

ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ С МОНОТОННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

И. И. Перепечай

Вопросами теории векторных решеток (линейных структур) занимались многие математики. Ф. Риссом еще в двадцатых годах было рассмотрено, как упорядоченное множество, линейных функционалов в пространстве непрерывных функций. В данной работе, в частности, используется его определение верхней грани для любых двух функционалов. Общую теорию решеток развил американский математик Биркгоф, но вопросам теории векторных решеток он уделил мало внимания. Эта теория развивалась в трудах советских математиков Канторовича, Вулиха и их учеников, голландского математика Фрейдентала, японских математиков Маэда, Накано, Огасавара и других.

Начало изучению топологических векторных решеток положил М. Г. Крейн, начав с середины 30-х годов изучение нормированных пространств с выделенным в них классом (конусом) положительных элементов. В настоящее время нормирование решеток (где под нормированной решеткой, понимается нормированное пространство, являющееся одновременно решеткой с монотонной нормой) достаточно хорошо изучены. Сравнительно недавно Вулих начал изучение счетно-нормированных решеток.

В данной работе рассмотрен более широкий класс топологических векторных решеток — класс векторных решеток с монотонной топологией, т. е. топологией, которая согласуется со структурой векторного пространства и обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из вполне уравновешенных множеств (определение вполне уравновешенного множества дается в работе).

Оказывается, что такая топология согласуется со структурой векторной решетки. В работе дано необходимое и достаточное условие монотонности топологии. Для случая локально выпуклых решеток доказано существование фундаментальной системы окрестностей нуля, состоящей из поглощающих вполне уравновешенных выпуклых множеств, откуда получается обобщение теоремы Вулиха (о необходимом и достаточном условии существования эквивалентной системы монотонных полунорм в счетно-нормированном пространстве, являющемся одновременно векторной решеткой) на случай произвольных локально выпуклых пространств, являющихся одновременно векторными решетками.

В работе рассмотрено также пространство E' , сопряженное к векторной решетке E с монотонной топологией. Показано, что если в E' определенным образом ввести отношение порядка и определить верхнюю грань для любых двух элементов, то E' будет векторной решеткой; кроме того, доказана теорема, из которой, в частности, следует, что топология равномерной сходимости в E' на семействе всех ограниченных множеств из E (также на семействе всех множеств, ограниченных в смысле упорядочения) является монотонной.

§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ

Решеткой называется упорядоченное множество E , каждое непустое конечное подмножество которого имеет верхнюю и нижнюю грани. *Векторной решеткой* называется вещественное векторное пространство, являющееся одновременно решеткой, в котором выполняются условия:

- а) если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ при любом $z \in E$;
- б) если $x \leq y$, то $\lambda x \leq \lambda y$ при $\lambda \geq 0$.

Пусть в векторной решетке E введена топология τ . По определению топология τ *согласуется* со структурой векторной решетки, если она согласуется со структурой векторного пространства и, кроме того, в этой топологии непрерывны отображения: $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$; $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$ произведения $E \times E$ в E . Векторная решетка, наделенная топологией, согласующейся с ее структурой, называется *топологической векторной решеткой*.

Если E — векторная решетка, то в ней, в частности, для некоторых элементов x имеет место неравенство $x \geq 0$. Элемент $x \in E$, удовлетворяющий этому неравенству, называется положительным элементом. Совокупность всех таких элементов будем обозначать E_+ .

Теорема 1. *В отделимой топологической векторной решетке E множество положительных элементов замкнуто (т. е. топология согласуется со структурой порядка).*

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — обобщенная последовательность элементов из E_+ и $x_\alpha \rightarrow x$. Покажем, что $x \geq 0$. В силу непрерывности $\sup \sup(x_\alpha, 0) \rightarrow \sup(x, 0) = x_+$. Так как $x_\alpha \geq 0$, то $\sup(x_\alpha, 0) = x_\alpha$ и, значит, $x_\alpha \rightarrow x_+$. Пространство E отделимо, поэтому предел единственный, и потому $x = x_+$, т. е. $x \geq 0$, что и требовалось.

§ 2. ВЕКТОРНЫЕ РЕШЕТКИ С МОНОТОННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Пусть E — векторная решетка и $x \in E$. Элемент $x^+ = \sup(x, 0)$ (соответственно $x^- = \sup(-x, 0)$) называется положительной (соответственно отрицательной) частью элемента x . Элемент $|x| = x^+ + x^-$ называется модулем элемента x . Во всякой векторной решетке E для любого $x \in E$ имеет место равенство $x = x^+ - x^-$ [1, гл. III § 4].

Назовем множество M в векторной решетке E *вполне уравновешенным*, если оно удовлетворяет следующему условию: если $x \in M$ и $|y| \leq |x|$, то и $y \in M$.

Замечание. Вполне уравновешенное множество является уравновешенным.

Действительно, пусть $x \in M$, $|\lambda| \leq 1$, тогда $|\lambda x| = |\lambda| |x| \leq |x|$. В силу вполне уравновешенности M $\lambda x \in M$, т. е. $\lambda M \subset M$ при всех λ таких, что $|\lambda| \leq 1$.

Топологию в векторной решетке назовем *монотонной*, если она согласуется со структурой векторного пространства и обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из вполне уравновешенных множеств.

Теорема 2. *Монотонная топология согласуется со структурой векторной решетки.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность $\sup$, так как непрерывность $\inf$ будет следовать тогда из формулы $\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$ [1, гл. III § 2]. Пусть $\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ ($\alpha \in A$, $\beta \in B$) — обобщенные последовательности элементов из E и $x_\alpha \rightarrow x$, $y_\beta \rightarrow y$.

Покажем, что $\sup(x_\alpha, y_\beta) \rightarrow \sup(x, y)$. Возьмем любую окрестность нуля v и покажем, что найдутся такие $\alpha_0 \in A$, $\beta_0 \in B$, что при всех $\alpha \geq \alpha_0$ и $\beta \geq \beta_0$ $\sup(x_\alpha, y_\beta) - \sup(x, y) \in v$. В силу монотонности топо-

логии v можно считать вполне уравновешенной. Воспользуемся неравенством $|\sup(x, z) - \sup(x, y)| \leq |z - y|$ [1, гл. V, § 7]. Имеем

$$|\sup(x_\alpha, y_\beta) - \sup(x, y)| \leq |\sup(x_\alpha, y_\beta) - \sup(x, y_\beta)| + |\sup(x, y_\beta) - \sup(x, y)| \leq |x_\alpha - x| + |y_\beta - y|.$$

Выберем окрестность нуля v_1 , так, чтобы $v_1 + v_1 \subset v$. Так как $x_\alpha \rightarrow x$, $y_\beta \rightarrow y$, то найдутся $\alpha_0 \in A$, $\beta_0 \in B$ такие, что при всех $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq \beta_0$ $|x_\alpha - x| \in v_1$, $|y_\beta - y| \in v_1$, а $|x_\alpha - x| + |y_\beta - y| \in v$, и, значит (в силу вполне уравновешенности v), $|\sup(x_\alpha, y_\beta) - \sup(x, y)| \in v$, но тогда и $\sup(x_\alpha, y_\beta) - \sup(x, y) \in v$. Теорема доказана.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие монотонности топологии.

Теорема 3. Пусть топология T в векторной решетке E согласуется со структурой векторного пространства. Для того, чтобы T была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы в этой топологии для любых двух обобщенных последовательностей $\{x_\alpha\}$, $\{y_\alpha\}$ элементов из E выполнялось следующее условие: если $x_\alpha \rightarrow 0$ и $|y_\alpha| \leq |x_\alpha|$ при каждом $\alpha \in A$, то и $y_\alpha \rightarrow 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть T является монотонной. Это значит, что существует фундаментальная система окрестностей нуля Θ , состоящая из вполне уравновешенных множеств. Пусть $x_\alpha \rightarrow 0$ и $|y_\alpha| \leq |x_\alpha|$ для каждого $\alpha \in A$. Для любой $v \in \Theta$ найдется такое $\alpha_0 \in A$, что при $\alpha \geq \alpha_0$ $x_\alpha \in v$, а значит, и $y_\alpha \in v$, т. е. $y_\alpha \rightarrow 0$.

Достаточность. Пусть топология T удовлетворяет условию: если $x_\alpha \rightarrow 0$ и $|y_\alpha| \leq |x_\alpha|$, то $y_\alpha \rightarrow 0$, и пусть Θ — фундаментальная система окрестностей нуля топологического векторного пространства E . Возьмем $v \in \Theta$ и образуем множество

$$u = \{x \in E : y \in v \ (0 \leq y \leq |x|)\}.$$

Тогда u вполне уравновешено. Действительно, пусть $x \in u$ и $|y| \leq |x|$, тогда, если $0 \leq t \leq |y|$, $0 \leq t \leq |x|$, т. е. $t \in v$, а, значит, $y \in u$.

Покажем, что такие множества образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии T . Возьмем $w \in \Theta$. Для нее существует такая v , что $v - v \subset w$. Покажем, что $u = \{x \in E : y \in v \ (0 \leq y \leq |x|)\} \subset w$. Пусть $x \in u$. Так как $x^+, x^- \in v$, то $x = x^+ - x^- \in v - v \subset w$, т. е. $u \subset w$.

Осталось показать обратное, т. е., что для любого $u = \{x : y \in v \ (0 \leq y \leq |x|)\}$ найдется $w \in \Theta$, что $w \subset u$. Упорядочим Θ по включению и рассмотрим обобщенную последовательность $\{x_w\}$, где $x_w \in w \ (w \in \Theta)$. Очевидно, $x_w \rightarrow 0$. Предположим, что любое $w \in \Theta$ не содержится в u , тогда при каждом $w \in \Theta$ существует такое $x_w \in w$, что $x_w \notin u$. Так как $x_w \notin u$, то найдется такое y_w , что $0 \leq y_w \leq |x_w|$, но $y_w \notin v$, следовательно, $y_w \rightarrow 0$, в то время как из условия $x_w \rightarrow 0$ и $|y_w| \leq |x_w|$ должно следовать $y_w \rightarrow 0$. Противоречие показывает, что некоторое $w \in \Theta$ содержится в u , что и требовалось. Теорема доказана.

§ 3. ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ РЕШЕТКИ С МОНОТОННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Топологическая векторная решетка называется локально выпуклой, если она является локально выпуклым топологическим векторным пространством.

Теорема 4. Во всякой локально выпуклой решетке E с монотонной топологией существует фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из поглощающих вполне уравновешенных выпуклых множеств.

Доказательство. Так как E — топологическая векторная решетка с монотонной топологией, то существует фундаментальная система окрестностей нуля Θ , состоящая из вполне уравновешенных множеств, а так как E в то же время локально выпуклое пространство, то существует фундаментальная система окрестностей нуля Θ' , состоящая из выпуклых уравновешенных поглощающих множеств. Возьмем $\omega \in \Theta$ и $v \in \Theta'$ так, чтобы $v \subset \omega$, и образуем множество

$$v_0 = \bigcup_{y \in v_+} \{x \in E: |x| \leq y\},$$

где v_+ — множество положительных элементов из v . Тогда v_0 вполне уравновешено. Действительно, пусть $x \in v_0$ и $|y| \leq |x|$, тогда $y \in v_0$, так как существует такое $t \in v_+$, что $|y| \leq t$. Далее, v_0 выпукло. Действительно, пусть $x, y \in v_0$ и $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1; x \in v_0$, значит, существует такое $z \in v_+$, что $|x| \leq z; y \in v_0$, значит, существует такое $t \in v_+$, что $|y| \leq t$, поэтому $|\lambda x + \mu y| \leq \lambda |x| + \mu |y| \leq \lambda z + \mu t$. Имеем $z, t \in v_+ \subset v, \lambda z + \mu t \geq 0$ и, так как v выпуклое, $\lambda z + \mu t \in v$, т. е. $\lambda z + \mu t \in v_+$, а, значит, $\lambda x + \mu y \in v_0$. Покажем теперь, что множества v_0 образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для данной топологии. Пусть $\omega \in \Theta$. Мы брали $v \in \Theta'$ так, что $v \subset \omega$. Покажем, что $v_0 \subset \omega$. Пусть $x \in v_0$, тогда существует такой $y \in v_+$, что $|x| \leq y$. Так как $y \in v_+ \subset \omega$, а ω вполне уравновешено, то $x \in \omega$, т. е. $v_0 \subset \omega$. Осталось показать обратное, т. е., что для данного v_0 существует такое $\omega \in \Theta$, что $\omega \subset v_0$. В силу непрерывности сложения для $v \in \Theta'$ существует такое $v_1 \in \Theta'$, что $v_1 + v_1 \subset v$, а в силу непрерывности $\sup$ для v_1 найдется такое $v_2 \in \Theta'$, что $\sup(v_2, v_2) \subset v_1$. Возьмем вполне уравновешенную оболочку множества v_2 , т. е. множество

$$v'_0 = \bigcup_{y \in v_2} \{x \in E: |x| \leq |y|\} = \bigcup_{y \in v_2} \{x \in E:$$

$$-[\sup(y, 0) + \sup(-y, 0)] \leq x \leq \sup(y, 0) + \sup(-y, 0)\}.$$

Так как $0, y, -y \in v_2$, то $\sup(y, 0), \sup(-y, 0) \in v_1$, а $\sup(y, 0) + \sup(-y, 0) \in v$, поэтому можно записать

$$v'_0 = \bigcup_{z \in v_+} \{x \in E: |x| \leq z\},$$

где v'_+ — часть положительных элементов из v . Из выражений для v_0 и v'_0 видно, что $v_0 \supset v_2$, а v_2 , в свою очередь, содержит некоторое $\omega \in \Theta$, так как v_2 — окрестность нуля, а Θ — фундаментальная система окрестностей нуля. Итак для v_0 существует такое $\omega \in \Theta$, что $\omega \subset v_0$. Теорема доказана.

Полунорма p в векторной решетке E называется *монотонной*, если из того, что $|x| \leq |y|$, следует $p(x) \leq p(y)$.

Из теоремы 4 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Пусть E — локально выпуклая решетка с монотонной топологией. Тогда ее топология определяется семейством монотонных полунорм.

Действительно, полунормы $p_v(x) = \inf\{\lambda \geq 0: x \in \lambda v\}$, где v принадлежит фундаментальной системе окрестностей нуля, состоящей из поглощающих вполне уравновешенных выпуклых множеств, являются монотонными, так как если $|x| \leq |y|$ и $y \in \lambda v$, то в силу вполне уравновешенности v $x \in \lambda v$, и, следовательно, $p_v(x) \leq p_v(y)$.

Замечание. Семейство Γ монотонных полунорм определяет в векторной решетке E монотонную локально выпуклую топологию.

Это следует из того, что множества $v_{p, \varepsilon} = \{x \in E: p(x) \leq \varepsilon\}$, где $p \in \Gamma, \varepsilon \geq 0$, поглощающие выпуклые вполне уравновешенные, а также

из того, что любое пересечение вполне уравновешенных множеств есть вполне уравновешенное множество. Вполне уравновешенность $v_{p,\varepsilon}$ следует из монотонности p . Докажем последнее утверждение. Пусть $\{E_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — семейство вполне уравновешенных подмножеств из E . Покажем, что $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ — вполне уравновешенное множество. Пусть $x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$ и

$$|y| \leq |x|.$$

Так как $x \in E_\alpha$ при каждом $\alpha \in A$, а каждое E_α вполне уравновешенное, то $y \in E_\alpha$ также при каждом $\alpha \in A$ и, следовательно, $y \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$,

что и доказывает вполне уравновешенность $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$.

Следствие 2. Пусть E — векторная решетка и одновременно локально выпуклое пространство. Для того, чтобы топология в E определялась семейством монотонных полунорм, необходимо и достаточно, чтобы в этой топологии для любых двух обобщенных последовательностей $\{x_\alpha\}$, $\{y_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) элементов из E выполнялось следующее условие: если $x_\alpha \rightarrow 0$ и $|y_\alpha| \leq |x_\alpha|$ при каждом $\alpha \in A$, то и $y_\alpha \rightarrow 0$. (В случае счетно-нормированных решеток это теорема Вулиха).

Доказательство. Необходимость. Пусть топология в E определяется семейством монотонных полунорм, тогда в силу замечания топология будет монотонной и, следовательно, если $x_\alpha \rightarrow 0$ и $|y_\alpha| \leq |x_\alpha|$ при каждом $\alpha \in A$, то и $y_\alpha \rightarrow 0$.

Достаточность. Так как E — локально выпуклое пространство и одновременно векторная решетка, то из условия теоремы следует, что E — локально выпуклая решетка с монотонной топологией. В силу следствия 1 ее топология определяется тогда семейством монотонных полунорм. Следствие доказано.

§ 4. ПРОСТРАНСТВО, СОПРЯЖЕННОЕ К ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТКЕ С МОНОТОННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Пусть E — векторная решетка с монотонной топологией. Рассмотрим множество E' — множество всех непрерывных линейных форм на E . Если в E' определить естественным образом операции сложения и умножения на скаляр, то E' будет векторным пространством. Выделим в E' класс положительных элементов $E'_+ = \{f: f(x) \geq 0 \text{ при } x \geq 0\}$ и введем с его помощью отношение порядка, полагая $f \geq g$, если $f - g \in E'_+$. Тогда относительно этого порядка E' будет векторной решеткой. Действительно, очевидно, что если $f \leq g$, то $f + h \leq g + h$ при любом $h \in E'$; если $f \leq g$, то $\lambda f \leq \lambda g$ при $\lambda \geq 0$. Надо еще показать, что для любых $f, g \in E'$ существует $\sup(f, g) \in E'$. Для этого понадобится следующая лемма:

Лемма. Во всякой векторной решетке с монотонной топологией множество, ограниченное в смысле упорядочения, ограничено (топологически).

Замечание. Множество M в векторной решетке E называется ограниченным в смысле упорядочения, если существуют такие $y, z \in E$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $y \leq x \leq z$.

Доказательство леммы. Пусть M — множество, ограниченное в смысле упорядочения, тогда существует $y \in E$, такое, что для всех $x \in M$ $|x| \leq y$ [1, гл. III, § 4]. Так как одноточечное множество ограничено, то для любой окрестности нуля U существует такое $\lambda > 0$, что $y \in \lambda U$, причем в силу монотонности топологии U можно считать вполне

уравновешенной. Так как $|x| \leq y$, а $y \in \lambda v$, то и $x \in \lambda v$. Это справедливо для любого $x \in M$ и, следовательно, $M \subset \lambda v$, т. е. M ограничено. Лемма доказана.

Пусть теперь $f, g \in E'$ и $x \geq 0$. Определим

$$h(x) = \sup_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{f(x_1) + g(x_2)\}.$$

Покажем, что h аддитивно, положительно однородно, непрерывно в нуле и $h = \sup(f, g)$. Множество $M = \{y \in E: 0 \leq y \leq x\}$ ограничено в смысле упорядочения, поэтому (в силу леммы) оно ограничено. Так как f и g непрерывны, то множества $f(M)$ и $g(M)$ ограничены. Ограничено также и множество $f(M) + g(M)$. В R каждое ограниченное множество имеет верхнюю грань, поэтому $\sup$ в выражении для $h(x)$ существует, и, значит, применима соответствующая лемма [1, гл. VIII, § 2], из которой следует аддитивность h . Пусть теперь $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned} h(\lambda x) &= \sup_{\substack{x_1 + x_2 = \lambda x \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{f(x_1) + g(x_2)\} = \sup_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{f(\lambda x_1) + g(\lambda x_2)\} = \\ &= \lambda \sup_{\substack{x_1 + x_2 = x \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{f(x_1) + g(x_2)\} = \lambda h(x), \end{aligned}$$

т. е. h положительно однородно.

Для доказательства непрерывности h в нуле покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля v в E такая, что для любого $x \in v_+$, где v_+ — множество положительных элементов, принадлежащих v , $|h(x)| < \varepsilon$. Так как f и g непрерывны, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля v в E такая, что для любого $x \in v$ $|f(x)|, |g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, причем v можно считать вполне уравновешенной. Покажем, что $|h(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in v_+$. Пусть $x \in v_+$, тогда $x \in v$, а так как $0 \leq x_1 \leq x$, $0 \leq x_2 \leq x$, то $x_1, x_2 \in v$, и, следовательно, $|f(x_1)|, |g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|f(x_1) + g(x_2)| \leq |f(x_1)| + |g(x_2)| < \frac{2\varepsilon}{3}$, значит, $|h(x)| < \varepsilon$. Итак, для любого $x \in v_+$ $|h(x)| < \varepsilon$, что и требовалось.

Покажем теперь, что $h = \sup(f, g)$. Из определения h следует, что $h(x) \geq f(x_1) + g(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \geq 0$ таких, что $x_1 + x_2 = x$. В силу произвольности x_1, x_2 , полагая сначала $x_1 = x, x_2 = 0$, потом $x_1 = 0, x_2 = x$, получим $h(x) \geq f(x)$ для всех $x \geq 0$, т. е. $h \geq f$, и $h(x) \geq g(x)$ для всех $x \geq 0$, т. е. $h \geq g$. Пусть теперь k — любая другая аддитивная форма на E , удовлетворяющая условию: $k \geq f, k \geq g$. Покажем, что $h \leq k$. Действительно, возьмем $x_1 + x_2 = x$ ($x_1, x_2 \geq 0$), тогда $f(x_1) + g(x_2) \leq k(x_1) + k(x_2) = k(x)$.

Взяв в левой части $\sup$ по всевозможным разбиениям x на сумму $x_1 + x_2 = x$, получим $h(x) \leq k(x)$, т. е. $h = \sup(f, g)$. Распространим теперь h на все E . Для любого $x \in E$ положим

$$H(x) = h(x^+) - h(x^-).$$

Ясно, что при $x \geq 0$ $H(x) = h(x)$. Единственность и аддитивность H следуют из соответствующей леммы [1, гл. VIII, §1]. Осталось показать однородность H и непрерывность. Пусть $\lambda \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned} H(\lambda x) &= h[(\lambda x)^+] - h[(\lambda x)^-] = h(\lambda x^+) - h(\lambda x^-) = \\ &= \lambda h(x^+) - \lambda h(x^-) = \lambda H(x). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\lambda \leq 0$, тогда

$$H(\lambda x) = h[(\lambda x)^+] - h[(\lambda x)^-] = h(-\lambda x^-) - h(-\lambda x^+) = \lambda H(x),$$

т. е. H однородно. Здесь воспользовались соотношениями [1, гл. III, § 4]

$$\lambda \geq 0: (\lambda x)^+ = \lambda x^+, \quad (\lambda x)^- = \lambda x^-;$$

$$\lambda \leq 0: (\lambda x)^+ = -\lambda x^-, \quad (\lambda x)^- = -\lambda x^+.$$

Для доказательства непрерывности H достаточно доказать непрерывность H в нуле. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность нуля v в E такая, что $|H(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in v$.

В силу непрерывности h в нуле для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля v в E такая, что $|h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in v_+$, причем v можно считать вполне уравновешенной (в силу монотонности топологии). Покажем, что $|H(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in v$. Действительно, пусть $x \in v$, тогда $x^+, x^- \in v$, так как v вполне уравновешено, и, следовательно,

$$|H(x)| = |h(x^+) - h(x^-)| \leq |h(x^+)| + |h(x^-)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. H непрерывно в нуле, а в силу линейности и всюду на E . Итак, мы доказали, что для любых $f, g \in E'$ существует $\sup(f, g) \in E'$, т. е. справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пространство, сопряженное к векторной решетке с монотонной топологией, является векторной решеткой.*

§ 5. Σ -ТОПОЛОГИИ В СОПРЯЖЕННОМ К ВЕКТОРНОЙ РЕТЕТКЕ С МОНОТОННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Пусть E и F — топологические векторные пространства, и $L(E, F)$ — пространство всех непрерывных линейных отображений из E в F . Пусть Σ — множество ограниченных подмножеств из E . Рассмотрим такие множества в $L(E, F)$: $T(M, v) = \{f: f(M) \subset v\}$, где $M \in \Sigma$, а v — окрестность нуля в F . Эти множества являются окрестностями нуля для некоторой топологии в пространстве $L(E, F)$, согласующейся с его структурой. Такие топологии в $L(E, F)$ называются Σ -топологиями.

Пусть E — векторная решетка с монотонной топологией. Как уже доказано, E' является векторной решеткой. В E' , которое определяется как $L(E, R)$, можно рассматривать различные Σ -топологии. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть E — векторная решетка с монотонной топологией, и Σ — множество ограниченных подмножеств из E , удовлетворяющее условию: если $M \in \Sigma$, то и вполне уравновешенная оболочка множества M принадлежит Σ . Тогда Σ -топология в E' является монотонной.*

Доказательство. Всевозможные конечные пересечения множеств вида $v_{\varepsilon, M} = \{f \in E': |f(x)| \leq \varepsilon (x \in M)\}$, где $M \in \Sigma$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для данной Σ -топологии. Покажем, что всевозможные конечные пересечения множеств вида $w_{\varepsilon, M} = \{f \in E': |f|(|x|) \leq \varepsilon (x \in M)\}$, где $M \in \Sigma$, тоже образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для этой топологии. Для этого достаточно показать, что для любого $w_{\varepsilon, M}$ существует $v_{\varepsilon, N}$, что $v_{\varepsilon, N} \subset w_{\varepsilon, M}$ и, наоборот, для любого $v_{\varepsilon, N}$ существует $w_{\varepsilon, M}$, что $w_{\varepsilon, M} \subset v_{\varepsilon, N}$.

Итак, пусть дано $v_{\varepsilon, M}$. Тогда $w_{\varepsilon, M} \subset v_{\varepsilon, M}$, что следует из неравенства

$$|f(x)| \leq \sup_{|x'| \leq |x|} |f(x')| = |f|(|x|).$$

Пусть теперь дано $\omega_{\varepsilon, M}$. Тогда $v_{\varepsilon, M'} \subset \omega_{\varepsilon, M}$, (где M' — вполне уравновешенная оболочка множества M , которая по условию теоремы принадлежит Σ). Действительно, пусть $f \in v_{\varepsilon, M'}$, тогда для всех $x \in M'$ имеем $|f(x)| \leq \varepsilon$. Для $x \in M$ имеем

$$|f|(|x|) = \sup_{|x'| \leq |x|} |f(x')| \leq \varepsilon,$$

так как если $x \in M$, то $x \in M'$ и (в силу вполне уравновешенности M') $x' \in M'$, а потому $|f(x')| \leq \varepsilon$ для всех x' таких, что $|x'| \leq |x|$, и, значит, $|f|(|x|) \leq \varepsilon$, т.е. $f \in \omega_{\varepsilon, M}$.

Так как пересечение вполне уравновешенных множеств есть вполне уравновешенное множество, то для окончания доказательства теоремы осталось показать, что $\omega_{\varepsilon, M}$ вполне уравновешено. Покажем это. Пусть $f \in \omega_{\varepsilon, M}$ и $|g| \leq |f|$, тогда $|g|(|x|) \leq |f|(|x|) \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$, значит, $g \in \omega_{\varepsilon, M}$, т.е. $\omega_{\varepsilon, M}$ вполне уравновешено. Теорема доказана.

Замечание. Если M' — вполне уравновешенная оболочка множества M , то $\omega_{\varepsilon, M} = \omega_{\varepsilon, M'}$.

Действительно, так как $M \subset M'$, то $\omega_{\varepsilon, M'} \subset \omega_{\varepsilon, M}$. Покажем обратное включение. Пусть $f \in \omega_{\varepsilon, M}$. Это значит, что $|f|(|x|) \leq \varepsilon$ для всех $x \in M$. Если $x \in M'$, то существует $y \in M$, что $|x| \leq |y|$, и значит, $|f|(|x|) \leq |f|(|y|) \leq \varepsilon$, т.е. $f \in \omega_{\varepsilon, M'}$, что и требовалось.

Заметим далее, что если M вполне уравновешено, то $v_{\varepsilon, M} = \omega_{\varepsilon, M}$, что непосредственно следует из доказательства последней теоремы. Поэтому если Σ удовлетворяет условию: если $M \in \Sigma$, то и вполне уравновешенная оболочка множества M принадлежит Σ , то всевозможные конечные пересечения множеств $v_{\varepsilon, M'}$, где M' — вполне уравновешенная оболочка множества $M \in \Sigma$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для данной Σ -топологии, ибо $v_{\varepsilon, M'} = \omega_{\varepsilon, M'} = \omega_{\varepsilon, M}$, а $\omega_{\varepsilon, M}$ по доказанному образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для данной Σ -топологии, т.е. получаем следующее следствие:

Следствие 1. В условиях теоремы 6 топология равномерной сходимости на множествах из Σ совпадает с топологией равномерной сходимости на вполне уравновешенных оболочках множеств из Σ .

Следствие 2. Топология равномерной сходимости в сопряженном к векторной решетке E с монотонной топологией на семействе всех ограниченных (соответственно на семействе всех ограниченных в смысле упорядочения) множеств из E является монотонной.

Доказательство. Достаточно показать, что вполне уравновешенная оболочка ограниченного (соответственно ограниченного в смысле упорядочения) множества ограничена (соответственно, ограничена в смысле упорядочения) и сослаться на теорему 6. Пусть M — ограниченное множество, тогда для любой окрестности нуля v в E (v можно считать вполне уравновешенной) найдется $\lambda > 0$ такое, что $M \subset \lambda v$. Пусть M' — вполне уравновешенная оболочка множества M , т.е.

$$M' = \bigcup_{y \in M} \{x \in E : |x| \leq |y|\},$$

и пусть $x \in M'$, тогда существует такой $y \in M$, что $|x| \leq |y|$. Так как $y \in \lambda v$, то и $x \in \lambda v$, т.е. $M' \subset \lambda v$ и ограниченность M' доказана.

Пусть теперь M — множество, ограниченное в смысле упорядочения. Тогда существует такой $y \in E$, что $|x| \leq y$ для всех $x \in M$. Пусть $z \in M'$, тогда существует такой $x \in M$, что $|z| \leq |x|$, и значит, $|z| \leq y$, т.е. M' ограничено в смысле упорядочения [1, гл. III § 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
2. Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. Физматгиз, М., 1958.
3. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. ИЛ, М., 1959.

Поступила 28 мая 1968 г.
