi)) V(b, r), \quad (2.17)$$

де ми позначили $A_1 = \frac{A_1^{\sim}}{K_m(k_v b)}$, $C_1 = \frac{C_1^{\sim}}{K_m(k_v b)}$, а також

$$V(b, r) = V_m(b, r) = K_m(k_v b) I_m(k_v r) - I_m(k_v b) K_m(k_v r) \quad (2.18)$$

На поверхні $r = d$ діють такі граничні умови:

$$\begin{cases} E_{r2} - E_{r1} = 4\pi\rho \\ E_{z2} - E_{z1} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

В області між поверхневим струмом і плазмою компоненту E_z шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} E_{z2} = & \cos(m\varphi) (A_2 I_m(k_v r) + B_2 K_m(k_v r)) + \\ & + \sin(m\varphi) (C_2 I_m(k_v r) + D_2 K_m(k_v r)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Застосовуючи поляризаційні співвідношення разом з граничними умовами, отримуємо

$$\begin{aligned} E_{z2} = & (A_1 \cos(m\varphi) + C_1 \sin(m\varphi)) V(b, r) + \\ & + \frac{4\pi m N_{\parallel}}{\omega d N_v} \frac{V(d, r)}{V'(d, d)} (j_{\varphi s} \cos(m\varphi) - j_{\varphi c} \sin(m\varphi)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

На межі плазма-вакуум ($r = a$) скористаємось, як зазначено в попередньому розділі, граничними умовами на тангенціальні компоненти електричного поля:

$$\begin{cases} E_{\varphi 3} - E_{\varphi 2} = 0 \\ E_{z3} - E_{z2} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

В плазмовій області показник заломлення більший за одиницю, тож, за $r < a$, хвилі поширюються вздовж радіального напрямку, і є об'ємними. Тому радіальна частина компоненти E_{z3} описується функціями Бесселя першого роду:

$$E_{z3} = (A_3 \cos(m\varphi) + C_3 \sin(m\varphi)) J_m(k_{\perp} r) \quad (2.23)$$

Розділяючи “синусні” і “косинусні” частини полів, отримуємо наступну систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{im}{a}V & \theta^2 pk_{\perp}J'_m & -\theta^2 \frac{im}{a}J_m \\ \frac{im}{a}V & 0 & -\theta^2 \frac{im}{a}J_m & -\theta^2 pk_{\perp}J'_m \\ V & 0 & -J_m & 0 \\ 0 & V & 0 & -J_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \\ A_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{im}{a}fj_{\varphi c} \\ \frac{im}{a}fj_{\varphi s} \\ -fj_{\varphi s} \\ fj_{\varphi c} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Тут ми ввели наступні позначення: $V = V(b, a)$, $J_m = J_m(k_{\perp} a)$, $J'_m = J'_m(k_{\perp} a)$, $\theta^2 = \frac{N_{\parallel}^2}{N_p^2}$;

$$f = \frac{4\pi m N_{\parallel}}{\omega d N_v} \frac{V(d, r=a)}{V'(d, d)} \quad (2.25)$$

Задля спрощення вигляду системи, введемо також $A_{1t} = \frac{V}{f} A_1$, $C_{1t} = \frac{V}{f} C_1$, $A_{3t} = \frac{J_m}{f} A_3$, $C_{3t} = \frac{J_m}{f} C_3$, $y_1 = \frac{im}{a}$, $y_3 = -\theta^2 \frac{im}{a}$, $y_2 = \theta^2 pk_{\perp} \frac{J'_m}{J_m}$. В цих позначеннях система (2.24) набуває виду

$$\begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & 0 & y_3 & -y_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1t} \\ C_{1t} \\ A_{3t} \\ C_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 j_{\varphi c} \\ y_1 j_{\varphi s} \\ -j_{\varphi s} \\ j_{\varphi c} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Розв'язком цієї системи є $A_{1t} = \frac{\Delta_{A1t}}{\Delta}$, $C_{1t} = \frac{\Delta_{C1t}}{\Delta}$, $A_{3t} = \frac{\Delta_{A3t}}{\Delta}$, $C_{3t} = \frac{\Delta_{C3t}}{\Delta}$, де

$$\begin{cases} \Delta_{A1t} = 2y_1 y_2 j_{\varphi c} + (y_2^2 + y_3^2 - y_1^2) j_{\varphi s} \\ \Delta_{C1t} = 2y_1 y_2 j_{\varphi s} - (y_2^2 + y_3^2 - y_1^2) j_{\varphi c} \\ \Delta_{A3t} = 2y_1 y_2 j_{\varphi c} - 2y_1 (y_3 + y_1) j_{\varphi s} \\ \Delta_{C3t} = 2y_1 y_2 j_{\varphi s} + 2y_1 (y_3 + y_1) j_{\varphi c} \\ \Delta = -y_2^2 - (y_3 + y_1)^2 \end{cases} \quad (2.27)$$

Застосовуючи зворотні заміни, зрештою, маємо остаточні вирази. Для вакуумної частини:

$$E_{z2}(r, \varphi) = E_{z2c}(r) \cos(m\varphi) + E_{z2s}(r) \sin(m\varphi) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
E_{z2c}(r) &= A_1 V(b, r) + \frac{4\pi m N_{\parallel}}{\omega d N_v} \frac{V(d, r)}{V'(d, d)} j_{\varphi s} = \\
&= \frac{4\pi m N_{\parallel}}{c} \left(\frac{V(d, a) V(b, r)}{V(b, a)} \cdot \frac{E_{21} j_{\varphi c} + E_{22} j_{\varphi s}}{\Delta_E} + V(d, r) j_{\varphi s} \right) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{z2s}(r) &= C_1 V(b, r) - \frac{4\pi m N_{\parallel}}{\omega d N_v} \frac{V(d, r)}{V'(d, d)} j_{\varphi c} = \\
&= \frac{4\pi m N_{\parallel}}{c} \left(\frac{V(d, a) V(b, r)}{V(b, a)} \cdot \frac{E_{21} j_{\varphi s} - E_{22} j_{\varphi c}}{\Delta_E} - V(d, r) j_{\varphi c} \right) \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Тут E_{21} і E_{22} – “струмові” множники, а Δ_E – визначник однорідної системи:

$$E_{21} = 2imJ_m(k_{\perp}a) \Theta^2 pk_{\perp} a J'_m(k_{\perp}a) \quad (2.31)$$

$$E_{22} = (\Theta^2 pk_{\perp} a J'_m(k_{\perp}a))^2 + (1 - \Theta^4)(mJ_m(k_{\perp}a))^2 \quad (2.32)$$

$$\Delta_E = ((1 - \Theta^2)mJ_m(k_{\perp}a))^2 - (\Theta^2 pk_{\perp} a J'_m(k_{\perp}a))^2 \quad (2.33)$$

Для плазмової частини:

$$E_{z3}(r, \varphi) = E_{z3c}(r) \cos(m\varphi) + E_{z3s}(r) \sin(m\varphi) \quad (2.34)$$

$$E_{z3c}(r) = A_3 J_m(k_{\perp}r) = \frac{4\pi m N_{\parallel} V(d, a) J_m(k_{\perp}r)}{c J_m(k_{\perp}a)} \cdot \frac{E_{31} j_{\varphi c} + E_{32} j_{\varphi s}}{\Delta_E} \quad (2.35)$$

$$E_{z3s}(r) = C_3 J_m(k_{\perp}r) = \frac{4\pi m N_{\parallel} V(d, a) J_m(k_{\perp}r)}{c J_m(k_{\perp}a)} \cdot \frac{E_{31} j_{\varphi s} - E_{32} j_{\varphi c}}{\Delta_E}, \quad (2.36)$$

де “струмові” множники дорівнюють

$$E_{31} = E_{21} = 2imJ_m(k_{\perp}a) \Theta^2 pk_{\perp} a J'_m(k_{\perp}a) \quad (2.37)$$

$$E_{32} = 2(1 - \Theta^2)(mJ_m(k_{\perp}a))^2 \quad (2.38)$$

2.4. Поширення поперечно-електричної хвилі (ТЕХ)

Оскільки для ТЕ-хвилі $E_z = 0$, решту компонент її полів виразимо через B_z . З (2.3) маємо, зокрема, наступні рівняння:

$$\begin{cases} B_r = -N_{\parallel} E_{\varphi} \\ B_{\varphi} = N_{\parallel} E_r \\ \varepsilon_1 E_r + i\varepsilon_2 E_{\varphi} = \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + N_{\parallel} B_{\varphi} \\ i\varepsilon_2 E_r - \varepsilon_1 E_{\varphi} = N_{\parallel} B_r + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial B_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2.39)$$

Виходячи з цих рівнянь, поляризаційні співвідношення для компонент магнітного поля хвилі, що поширюються плазмою, виглядають наступним чином:

$$B_r = \frac{c}{\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_p^2} \left(\frac{p}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\partial}{\partial r} \right) B_z \quad (2.40)$$

$$B_{\varphi} = \frac{c}{\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_p^2} \left(\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - p \frac{\partial}{\partial r} \right) B_z \quad (2.41)$$

У вакуумному проміжку частково лінеаризовані рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\begin{cases} B_r = -N_{\parallel} E_{\varphi} \\ B_{\varphi} = N_{\parallel} E_r \\ E_r = \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + N_{\parallel} B_{\varphi} \\ E_{\varphi} = N_{\parallel} B_r + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial B_z}{\partial r} \end{cases} \quad (2.42)$$

Тому в вакуумі поляризаційні співвідношення ТЕ-хвилі мають дещо простіший вигляд

$$B_r = \frac{ic}{\omega} \frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{i}{k_{\parallel}} \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (2.43)$$

$$B_\varphi = \frac{ic}{r\omega} \frac{N_\parallel}{N_\perp^2} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = - \frac{i}{k_\parallel r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \quad (2.44)$$

У вакуумі для випадку ТЕ-хвилі система (2.8) дає рівняння виду

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right) B_z + \frac{\omega^2}{c^2} (1 - N_\parallel^2) B_z = 0, \quad (2.45)$$

аналогічне рівнянню (2.15). Його розв'язок в $d < r < b$ шукаємо у вигляді

$$B_{z1} = \cos(m\varphi) \left(A_1 \tilde{I}_m(k_v r) + B_1 \tilde{K}_m(k_v r) \right) + \\ + \sin(m\varphi) \left(C_1 \tilde{I}_m(k_v r) + D_1 \tilde{K}_m(k_v r) \right) \quad (2.46)$$

На межі вакуум-метал тангенційна (E_φ) компонента електричного поля є суворо неперервною, тож $\frac{\partial B_{z0}}{\partial r} - \frac{\partial B_{z1}}{\partial r} = 0$, а оскільки в металевій стінці

$$E_{\varphi 0} = 0, \quad \text{маємо} \quad \frac{\partial B_{z1}}{\partial r} = 0. \quad \text{Звідси} \quad \text{отримуємо} \quad B_1 \tilde{K}_m(k_v b) = -A_1 \tilde{I}_m(k_v b),$$

$$D_1 \tilde{K}_m(k_v b) = -C_1 \tilde{I}_m(k_v b); \quad I'_m(k_v r) = \frac{dI_m(k_v r)}{d(k_v r)}, \quad K'_m(k_v r) = \frac{dK_m(k_v r)}{d(k_v r)}. \quad \text{Вводячи нові}$$

$$\text{коефіцієнти } A_1 = \frac{\tilde{A}_1}{K'_m(k_v b)} \text{ і } C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{K'_m(k_v b)}, \text{ маємо}$$

$$B_{z1} = \cos(m\varphi) A_1 W(b, r) + \sin(m\varphi) C_1 W(b, r), \quad (2.47)$$

де ми також ввели функцію

$$W(b, r) = W_m(b, r) = K'_m(k_v b) I_m(k_v r) - I'_m(k_v b) K_m(k_v r) \quad (2.48)$$

Розв'язок в $a < r < d$ шукаємо у вигляді

$$B_{z2} = \cos(m\varphi) \left(A_2 I_m(k_v r) + B_2 K_m(k_v r) \right) + \\ + \sin(m\varphi) \left(C_2 I_m(k_v r) + D_2 K_m(k_v r) \right) \quad (2.49)$$

Для зшивання на поверхні $r = d$ обираємо граничні умови на B_r і B_z . Вирази, що еквівалентні їм, утворюють систему

$$\begin{cases} \frac{\partial B_{z1}}{\partial r} - \frac{\partial B_{z2}}{\partial r} = 0 \\ B_{z1} - B_{z2} = \frac{4\pi}{c} j_{\varphi} \end{cases}, \quad (2.50)$$

і при підстановці в утворену систему виразів (2.47) і (2.49), з урахуванням (2.48), вираз для B_{z2} виглядає так:

$$B_{z2} = W(b, r) (A_1 \cos(m\varphi) + C_1 \sin(m\varphi)) - \frac{4\pi}{c} \frac{W(d, r)}{W(d, d)} (j_{\varphi c} \cos(m\varphi) + j_{\varphi s} \sin(m\varphi)) \quad (2.51)$$

Для зшивання на поверхні $r = a$ обираємо, за аналогією з розділом про ТМ-хвилю, граничні умови на тангенціальні компоненти магнітного поля, тобто B_{φ} і B_z :

$$\begin{cases} B_{\varphi 3} - B_{\varphi 2} = 0 \\ B_{z3} - B_{z2} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Розв'язок в $r < a$ має вигляд

$$B_{z3} = (A_3 \cos(m\varphi) + C_3 \sin(m\varphi)) J_m(k_{\perp} r) \quad (2.53)$$

Введемо $W = W(b, r = a)$, $J_m = J_m(k_{\perp} a)$, $J'_m = J'_m(k_{\perp} a)$, $\theta^2 = \frac{N_{\parallel}^2}{N_p^2}$,

$$\phi = \frac{4\pi}{c} \frac{W(d, r = a)}{W(d, d)} \quad (2.54)$$

Застосувавши поляризаційні співвідношення і розділивши “косинусні” і “синусні” частини, на $r = a$ маємо

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{im}{a}W & \theta^2 p k_{\perp} J'_m & -\theta^2 \frac{im}{a} J_m \\ \frac{im}{a}W & 0 & \theta^2 \frac{im}{a} J_m & \theta^2 p k_{\perp} J'_m \\ W & 0 & -J_m & 0 \\ 0 & W & 0 & -J_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \\ A_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{im}{a} \phi j_{\varphi s} \\ -\frac{im}{a} \phi j_{\varphi c} \\ \phi j_{\varphi c} \\ \phi j_{\varphi s} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Позначимо $A_{1t} = \frac{W}{\phi} A_1$, $C_{1t} = \frac{W}{\phi} C_1$, $A_{3t} = \frac{J_m}{\phi} A_3$, $C_{3t} = \frac{J_m}{\phi} C_3$, $y_1 = \frac{im}{a}$,

$y_3 = \theta^2 \frac{im}{a}$, $y_2 = \theta^2 p k_{\perp} \frac{J'_m}{J_m}$. Тоді система (2.55) виглядатиме наступним чином:

$$\begin{pmatrix} 0 & -y_1 & y_2 & -y_3 \\ y_1 & 0 & y_3 & y_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1t} \\ C_{1t} \\ A_{3t} \\ C_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 j_{\phi s} \\ -y_1 j_{\phi c} \\ j_{\phi c} \\ j_{\phi s} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

В цих позначеннях, розв'язком наведеної системи є $A_{1t} = \frac{\Delta_{A1t}}{\Delta}$, $C_{1t} = \frac{\Delta_{C1t}}{\Delta}$, $A_{3t} = \frac{\Delta_{A3t}}{\Delta}$, $C_{3t} = \frac{\Delta_{C3t}}{\Delta}$, де

$$\begin{cases} \Delta_{A1t} = (y_2^2 + y_3^2 - y_1^2) j_{\phi c} + 2y_1 y_2 j_{\phi s} \\ \Delta_{C1t} = (y_2^2 + y_3^2 - y_1^2) j_{\phi s} - 2y_1 y_2 j_{\phi c} \\ \Delta_{A3t} = -2y_1 (y_3 + y_1) j_{\phi c} + 2y_1 y_2 j_{\phi s} \\ \Delta_{C3t} = -2y_1 (y_3 + y_1) j_{\phi s} - 2y_1 y_2 j_{\phi c} \\ \Delta = y_2^2 + (y_3 + y_1)^2 \end{cases} \quad (2.57)$$

За аналогією з розділом, присвяченому ТМ-хвилі, остаточні вирази маємо, застосовуючи зворотні заміни. Для вакуумної частини:

$$B_{z2}(r, \varphi) = B_{z2c}(r) \cos(m\varphi) + B_{z2s}(r) \sin(m\varphi) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} B_{z2c}(r) &= A_1 W(b, r) - \frac{4\pi}{c} \frac{W(d, r)}{W(d, d)} j_{\phi c} = \\ &= -\frac{4\pi k_v d}{c} \left(\frac{W(d, a) W(b, r)}{W(b, a)} \cdot \frac{B_{21} j_{\phi c} + B_{22} j_{\phi s}}{\Delta_B} - W(d, r) j_{\phi c} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} B_{z2s}(r) &= C_1 W(b, r) - \frac{4\pi}{c} \frac{W(d, r)}{W(d, d)} j_{\phi s} = \\ &= -\frac{4\pi k_v d}{c} \left(\frac{W(d, a) W(b, r)}{W(b, a)} \cdot \frac{B_{21} j_{\phi s} - B_{22} j_{\phi c}}{\Delta_B} - W(d, r) j_{\phi s} \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Вирази для “струмових” множників, B_{21} і B_{22} , а також для визначника однорідної системи, Δ_B , мають вигляд:

$$B_{21} = E_{22} = (\theta^2 p k_{\perp} a J'_m(k_{\perp} a))^2 + (1 - \theta^4)(m J_m(k_{\perp} a))^2 \quad (2.61)$$

$$B_{22} = E_{21} = 2im J_m(k_{\perp} a) \theta^2 p k_{\perp} a J'_m(k_{\perp} a) \quad (2.62)$$

$$\Delta_B = (\theta^2 p k_{\perp} a J'_m(k_{\perp} a))^2 - ((1 + \theta^2)m J_m(k_{\perp} a))^2 \quad (2.63)$$

Для плазмової частини:

$$B_{z3}(r, \varphi) = B_{z3c}(r) \cos(m\varphi) + B_{z3s}(r) \sin(m\varphi) \quad (2.64)$$

$$B_{z3c}(r) = A_3 J_m(k_{\perp} r) = - \frac{4\pi k_v dW(d, a) J_m(k_{\perp} r)}{c J_m(k_{\perp} a)} \frac{B_{31} j_{\varphi c} + B_{32} j_{\varphi s}}{\Delta_B} \quad (2.65)$$

$$B_{z3s}(r) = C_3 J_m(k_{\perp} r) = - \frac{4\pi k_v dW(d, a) J_m(k_{\perp} r)}{c J_m(k_{\perp} a)} \frac{B_{31} j_{\varphi s} - B_{32} j_{\varphi c}}{\Delta_B}, \quad (2.66)$$

де “струмові” множники дорівнюють

$$B_{31} = 2(1 + \theta^2)(m J_m(k_{\perp} a))^2 \quad (2.67)$$

$$B_{32} = B_{22} = E_{21} = 2im J_m(k_{\perp} a) \theta^2 p k_{\perp} a J'_m(k_{\perp} a) \quad (2.68)$$

Зауважимо, що для обох хвиль визначники однорідних систем (Δ_E і Δ_B), які задаються виразами (2.33) і (2.63) відповідно, однаковим чином входять в знаменники “плазмових” виразів амплітуд полів. Отже, фізичний зміст Δ_E і Δ_B полягає в тому, що їхні нулі є вирішальними при визначенні власних частот плазмового циліндра. Тож дослідження виразів (2.33) і (2.63) становить окремий інтерес.

2.5. Дисперсійні співвідношення ТМХ і ТЕХ в плазмі

Дослідження “плазмових” виразів полів на резонанс слід почати зі знаходження поперечних показників заломлення обох хвиль. Для цього з системи рівнянь (2.8) переходимо до диференціального рівняння однієї змінної, наприклад, E_z . Застосовуючи оператор $\hat{L} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{d}{dr}) - \frac{m^2}{r^2}$ на першому рівнянні і підставляючи в отриманий вираз друге рівняння, маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{c^2}{\omega^2} \hat{L}(\hat{L}E_z) + ((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_2^2) \hat{L}E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_2^2) E_z = \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Рівняння, отримане аналогічним чином відносно компоненти B_z , виглядає так само з точністю до змінної. Оператор $\hat{L}$ діє лише на радіальні частини полів, E_{zr} і B_{zr} . Оскільки в плазмі радіальні частини полів, з точністю до сталого множника, дорівнюють $J_m(k_{\perp}r)$, розв’язок дисперсійного рівняння не залежатиме від обраної змінної. Підставляючи $E_{zr} = J_m(k_{\perp}r)$ в (2.69), маємо

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\omega^2} \varepsilon_1 \cdot (k_{\perp}^4 J_m^{(4)}(k_{\perp}r) + \frac{2k_{\perp}^3}{r} J_m^{(3)}(k_{\perp}r) - \frac{k_{\perp}^2}{r^2} (1 + 2m^2) J_m''(k_{\perp}r) + \\ + \frac{k_{\perp}}{r^3} (1 + 2m^2) J_m'(k_{\perp}r) - \frac{m^2}{r^4} (4 - m^2) J_m(k_{\perp}r)) + ((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) - \\ - \varepsilon_2^2) \cdot (k_{\perp}^2 J_m''(k_{\perp}r) + \frac{k_{\perp}}{r} J_m'(k_{\perp}r) - \frac{m^2}{r^2} J_m(k_{\perp}r)) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 \cdot ((\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \\ - \varepsilon_2^2) J_m(k_{\perp}r) = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

В результаті множення рівняння (2.70) на r^2 і заміни $k_{\perp}r = \eta$, (2.70) набуває вигляду

$$\begin{aligned} N_{\perp}^2 \varepsilon_1 (\eta^2 J_m^{(4)}(\eta) + 2\eta J_m^{(3)}(\eta) - (1 + 2m^2) J_m''(\eta) + \frac{1}{\eta} (1 + 2m^2) J_m'(\eta) - \\ - \frac{m^2}{\eta^2} (4 - m^2) J_m(\eta)) + ((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_2^2) (\eta^2 J_m''(\eta) + \eta J_m'(\eta) - \\ - \frac{m^2}{\eta^2} J_m(\eta)) + \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_2^2) J_m(\eta) = 0 \end{aligned}$$

$$-m^2 J_m(\eta)) + \frac{1}{N_{\perp}^2} \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_2^2) \eta^2 J_m(\eta) = 0 \quad (2.71)$$

Домножуючи (2.71) на $N_{\perp}^2 = \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}$ і застосовуючи рекурентні співвідношення для функцій Бесселя, отримуємо

$$N_{\perp}^4 \varepsilon_1 \eta^2 J_m(\eta) - N_{\perp}^2 ((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_2^2) \eta^2 J_m(\eta) + \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_2^2) \eta^2 J_m(\eta) = 0 \quad (2.72)$$

Розділивши (2.72) на $\eta^2 J_m(\eta)$, маємо квадратне рівняння відносно $N_{\perp}^2$, розв'язком якого є

$$N_{\perp 1,2}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_1} (((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_2^2) \pm \sqrt{((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2) - \varepsilon_2^2)^2 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_3 ((\varepsilon_1 - N_{\parallel}^2)^2 - \varepsilon_2^2)}) \quad (2.73)$$

При розгляданні граничного випадку, що задовольняє нерівностям (1.34), стає зрозуміло, що $N_{\perp 1}^2 = N_{\perp+}^2$ описує ТЕ-хвилю, а $N_{\perp 2}^2 = N_{\perp-}^2$, відповідно, ТМ-хвилю.

2.6. Виведення рівняння на резонансні криві та його аналіз

Маючи вирази для полів обох хвиль, що поширюються циліндром, неважко отримати рівняння, що описуватимуть резонансні властивості системи. Для ТМХ “резонансний” вираз на $r = a$ має вигляд

$$\det \begin{pmatrix} E_{z2} & B_{\varphi 2} \\ E_{z3} & B_{\varphi 3} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.74)$$

для ТЕХ аналогічний вираз має вигляд

$$\det \begin{pmatrix} B_{z2} & E_{\varphi 2} \\ B_{z3} & E_{\varphi 3} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.75)$$

Азимутальних компонент можна позбутись за допомогою наступних поляризаційних співвідношень:

$$E_{\varphi} = -\frac{ic}{\omega N_p^2} \left(\frac{mp}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) B_z \quad (2.76)$$

$$B_{\varphi} = \frac{ic}{\omega} \left((N_p^2 + N_{\parallel}^2) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{N_{\parallel}^2 mp}{r} \right) E_z \quad (2.77)$$

Для застосування співвідношень (2.76) і (2.77) області між струмом і плазмою, необхідно покласти $p = 0$, $N_p^2 = -N_v^2 = 1 - N_{\parallel}^2$. Вирази (2.74) і (2.75), при підстановці в них (2.77) і (2.76) відповідно, набувають виду

$$R_{TM} = \frac{V'(b, r=a)}{V(b, a)} - \frac{N_{\perp 2}}{N_{\parallel}} (N_{\parallel}^2 + N_p^2) \frac{J'_m(k_{\perp 2} a)}{J_m(k_{\perp 2} a)} - p \frac{N_{\parallel} mc}{a \omega} = 0 \quad (2.78)$$

$$R_{TE} = \frac{W'(b, r=a)}{W(b, a)} + \frac{N_{\parallel}}{N_p^2} \left(N_{\perp 1} \frac{J'_m(k_{\perp 1} a)}{J_m(k_{\perp 1} a)} + p \frac{mc}{a \omega} \right) = 0 \quad (2.79)$$

Рівняння (2.78) і (2.79) визначають вигляд резонансних кривих на площині « $\Omega - N_A^2$ », де $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{ci}}$, а

$$N_A^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ci}\omega_{ce}} = \frac{4\pi m_i c^2}{B_0^2} n_i \quad (2.80)$$

При цьому $N_{\perp 1}$ і $N_{\perp 2}$ слід брати з (2.73).

В подальшому чисельному аналізі рівнянь $R_{TM} = 0$ і $R_{TE} = 0$, тобто (2.78) і (2.79), покладено $B_0 = 25\text{кГс}$, $b = 10\text{см}$, $N_{\parallel} = 10$.

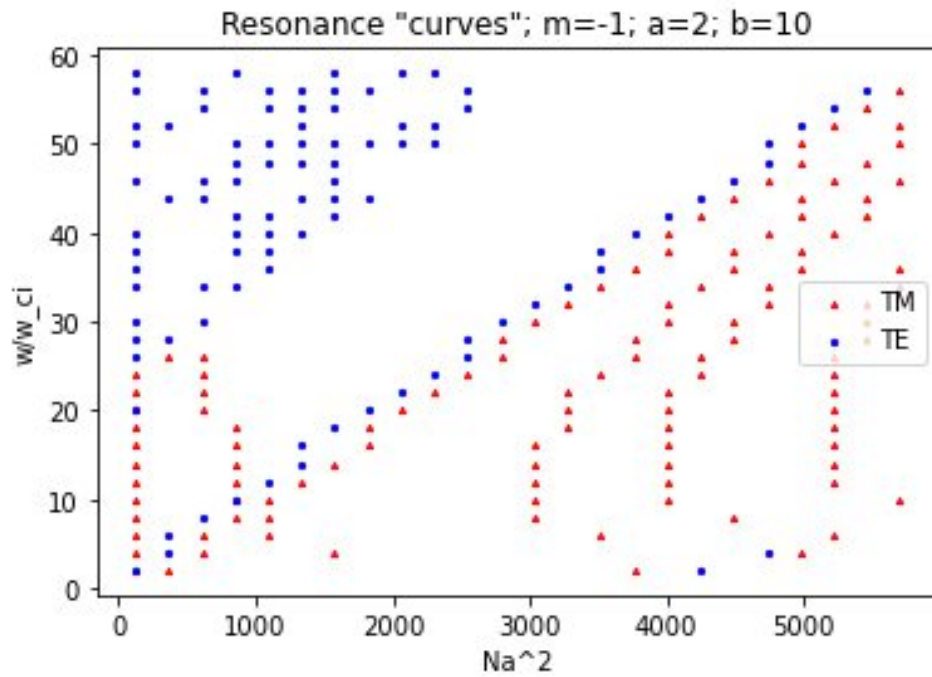


Рис. 2.2. Резонансні криві для $m = -1$, $a = 2\text{см}$.

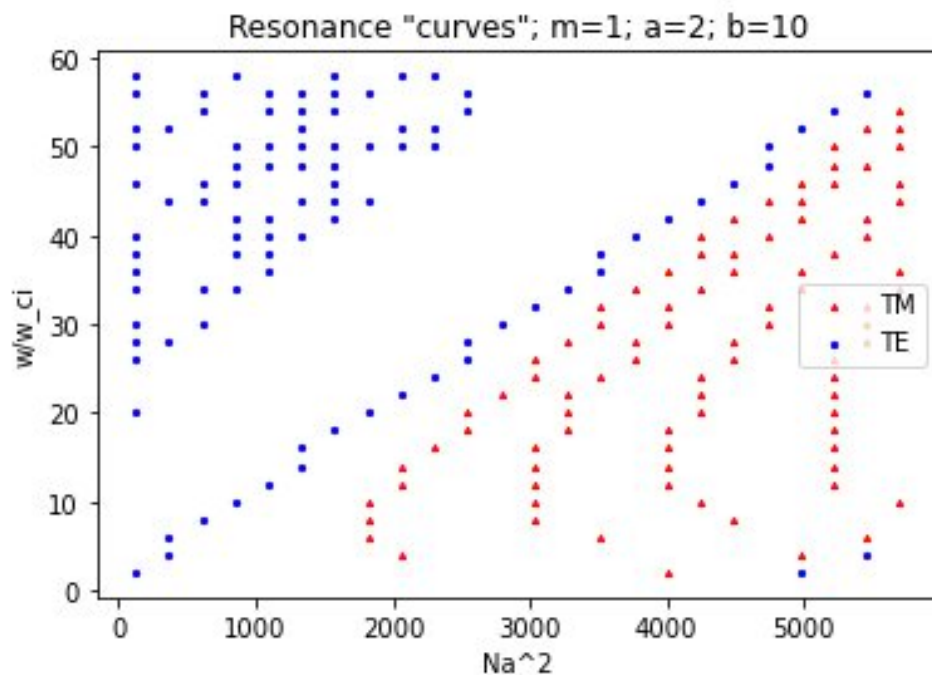


Рис. 2.3. Резонансні криві для $m = 1$, $a = 2\text{см}$.

На рис. 2.2. і рис. 2.3. видно, що в даному масштабі дисперсійні характеристики ТЕ-хвилі, на відміну від ТМ-хвилі, слабо залежать від знаку моди m . Це зумовлено тим, що явно непарна по m частина виразу (2.79) в N_p^2 разів менша за аналогічну частину виразу (2.78). Такий саме результат спостерігається і для $|m| = 2$ (рис. 2.4. і рис. 2.5.)

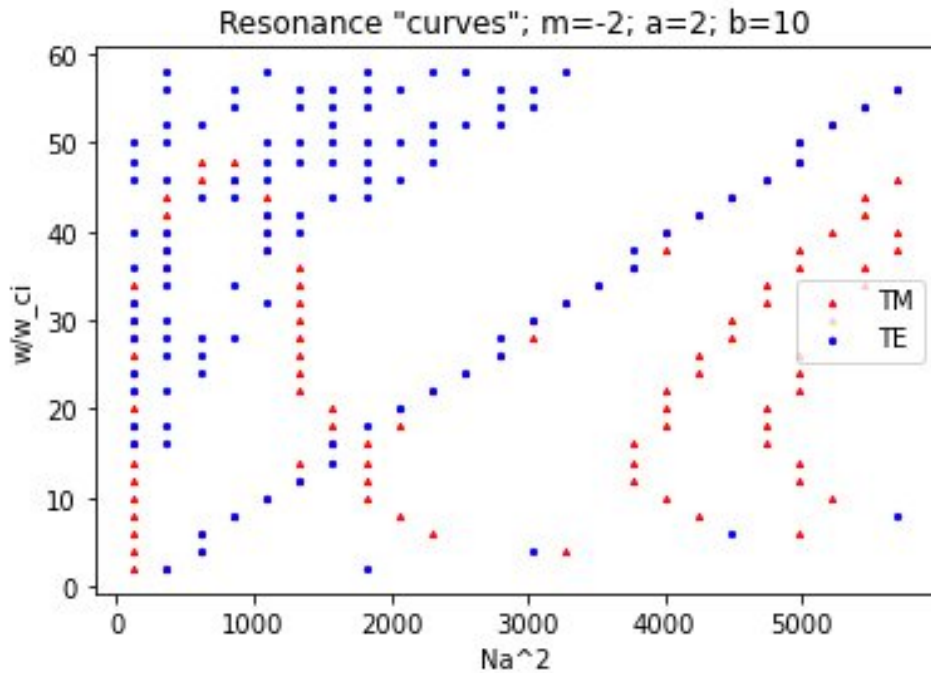


Рис. 2.4. Резонансні криві для $m = -2$, $a = 2$ см.

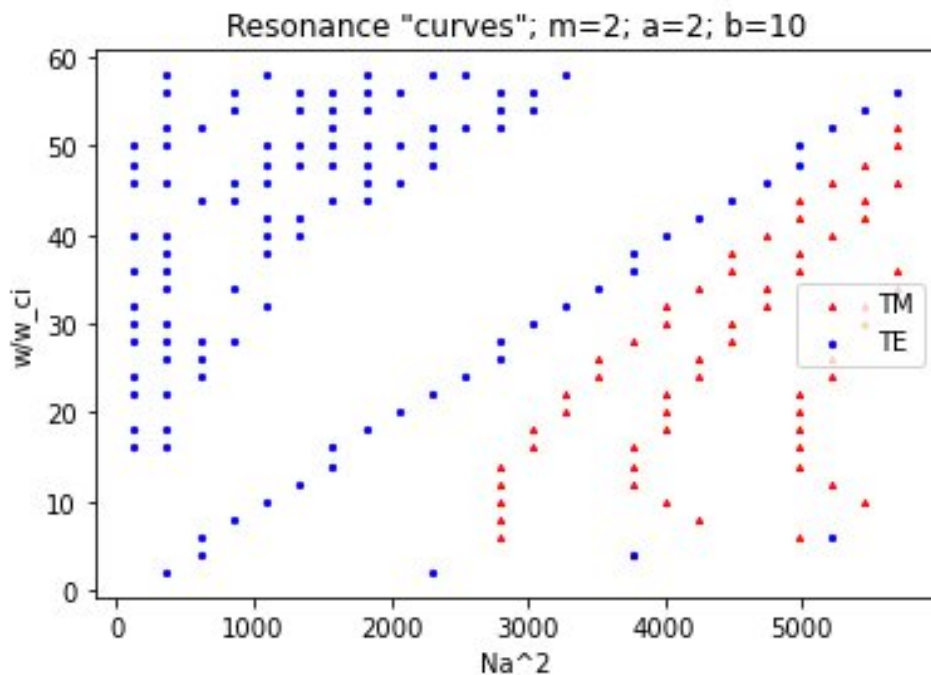


Рис. 2.5. Резонансні криві для $m = 2$, $a = 2$ см.

За більш широкого плазмового потоку, тобто за більших a і a/b , функції Бесселя, що знаходяться в других доданках обох “резонансних” рівнянь, (2.78) і (2.79), осцилюють з більшою частотою, тож відстані між кривими розв’язків зменшуються (рис. 2.6.).

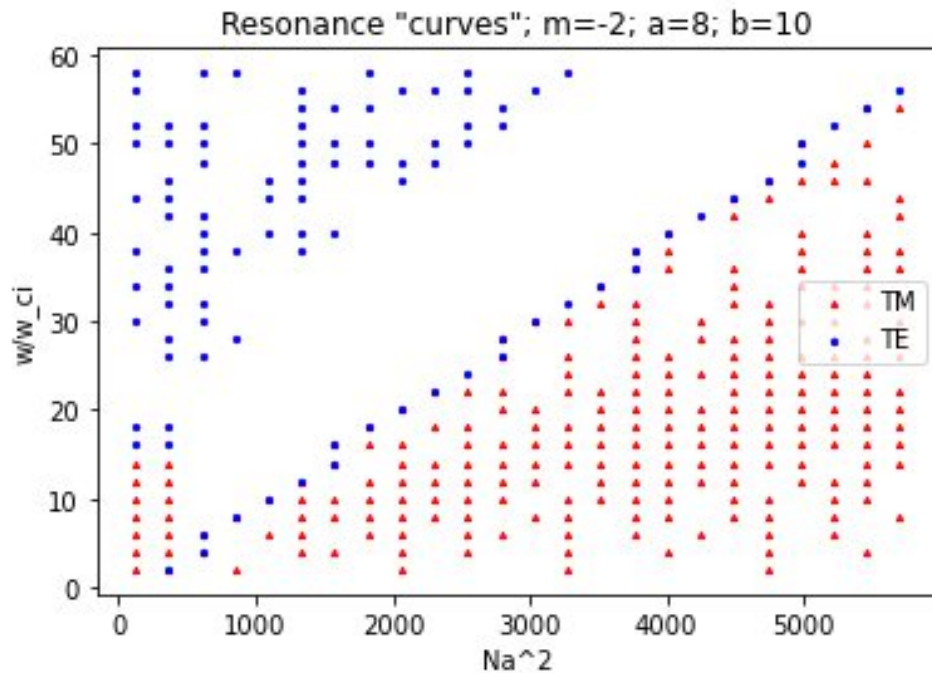


Рис. 2.6. Резонансні криві для $m = -2$, $a = 8$ см.

Однак в масштабі, як на рис. 2.6., при тих же кроках обчислень, групи точок більше не утворюють чітких окреслень кривих. Чіткіші окреслення резонансних розв’язків наведено на рис. 2.7. і рис. 2.8.

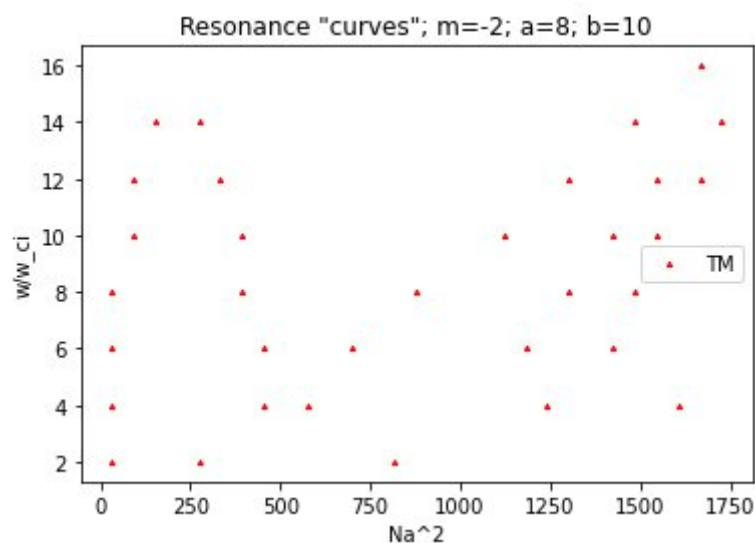


Рис. 2.7. Резонансні криві для ТМ-хвилі; $m = -2$, $a = 8$ см.

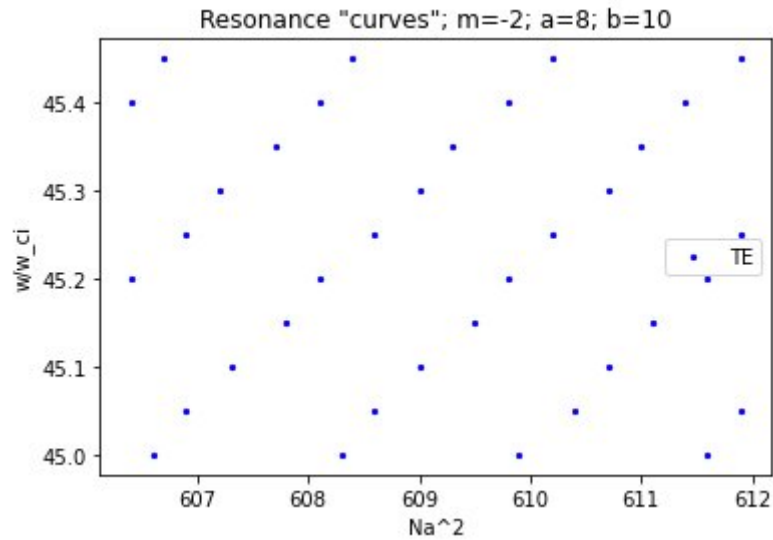


Рис. 2.8. Резонансні криві для ТЕ-хвилі; $m = -2$, $a = 8$ см.

На відміну від виразів (2.78) і (2.79), вирази (2.33) і (2.63), що стоять в знаменниках полів хвиль, є парними функціями по m . Підставляючи $N_{\perp 1}$ у вираз Δ_B (2.63), а $N_{\perp 2}$ у вираз Δ_E (2.33), і прирівнюючи ці вирази до нуля, маємо окреслення розв'язків, наданих на рис. 2.9. і рис. 2.10.

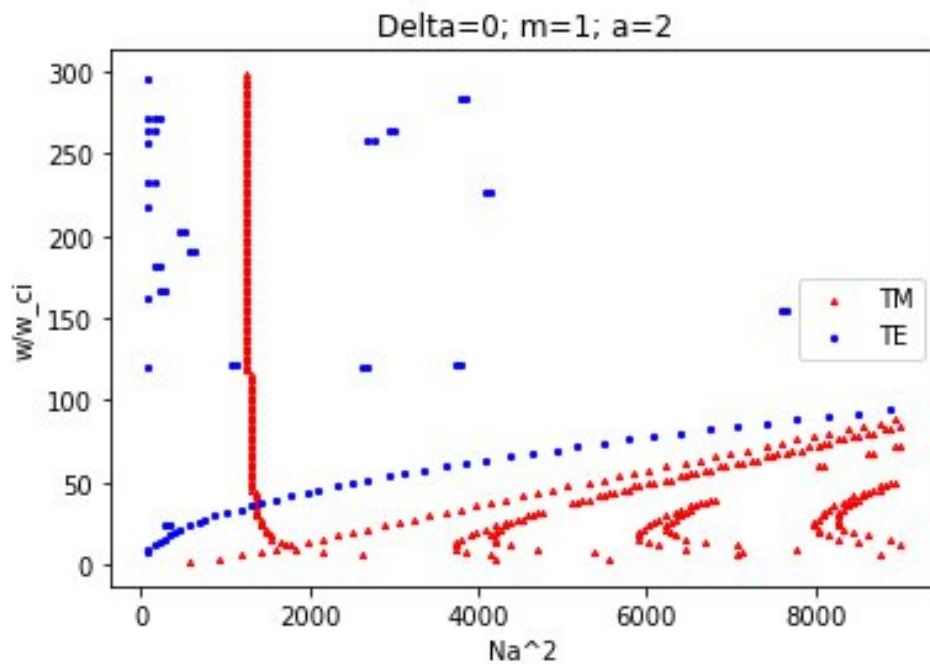


Рис. 2.9. Криві розв'язків $\Delta_E = 0$ («ТМ») і $\Delta_B = 0$ («ТЕ»); $m = 1$, $a = 2$ см.

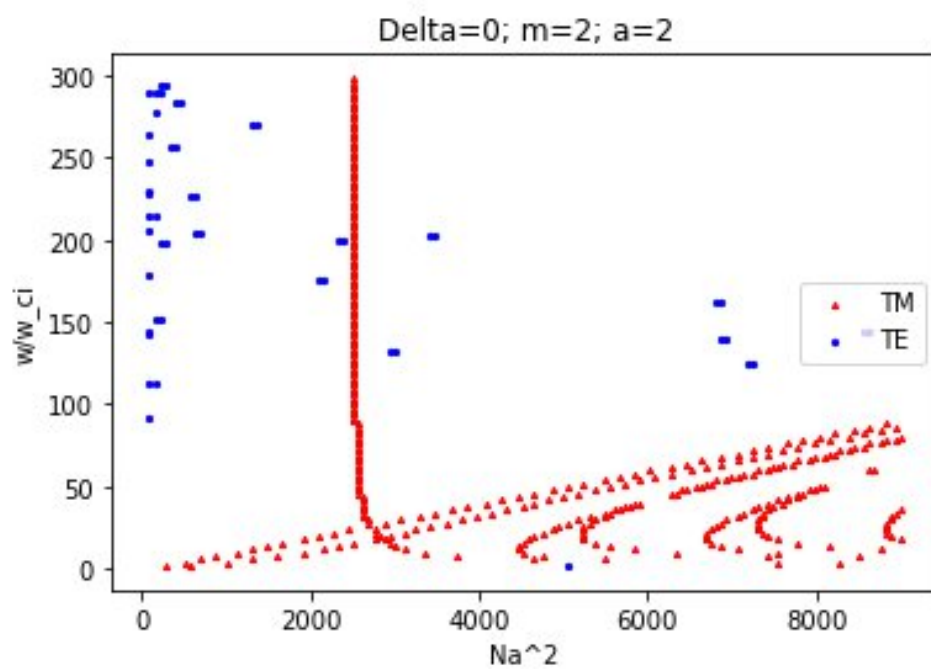


Рис. 2.10. Криві розв'язків $\Delta_E = 0$ («TM») і $\Delta_B = 0$ («TE»); $m = 2$, $a = 2$ см.

ВИСНОВКИ

В роботі отримані вирази, що характеризують поля хвиль поблизу границі розділу двох плазмових середовищ з різною концентрацією. Продemonстровано певну суперечливість стосовно надмірної кількості граничних умов. Основною частиною цієї роботи є наступний розділ, за результатами якого можна зазначити, що при зшиванні на границях слід в першу чергу застосовувати умови на тангенціальні компоненти.

В другому розділі виведені амплітуди паралельних компонент ТМ- і ТЕ-хвиль, а також дисперсійні характеристики згаданих хвиль. На основі цих виразів досліджено резонансні характеристики системи при різних поперечних розмірах плазмового потоку, а також при різних азимутальних модах. Продemonстровано, що зі збільшенням радіуса плазмового шнура резонансні розв'язки зближуються один з одним. Також показано, що зміна знаку азимутальної моди помітно впливає на резонансні характеристики ТМ-хвилі. Разом з тим, на нулі виразів Δ_E і Δ_B зміна знаку азимутальної моди не впливає.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Konstantin P Shamrai and Vladimir B Taranov – Volume and surface rf power absorption in a helicon plasma source – 1996 Plasma Sources Science and Technology, 5 474
- [2] A. V. Longinov and K. N. Stepanov. High-Frequency Plasma Heating. Chapter 3. Radio-frequency plasma heating in tokamaks in the ion-cyclotron frequency range. – A. G. Litvak Editor American Institute of Physics. – New York, 1992, ISBN 0-88318-765-5, p.p. 93-238.
- [3] V. V. Dolgoplov and K. N. Stepanov. Cerenkov absorption of Alfvén waves and of fast magneto-acoustic waves in an inhomogeneous plasma. – Nuclear Fusion, 1965, Vol. 5, No. 4, p.p. 276-278.
- [4] Sh. M. Khalil, N. M. Mousa. Dispersion characteristics of plasma-filled cylindrical waveguide. – 2014 Journal of Theoretical and Applied Physics, 8:111
- [5] Grekov D.L. Coaxial waves in magnetized plasma cylinder. – Physics Letters A, 2004, Vol. 328, Issues 4–5, p.p. 357-363
- [6] ГІРКА, В. О.; ГІРКА, І. О. Теорія азимутальних поверхневих хвиль. 2011.
- [7] F. H. Northover – Reflection of Electromagnetic Waves From Thin Ionized Gaseous Layers – JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-D. Radio Propagation Vol. 66D, No. I, January- February 1962
- [8] Rydbeck O. – The reflection of electromagnetic waves from a parabolic ionized layer / O. Rydbeck // Phil. Mag. – 1943. – V. 34. – P. 342 ; Phil. Mag. – 1940. – V. 30. – P. 282.
- [9] Hirota R. – Theory of a solid state plasma waveguide in a transverse magnetic field / R. Hirota // J. Phys. Soc. Jpn. – 1964. – V. 19. – C. 1130 – 1134.