ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

ДВИЖЕНИЕ ВЕСОМОЙ ПЛАСТИНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

И. Е. Тарапов

Харьков

Если в вязкую жидкость между двумя параллельными движущимися друг относительно друга плоскостями AA и BB (рис. 1) поместить пластину ab, составляющую некоторый угол ε с ними, то при установившемся относительном движении трех пластин в жидкости у пластины ab градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$. Поэтому появляются силы по оси y, действующие на пластины AA и BB. При этомпредпо лагается, что пластина ab может перемещаться только поступательно, так что $\varepsilon = \text{const}$ во все время движения.

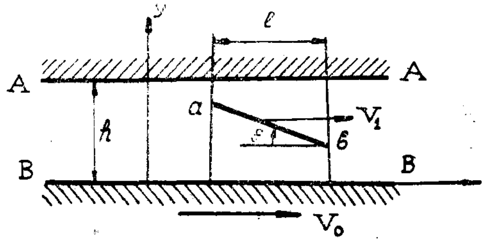

Рис. 1.

Решение этой задачи о движении твердой пластины в жидкости между двумя параллельными плоскостями может служить первым приближением решения задачи о движении свободно плавающего кольца под плоской пятой [1] (кольцо должно иметь достаточно большой диаметр и поверхность, образующую на некоторых участках угол ε с плоскостями опоры и пяты).

Рассмотрим силы, действующие на параллельные плоскости AA и BB в зоне l, где l — проекция пластины ab на ось X-ов.

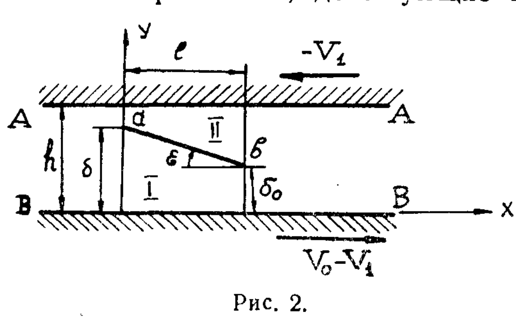

Рис. 2.

В установившемся движении при равновесии сил на пластине ab эта пластина будет иметь некоторую постоянную скорость V_1 по оси X-ов. Обращая движение относительно скорости V_1, получим задачу об определении сил, действующих на плоскости AA и BB, двигающиеся относительно неподвижной пластины ab со скоростями $-V_1$ и $V_0 - V_1$ (рис. 2).

[1] Эта задача возникла в связи с расчетом подпятника на ХЭМЗ и была предложена заводом кафедре механики; постановка задачи была сформулирована Е. И. Янчовским.

Скорость V_1 определяется из условий равновесия пластины ab.

Предположим, что вязкость несжимаемой жидкости постоянна $\mu = \text{const}$, инерционные члены в уравнениях движения малы $\left(\frac{V_0 h^2 \rho}{\mu l} \leqslant 1\right)$ и зазор h мал по сравнению с $l \left(\frac{h}{l} \ll 1\right)$.

В этих предположениях уравнения движения и непрерывности

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

справедливы как для области I, так и для области II.

Отсюда, для продольных скоростей жидкости в областях I (V_x^{I}) и II (V_x^{II}) получим выражения:

$$V_x^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^{\mathrm{I}}}{dx} (y^2 - yy_1) + \frac{V_0 - V_1}{y_1} (y_1 - y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant y_1)$$

$$V_x^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^{\mathrm{II}}}{dx} (y^2 - yy_1 - hy + hy_1) + V_1 \frac{y - y_1}{y_1 - h} \qquad (y_1 \leqslant y \leqslant h).$$

Здесь $y_1 = -\frac{\delta - \delta_0}{l} x + \delta = h\left(\beta - \alpha \frac{x}{l}\right)$ — уравнение прямой ab; $\beta = \frac{\delta}{h}$; $\alpha = \frac{\delta - \delta_0}{h}$; $p^{\mathrm{I}}(x)$, $p^{\mathrm{II}}(x)$ — функции давления соответственно в областях I и II; граничные условия $V_x^{\mathrm{I}}(x, y_1) = V_x^{\mathrm{II}}(x, y_1) = 0$ и $V_x^{\mathrm{I}}(x, 0) = V_0 - V_1$; $V_x^{\mathrm{II}}(x, h) = -V_1$, как легко видеть, выполняются.

Функции давления $p^{\mathrm{I}}(x)$ и $p^{\mathrm{II}}(x)$ определятся из условия постоянства расходов жидкости через область I $\left(Q_{\mathrm{I}} = \int\limits_0^{y_1} V_x^{\mathrm{I}}\, dy = \text{const}\right)$ и через область II $\left(Q_{\mathrm{II}} = \int\limits_{y_1}^{h} V_x^{\mathrm{II}}\, dy = \text{const}\right)$, причем Q_{I} и Q_{II} находим из граничного условия для функций давления $p^{\mathrm{I}}(0) = p^{\mathrm{I}}(l) = p^{\mathrm{II}}(0) = p^{\mathrm{II}}(l)$.

Окончательно получим

$$\frac{h^2 \alpha}{6\mu l (V_0 - V_1)} [p^{\mathrm{I}}(x) - p^{\mathrm{I}}(0)] = \frac{1}{\beta - \alpha \frac{x}{l}} - \frac{1}{\beta} - \frac{\beta(\beta - \alpha)}{2\beta - \alpha} \left[\frac{1}{\left(\beta - \alpha \frac{x}{l}\right)^2} - \frac{1}{\beta^2}\right]$$

$$\frac{h^2 \alpha}{6\mu l V_1} [p^{\mathrm{II}}(x) - p^{\mathrm{II}}(0)] = \frac{1}{\beta - 1} - \frac{1}{\beta - 1 - \alpha \frac{x}{l}} +$$

$$+ \frac{(\beta - 1)(\beta - 1 - \alpha)}{2(\beta - 1) - \alpha} \left[\frac{1}{\left(\beta - 1 - \alpha \frac{x}{l}\right)^2} - \frac{1}{(\beta - 1)^2}\right].$$

Нормальная к пластине ab сила, действующая на единицу ее длины со стороны области I, равна

$$P^{\mathrm{I}}=\int_0^l [p^{\mathrm{I}}(x)-p^{\mathrm{I}}(0)]\,dx=\frac{6\mu l^2(V_0-V_1)}{h^2\alpha^2}\left[\ln\frac{\beta}{\beta-\alpha}-\frac{2\alpha}{2\beta-\alpha}\right].$$

Такая же сила, действующая на пластину ab со стороны области II, равна

$$P^{\mathrm{II}}=\int_0^l [p^{\mathrm{II}}(x)-p^{\mathrm{II}}(0)]\,dx=\frac{6\mu l^2 V_1}{h^2\alpha^2}\left[\ln\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}+\frac{2\alpha}{2(\beta-1)-\alpha}\right].$$

Сила трения на единицу длины пластины ab, действующая со стороны области I, равна

$$F^{\mathrm{I}}=\int_0^l \mu\left(\frac{\partial V_x^{\mathrm{I}}}{\partial y}\right)_{y=y_1}dx=\int_0^l \mu\left[\frac{1}{2\mu}\,\frac{dp^{\mathrm{I}}}{dx}y_1-\frac{V_0-V_1}{y_1}\right]dx=$$

$$=\frac{\delta-\delta_0}{2l}P^{\mathrm{I}}+\frac{\mu l(V_0-V_1)}{\alpha h}\ln\frac{\beta-\alpha}{\beta}.$$

Сила трения на стороне пластины ab, обращенной в область жидкости II, равна

$$F^{\mathrm{II}}=\int_0^l \mu\left(\frac{\partial V_x^{\mathrm{II}}}{\partial y}\right)_{y=y_1}dx=\int_0^l \mu\left[\frac{1}{2\mu}\,\frac{dp^{\mathrm{II}}}{dx}(y_1-h)+\frac{V_1}{y_2-h}\right]dx=$$

$$=\frac{\delta-\delta_0}{2l}P^{\mathrm{II}}-\frac{\mu l V_1}{\alpha h}\ln\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}.$$

Рассмотрим условия равновесия пластины ab.

Считая, что угол ε мал и момент сил P^{I} и P^{II} относительно центра тяжести пластины уравновешивается некоторым устройством, обеспечивающим отсутствие вращения пластины во время ее движения, получим условия равновесия в виде (рис. 3)

$$P^{\mathrm{I}}=P^{\mathrm{II}}+G$$

$$F^{\mathrm{I}}=F^{\mathrm{II}},$$

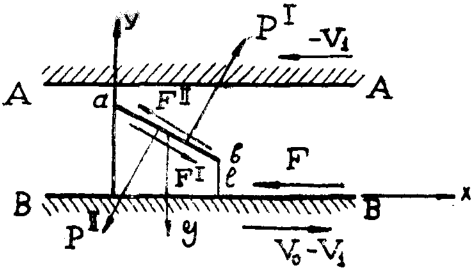

Рис. 3.

где G — вес пластины (предполагается, что нижняя плоскость BB движется со скоростью V_0; в случае, если движется с V_0 верхняя плоскость AA, во всех дальнейших формулах надо изменить знак перед G).

Подставляя в условия равновесия полученные выше выражения для F^{I}, F^{II}, P^{I} и P^{II}, после ряда несложных упрощений получим систему уравнений для определения V_1 и V_0, если задан вес пластины G и ее ориентация (α и β)

$$\left.\begin{aligned}V_0\ln\frac{\beta-\alpha}{\beta}+V_1\ln\frac{\beta(1+\alpha-\beta)}{(1-\beta)(\beta-\alpha)}&=-\frac{\alpha^2}{2}\,\frac{Gh^2}{\mu l^2}\\ V_0-V_1\frac{2}{\alpha+2-2\beta}&=\frac{\alpha(2\beta-\alpha)}{6}\cdot\frac{Gh^2}{\mu l^2}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Если считать пластину ab невесомой ($G=0$), то отличное от нуля решение системы (1) будет при равенстве нулю ее детерминанта. Это условие дает

$$\frac{1+\alpha-\beta}{1-\beta}=\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha+2-2\beta}}. \tag{2}$$

Подставляя сюда

$$\alpha=\beta-\frac{\delta_0}{h}=\beta-z,$$

получим

$$\frac{1-z}{1-\beta}=\left(\frac{\beta}{z}\right)^{\frac{z+\beta}{2-(z+\beta)}} \qquad (z<1;\ \beta<1). \tag{2}$$

Это уравнение имеет два положительных корня:

$$z_1=\beta$$
$$z_2=1-\beta.$$

Первый корень ($z=\beta$; $\alpha=0$; $\delta=\delta_0$) является лишним. Второй корень дает

$$h=\delta+\delta_0.$$

Это соответствует симметричному положению пластины ab относительно плоскостей AA и BB. При этом $V_0=2V_1$, так что при любой скорости V_0 невесомая пластина ab будет находиться в равновесии, двигаясь с постоянной скоростью $V_1=\frac{V_0}{2}$ посредине между AA и BB.

При этом вертикальная сила $P=P^{\mathrm{I}}=P^{\mathrm{II}}$, действующая на плоскости AA и BB, равна

$$P=\frac{6\mu l^2}{\delta_0^2}\cdot\frac{V_0}{2}\cdot\frac{\Delta^2}{(1-\Delta)^2}\left[\ln\frac{1}{\Delta}-\frac{2(1-\Delta)}{1+\Delta}\right], \tag{3}$$

где $\Delta=\frac{\delta_0}{\delta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha}<1.$

Вычисляя в общем случае силу трения, действующую на движущуюся плоскость BB, получим

$$F=-\int_0^l \mu\left(\frac{\partial V_x^1}{\partial y}\right)_{y=0}dx=\frac{4\mu l\,(V_0-V_1)}{\delta_0}\left[\frac{\Delta}{1-\Delta}\ln\frac{1}{\Delta}-\frac{3}{2}\,\frac{\Delta}{1+\Delta}\right].$$

Отсюда, в случае $G=0$, получим

$$F=\frac{4\mu l}{\delta_0}\cdot\frac{V_0}{2}\left[\frac{\Delta}{1-\Delta}\ln\frac{1}{\Delta}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Delta}{1+\Delta}\right].$$

Таким образом, по сравнению с обычным плоским подшипником подъемная сила и сила трения, действующие на движущуюся плоскость BB, уменьшаются в два раза (если не учитывать вес пластины ab).

В общем случае ($G\neq 0$), подъемная сила и сила трения уменьшаются в $\left(1-\frac{V_1}{V_0}\right)$ раз, причем V_1 и V_0 при заданных G, α, β, h, l, μ определяются из системы (1).

Коэффициент трения определяется той же формулой, как и для обычного плоского подшипника

$$f \equiv \frac{F}{P} = \frac{2}{3} \frac{\delta_0}{l} \frac{1-\Delta}{\Delta} \frac{\ln\Delta + \frac{3}{2}\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}{\ln\Delta + \frac{2(1-\Delta)}{1+\Delta}}.$$

Зависимость коэффициента трения от скорости относительного движения определяется решением задачи с учетом инерционных членов. Применяя интегральные соотношения, можно показать, что эта зависимость слабая и ее в первом приближении можно не учитывать.