О СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В. З. Соколовский

В работах [1, 2] рассматривается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = \delta(x) f(t), \qquad (1)$$

описывающее распространение тепла в стержне длины $2l$ со случайным точечным источником $f(t)$, представляющим собой «белый шум». После применения преобразования Фурье в этих работах вместо уравнения (1) рассматривается система стохастических дифференциальных уравнений для косинус-коэффициентов Фурье:

$$W_i' + \omega_i^2 W_i = f(t) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Далее в [1] и [2] показано, что конечномерные распределения, соответствующие решениям урезанных систем (2), продолжаются при каждом $t>0$ до нормального распределения в гильбертовом пространстве l^2.

В данной работе получен аналогичный результат для уравнения гиперболического типа. При этом используется тот же подход, что и в статье [2].

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\left.\begin{aligned} &\rho(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u + F(x,t),\\ &u|_{t=0} = f(x), \qquad a_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_1 u|_{x=x_1} = 0,\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \qquad a_2\frac{\partial u}{\partial x} + b_2 u|_{x=x_2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ — детерминированные функции, причем на всем интервале $[x_1, x_2]$ они обладают следующими свойствами:

$$p(x) > 0, \ \rho(x) > 0, \ q(x) \geqslant 0,$$

$p(x)$ имеет непрерывную первую производную,
$p(x)\rho(x)$ имеет непрерывную вторую производную,
$f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации.

Далее, h, a_1, a_2, b_1, b_2 суть вещественные числа. $F(x, t)$ — случайное скалярное поле, вероятностный характер которого будет определен ниже.

Задача Штурма—Лиувилля, соответствующая задаче (3), имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &[p(x)\,X'(x)]' + [\lambda^2 \rho(x) - q(x)]\,X(x) = 0, \\ &a_1 \frac{\partial X}{\partial x} + b_1 X \Big|_{x=x_1} = a_2 \frac{\partial X}{\partial x} + b_2 X \Big|_{x=x_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В [3] приведены асимптотические (при $k \to \infty$) формулы для собственных чисел λ_k^2 и собственных функций $\varphi_k(x)$ задачи (4). Укажем сразу на наиболее грубые из этих оценок, которые будут использованы ниже:

$$\lambda_k \sim k \qquad (k \to \infty), \tag{5}$$

$$\varphi_k(x) \sim \cos kx \quad (k \to \infty). \tag{6}$$

Случайное поле $F(x, t)$ разложим в ряд по системе функций $\{\varphi_k(x)\}$:

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\,\varphi_k(x),$$

где

$$v_k(t) = \frac{1}{\|\varphi_k(x)\|^2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\,\varphi_k(x)\,dx,$$

где

$$\|\varphi_k(x)\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} |\varphi_k(x)|^2\,dx.$$

Сформулируем теперь, какова вероятностная структура случайного поля $F(x, t)$. Именно, потребуем, чтобы

$$v_k(t) = \gamma_k v(t).$$

где γ_k — вещественные числа, а $v(t)$ — производная винеровского процесса (белый шум): $v(t) = w'(t)$, где через $w(t)$ обозначен винеровский случайный процесс. Напомним соответствующее определение [4]. Процесс $w(t)$ называется винеровским, если выполнены следующие пять условий:

1) однородность по времени — функция распределения величины $w(t+t_0) - w(t_0)$ не зависит от t_0;

2) независимость приращений — для любого конечного числа неперекрывающихся промежутков (θ, τ) параметра t

приращения величины $w(t)$, т. е. разности $w(\tau)-w(\theta)$, взаимно независимы;

3) величины $w(t+t_0)-w(t_0)$ нормально распределены;

4) $M\{w(t+t_0)-w(t_0)\}=0$;

5) $D\{w(t+t_0)-w(t_0)\}=\sigma^2 t$,

где σ — некоторая константа.

Будем искать решение задачи (3) в виде разложения в ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\varphi_k(x).$$

Получим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений

$$T''_k(t)+hT'_k(t)+\lambda_k^2 T_k(t)=v_k(t) \quad (k=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Им соответствуют следующие начальные условия:

$$T_k(0)=f_k,\ T'_k(0)=g_k \quad (k=1,2,\ldots), \tag{8}$$

где

$$f_k=\frac{1}{\|\varphi_k(x)\|^2}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi_k(x)\,dx \quad (k=1,2,\ldots), \tag{9}$$

$$g_k=\frac{1}{\|\varphi_k(x)\|^2}\int_{x_1}^{x_2} g(x)\varphi_k(x)\,dx \quad (k=1,2,\ldots). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь линейное пространство R^N всех вещественных числовых последовательностей и σ-алгебру B^N, порожденную борелевскими цилиндрическими множествами из R^N. Пусть $\mu^n(t)$ — конечномерное распределение вектора $(T_1(t), T_2(t), \ldots, T_n(t))$. Согласно теореме Колмогорова о продолжении [5], всякая согласованная система конечномерных распределений в R^N продолжается единственным образом до распределения на B^N. Так как согласованность системы конечномерных распределений $\{\mu^{(n)}(t)\}$ очевидна, то решения системы (7) при каждом $t>0$ порождают единственное распределение $\mu=\mu_t$ на B^N.

Введем далее банахово пространство $l_p (1\leqslant p<\infty)$ последовательностей $\{x_k\}$ из R^N таких, что $\sum\limits_k |x_k|^p<\infty$. Обозначим через B_p след σ—алгебры B^N в l_p. Воспользуемся следующим результатом [6]: для того чтобы некоторое нормальное распределение в (R^N, B^N) с математическим ожиданием $\{m_k\}$ и корреляционной матрицей $\|s_{kl}\|$ было сосредоточено в (l_p, B_p) (тогда оно будет нормальным в l_p), необходимо и достаточно, чтобы $\{m_k\} \in l_p$ и $\{s_{kk}\} \in l_{\frac{p}{2}}$.

Пользуясь этим результатом, докажем основное утверждение данной работы: конечномерные распределения, соответствующие решениям урезанных систем (7), продолжаются при каждом $t>0$ до распределения μ_t (нормального) в гильбертовом пространстве l_2.

Для этого нужно найти решение системы (7), определить математическое ожидание и корреляционную матрицу, доказать, что распределение μ_t нормально, и проверить сходимость двух рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} s_{kk}.$$

Уравнения системы (7) не связаны между собой, поэтому можно искать решение отдельно при каждом k. Характеристическое уравнение, соответствующее одному из уравнений системы (7), есть

$$y_k^2 + hy_k + \lambda_k^2 = 0.$$

Отсюда

$$y_k^{(1,2)} = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \lambda_k^2}.$$

Поскольку величина h постоянна, а λ_k растет как показано в (5), то дискриминант станет отрицательным, начиная с некоторого k. Поэтому удобно записать общее решение соответствующего однородного уравнения в виде

$$\tilde{T}_k(t) = C_k^{(1)} e^{\alpha t} \cos \beta_k t + C_k^{(2)} e^{\alpha t} \sin \beta_k t,$$

где

$$\alpha = -\frac{h}{2}, \quad \beta_k = \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

Методом вариации произвольной постоянной находим общее решение системы (7):

$$T_k(t) = \tilde{T}_k(t) + \int_0^t G_k(t, \tau) v_k(\tau)\, d\tau, \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$G_k(t, \tau) = \frac{1}{\beta_k} e^{\alpha(t-\tau)} \cos \beta_k (t - \tau) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Константы $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ находятся из начальных условий (8):

$$C_k^{(1)} = f_k, \quad C_k^{(2)} = \frac{g_k - \alpha f_k}{\beta_k} \; (k = 1, 2, \ldots).$$

Отметим, что

$$\int_0^t G_k(t, \tau)\, v_k(\tau)\, d\tau = \gamma_k \int_0^t G_k(t, \tau)\, dw(\tau)$$

и интеграл понимается в смысле сходимости интегральных сумм в среднем квадратичном.

Вычислим далее m_k:

$$m_k = MT_k(t) = \widetilde{T}_k(t) + M\int_0^t G_k(t, \tau) v_k(\tau)\, d\tau.$$

$$M\int_0^t G_k(t, \tau)\, v_k(\tau)\, d\tau = \gamma_k M \int_0^t G_k(t, \tau)\, dw(\tau) = \gamma_k \times$$

$$\times M \lim \sum_n G_k(t, \tau_n') \left[w(\tau_n) - w(\tau_{n-1}) \right] = \gamma_k \cdot \lim \sum_n \{ G_k(t, \tau_n') \times$$

$$\times M\left[w(\tau_n) - w(\tau_{n-1}) \right] \} = 0.$$

В силу четвертого свойства винеровских процессов. Таким образом получаем, что

$$m_k = f_k e^{\alpha t} \cos \beta_k t + \frac{g_k - \alpha f_k}{\beta_k} e^{\alpha t} \sin \beta_k t. \tag{12}$$

Далее

$$s_{kj} = MT_k(t)\, T_j(t) = \gamma_k \gamma_j \cdot M\left[\int_0^t G_k(t, \tau)\, dw(\tau) \int_0^t G_j(t, \tau)\, dw(\tau) \right].$$

Заменим оба интеграла пределами интегральных сумм, причем выберем в обоих случаях одинаковые разбиения. Тогда

$$M\left\{ \int_0^t G_k(t, \tau)\, dw(\tau) \cdot \int_0^t G_j(t, \tau)\, dw(\tau) \right\} = M \left\{ \lim \sum_n G_k(t, \tau_n') \times \right.$$

$$\times \left[w(\tau_n) - w(\tau_{n-1}) \right] \cdot \lim \sum_n G_j(t, \tau_n') \left[w(\tau_n) - w(\tau_{n-1}) \right] \Big\} =$$

$$= \lim \{\sum_n G_k(t, \tau_n') G_j(t, \tau_n') \cdot M[w(\tau_n) - w(\tau_{n-1})]^2\} =$$

$$= \lim \sum_n G_k(t, \tau_n') G_j(t, \tau_n') \sigma^2 [\tau_n - \tau_{n-1}] = \sigma^2 \cdot \int_0^t G_k(t, \tau) G_j(t, \tau)\, d\tau.$$

В этой выкладке использованы второе, четвертое и пятое свойства винеровских процессов.

Таким образом,

$$s_{kj} = \gamma_k \gamma_j \int_0^t G_k(t, \tau) G_j(t, \tau)\, d\tau.$$

Доказательство того, что распределение μ_t нормально, дословно воспроизводит соответствующее доказательство из [2] и здесь опущено.

Докажем теперь сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^2.$$

Для этого нужна асимптотическая оценка величин f_k и g_k. Из (6), (9), (10) следует, что

$$f_k \sim \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cos kx\, dx, \quad g_k \sim \int_{x_1}^{x_2} g(x) \cos kx\, dx \quad (k \to \infty).$$

Поскольку $f(x)$ и $g(x)$ — функции ограниченной вариации, легко видеть, что

$$f_k \sim \frac{1}{k}; \quad g_k \sim \frac{1}{k} \quad (k \to \infty).$$

В силу (12) имеем

$$m_k^2 = f_k^2 e^{2\alpha t} \cos^2 \beta_k t + \frac{(g_k - \alpha f_k)^2}{\beta_k^2} e^{2\alpha t} \sin^2 \beta_k t + 2 f_k \frac{g_k - \alpha f_k}{\beta_k} \times$$
$$\times e^{2\alpha t} \sin \beta_k t \cos \beta_k t.$$

Нужно доказать сходимость трех рядов. Но для первого ряда общий член

$$f_k^2 e^{2\alpha t} \cos^2 \beta_k t \sim \frac{\cos^2 kt}{k^2} \quad (k \to \infty),$$

для второго —

$$\frac{(g_k-\alpha f_k)^2}{\beta_k^2}\,e^{2\alpha t}\sin^2\beta_k t=o\left(\frac{1}{k^2}\right)\quad(k\to\infty).$$

для третьего —

$$2f_k\,\frac{g_k-\alpha f_k}{\beta_k}\,e^{2\alpha t}\sin\beta_k t\cos\beta_k t=o\left(\frac{1}{k^2}\right)\quad(k\to\infty).$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^2$$

сходится при любом t.

Рассмотрим далее

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_{kk}=\sigma^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2\int_0^t G_k^2(t,\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Так как $G_k(t,\tau)$ определяется формулой (11), можно легко вычислить встречающийся интеграл

$$\int_0^t G_k^2(t,\tau)\,d\tau=\frac{1}{\beta_k^2}\left\{e^{2\alpha t}\left[\frac{1}{2\alpha}+\frac{\alpha\cos 2\beta_k t+\beta_k\sin 2\beta_k t}{4(\alpha^2+\beta_k^2)}\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2\alpha}+\frac{\alpha}{4(\alpha^2+\beta_k^2)}\right]\right\}.$$

Если предположить, что γ_k^2 ограничены сверху некоторой константой и учесть, что $\beta_k\sim k$ $(k\to\infty)$, то сходимость ряда (13) станет очевидной.

Это и завершает доказательство.

Автор выражает благодарность А. А. Янцевичу за постановку задачи и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Бейлинсон. К вопросу о решении вероятностной неравновесной задачи для распределенных систем. «Теория вероят. и ее примен.», IX. 3 (1964), 519—523.

2. Н. Н. Вахания. Об одной вероятностной задаче для одномерного уравнения теплопроводности. «Теория вероят. и ее примен.», XII, 4 (1967), 727—729.

3. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. Введение в спектральную теорию. «Наука», М., 1970.

4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. «Наука», М., 1965.

5. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов, т. 1. «Наука», М., 1971.

6. Н. Н. Вахания. О характеристических функционалах для случайных последовательностей. «Тр. ВЦ АН Груз. ССР», V, 1 (1965), 5—32.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. З. Соколовский

Теория стохастических дифференциальных уравнений в настоящее время достаточно подробно разработана [1]. Однако вопросы приближенного решения таких уравнений мало изучены, хотя в приложениях часто возникают задачи такого рода [2, 3].

В данной работе на примере двух задач теории колебаний, приводящих к изучению решений обыкновенного дифференциального стохастического уравнения и соответствующего уравнения в частных производных, показывается как при определенных условиях на переменные случайные коэффициенты и случайные правые части метод Бубнова—Галеркина распространяется на стохастические дифференциальные уравнения.

1. Рассмотрим задачу об установившихся малых колебаниях струны:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+\rho(x)\,u=f(x),\qquad u(0)=u(\pi)=0, \tag{1}$$

где плотность ρ и вынуждающая функции f являются случайными процессами. Выясним, при каких условиях приближенное решение этой задачи, построенное по методу Бубнова—Галеркина, будет сходиться в среднем квадратичном к точному решению.

В качестве n-го приближения выберем функцию

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx, \tag{2}$$

где $a_k (k=1, \ldots, n)$ — случайные величины, которые находятся из следующей системы случайных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\gamma_{mk}+\frac{\pi m^2}{2}a_m=f_m \quad (m=1,\ldots n),$$

где

$$\gamma_{mk}=\int_0^{\pi}\rho(x)\sin kx\sin mx\,dx,$$

$$f_m = \int_0^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

При каких условиях на $\rho(x)$ и $f(x)$ приближенные решения u_n сходятся к точному решению u, в том смысле, что

$$M \int_0^{\pi} |u - u_n|^2 \, dx \to 0 \, (n \to \infty) \qquad (3)$$

(M — знак математического ожидания).

Для ответа на этот вопрос воспользуемся некоторыми результатами [4]. Рассмотрим гильбертово пространство H и в нем положительно определенный оператор A_0, т. е. симметричный оператор такой, что для любой функции $u \in D_{A_0}$ справедливо неравенство

$$(A_0 u, u) \geqslant k^2 \| u \|^2.$$

На множестве D_{A_0} введем новое скалярное произведение

$$[u, \; v] = (A_0 u, v)$$

и соответствующую норму [4]

$$|u| = \sqrt{(A_0 u, u)},$$

Получим новое пространство H_0, которое после пополнения по норме $|\cdot|$ станет гильбертовым, т. н. энергетическое пространство. Легко видеть, что из сходимости по энергии следует сходимость по норме в пространстве H. Известно, что оператор $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями $u(0) = u(\pi) = 0$ является положительно определенным.

Имеет место следующее утверждение [4, 428]:

Теорема А. Приближенные решения задачи

$$A_0 u + Ku = f,$$

построенные по методу Бубнова—Галеркина, сходятся по энергии оператора A_0 к точному решению этого уравнения, если выполнены два условия:

1. Задача (4) имеет не более одного решения в H_0.
2. Оператор $T = A_0^{-1} K$ вполне непрерывен в H_0.

Выберем в качестве пространства H пространство тех случайных процессов $u(x)$, у которых корреляционные функции $B(x, x')$ имеют ограниченную вторую смешанную производную $\dfrac{\partial^2 B(x, x')}{\partial x \, \partial x'}$ при $x' = x$ $(x \in [0, \pi])$.

Скалярное произведение в H зададим как

$$(u, v) = M \int_0^\pi u(x)\, v(x)\, dx.$$

Энергетическое произведение задается соответственно формулой

$$[u, v] = M \int_0^\pi \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx.$$

Пусть $\rho(x)$ — неотрицательный отличный от тождественного нуля случайный процесс. Тогда первое условие теоремы А выполнено.

Допустим противное: задача (1) имеет два решения $u(x)$ и $v(x)$. Их разность $w(x)$ будет решением задачи

$$-\frac{d^2w}{dx^2} + \rho(x)\, w = 0,$$

$$w(0) = w(\pi) = 0.$$

Тогда

$$\left(-\frac{d^2w}{dx^2} + \rho(x)\, w, w\right) = 0.$$

Это значит, что

$$M \int_0^\pi \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx + M \int_0^\pi \rho(x)\, w^2(x)\, dx = 0$$

и так как $\rho(x) \geqslant 0$ (п. н.), то

$$M \int_0^\pi \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = M \int_0^\pi \rho(x)\, w^2(x)\, dx = 0.$$

Первое равенство показывает, что $\dfrac{dw}{dx} = 0$ или $w = q = \mathrm{const}$ (почти наверное и почти всюду на сегменте $[0, \pi]$). Тогда из второго равенства следует, что

$$q^2 \cdot M \int_0^\pi \rho(x)\, dx = 0$$

и так как $\rho(x) \not\equiv 0$ (п. н.), то $q = 0$.

Рассмотрим теперь второе условие теоремы А.

Введем функцию Грина $G(x, \xi)$ для задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0,$$

$$u(0)=u(\pi)=0.$$

Тогда

$$A_0^{-1}u=\int_0^{\pi} G(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

Построим функцию $v=A_0^{-1}Ku$ или

$$v(x)=\int_0^{\pi} G(x, \xi)\, \rho(\xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

Продифференцируем это равенство по x:

$$v'(x)=\int_0^{\pi} G'_x(x, \xi)\, \rho(\xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Подставляя в (5)

$$u(\xi)=\int_0^{\xi} u(\eta)\, d\eta,$$

и меняя порядок интегрирования, получим

$$v'(x)=\int_0^{\pi} N(x, \eta)\, u'(\eta)\, d\eta, \tag{6}$$

где

$$N(x, \eta)=\int_0^{\pi} G'_x(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi.$$

Покажем, что интеграл (6) есть оператор Фредгольма над функцией $u'(x)$. Для этого нужно, чтобы

$$M\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |N(x, \eta)|^2\, dx\, d\eta<\infty.$$

Но

$$|N(x, \eta)|^2=\left|\int_{\eta}^{\pi} G'_x(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi\right|^2 \leqslant \int_0^{\pi} |G'_x(x, \xi)|^2\, d\xi \cdot \int_0^{\pi} |\rho(\xi)|^2\, d\xi.$$

Тогда

$$M\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|N(x,\eta)|^2\,dx\,d\eta \leqslant \pi\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|G'_x(x,\xi)|^2 d\xi\,dx\cdot M\int_0^{\pi}|\rho(\xi)|^2\,d\xi,$$

поскольку функция Грина $G(x.\xi)$ является детерминированной. Известно, что

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|G'_x(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi < \infty.$$

Поэтому достаточно потребовать, чтобы

$$M\int_0^{\pi}|\rho(x)|^2\,dx < \infty \tag{7}$$

и тогда ядро $N(x, \varepsilon)$ будет фредгольмовским.

Следовательно, интеграл (5) задает вполне непрерывный в H оператор. Возьмем теперь ограниченное в H_0 множество функций $u(x)$:

$$|u|^2 = M\int_0^{\pi}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx < C = \text{const}.$$

Интеграл (5) преобразует ограниченное множество в компактное. Поэтому из этого множества можно выбрать последовательность $\{u_n(x)\}$ такую, что

$$\|v'_n - v'_k\|^2 = M\int_0^{\pi}|v'_n(x) - v'_k(x)|^2\,dx \xrightarrow[n,\,k\to\infty]{} 0.$$

Но это как раз и означает, что $|v_n - v_k|\xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0.$

Значит, оператор $A_0^{-1}K$ переводит ограниченное в H_0 множество во множество, компактное в H_0, т. е. он является вполне непрерывным в H_0, что и требовалось установить.

Заметим еще, что для выполнения условия (7) достаточно (но не необходимо) потребовать ограниченности ковариации $\rho(x)$.

Итак, доказана следующая

Теорема 1. Если $\rho(x)$ — неотрицательный и не равный тождественно нулю случайный процесс с ограниченной ковариацией и $M|f|^2 < \infty$, то приближенное решение (2) сходится к точному решению задачи (1) в смысле (3).

2. Рассмотрим теперь задачу о колебании мембраны со случайной плотностью

$$-\Delta u+\rho(x, y)u=f, \ u(0, y)=u(\pi, y)=u(x, 0)=u(x, \pi)=0, \quad (8)$$

где $\rho(x, y)$ и $f(x, y)$ — случайные поля.

n-ое приближение, построенное по методу Бубнова—Галеркина, имеет вид

$$u_n(x, y)=\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\sin kx\sin jy, \quad (9)$$

где a_{kj} $(k=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, n)$ — случайные величины, определяемые из следующей линейной алгебраической системы уравнений.

$$\sum_{k\,j=1}^{n} a_{kj}\gamma_{mqkj}+\frac{\pi^2(m^2+q^2)}{4}a_{mq}=f_{mq} \qquad (m, q=1, \ldots, n),$$

где

$$\gamma_{mqkj}=\int_0^\pi\int_0^\pi \rho(x, y)\sin kx\sin jy\sin mx\sin qy\,dx\,dy;$$

$$f_{mq}=\int_0^\pi\int_0^\pi f(x, y)\sin mx\sin qy\,dx\,dy.$$

Как и в случае струны, выясним, какие условия нужно наложить на $\rho(x, y)$, чтобы приближенное решение $u_n(x, y)$ сходилось к точному $u(x, y)$ в метрике

$$M\int_0^\pi\int_0^\pi |u-u_n|^2\,dx\,dy\to 0 \quad (n\to\infty). \quad (10)$$

Воспользуемся следствием из теоремы А [4, 431]:

Теорема Б. Процесс Бубнова—Галеркина сходится, если

1. Уравнение $A_0u+Ku=f$ имеет не более одного решения.

2. Оператор A_0^{-1} вполне непрерывен, а оператор K ограничен в H.

Единственность решения доказывается так же, как и в пункте 1. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — два решения задачи (8), $w(x, y)=u(x, y)-v(x, y)$. Тогда

$$(A_0w, w)+(Kw, w)=0,$$

т. е.

$$-M\int_0^\pi\int_0^\pi \Delta w w\,dx\,dy + M\int_0^\pi\int_0^\pi \rho w^2\,dx\,dy = 0$$

или

$$M\int_0^\pi\int_0^\pi \operatorname{grad}^2 w\,dx\,dy + M\int_0^\pi\int_0^\pi \rho w^2\,dx\,dy = 0.$$

Если потребовать, чтобы $\rho(x, y) \geqslant 0$ (п. н.), то получим

$$M\int_0^\pi\int_0^\pi \operatorname{grad}^2 w\,dx\,dy = M\int_0^\pi\int_0^\pi \rho w^2\,dx\,dy = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} w = 0$ (п. н.) и $w = \mathrm{const}$ (п. н.). Если $\rho(x) \not\equiv 0$ (п. н.), то отсюда следует, что $w = 0$ (п. н.). Таким образом, решение задачи (8) единственно.

Проверим далее полную непрерывность оператора A_0^{-1}.

$$A_0^{-1}u = \int_0^\pi\int_0^\pi G(x, y, \xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где G — функция Грина задачи

$$\Delta u = 0,$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0.$$

Оператор A_0^{-1} будет вполне непрерывным, если ядро $G(x, y, \xi, \eta)$ фредгольмово, т. е.

$$M\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi |G(x, y, \xi, \eta)|^2\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta < \infty.$$

Но функция $G(x, y, \xi, \eta)$ — детерминирована, и, как известно,

$$\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi |G(x, y, \xi, \eta)|^2\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta < \infty.$$

Для того, чтобы оператор K был ограничен в H, достаточно, чтобы $\rho(x, y) \leqslant C$ (п. н.), где C — некоторая константа. В самом деле,

$$\|Ku\|^2 = \|\rho u\|^2 = M\int_0^\pi\int_0^\pi \rho^2 u^2\,dx\,dy \leqslant C^2\cdot M\int_0^\pi\int_0^\pi u^2\,dx\,dy.$$

Следовательно, $\|K\| \leqslant C$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если случайное поле $\rho(x, y)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant C$ и не равно тождественному нулю, а $M|f|^2 < \infty$, то приближенное решение (9) задачи (8) сходится к точному решению в метрике (10).

Автор выражает благодарность А. А. Янцевичу за постановку задачи и внимание к работе.

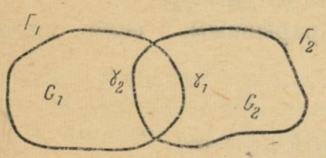
ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов, т. I. «Наука», М., 1971.
2. М. Ф. Диментберг. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках. «Изв. АН СССР, Механика и машиностроение», 1962, № 5.
3. И. И. Ворович. Статистический метод в теории устойчивости оболочек. ПММ, 23, 1959, № 5.
4. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. «Наука», М., 1970.

ВАРИАНТ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО МЕТОДА ШВАРЦА

В. В. Меньшиков, Б. С. Элькин

Иногда возникает необходимость находить решение эллиптического уравнения в области $G \subset R^n$, представляющей собой объединение двух пересекающихся областей G_1 и G_2, причем в каждой из областей G_1 и G_2 это уравнение легко решается. Для нахождения решения в области G применяют альтернирующий метод Шварца [1, 3]. В обычно излагаемом варианте классического метода Шварца речь идет о решении уравнения Лапласа при граничных условиях Дирихле. В этой работе рассматривается модификация метода Шварца: этот метод переносится на случай неоднородного уравнения при неоднородных краевых условиях III рода.



Итак, ставится следующая задача: в области $G = G_1 \cup G_2$ (предполагается, что G_1 и G_2 имеют кусочно-гладкую границу и пересекаются под ненулевым углом в точках, не являющимися угловыми или коническими и не лежащими на ребрах) ищется решение $u(x)$ эллиптического уравнения

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x) u(x) = f(x) \quad (1)$$

при краевых условиях

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(x)u(x)=\psi(x)\quad (x\in\Gamma),\tag{2}$$

где

$$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)\in R^n,$$

Γ — граница области G,

$\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к Γ,

$a_{ik}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ — непрерывные функции,

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)x_i x_k \geqslant m^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,(m=\mathrm{const}>0),\ a(x)\geqslant 0,$$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ — ограниченные и измеримые функции,

$$\alpha(x)\geqslant 0,\quad \beta(x)\geqslant 0\quad (\beta(x)\not\equiv 0),$$

$$\alpha(x)+\beta(x)>0.$$

Известно, что решение краевой задачи (1)—(2) в G существует и единственно.

Обозначим через γ_1 часть границы G_1, лежащую в G_2, а Γ_1 — оставшуюся часть границы G_1. Аналогично, γ_2 — часть границы G_2, лежащая в G_1, Γ_2 — оставшаяся часть границы G_2. Ясно, что $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Зададимся некоторой произвольной непрерывной функцией $F(x)$ на γ_1. Первое приближение в области G_1 к решению $u(x)$ задачи (1)—(2) — функцию $u'_1(x)$ мы ищем как решение уравнения (1) в G_1 при краевых условиях

$$\begin{cases}\alpha(x)\dfrac{\partial u'_1}{\partial n}+\beta(x)u'_1(x)=\psi(x) & (x\in\Gamma_1)\\ u'_1(x)=F(x) & (x\in\gamma_1)\end{cases}\tag{3}$$

По найденной функции $u'_1(x)$ построим первое приближение к $u(x)$ в G_2, $u''_1(x)$, как решение уравнения (1) в G_2 при краевых условиях

$$\begin{cases}\alpha(x)\dfrac{\partial u''_1}{\partial n}+\beta(x)u''_1(x)=\psi(x) & (x\in\Gamma_2)\\ u''_1(x)=u'_1(x) & (x\in\gamma_2).\end{cases}\tag{4}$$

По $u_1''(x)$ строим второе приближение $u_2'(x)$ к $u(x)$ в G_1 как решение уравнения (1) при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial u_2'}{\partial n} + \beta(x)\, u_2'(x) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ \qquad u_2'(x) = u_1''(x) \quad (x \in \gamma_1) \end{cases} \tag{5}$$

и так далее.

Приближения $u_k'(x)$ и $u_k''(x)$ к $u(x)$ в областях G_1 и G_2 соответственно мы определим через предыдущие приближения как решения уравнения (1) в G_1 и G_2 при краевых условиях (6) и (7):

$$\begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial u_k'}{\partial n} + \beta(x)\, u_k'(x) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ \qquad u_k'(x) = u_{k-1}''(x) \quad (x \in \gamma_1), \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial u_k''}{\partial n} + \beta(x)\, u_k''(x) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma_2), \\ \qquad u_k''(x) = u_k'(x) \quad (x \in \gamma_2). \end{cases} \tag{7}$$

В каждой из областей мы получим последовательность функций

$$\begin{cases} u_1'(x),\ u_2'(x), \ldots, u_k'(x), \ldots \quad (x \in G_1) \\ u_1''(x),\ u_2''(x), \ldots, u_k^{\circ}(x), \ldots \quad (x \in G_2) \end{cases} \tag{8}$$

Докажем, что последовательности функций $u_k'(x)$ и $u_k''(x)$ сходятся к функции $u(x)$ в областях G_1 и G_2 соответственно.

Обозначим сужение значения решения задачи (1) — (2) $u(x)$ на γ_1 через $u|_{\gamma_1}(x)$. Функцию $\varphi(x)$ определим равенством

$$F(x) = u|_{\gamma_1}(x) + \varphi(x) \quad (x \in \gamma_1) \tag{9}$$

— как разность между произвольно заданным первым приближением на γ_1 и значением решения на γ_1.

Для доказательства сходимости последовательности (8) к решению $u(x)$ достаточно показать, что сходится к нулю аналогично построенная последовательность для однородного эллиптического уравнения

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{du}{dx_i} - a(x)\,u(x) = 0 \tag{10}$$

при однородных краевых условиях

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)\,u(x) = 0 \quad (x \in \Gamma). \tag{11}$$

Дело в том, что приближения $u_k'(x)$ и $u_k''(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ представимы в виде суммы двух функций

$$\begin{cases} u_k'(x) = v_k'(x) + \breve{u}_k'(x)(x)(x \in G_1), \\ u_k''(x) = v_k''(x) + \breve{u}_k''(x)\ (x \in G_2), \end{cases} \tag{12}$$

где

$\breve{u}_1'(x)$ — решение уравнения (1) в G_1 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial \breve{u}_1'}{\partial n} + \beta(x)\, \breve{u}_1'(x) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ \breve{u}_1'(x) = u|_{\gamma_1}(x) \quad (x \in \gamma_1), \end{cases} \tag{13}$$

$v_1'(x)$ — решение уравнения (10) в G_1 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial v_1'}{\partial n} + \beta(x)\, v_1'(x) = 0 \quad (x \in \Gamma_1), \\ v_1'(x) = \varphi(x) \qquad\qquad (x \in \gamma_1), \end{cases} \tag{14}$$

$\breve{u}_1''(x)$ — решение уравнения (1) в G_2 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial \breve{u}_1''}{\partial n} + \beta(x)\breve{u}_1''(x) = \psi(x) \quad (x \in \Gamma_2), \\ \breve{u}_1''(x) = \breve{u}_1'(x) \qquad\qquad (x \in \gamma_2), \end{cases} \tag{15}$$

$v_1''(x)$ — решение уравнения (10) в G_2 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial v_1''}{\partial n} + \beta(x)\, v_1''(x) = 0 \quad (x \in \Gamma_2), \\ v_1''(x) = v_1'(x) \qquad\qquad (x \in \gamma_2) \end{cases} \tag{16}$$

и так далее.

В силу теоремы единственности

$$\begin{cases} \breve{u}_1'(x) \equiv \breve{u}_2'(x) \equiv \ldots \equiv \breve{u}_k'(x) \equiv \ldots \equiv u(x) \quad (x \in G_1), \\ \breve{u}_1''(x) \equiv \breve{u}_2''(x) \equiv \ldots \equiv \breve{u}_k''(x) \equiv \ldots \equiv u(x) \quad (x \in G_2). \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, достаточно доказать, что сходятся к нулю, последовательности

$$\begin{gathered} \{v_k'(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (x \in G_1), \\ \{v_k''(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (x \in G_2). \end{gathered} \tag{18}$$

Обозначим $M = \sup |\varphi(x)|$. Построим последовательности функций $w'_k(x)$, $w''_k(x)$ $(k = 1, 2 \ldots)$ по следующему правилу:

$w'_1(x)$ — решение уравнения (10) в G_1 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial w'_1}{\partial n} + \beta(x) w'_1(x) = 0 & (x \in \Gamma_1), \\ w'_1(x) = M & (x \in \gamma_1), \end{cases} \tag{19}$$

$w''_1(x)$ — решение уравнения (10) в G_2 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial w''_1}{\partial n} + \beta(x) w''_1(x) = 0 & (x \in \Gamma_2), \\ w''_1(x) = w'_1(x) & (x \in \gamma_2) \end{cases} \tag{20}$$

и так далее.

Функция $w'_k(x)$, $w''_k(x)$, как вытекает из приведенной ниже теоремы, мажорируют по модулю функции $v'_k(x)$ и $v''_k(x)$ в областях G_1 и G_2 соответственно:

$$\begin{cases} -w'_k(x) \leqslant v'_k(x) \leqslant w'_k(x) & (x \in G_1), \\ -w''_k(x) \leqslant v''_k(x) \leqslant w''_k(x) & (x \in G_2). \end{cases} \tag{21}$$
$$(k = 1, 2 \ldots)$$

Таким образом сходимость к нулю последовательностей $\{v'_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x \in G_1)$, $\{v''_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x \in G_2)$ будет доказана, если мы докажем, что сходятся к нулю последовательности функций $\{w'_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x \in G_1)$, $\{w''_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x \in G_2)$.

Теорема. Решение уравнения (10) в G_i при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x) \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta(x) u(x) = 0 & (x \in \Gamma_i) \\ u(x) = \eta(x) \quad (x \in \gamma_i) \\ \qquad \eta(x) > 0 \qquad (i = 1, 2) \end{cases} \tag{22}$$

неотрицательно и не может достигать max на Γ_i $(i=1, 2)$. Теоремы аналогичного характера хорошо известны в теории эллиптических уравнений (см. например [2]). Доказательство теоремы опускается.

В силу теоремы последовательности $w'_k(x)$, $w''_k(x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$w'_1(x) \geqslant w'_2(x) \geqslant \ldots \geqslant 0 \qquad (x \in G_1), \tag{23}$$

$$w''_1(x) \geqslant w''_2(x) \geqslant \ldots \geqslant 0 \quad (x \in G_2). \tag{24}$$

Монотонно убывающие и ограниченные последовательности (23), (24) сходятся к неотрицательным функциям $w'(x)$ $(x \in G_1)$, $w''(x)$ $(x \in G_2)$.

Обозначим через $\tilde{w}'(x)$ решение уравнения (10) в G_1 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial \tilde{w}'}{\partial n} + \beta(x)\tilde{w}'(x) = 0 & (x \in \Gamma_1), \\ \tilde{w}'(x) = w''(x) & (x \in \gamma_1), \end{cases} \tag{25}$$

и через $\tilde{w}''(x)$ решение уравнения (10) в G_2 при краевых условиях

$$\begin{cases} \alpha(x)\dfrac{\partial \tilde{w}''}{\partial n} + \beta(x)\tilde{w}''(x) = 0 & (x \in \Gamma_2), \\ \tilde{w}''(x) = w'(x) & (x \in \gamma_2). \end{cases} \tag{26}$$

Проверяется, что

$$\tilde{w}'(x) = \tilde{w}''(x) \quad (x \in G_1 \cap G_2). \tag{27}$$

Введем функцию

$$w(x) = \begin{cases} \tilde{w}'(x) & (x \in G_1) \\ \tilde{w}''(x) & (x \in G_2/G_1). \end{cases} \tag{28}$$

Так как $\tilde{w}'(x)$ и $\tilde{w}''(x)$ удовлетворяют уравнению (10) и краевым условиям (25), (26) в соответствующих областях, функция $w(x)$ является решением однородной краевой задачи (10), (11) в G, и по теореме единственности $w(x) \equiv 0$.

Итак,

$$\begin{cases} w'_k(x) \to 0 & (k \to \infty) & (x \in G_1), \\ w''_k(x) \to 0 & (k \to \infty) & (x \in G_2), \end{cases} \tag{29}$$

что и требовалось доказать.

Следует отметить, что условия непрерывности, налагаемые на функции $a_{ik}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ несущественны. Используя более тонкие результаты об эллиптических уравнениях [4], рассматриваемую модификацию метода Шварца можно обосновать и на случай, когда эти функции являются ограниченными и измеримыми.

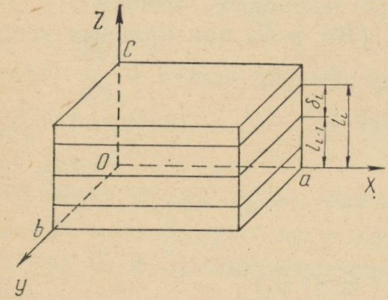
ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант. Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
2. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1966.
3. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, Л.—М., 1949.
4. Е. М. Ландис. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, «Наука», М., 1971.

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. В. Меньшиков, Б. С. Элькин

При нахождении температуры в области, представляющей собой p — слойный параллелепипед, с распределенными тепловыми источниками приходится решать следующую краевую задачу (см. рисунок).



$$\Delta u(x, y, z) - \alpha u(x, y, z) = - \chi_i(x, y, z), \quad (i=1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

где

Δ — оператор Лапласа,

$$\chi_i(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{\lambda_i},$$

$F(x, y, z)$ — плотность тепловых источников,

λ_i — коэффициент теплопроводности i-го слоя,

α — постоянная, характеризующая внутренние стоки тепла.

На границе между слоями должны выполняться условия непрерывности температуры $u(x, y, z)$ и тепловых потоков $\lambda \frac{\partial u}{\partial z}$:

$$u(x, y, l_i - 0) = u(x, y, l_i + 0), \tag{2}$$

$$\lambda_i \frac{\partial u(x, y, l_i - 0)}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u(x, y, l_i + 0)}{\partial z}. \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

На границе области должны выполняться условия III рода

$$\begin{cases} \alpha_1 \dfrac{\partial u(0, y, z)}{\partial x} + \beta_1 u(0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ \alpha_2 \dfrac{\partial u(a, y, z)}{\partial x} + \beta_2 u(a, y, z) = \psi_2(y, z), \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 \dfrac{\partial u(x, 0, z)}{\partial y} + \beta_3 u(x, 0, z) = \psi_3(x, z), \\ \alpha_4 \dfrac{\partial u(x, b, z)}{\partial y} + \beta_4 u(x, b, z) = \psi_4(x, z), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \alpha_5 \dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial z} + \beta_5 u(x, y, 0) = \psi_5(x, y), \\ \alpha_6 \dfrac{\partial u(x, y, c)}{\partial z} + \beta_6 u(x, y, c) = \psi_6(x, y), \end{cases} \tag{6}$$

где α_i, δ_i — постоянные величины ($i=1, 2, \dots, 6$).

В работе рассматривается приближенный метод решения этой краевой задачи. Он основан на разложении в ряд по собственным функциям дифференциальных операторов, соответствующих разделенным переменным [1].

Известно, что у следующей краевой задачи

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \mu f = 0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \dfrac{df(0)}{dx} + \beta_1 f(0) = 0, \\ \alpha_2 \dfrac{df(a)}{dx} + \beta_2 f(a) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

существует счетный набор собственных значений μ_n и счетная система ортонормированных собственных функций $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) полных в $L_2(0, a)$ [2].

Умножим уравнение (1) на $f_n(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до a. Обозначив

$$u_n(y, z) = \int_0^a u(x, y, z) f_n(x)\, dx, \tag{9}$$

$$[\chi_i(y, z)]_n = \int_0^a \chi_i(x, y, z) f_n(x)\, dx, \tag{10}$$

получим уравнения

$$\frac{\partial^2 u_n(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_n(y, z)}{\partial z^2} - (\mu_n + \alpha) u_n(y, z) = -[\chi_i(y, z)]_n + \Phi_n(y, z),$$

$$(i = 1, 2, \dots, p) \tag{11}$$

где

$$-\Phi_n(y, z) = \psi_2(y, z) \frac{f_n(a)}{\alpha_2} - \psi_1(y, z) \frac{f_n(0)}{\alpha_1} = \psi_1(y, z) \times$$

$$\times \frac{f_n'(0)}{\beta_1} - \psi_2(y, z) \frac{f_n'(a)}{\beta_2}.$$

Применив ту же процедуру к (2)—(3) и (5)—(6), получим

$$u_n(y, l_i - 0) = u_n(y, l_i + 0), \tag{12}$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_n(y, l_i - 0)}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u_n(y, l_i + 0)}{\partial z}, \tag{13}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 \dfrac{\partial u_n(0, z)}{\partial y} + \beta_3 u_n(0, z) = [\psi_3(z)]_n, \\ \alpha_4 \dfrac{\partial u_n(b, z)}{\partial y} + \beta_4 u_n(b, z) = [\psi_4(z)]_n, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \alpha_5 \dfrac{\partial u_n(y, 0)}{\partial z} + \beta_5 u_n(y, 0) = [\psi_5(y)]_n, \\ \alpha_6 \dfrac{\partial u_n(y, c)}{\partial z} + \beta_6 u_n(y, c) = [\psi_6(y)]_n, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$[\psi_k(z)]_n = \int_0^a \psi_k(x, z) f_n(x)\, dx \quad (k = 3, 4),$$

$$[\psi_k(y)]_n = \int_0^a \psi_k(x, y) f_n(x)\, dx \quad (k = 5, 6).$$

Решение исходной краевой задачи выразится в виде

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y, z) f_n(x), \tag{16}$$

где $u_n(y, z)$ — решение краевой задачи (11)—(15), причем ряд (16) сходится абсолютно и равномерно во всяком внутреннем отрезке $[a_1, a_2] \subset (0, a)$ [1].

Аналогично у краевой задачи

$$\frac{d^2 g}{dy^2} + \gamma g = 0, \tag{17}$$

$$\alpha_3 \frac{dg(0)}{dy} + \beta_3 g(0) = 0, \qquad \alpha_4 \frac{dg(b)}{dy} + \beta_4 g(b) = 0 \tag{18}$$

существует счетный набор собственных чисел γ_m и счетная система ортонормированных собственных функций $g_m(y)$ ($m = 1, 2, \ldots$) полных в $L_2(0, b)$ [2].

Умножим уравнение (11) на $g_m(y)$ и проинтегрируем по y от 0 до b. Обозначив

$$u_{n,m}(z) = \int_0^b u_n(y, z)\, g_m(y)\, dy, \tag{19}$$

$$[\chi_i(z)]_{n,m} = \int_0^b \{[\chi_i(y,z)]_n - \Phi_n(y,z)\} g_m(y)\,dy, \tag{20}$$

получим уравнения

$$\frac{d^2 u_{n,m}(z)}{dz^2} - (\mu_n + \gamma_m + \alpha)\, u_{n,m}(z) = -[\chi_i(z)]_{n,m} + F_{n,m}(z), \tag{21}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

где

$$-F_{n,m}(z) = [\psi_4(z)]_n \frac{g_m(b)}{\alpha_4} - [\psi_3(z)]_n \frac{g_m(0)}{\alpha_3} = [\psi_3(z)]_n \frac{g'_m(0)}{\beta_3} -$$

$$- [\psi_4(z)]_n \frac{g'_m(b)}{\beta_4}.$$

Применив ту же процедуру к (12)—(13) и (15), получим

$$u_{n,m}(l_i - 0) = u_{n,m}(l_i + 0), \tag{22}$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_{n,m}(l_i - 0)}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u_{n,m}(l_i + 0)}{\partial z}, \tag{23}$$

$$\begin{cases} \alpha_5 \dfrac{\partial u_{n,m}(0)}{\partial z} + \beta_5 u_{n,m}(0) = [\psi_5]_{n,m}, \\ \alpha_6 \dfrac{\partial u_{n,m}(c)}{\partial z} + \beta_6 u_{n,m}(c) = [\psi_6]_{n,m}, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$[\psi_k]_{n,m} = \int_0^b [\psi_k(y)]_n g_m(y)\,dy \quad (k = 5, 6). \tag{25}$$

Решение краевой задачи (11) — (15) имеет вид

$$u_n(y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(z)\, g_m(y), \tag{26}$$

где $u_{n,m}(z)$ — решение задачи (21)—(24), причем ряд (26) сходится абсолютно и равномерно во всяком внутреннем отрезке $[b_1, b_2]) \subset (0, b)$.

Таким образом решение краевой (1)—(16) задачи представимо в виде двойного ряда

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(z)\, f_n(x)\, g_m(y). \tag{27}$$

Обозначим $\mu_{n,m} = \sqrt{\mu_n + \gamma_m + \alpha}$.

Общее решение уравнения (21) имеет вид
при $\mu_{n,m} \neq 0$:

$$u_{n,m}(\eta) = [M_i]_{n,m} \operatorname{sh} \mu_{n,m}\eta + [N_i]_{n,m} \operatorname{ch} \mu_{n,m}\eta + R_i(\eta), \tag{28}$$

где

$$R_i(\eta) = \frac{1}{\mu_{n,m}} \int_0^\eta \{[\chi_i(\tau)]_{n,m} + F_{n,m}(\tau)\} \operatorname{sh} \mu_{n,m}(\eta - \tau) d\tau \tag{29}$$

при $\mu_{n,m} = 0$:

$$u_{n,m}(\eta) = [M_i]_{n,m}\eta + [N_i]_{n,m} + R_i(\eta), \tag{30}$$

где

$$R_i(\eta) = \int_0^\eta d\tau \int_0^\tau \{[\chi_i(\omega)]_{n,m} + F_{n,m}(\omega)\} d\omega. \tag{31}$$

В выражениях (28)—(31) η отсчитывается от начала i-го слоя.

Проведем рассмотрение для некоторых фиксированных n и m. Подставив (28)—(31) в (22)—(23), получим
при $\mu \neq 0$:

$$M_i \operatorname{sh} \mu\delta_i + N_i \operatorname{ch} \mu\delta_i + R_i(\delta_i) = N_{i+1} \tag{32а}$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} [M_i \operatorname{ch} \mu\delta_i + N_i \operatorname{sh} \mu\delta_i + Q_i(\delta_i)] = M_{i+1} \tag{33а}$$

при $\mu = 0$:

$$M_i\delta_i + N_i + R_i(\delta_i) = N_{i+1}, \tag{32в}$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} [M_i + Q_i(\delta_i)] = M_{i+1}, \tag{33в}$$

где
$$Q_i(\eta) = \frac{d}{d\eta} R_i(\eta).$$

Уравнения (32а), (33а), (32в), (33в) запишем следующим образом:

$$a_{2i,2i-1}N_i + a_{2i,2i}M_i = b_{2i} + N_{i+1}, \tag{32}$$

$$a_{2i+1,2i-1}N_i + a_{2i+1,2i}M_i = b_{2i+1} + M_{i+1}. \tag{33}$$

Выражение (24) запишется в виде

$$a_{11}N_1 + a_{12}M_1 = b_1, \tag{34}$$

$$a_{2p,2p-1}N_p + a_{2p,2p}M_p = b_{2p}. \tag{35}$$

Система линейных алгебраических уравнений (32)—(35) в матричном виде запишется так:

$$AX=B, \tag{36}$$

где

$$X=(N_1,\ M_1,\ N_2\ M_2, \ldots N_p, M_p).$$

Решение системы (36) при помощи стандартных методов обращения матрицы в случае достаточно большого p практически неосуществимо даже на ЭВМ. В связи с этим система (36) решается способом, учитывающим специальный вид матрицы A.

Задавшись произвольным ненулевым значением M_1 или N_1 и последовательно используя (32)—(33), получим решение системы

$$AX^{\circ}=B^{0}, \tag{37}$$

где последний элемент b_{2p}^{0} вектора B° определяется из (35). Векторы B и B° могут отличаться лишь последним элементом. Задача сводится к решению системы

$$AX'=B', \tag{38}$$

где $X'=X-X^{\circ}$, $B'=B-B^{\circ}$.

Все элементы вектора B', за исключением, может быть, последнего b'_{2p} равны нулю (если окажется, что $b'_{2p}=0$, то искомое решение $X=X^{\circ}$).

Повторив описанную выше процедуру для системы (38), найдем решение системы

$$AX''=B'', \tag{39}$$

где b''_{2p} определяется из (35). Векторы B' и B'' отличаются лишь последним элементом, остальные их элементы равны 0. Отсюда следует, что

$$X'=\frac{b'_{2p}}{b''_{2p}}X''. \tag{40}$$

Решение системы (36) имеет вид

$$X=X^{\circ}+X'. \tag{41}$$

Таким образом будут определены $[M_i]_{n,m}$ и $[N_i]_{n,m}$ $(i=1, 2, \ldots, p)$.

Решение исходной краевой задачи (1)—(6) находится по формуле (27).

Так как для решения системы линейных алгебраических уравнений этим методом требуется очень мало машинного времени, то таким способом можно достаточно точно аппроксимировать задачи, где коэффициент теплопроводности является кусочно-непрерывной функцией одной переменной.

Затраты машинного времени намного уменьшаются, когда условия III рода переходят в условия I или II рода. Алгоритмы решения соответствующих задач были запрограммированы. Результаты вычислений приведены в таблице.

Количество слоев	Краевые условия	Количество точек, в которых подсчитывалось значение решения	Точность	Время, затраченное на счет на ЭВМ „М—20"	Количество членов ряда
4	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ $\beta_5 = \beta_6 = 0$	6	1—2%	1,5—2 *мин*	$N_x = 30$ $N_y = 20$
„	„ „	„ „	0,5—1%	3—3,5 *мин*	$N_x = 40$ $N_y = 40$

В случае условий III рода для определения собственных значений дифференциальных операторов, соответствующих разделенным переменным приходится решать следующие трансцендентные уравнения

$$\operatorname{tg} \sqrt{\mu}\, a = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 \beta_2 \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \alpha_1 \alpha_2 \sqrt{\mu}},$$

$$\operatorname{tg} \sqrt{\gamma}\, b = \frac{\alpha_3 \beta_4 - \beta_3 \alpha_4}{\beta_3 \beta_4 \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \alpha_3 \alpha_4 \sqrt{\gamma}}.$$

При решении конкретных задач ограничиваются лишь несколькими первыми корнями этих трансцендентных уравнений, так как их корни, начиная с некоторого, мало отличаются от собственных значений соответствующих условиям I и II рода, а следовательно, начиная с некоторого места, можно заменить собственные функции, соответствующие условиям III рода, на собственные функции, соответствующие условиям I и II рода, и при этом сохраняется нужная точность вычислений [1].

В связи с неоднородностью краевых условий (4)—(6) для проведения вычислений необходимо улучшать сходимость рядов. При этом применяются обычные методы улучшения сходимости рядов [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.

2. Б. М. Левитан. Разложение по собственным функциям ГИТТЛ. М., 1950.

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА, ИМЕЮЩИЕ МЕСТО В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Г. Альперин

Речь идет о так называемых неравенствах коэрцитивности в связи с дифференциальным оператором, определяющим уравнения равновесия линейной теории упругости. Задача состоит в том, чтобы установить условия, которым должны удовлетворять упругие постоянные (изотропной) среды для того, чтобы эти неравенства были действительны.

Пусть Ω — некоторая конечная область n-мерного евклидова пространства (отнесенного к декартовым координатам $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, ограниченная поверхностью $\partial\Omega$, подвержена деформации, описываемой вещественным вектором $u=(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Введем обозначения — $u_{i,k}=\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$, $u_{i,kl}=\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l}$, $u_{ik}=$ $=\dfrac{1}{2}(u_{i,k}+u_{k,i})$ и условимся, как обычно, считать суммой всякое выражение, в котором какой-нибудь индекс встречается два раза.

Тогда уравнения равновесия линейной теории упругости для изотропной среды выглядят так:

$$Au=M\cdot\Phi,$$

где оператор $A: Au=((Au)_1, (Au)_2, ..., (Au)_n)$, дается следующими выражениями:

$$(Au)_j \equiv -(a\,u_{j,kk}+u_{k,kj}),\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Здесь $a=1-2s$, где s — упругая постоянная, удовлетворяющая условию: $0<s<\dfrac{1}{2}$, $M>0$ — вторая упругая постоянная, а $\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n)$ — вектор объемных сил.

Применим к оператору (1) «формулу Грина» в следующем виде:

$$(Au,u)=-\int\limits_{(\Omega)}[a\,u_{j,kk}+u_{k.kj}(1-\lambda)+\lambda u_{k,kj}]\,u_j\,d\Omega=$$

$$=\int\limits_{(\Omega)}[a\,u_{j,k}^2+(1-\lambda)\,u_{k,k}^2+\lambda u_{j,k}u_{k,j}]\,d\Omega-\int\limits_{(\partial\Omega)}[au_{j.k}N_k+$$
$$+(1-\lambda)\,u_{k,k}N_j+\lambda u_{k,j}N_k]\,u_j\,ds,$$

где λ — произвольное вещественное число, а $N=(N_1, N_2, ..., N_n)$ — орт внешней нормали к $\partial\Omega$.

Таким образом, для одного оператора (1) мы получили целое семейство, зависящее от параметра λ, интегро-дифференциальных форм первого порядка

$$A^{(\lambda)}(u, u) \equiv \int\limits_{(\Omega)} [a u^2_{j,k} + (1-\lambda) u^2_{k,k} + \lambda u_{k,j} u_{j,k}]\, d\Omega =$$

$$= \int\limits_{(\Omega)} a^{jk}_{\alpha\beta} u_{j,\alpha} u_{k,\beta}\, d\Omega \qquad (2)$$

и такое же семейство граничных операторов $B^{(\lambda)} u = \left((B^{(\lambda)} u)_1, (B^{(\lambda)} u)_2, \ldots, (B^{(\lambda)} u)_n\right)$

$$(B^{(\lambda)} u)_j \equiv (a u_{j,k} + \lambda u_{k,j}) N_k + (1-\lambda) u_{k,k} N_j =$$
$$= N_\alpha a^{jk}_{\alpha\beta} u_{k,\beta}, \; j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

где положено

$$a^{jk}_{\alpha\beta} = a^{kj}_{\beta\alpha} = a\delta_{jk}\,\delta_{\alpha\beta} + (1-\lambda)\,\delta_{j\alpha}\,\delta_{k\beta} + \lambda\delta_{j\beta}\,\delta_{k\alpha}, \qquad (4)$$

δ_{jk} — символ Кронекера.

В связи с этим можно для одного и того же оператора (1) рассматривать одновременно два различных вида неравенств коэрцитивности: один — первого порядка, содержащий формы (2) и другой — второго порядка, относительно самого оператора A.

Эти неравенства и общие условия, при которых они имеют место для скалярных функций, установлены в двух теоремах С. Агмона [1]. На векторные функции эти теоремы были распространены de Figueiredo в работе [2].

Для краткости изложения мы ограничимся формулировкой этих теорем для частного случая оператора[1] (1).
Легко проверить, что они выглядят так (см. [2]).

Лемма 1 (Агмон). Пусть в каждой точке X° поверхности $\partial\Omega$, принадлежащей классу[2] C^1, для каждого вещественного орта $\xi = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ортогонального к орту $N = (N_1, N_2, ..., N_n)$ нормали к $\partial\Omega$ в этой точке и любой функции $f(t) = (f_1, f_2, ..., f_n)$, принадлежащей $L_2(0, \infty)$ и являющейся решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$a^{jk}_{\alpha\beta}\left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right)\left(\xi_\beta + iN_\beta \frac{d}{dt}\right) f_k = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5)$$

---

[1] Напомним, что этот оператор сильно-эллиптический. Действительно, согласно «формуле Грина» на стр. 2, $(Au, u) \geqslant a \int\limits_{(\Omega)} u^2_{j,k}\, d\Omega$ для всех функций $u \in C^2(\Omega)$ с компактным носителем в Ω.

[2] Определение класса поверхности см. [2].

($i=\sqrt{-1}$), имеет место неравенство

$$\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty a_{\alpha\beta}^{jk}\left(\xi_\alpha+iN_\alpha\frac{d}{dt}\right)f_k\cdot\overline{\left(\xi_\beta-iN_\beta\frac{d}{dt}\right)f_j}\,dt>0, \tag{6}$$

(здесь Re — вещественная часть, а $\overline{f_j}$ — функция, комплексно сопряженная с f_j).

Тогда для каждой функции $u\in W_2'(\Omega)$ имеет место неравенство

$$A^{(\lambda)}(u,u)\geqslant C_1\|u\|^2_{W_2'(\Omega)}-C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{7}$$

с постоянными C_1, $C_2>0$, зависящими только от Ω, λ и a.

Примечание. 1) Здесь $W_{2\sim}^m(\Omega)$ — пространство Соболева, а $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ — норма в нем.

2) Легко проверяется, что условие (6) является также и необходимым.

Лемма 2. (*Агмон*). Если же $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и единственным решением системы (5) — $f(t)\in L_2(0,\infty)$, удовлетворяющим при $t=0$ условиям

$$N_\beta a_{\alpha\beta}^{jk}\left(\xi_\alpha+iN_\alpha\frac{d}{dt}\right)f_k=0,\ j=1,2,\dots,n, \tag{8}$$

является $f(t)\equiv 0$, тогда для всякой функции $u\in W_2^2(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|Au\|^2_{L_2(\Omega)}+\langle\!\langle B^{(\lambda)}u\rangle\!\rangle^2_{\frac{1}{2}}\geqslant C_1\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)}-C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{9}$$

где C_1', $C_2'>0$ — постоянные, зависящие только от Ω, λ и a.

Примечание. 1) $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_{l-\frac{1}{2}}$ — поверхностная норма в пространстве Соболева дробного порядка — $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, определенная для скалярного случая в [3]. Если же $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ — вектор, то принимается

$$\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^2_{l-\frac{1}{2}}=\sum_{j=1}^n\langle\!\langle u_j\rangle\!\rangle^2_{l-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

2) В самой работе [2] утверждается только, что неравенство (9) справедливо для функций u, удовлетворяющих граничным условиям $B^{(\lambda)}u\big|_{\partial\Omega}=0$. Нетрудно проверить, что в случае граничного оператора (3) это неравенство остается в силе для всякой функции $u\in W_2^2(\Omega)$.

Нашей ближайшей задачей является установление условий, которым должны удовлетворять числа a и λ, при которых имеет место неравенство (6). Предварительно, однако, мы заменим его более простым.

Для этой цели проинтегрируем левую сторону (6) по частям

$$I \equiv \int_0^\infty a_{\alpha\beta}^{jk} \left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right) f_k \left(\xi_\beta - iN_\beta \frac{d}{dt}\right) \overline{f_j}\, dt = \tag{10}$$

$$= \int_0^\infty a_{\alpha\beta}^{jk} \left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right)\left(\xi_\beta + iN_\beta \frac{d}{dt}\right) f_k \cdot \overline{f_j}\, dt -$$

$$- iN_\beta a_{\alpha\beta}^{jk} \left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right) f_k\ \overline{f_j}\Big|_0^\infty = iN_\beta a_{\alpha\beta}^{jk} \left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right) f_k \cdot \overline{f_j}\Big|_{t=0}.$$

Здесь учтено, что под интегралом оказалось выражение, содержащее множителями левые части системы уравнений (5), и что $f(t) \in L_2(0, \infty)$.

Если учесть, что $a_{\alpha\beta}^{jk} = a_{\beta\alpha}^{kj}$, то легко обнаружить, что $\overline{I} = I$. Поэтому интегральное неравенство (6) можно заменить более простым: для тех же функций $f(t)$ должно быть

$$iN_\beta a_{\alpha\beta}^{jk} \left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right) f_k \cdot \overline{f_j}\Big|_{t=0} > 0. \tag{6_1}$$

Сравнивая это последнее с начальными условиями (8) в лемме 2, найдем, что последние выполняются одновременно с (6_1) и поэтому обе леммы можно заменить одним следующим предложением.

Теорема 1. Если для каждой точки x° поверхности $\partial\Omega$, принадлежащей классу C^2, каждого орта ξ, $\xi_j N_j = 0$ и любой функции $f(t) \in L_2(0, \infty)$, являющейся нетривиальным решением системы уравнений (5), выполняется условие (6_1), то для всякой функции $u \in W_2{}^2(\Omega)$ имеют одновременно место оба неравенства коэрцитивности — (7) и (9).

Примечание. Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и в случае оператора более общего вида. Таким образом, справедливо следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 1′. Пусть A — сильно эллиптический оператор в частных производных второго порядка вида

$$Au \equiv - \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + A_1 u,$$

где $A_{\alpha\beta}(x)$ — непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ комплексные $n \times n$ — матрицы и такие, что $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha} = \overline{A'_{\alpha\beta}} + \overline{A'_{\beta\alpha}}$, а A_1 — дифференциальный оператор не выше первого порядка.

Если для каждой точки x° поверхности $\partial\Omega$ класса C^2, каждого вещественного орта ξ, $\xi_j N_j = 0$ и любой функции $f(t) \not\equiv 0$, являющейся $L_2(0, \infty)$ — решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_{\alpha\beta}(x^0)\left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right)\left(\xi_\beta + iN_\beta \frac{d}{dt}\right) f = 0,$$

выполняется неравенство

$$Jm\left\{N_\beta A_{\alpha\beta}(x^0)\left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right) f \times \bar{f}\right\} < 0,$$

(знак $\times$ означает скалярное произведение двух векторов), тогда для всякой функции $u \in W_2{}^2(\Omega)$ имеют место одновременно два неравенства

$$\mathrm{Re}\int\limits_{(\Omega)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_\beta} d\Omega \geqslant C_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

и

$$\|Au\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\langle\!\left\langle N_\beta A_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\rangle\!\right\rangle^2_{\frac{1}{2}} \geqslant C_1'\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)} - C_2'\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

После этих предварительных замечаний, мы можем перейти к сути дела, т. е. к выяснению условий, которым должны быть подчинены параметры a и λ для того, чтобы выполнялись неравенства (7) и (9).

Для этой цели необходимо сперва выписать систему уравнений (5) и найти все ее $L_2(0, \infty)$ — решения. Это было бы весьма громоздким, если бы не то обстоятельство, что и форма (2) и уравнения (5) инвариантны относительно твердого преобразования системы координат.

Благодаря этому ничего не изменится, если мы будем считать, что в каждой точке $x^\circ \in d\Omega$ введена своя система координат, а именно: начало координат совпадает с точкой x°, ось x_n направлена по внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x°, а ось x_1 — вдоль орта ξ.

Теперь система уравнений (5) относительно функции $f(t) = (f_1, f_2, ..., f_n)$ упростилась и легко проверить, что она будет иметь вид $\left(\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}\right)$

$$a\ddot{f}_1 - (1+a) f_1 + i\dot{f}_n = 0, \quad (1+a)\ddot{f}_n - af_n + i\dot{f}_1 = 0$$

$$\ddot{f}_e - f_e = 0, \quad l = 2, 3, \ldots, n-1,$$

и что все ее $L_2(0, \infty)$ — решения даются следующими функциями:

$$f_1(t) = (C_1 + C_n t)e^{-t}, \; f_n(t) = i\{[C_1 + (1+2a)C_n] + C_n t\}e^{-t},$$

$$f_e(t) = C_l e^{-t}, \; l = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Здесь C_k — произвольные комплексные числа. Запишем теперь для этих функций левую часть неравенства (6_1)

$$iN_\beta a^{jk}_{\alpha\beta}\left(\xi_\alpha + iN_\alpha \frac{d}{dt}\right) f_k \cdot \bar{f}_j\Big|_{t=0} = -i\,(a^{jk}_{1n} f_k \bar{f}_j - a^{jk}_{nn}\, \dot{f}_k \bar{f}_j)_{t=0} =$$

$$= i\left\{\lambda f_n \bar{f}_1 + (1-\lambda) f_1 \bar{f}_n - i\left[a\dot{f}_1 \bar{f}_1 + (1+a)\,\dot{f}_n \bar{f}_n +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ a\sum_{l=2}^{n-1} \dot{f}_l \bar{f}_l\right]\right\}_{t=0} = 2(\lambda + a)|C_1|^2 + 2a(1+a)|C_n|^2 +$$

$$+ (C_1 \bar{C}_n + C_n \bar{C}_1)(1+2a)(a+\lambda) + a\sum_{l=2}^{n-1} |C_l|^2. \tag{11}$$

Если $\alpha+\lambda \leqslant 0$, то, приняв $C_k=0$ при $k \neq 1$, мы сделаем выражение (11) $\leqslant 0$. Поэтому для выполнения неравенства (6_1) необходимо, чтобы $\alpha+\lambda>0$[1]. Но тогда $\alpha+\lambda$ можно вынести за скобки и вместо (11) получаем

$$2(\lambda+a)\left\{\left|C_1 + \frac{1+2a}{2} C_n\right|^2 + a\sum_{l=2}^{n-1} |C_l|^2 + \frac{(1+2a)\,|C_n|^2}{4\,(a+\lambda)} \times\right.$$

$$\left.\times\,[a(3+2a) - \lambda(1+2a)]\right\}.$$

Теперь очевидно, что для того, чтобы (11) было больше нуля при любых значениях постоянных C_k, необходимо и достаточно, чтобы параметры a и λ удовлетворяли неравенству[2].

$$-1 < \frac{\lambda}{a} < \frac{3+2a}{1+2a}. \tag{12}$$

Мы имеем

Теорема 2. Неравенства (7) и (9) имеют место для всякой функции $u \in W^2_2(\Omega)$ при любых значениях параметров $a>0$ и λ, лишь бы они удовлетворяли неравенству (12).

Представляют интерес два частных значения параметра λ: $\lambda=a$ и $\lambda=1$.

---

[1] Напомним, что по условию $a=1-2s>0$.

[2] Заметим, что неравенство $\frac{|\lambda|}{a} < 1$ очевидно сильнее, чем (12).

При $\lambda=a$ имеем

$$A^{(a)}(u,u)=\int\limits_{(\Omega)}[2au_{jk}^2+(1-a)u_{kk}^2]\,d\Omega, \tag{13}$$

$$(B^{(a)}u)_j=2a\,u_{jk}N_k+(1+a)\,u_{kk}N_j. \tag{14}$$

Легко увидеть, что форма (13) представляет собой (с точностью до множителя $\frac{1}{M}$ (см. стр. 2) выражение для потенциальной энергии упругого тела Ω, а

$$B^{(a)}u\big|_{\partial\Omega}=MP^{(N)},$$

где $P^{(N)}$ — поверхностная сила, которая вместе с объемной силой Φ, вызывает деформацию области Ω, описываемую вектором u. Так как при $\lambda=a$ неравенство (12) удовлетворяется, то мы можем утверждать следующее.

Теорема 3. Пусть $u\in W_2^2(\Omega)$ — вектор смещения точек упругого тела Ω, подвергнувшегося действию уравновешенных между собой объемных сил — Φ и поверхностных сил — $P^{(N)}$.

Тогда имеют место одновременно два следующих неравенства:

$$A^{(a)}(u,u)\geqslant C_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}-C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

и

$$\|\overline{\Phi}\|^2_{L_2(\Omega)}+\ll P^{(N)}\gg^2_{\frac{1}{2}}\geqslant C_1'\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)}-C_2'\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь $\frac{1}{M}A^{(a)}(u,u)$ – потенциальная энергия деформации упругого тела Ω.

Второй случай — $\lambda=1$, приводит к форме $(a=1-2s)$

$$A^{(1)}(u,u)=2\int\limits_{(\Omega)}(u_{jk}^2-su_{j,k}^2)\,d\Omega \tag{15}$$

и граничному оператору

$$(B^{(1)}u)_j=2\,(u_{jk}-su_{j,k}). \tag{16}$$

В этом случае неравенство (12) принимает вид

$$1+2a<a(3+2a), \tag{12$_1$}$$

откуда следует, что $a>\frac{1}{2}$ или же, что $s<\frac{1}{4}$.

Таким образом, неравенство (7)

$$\int\limits_{(\Omega)} u_{jk}^2\, d\Omega - s\int\limits_{(\Omega)} u_{j,k}^2\, d\Omega \geqslant C_1\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$= C_1\left\{\int\limits_{(\Omega)} u_{j,k}^2\, d\Omega + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right\} - C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

или, что то же

$$\int\limits_{(\Omega)} u_{jk}^2\, d\Omega - (s + C_1)\int\limits_{(\Omega)} u_{j,k}^2\, d\Omega \geqslant -C_3\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{7_1}$$

имеет место для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$ при $s < \frac{1}{4}$.

Но, согласно примечанию к лемме 1, неравенство (6_1), а вместе с ним и неравенство (12_1), т. е. $s < \frac{1}{4}$, также *необходимо* для того, чтобы было справедливо (7_1).

Поэтому

1) $0 < C_1 \leqslant \frac{1}{4} - s$,

2) не существует двух чисел $C_1 > 0$ и $C_3 > 0$, таких, чтобы (7_1) имело место для *всех* $u \in W_2^1(\Omega)$, если $s \geqslant \frac{1}{4}$.

Изложенное можно сформулировать так.

Теорема 4.

1. Два числа $C_1 > 0$ и $C_3 > 0$, зависящих только от параметра s и области Ω и таких, что неравенство (7_1) имеет место для всех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, существуют *тогда и только тогда*, когда $s < \frac{1}{4}$. При этом имеет место оценка

$$C_1 + s \leqslant \frac{1}{4}. \tag{17}$$

2. Для каждой функции $u \in W_2^2(\Omega)$ и любого числа $s < \frac{1}{4}$ $\left(a > \frac{1}{2}\right)$ имеет место неравенство

$$\|Au\|^2_{L_2(\Omega)} + \ll B^{(1)}u \gg^2_{\frac{1}{2}} \geqslant C_1'\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)} - C_2'\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $C_1' > 0$ и $C_2' > 0$ — постоянные, зависящие только от Ω и s'.

Наконец заметим, что, если в неравенстве (7_1) положить $C_3=0$, то оно переходит (формально) в известное неравенство Корна.

Очень просто доказывается, что последнее имеет место для функций $u \in C^1(\Omega)$, исчезающих на границе $\partial\Omega$ области Ω. (А. Корн, см. [4]).

Значительно сложнее было показать (К. Фридрихс, [4]), что оно также действительно для всех функций $u \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих дополнительно условиям

$$\int\limits_{(\Omega)} u\, d\Omega = 0, \quad \int\limits_{(\Omega)} (u_{j,k} - u_{k,j})\, d\Omega = 0, \qquad j,k = 1, 2, \ldots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Agmon. The coercivness problem for integrodifferential forms. J. D'AnaIyse Math. 6 (1958).

2. Djairo Guedes de Figueiredo. The coerciuness problem for forms over vector valued functions. Comm. Pure Appl. 16 (1963) № 1.

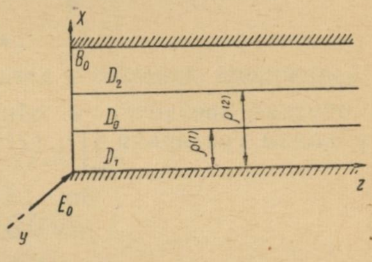
3. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд-во «Наук. думка», Киев, (1965).

4. К. О. Fridrichs. On the boundary value problems of the theory of elastisiby and Korn's inequality. Annals of Math. V. 48, № 2, April 1947.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Е. А. Косачевская, Э. Н. Татарченко

Изложено нестационарное движение электропроводящего пластика Шведова-Бингама в пространстве между двумя бесконечными пластинами при наличии скрещенных электрического и магнитного полей. Одна из пластин неподвижна, другая движется с заданной скоростью, являющейся функцией времени. Особенностью такого движения является возможность возникновения двух зон вязкого течения, разделенных квазитвердым ядром. Получено распределение скоростей и определены размеры ядра. Неустановившееся движение пластика Шведова-Бингама над одной бесконечной пластиной исследовано в работе [1].



§ 1. Рассмотрим нестационарное течение вязко-пластической среды с плотностью ρ, удельной электрической проводимостью

σ, коэффициентом динамической вязкости μ и пределом текучести τ_0 между двумя пластинами, находящимися на расстоянии h одна от другой. Направления электрического поля E_0, магнитного поля B_0 и скорости V указаны на рисунке.

Верхняя пластина предполагается неподвижной, нижняя — движется в направлении оси z со скоростью $U(t)$.

Уравнение движения среды имеет вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \sigma (E_0 - vB_0) B_0. \tag{1}$$

Касательное напряжение τ связано со скоростью деформации реологическим соотношением Шведова-Бингама [2]

$$\tau = \varkappa\tau_0 + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{при } |\tau| > \tau_0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } |\tau| < \tau_0, \tag{2}$$

$$\varkappa = \operatorname{sgn} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Уравнения $x = \rho^{(1)}(t)$, $x = \rho^{(2)}(t)$ соответственно определяют границы первой и второй вязких зон течения. Таким образом, задача состоит в определении распределения скоростей и функций

$$\rho^{(i)}(t) \quad (i = 1,2).$$

Переходя к безмерным переменным

$$x^* = \frac{x}{h}, \quad v^* = \frac{v}{V_0}, \quad t^* = \frac{t}{\rho h^2/\mu},$$

$$\tau^* = \frac{\tau}{\mu U_0/h}$$

и опуская звездочки в обозначениях безразмерных величин, приводим уравнения (1), (2) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \beta - \alpha v, \tag{3}$$

$$\tau = \varkappa s + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{при } |\tau| > s,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } |\tau| < s, \tag{4}$$

v_0 — характерная скорость, $\beta = \sigma E_0 \; B_0 h^2/v_0\mu$ — параметр влияния электрического поля, $\alpha = \sigma B_0^2 h^2/\mu$ — квадрат числа Гартмана, $s = \tau_0 h/v_0\mu$ — параметр пластичности Олдройда.

Уравнения движения для зон D_1, D_2 вязко-пластического течения приобретают вид

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial x^2} - \alpha v^{(i)} + \beta. \qquad (5)$$

$$(i = 1, 2)$$

Для квазитвердой зоны D_0 имеем [1]

$$\frac{dv^{(0)}}{dt} = -\frac{2s}{\rho^{(2)}(t) - \rho^{(1)}(t)} - \alpha v^{(0)} + \beta. \qquad (6)$$

Граничные и начальные условия задачи

$$v^{(1)}(0, t) = f(t),$$

$$v^{(2)}(1, t) = 0, \qquad (7)$$

$$v_x^{(i)}(\rho^{(i)}, t) = 0,$$

$$v^{(i)}(\rho^{(i)}, t) = v^{(0)}(t),$$

$$v^{(0)}(+0) = 1, \; \rho^{(i)}(0) = 0,$$

где $\quad v_x^{(i)} = \dfrac{\partial v^{(i)}}{\partial x},$

Влиянием начальных условий на решение в вязко-пластических зонах будем пренебрегать.

Если представить скорость среды в форме

$$v^{(i)}(x, t) = w^{(i)}(x, t)\, e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}(e^{-\alpha t} - 1),$$

$$(i = 0, 1, 2) \qquad (8)$$

то решение исходной задачи сводится к решению следующей задачи:

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x^2} \; (i = 1,2), \qquad (9)$$

$$w^{(1)}(0, t) = \psi(t), \qquad (10)$$

$$w^{(2)}(1, t) = \theta(t), \qquad (11)$$

$$w_x^{(i)}(\rho^{(i)}, t) = 0, \qquad (12)$$

$$w^{(i)}(\rho^{(i)}, t) = w^{(0)}(t), \qquad (13)$$

$$w^{(0)}(t) = 1 - 2s \int_0^t \frac{\exp(\alpha\xi)\, d\xi}{\rho^{(2)}(\xi) - \rho^{(1)}(\xi)}, \tag{14}$$

$$\rho^{(i)}(0) = 0. \tag{15}$$

Здесь

$$\theta(t) = -\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1),$$

$$\psi(t) = f(t) e^{\alpha t} + \theta(t).$$

§ 2. Уравнения (9) решаем методом Швеца [3]. Полагая равной нулю левую часть уравнения (9), получаем уравнения первого приближения

$$\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x^2} = 0, \tag{16}$$

откуда следует

$$w^{(i)} = C_1^{(i)}(t)\, x + C_2^{(i)}(t). \tag{17}$$

Функции $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$ определяются из граничных условий (10), (11), (13)

$$C_1^{(1)} = \frac{w^{(0)} - \psi}{\rho^{(1)}}, \quad C_2^{(1)} = \psi,$$

$$C_1^{(2)} = \frac{\theta - w^{(0)}}{1 - \rho^{(2)}}, \quad C_2^{(2)} = \frac{w^{(0)} - \theta\rho^{(2)}}{1 - \rho^{(2)}}. \tag{18}$$

Подставляя в левую часть (9) выражения (17), получаем уравнения второго приближения

$$\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x^2} = C_1^{(i)\prime} x + C_2^{(i)\prime}. \tag{19}$$

Решение системы (19)

$$w^{(i)} = C_1^{(i)\prime} \frac{x^3}{6} + C_2^{(i)\prime} \frac{x^2}{2} + C_3^{(i)} x + C_4^{(i)} \tag{20}$$

также должно удовлетворять условиям (10), (11), (13). Таким образом, находим

$$C_3^{(1)} = C_1^{(1)} - \frac{1}{6} C_1^{(1)\prime} [\rho^{(1)}]^2 - \frac{1}{2} C_2^{(1)\prime} \rho^{(1)},$$

$$C_4^{(1)} = C_2^{(1)},$$

$$C_3^{(2)} = C_1^{(2)} - \frac{1}{6} C_1^{(2)\prime} (1 + \rho^{(2)} + [\rho^{(2)}]^2) - \frac{1}{2} C_2^{(2)\prime} (1 + \rho^{(2)}),$$

$$C_4^{(2)} = - C_1^{(2)} + \frac{1}{6} C_1^{(2)\prime} \rho^{(2)} (1 + \rho^{(2)}) + \frac{1}{2} C_2^{(2)\prime} \rho^{(2)}. \tag{21}$$

Итак, в решении (20) содержатся две неизвестные функции $\rho^{(i)}(t)$. Удовлетворяя условиям (12) и учитывая (14), (18), (21), получаем два уравнения для определения указанных функций:

$$(w^{(0)} - \psi)(\rho^{(1)} \rho^{(1)\prime} - 3) - \frac{1}{2} (\psi' + 2w^{(0)\prime}) [\rho^{(1)}]^2 = 0, \tag{22}$$

$$(w^{(0)} - \theta) [(1 - \rho^{(2)}) \rho^{(2)\prime} + 3] + \frac{1}{2} (\theta' + 2w^{(i)\prime}) (1 - \rho^{(2)})^2 = 0.$$

Эти уравнения необходимо решать с учетом начальных условий (15).

Для момента времени, близких к начальному, из уравнений (22) получаем с точностью до главных членов

$$\rho^{(1)} = \sqrt{6t},$$

$$\rho^{(2)} = \frac{1}{2} \rho^{(1)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{3} s}\right). \tag{23}$$

Таким образом, в начальной стадии образования квазитвердой зоны влиянием электромагнитного поля можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Вишняков, А. М. Макаров. Нестационарное магнитогидродинамическое течение вязко-пластической среды над бесконечной пластиной. «Магнитная гидродинамика», 1970, № 1.

2. В. Прагер. Введение в механику сплошных сред. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1963.

3. М. Е. Швец. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.

О ДИНАМООПТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В ВОЛНОВОДАХ

Б. Г. Колодяжный

В настоящее время в связи с развитием лазерной и радиолокационной техники появился ряд работ [1, 2], в которых рассмотрено параметрическое взаимодействие электромагнитных волн с различными средами, приводящее к модуляции электромагнитных волн и изменению их поляризационных характеристик, в частности, рассматривалось распространение электромагнитных волн в упругих средах, подверженных статическим напряжениям. Так как эти нагрузки можно варьировать в широких пределах, появляется возможность «управления» электромагнитным полем, в частности, его поляризационными характеристиками в среде. Такое управление может быть использовано в световодах, которые применяются в оптических счетно-решающих устройствах, для модуляции лазерного излучения и т. д. Однако взаимодействие электромагнитной волны с упругими средами, подверженными динамическим нагрузкам, изучено фактически только для скалярного случая рассеяния электромагнитной волны на ультразвуке [3]. Соответствующие волноводные задачи не рассматривались. В настоящей работе стандартным методом теории возмущений рассматривается задача о рассеянии электромагнитной волны на упругих похгаммеровских волнах в цилиндрических диэлектрических волноводах.

Под действием упругих волн однородный изотропный диэлектрик становится оптически анизотропным. Этот эффект характеризуется изменением поляризационных свойств среды и учитывается появлением в тензоре диэлектрической проницаемости зависимости от тензора деформаций. Так как для обычных веществ влияние деформаций на поляризационные свойства среды можно считать малым, то, удерживая только члены, линейные по тензору деформаций u_{ik}, в зависимости $\varepsilon_{ik}(u_{ik})$, тензор диэлектрической проницаемости среды можно представить в виде

$$\varepsilon_{ik} = (\varepsilon_0 + a_1 u_{ll}) \delta_{ik} + a_2 u_{ik}, \quad (1)$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды в отсутствие деформации, a_1 и a_2 — упругооптические постоянные. Первый член в этом выражении значительно превышает по величине остальные члены.

В случае упругих колебаний изотропных бесконечных круговых цилиндров и коаксиальных стержней смещение ищем в виде (в статье вместо e набрано l):

$$u_r = U(r, \theta)\, l^{i(\gamma z + qt)},\ u_\theta = V(r, \theta)\, l^{i(\gamma z + qt)}\ u_z = W(r, \theta)\, l^{i(\gamma z + qt)}.$$

Здесь и далее используется цилиндрическая система координат r, θ, z с осью z вдоль оси цилиндра. Берем действительную часть тензора u_{ik}

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial r}l^{i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right]l^{i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[i\gamma U+\frac{\partial W}{\partial r}\right]l^{i(\gamma z+qt)} \\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right]l^{i[\gamma z+qt]} & \frac{1}{r}\left[U+\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]l^{i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[i\gamma V+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right]l^{i(\gamma z+qt)} \\ \frac{1}{2}\left[i\gamma U+\frac{\partial W}{\partial r}\right]l^{i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[i\gamma V+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right]l^{i(\gamma z+qt)} & i\gamma W l^{i(\gamma z+qt)} \end{vmatrix}+ \tag{3}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar U}{\partial r}l^{-i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \bar U}{\partial \theta}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial \bar V}{\partial r}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[-i\gamma \bar U+\frac{\partial \bar W}{\partial r}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} \\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \bar U}{\partial \theta}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial \bar V}{\partial r}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{r}\left[\bar U+\frac{\partial \bar V}{\partial \theta}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[-i\gamma \bar V+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar W}{\partial \theta}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} \\ \frac{1}{2}\left[-i\gamma \bar U+\frac{\partial \bar W}{\partial r}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} & \frac{1}{2}\left[-i\gamma \bar V+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar W}{\partial \theta}\right]l^{-i(\gamma z+qt)} & -i\gamma \bar W l^{-i(\gamma z+qt)} \end{vmatrix}$$

с учетом чего строим тензор ε_{ik}. В случае крутильных и продольных колебаний среды вектор смещения не зависит от θ, при поперечных колебаниях вектор смещения и, соответственно, тензоры u_{ik} и ε_{ik} зависят от θ.

Решение системы уравнений Максвелла ищем в виде

$$\vec E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec E^{(n)}(r)\,l^{i(n\theta-p_n z+\omega t)}$$

$$\vec H=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec H^{(n)}(r)\,l^{i(n\theta-p_n z+\omega t)}. \tag{4}$$

В дальнейшем рассматриваем n-ю моду колебаний и индекс n для удобства опускаем. Ищем поля $\vec E$ и $\vec H$ в виде:

$$\vec E=\vec E^0+\vec E',\quad \vec H=\vec H^0+\vec H'.$$

Здесь E° и H° соответствуют невозмущенному изотропному случаю, E' и H' — добавки, возникающие за счет упругих колебаний среды. Уравнения Масквелла в первом приближении имеют вид (при дифференцировании по t в силу того, что $q \ll \omega$, время, входящее в выражение для u_{ik} рассматриваем как параметр):

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E'_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial E'_\theta}{\partial z}\right) + i\frac{\omega}{c}H'_r = 0,$$

$$\frac{\partial E'_r}{\partial z} - \frac{\partial E'_z}{\partial r} + i\frac{\omega}{c}H'_\theta = 0,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE'_\theta) - \frac{\partial E'_r}{\partial \theta}\right] + i\frac{\omega}{c}H'_z = 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H'_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial H'_\theta}{\partial z}\right) - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_0 E'_r = i\frac{\omega}{c}(\varepsilon'_{rr}E^0_r + \varepsilon'_{r\theta}E^0_\theta + \varepsilon'_{rz}E^0_z) = $$
$$= F_1(r, \theta, z, t),$$

$$\frac{\partial H'_r}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial r} - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_0 E'_\theta = i\frac{\omega}{c}(\varepsilon'_{\theta r}E^0_r + \varepsilon'_{\theta\theta}E^0_\theta + \varepsilon'_{\theta z}E^0_z) = F_2(r, \theta, z, t),$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH'_\theta) - \frac{\partial H'_r}{\partial \theta}\right] - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_0 E'_z = i\frac{\omega}{c}(\varepsilon'_{zr}E^0_r + \varepsilon'_{z\theta}E^0_\theta + \varepsilon'_{zz}E^0_z) =$$
$$= F_3(r, \theta, z, t),$$

где $\varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_0\delta_{ik}$.

В случае крутильных и продольных колебаний среды $F_k =$ $= (k=1, 2, 3)$ имеют вид:

$$F_1 = f_1(r)\, l^{i[n\theta + (\gamma - p)z + (\omega + q)t]} + f_2(r)\, l^{i[n\theta - (\gamma + p)z + (\omega - q)t]},$$

$$F_2 = \varphi_1(r)\, l^{i[n\theta + (\gamma - p)z + (\omega + q)t]} + \varphi_2(r)\, l^{i[n\theta - (\gamma + p)z + (\omega - q)t]}, \tag{7}$$

$$F_3 = \psi_1(r)\, l^{i[n\theta + (\gamma - p)z + (\omega + q)t]} + \psi_2(r)\, l^{i[n\theta - (\gamma + p)z + (\omega - q)t]}.$$

Ищем решение (6) в форме:

$$\vec{E}' = \vec{E}^1 + \vec{E}^2, \quad \vec{H}' = \vec{H}^1 + \vec{H}^2, \tag{8}$$

где $\vec{E}^1$, $\vec{H}^1$ и $\vec{E}^2$, $\vec{H}^2$ удовлетворяют системам уравнений:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z^1}{\partial\theta} - r\,\frac{\partial E_\theta^1}{\partial z}\right) + i\,\frac{\omega}{c}\,H_r^1 = 0,\\
&\frac{\partial E_r^1}{\partial z} - \frac{\partial E_z^1}{\partial r} + i\,\frac{\omega}{c}\,H_\theta^1 = 0,\\
&\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\theta^1\right) - \frac{\partial E_r^1}{\partial\theta}\right] + i\,\frac{\omega}{c}H_z^1 = 0,\\
&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z^1}{\partial\theta} - r\,\frac{\partial H_\theta^1}{\partial z}\right) - i\,\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0\,E_r^1 = f_1(r)\, l^{i[n\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},\\
&\frac{\partial H_z^1}{\partial z} - \frac{\partial H_z^1}{\partial r} - i\,\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0\,E_\theta^1 = \varphi_1(r)\, l^{i[n\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},\\
&\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta^1\right) - \frac{\partial H_r^1}{\partial\theta}\right] - i\,\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0\,E_z^1 = \psi_1(r)\, l^{i[n\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]}.
\end{aligned}
\right.
\tag{9}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial E_z^2}{\partial\theta} - r\,\frac{\partial E_\theta^2}{\partial z}\right) + i\,\frac{\omega}{c}\,H_r^2 = 0,\\
&\frac{\partial E_r^2}{\partial z} - \frac{\partial E_z^2}{\partial r} + i\,\frac{\omega}{c}\,H_\theta^2 = 0,\\
&\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\theta^2\right) - \frac{\partial E_r^2}{\partial\theta}\right] + i\,\frac{\omega}{c}\,H_z^2 = 0,\\
&\frac{1}{r}\left(\frac{\partial H_z^2}{\partial\theta} - r\,\frac{\partial H_\theta^2}{\partial z}\right) - i\,\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0\,E_r^2 = f_2(r)\, l^{i[n\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]},\\
&\frac{\partial H_r^2}{\partial z} - \frac{\partial H_z^2}{\partial r} - i\,\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0\,E_\theta^2 = \varphi_2(r)\, l^{i[n\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]},\\
&\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta^2\right) - \frac{\partial H_z^2}{\partial\theta}\right] - i\,\frac{\omega}{c}\,\varepsilon_0\,E_z^2 = \psi_2(r)\, l^{i[n\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}.
\end{aligned}
\right.
\tag{10}
$$

Положим:

$$\vec{E}^1 = \vec{E}^1(r)\, l^{i[n\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},$$

$$\vec{H}^1 = \vec{H}^1(r)\, l^{i[n\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},$$

$$\vec{E}^2 = \vec{E}^2(r)\, l^{i[n\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]},$$

$$\vec{H}^2 = \vec{H}^2(r)\, l^{i[n\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}.$$

Для компонент $\vec{E}^1(r)$ и $\vec{H}^1(r)$ из (9) имеем:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&E^1_r = \frac{i}{k_1^2}\left[(\gamma - p)\frac{\partial E^1_z}{\partial r} - in\frac{\omega}{c}\frac{1}{r}H^1_z + \frac{\omega}{c}f_1(r)\right],\\
&E^1_\theta = \frac{i}{k_1^2}\left[in(\gamma - p)\frac{1}{r}E^1_z + \frac{\omega}{c}\frac{\partial H^1_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c}\varphi_1(r)\right],\\
&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial E^1_z}{dr}\right) + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)E^1_z = \Phi_1(r),\\
&H^1_r = \frac{i}{k_1^2}\left[in\frac{\omega}{c}\varepsilon_0\frac{1}{r}E^1_z + (\gamma - p)\frac{\partial H^1_z}{\partial r} + (\gamma - p)\varphi_1(r)\right],\\
&H^1_\theta = \frac{i}{k_1^2}\left[-\frac{\omega}{c}\varepsilon_0\frac{\partial E^1_z}{\partial r} + in(\gamma - p)\frac{1}{r}H^1_z - (\gamma - p)f_1(r)\right],\\
&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dH^1_z}{dr}\right) + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)H^1_z = \widetilde{P}_1(r).
\end{aligned}
\right.
\tag{12}
$$

где

$$
\Phi_1(r) = \frac{1}{\frac{\omega}{c}\varepsilon_0}\left[-(\gamma - p)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf_1(r)) - in(\gamma - p)\frac{\varphi_1(r)}{r} + ik_1^2\psi_1(r)\right],
$$

$$
\widetilde{P}_1(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1(r)) + in\frac{f_1(r)}{r},
$$

$$
k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - (\gamma - p)^2.
$$

Учитывая граничные условия (граница считается бесконечно-проводящей) и освобождаясь от неоднородности в граничных условиях для $H^1_z(r)$, получаем следующие краевые задачи для $E^1_z(r)$ и $H^{1*}_z(r)$ (рассматривается круговой цилиндр):

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2E^1_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE^1_z}{dr} + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)E^1_z = \Phi_1(r),\\
&E^1_z = 0 \text{ при } r = a,
\end{aligned}
\right.
\tag{13}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2H^{1*}_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH^{1*}_z}{dr} + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)H^{1*}_z = P_1(r),\\
&\frac{dH^{1*}_z}{dr} = 0 \text{ при } r = a.
\end{aligned}
\right.
\tag{14}
$$

где

$$H_z^{1*}(r) = H_z^1(r) + \int \varphi_1(r)\,dr,$$

$$P_1(r) = \tilde{P}_1(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi_1(r)) + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\int \varphi_1(r)\,dr.$$

Решениями уравнений для H и P с учетом ограниченности на осях и граничных условий будут (по всей статье вместо Ф читать J):

$$E_z^1(r) = -\frac{G_1(a)}{\Phi_n(k_1 a)}\Phi_n(k_1 r) + G_1(r),$$

$$H_z^{1*}(r) = -\frac{\dfrac{\partial S_1(a)}{\partial a}}{\dfrac{\partial \Phi_n(k_1 a)}{\partial a}}\Phi_n(k_1 r) + S_1(r). \tag{15}$$

Здесь $G_1(r)$ и $S_1(r)$ — частные решения неоднородных уравнений для $E_z^1(r)$ и $H_z^{1*}(r)$ соответственно:

$$G_1(r) = \frac{\pi}{2}\left[Y_n(k_1 r)\int_0^r \xi\Phi_n(k_1\xi)\,\Phi_1(\xi)\,d\xi - \Phi_n(k, r)\int_0^r \xi Y_n(k_1\xi)\Phi_1(\xi)\,d\xi\right],$$

$$S_1(r) = \frac{\pi}{2}\left[Y_n(k_1 r)\int_0^r \xi\Phi_n(k_1\xi)\,P_1(\xi)\,d\xi - \Phi_n(k_1 r)\int_0^r \xi Y_n(k_1\xi)\,P_1(\xi)\,d\xi\right]. \tag{16}$$

Таким же способом находим компоненты векторов $\vec{E}^2(r)$ и $\vec{H}^2(r)$

В случае крутильных колебаний бесконечного кругового цилиндра вектор смещения имеет составляющие [4]:

$$u_r = 0,\ u_\theta = V(r)\,e^{i(\gamma z + qt)},\ u_z = 0,$$

где $V = Br$, $B = \text{const}$, а γ и q связаны соотношением $\gamma^2 = \frac{\rho q^2}{\mu}$, здесь ρ — плотность вещества, μ — коэффициент Ляме.

Для TM-волны:

$$E_r^0 = -\frac{i}{k^2}\,p\,\frac{\partial\,\Phi_n(k r)}{\partial r}\,l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$E_\theta^0 = \frac{1}{k^2}\,np\,\frac{\Phi_n(k r)}{r}\,l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$E_z^0 = \Phi_n(k r)\,l^{i(n\theta - pz + \omega t)}. \tag{18}$$

$$H_r^0 = -\frac{1}{k^2} n \frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{\Phi_n(kr)}{r} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$H_\theta^0 = -\frac{i}{k^2} \frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_n(kr)}{\partial r} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$H_z^0 = 0, \; k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - p^2$$

и

$$f_1(r) = 0, \; f_2(r) = 0,$$

$$\varphi_1(r) = i \frac{\omega}{c} \frac{a_2}{4} \gamma V E_z^0(r), \quad \varphi_2(r) = -i \frac{\omega}{c} \frac{a_2}{4} \gamma \overline{V} E_z^0(r), \tag{19}$$

$$\psi_1(r) = i \frac{\omega}{c} \frac{a_2}{4} \gamma V E_\theta^0(r), \quad \psi_2(r) = -i \frac{\omega}{c} \frac{a_2}{4} \gamma \overline{V} E_\theta^0(r).$$

Поле в среде в рассматриваемом приближении:

$$E_r = \Big\{ E_r^0(r) + \frac{i}{k_1^2} \Big[(\gamma - p) \frac{\partial E_z^1}{\partial r} - in \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} H_z^1 \Big] l^{i(\gamma z + qt)} +$$
$$+ \frac{i}{k_2^2} \Big[-(\gamma + p) \frac{\partial E_z^2}{\partial r} - in \frac{\omega}{c} \frac{1}{r} H_z^2 \Big] l^{-i(\gamma z + qt)} \Big\} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$E_\theta = \Big\{ E_\theta^0(r) + \frac{i}{k_1^2} \Big[in(\gamma - p) \frac{1}{r} E_z^1 + \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_z^1}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \varphi_1(r) \Big] l^{i(\gamma z + qt)} +$$
$$+ \frac{i}{k_2^2} \Big[-in(\gamma + p) \frac{1}{r} E_z^2 + \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_z^2}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \varphi_2(r) \Big] l^{-i(\gamma z + qt)} \Big\} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$E_z = \{ E_z^0(r) + E_z^1 l^{i(\gamma z + qt)} + E_z^2 l^{-i(\gamma z + qt)} \} l^{i(n\theta - pz + \omega t)}. \tag{20}$$

$$H_r = \Big\{ H_r^0(r) + \frac{i}{k_1^2} \Big[in \frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{r} E_z^1 + (\gamma - p) \frac{\partial H_z^1}{\partial r} + (\gamma - p) \varphi_1(r) \Big] l^{i(\gamma z + qt)} +$$
$$+ \frac{i}{k_2^2} \Big[in \frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{r} E_z^2 - (\gamma + p) \frac{\partial H_z^2}{\partial r} - (\gamma + p) \varphi_2(r) \Big] l^{-i(\gamma z + qt)} \Big\} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$H_\theta = \Big\{ H_\theta^0(r) + \frac{i}{k_1^2} \Big[-\frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{\partial E_z^1}{\partial r} + in(\gamma - p) \frac{1}{r} H_z^1 \Big] l^{i(\gamma z + qt)} +$$
$$+ \frac{i}{k_2^2} \Big[-\frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{\partial E_z^2}{\partial r} - in(\gamma + p) \frac{1}{r} H_z^2 \Big] l^{-i(\gamma z + qt)} \Big\} l^{i(n\theta - p + \omega t)},$$

$$H_z = \{ H_z^1 l^{i(\gamma z + qt)} + H_z^2 l^{-i(\gamma z + qt)} \} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - (\gamma + p)^2.$$

Для *TE*-волны:

$$\begin{aligned}
E_r^0 &= \frac{1}{k^2} n \frac{\omega}{c} \frac{\Phi_n(kr)}{r} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},\\
E_\theta^0 &= \frac{i}{k^2}\frac{\omega}{c}\frac{\partial \Phi_n(kr)}{\partial r} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},\\
E_z^0 &= 0,\\
H_r^0 &= -\frac{i}{k^2} p \frac{\partial \Phi_n(kr)}{\partial r} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},\\
H_\theta^0 &= \frac{1}{k^2} np \frac{\Phi_n(kr)}{r} l^{i(n\theta - pz + \omega t)},\\
H_z^0 &= \Phi_n(kr)\, l^{i(n\theta - pz + \omega t)},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= 0, \quad f_2(r) = 0,\\
\varphi_1(r) &= 0, \quad \varphi_2(r) = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\psi_1(r) = i\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\gamma \overline{V} E_\theta^0(r), \quad \psi_2(r) = -i\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\gamma \overline{V} E_\theta^0(r).$$

Выражения для компонент полей имеют ту же структуру, что и в случае *TM*-волны, но в силу их громоздкости здесь и далее не приводятся.

В случае продольных колебаний цилиндра компоненты вектора смещения:

$$u_r = U(r)\, l^{i(\gamma z + qt)}, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = W(r)\, l^{i(\gamma z + qt)}, \tag{23}$$

где

$$U(r) = D\left[\left(2\gamma^2 - \frac{\rho q^2}{\mu}\right)\Phi_1(\varkappa a)\frac{\partial \Phi_0(hr)}{\partial r} - 2\gamma^2 \frac{\partial \Phi_0(ha)}{\partial a}\Phi_1(\varkappa r)\right],$$

$$W(r) = Di\gamma\left[\left(2\gamma^2 - \frac{\rho q^2}{\mu}\right)\Phi_1(\varkappa a)\,\Phi_0(hr) - 2\frac{\partial \Phi_0(ha)}{\partial a}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Phi_1(\varkappa r)\right)\right]$$

и

$$h^2 = \frac{\rho q^2}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2, \quad \varkappa^2 = \frac{\rho q^2}{\mu} - \gamma^2,$$

a — радиус стержня, D — произвольная постоянная, q и γ связаны соотношением

$$q=\gamma\sqrt{\frac{E}{\rho}},\quad E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

Для TM-волны:

$$f_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+i\gamma W\right]E_r^0+\frac{a_2}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial r}E_r^0+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+i\gamma U\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$f_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{U})-i\gamma\overline{W}\right]E_r^0+\frac{a_2}{2}\left[\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}E_r^0+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}-i\gamma\overline{U}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$\varphi_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+i\gamma W\right]+\frac{a_2}{2}\frac{U}{r}\right\}E_\theta^0,$$

$$\varphi_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{U})-i\gamma\overline{W}\right]+\frac{a_2}{2}\frac{\overline{U}}{r}\right\}E_\theta^0, \tag{24}$$

$$\psi_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+i\gamma W\right]E_z^0+\frac{a_2}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+i\gamma U\right)E_r^0+i\gamma WE_z^0\right]\right\},$$

$$\psi_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{U})-i\gamma\overline{W}\right]E_z^0+\frac{a_2}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}-i\gamma\overline{U}\right)E_r^0-i\gamma\overline{W}E_z^0\right]\right\}.$$

Для TE-волны:

$$f_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+i\gamma W\right]+\frac{a_2}{2}\frac{\partial U}{\partial r}\right\}E_r^0,$$

$$f_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{U})-i\gamma\overline{W}\right]+\frac{a_2}{2}\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}\right\}E_r^0,$$

$$\varphi_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+i\gamma W\right]+\frac{a_2}{2}\frac{U}{r}\right\}E_\theta^0, \tag{25}$$

$$\varphi_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{U})-i\gamma\overline{W}\right]+\frac{a_2}{2}\frac{\overline{U}}{r}\right\}E_\theta^0,$$

$$\psi_1(r)=\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial W}{\partial r}+i\gamma U\right]E_r^0,$$

$$\psi_2(r)=\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}-i\gamma\overline{U}\right]E_r^0.$$

В случае поперечных колебаний цилиндра вектор смещения имеет составляющие:

$$u_r = U(r)\cos\theta\, l^{i(\gamma z+qt)},\ u_\theta = V(r)\sin\theta\, l^{i(\gamma z+qt)},\ u_z = W(r)\cos\theta\, l^{i(\gamma z+qt)}, \tag{26}$$

где

$$\begin{cases} U(r) = A\dfrac{\partial\Phi_1(hr)}{\partial r} + B\dfrac{\partial\Phi_1(\varkappa r)}{\partial r} + C\dfrac{\Phi_1(\varkappa r)}{r}, \\ V(r) = A\dfrac{\Phi_1(hr)}{r} - B\gamma\dfrac{\Phi_1(\varkappa r)}{r} - C\dfrac{\partial\Phi_1(\varkappa r)}{\partial r}, \\ W(r) = Ai\gamma\Phi_1(hr) - Bi\varkappa^2\Phi_1(\varkappa r), \end{cases}$$

а

$$A = D\left\{2\gamma^2\frac{\Phi_1(\varkappa a)}{a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\Phi_1(\varkappa a)}{a}\right) - \left(2\gamma^2 - \frac{\rho q^2}{\mu}\right)\frac{\partial\Phi_1(\varkappa a)}{\partial a}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2\Phi_1(\varkappa a)}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\Phi_1(\varkappa a)}{a}\right)\right]\right\},$$

$$B = D2\gamma\left\{\frac{\partial\Phi_1(ha)}{\partial a}\left[\frac{\partial^2\Phi_1(\varkappa a)}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\Phi_1(\varkappa a)}{a}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\Phi_1(\varkappa a)}{a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\Phi_1(ha)}{a}\right)\right\},$$

$$C = 2D\left\{\left(2\gamma^2 - \frac{\rho q^2}{\mu}\right)\frac{\partial\Phi_1(\varkappa a)}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\Phi_1(ha)}{a}\right) - \right.$$
$$\left. - 2\gamma^2\frac{\partial\Phi_1(ha)}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\Phi_1(\varkappa a)}{a}\right)\right\}.$$

D — произвольная постоянная, q и γ связаны соотношением

$$q^2 = \frac{1}{4}a^2\gamma^4\frac{E}{\rho}.$$

Теперь

$$F_1 = \{f_1(r)\, l^{i[(\gamma-p)z+(\omega+q)t]} + f_2(r)\, l^{i[-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}\}\, l^{i(n+1)\theta} +$$
$$+ \{f_3(r)\, l^{i[(\gamma-p)z+(\omega+q)t]} + f_4(r)\, l^{i[-(\gamma+p)z+(\omega-g)t]}\}\, l^{i(n-1)\theta},$$

$$F_2 = \{\varphi_1(r)\, l^{i[(\gamma-p)z+(\omega+q)t]} + \varphi_2(r)\, l^{i[-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}\}\, l^{i(n+1)\theta} +$$
$$+ \{\varphi_3(r)\, l^{i[(\gamma-p)z+(\omega+q)t]} + \varphi_4(r)\, l^{i[-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}\}\, l^{i(n-1)\theta},$$

$$F_3 = \{\psi_1(r)\, l^{i[\gamma-p)z+(\omega+q)t]} + \psi_2(r)\, l^{i[-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}\}\, l^{i(n+1)\theta} +$$
$$+ \{\psi_3(r)\, l^{i[\gamma-p)z+(\omega+q)t]} + \psi_4(r)\, l^{i[-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}\}\, l^{i(n-1)\theta}$$

и решение (6) ищем в виде

$$\vec{E}' = \vec{E}^1 + \vec{E}^2 + \vec{E}^3 + \vec{E}^4,$$
$$\vec{H}' = \vec{H}^1 + \vec{H}^2 + \vec{H}^3 + \vec{H}^4, \tag{27}$$

где

$$\vec{E}^1 = \vec{E}^1(r)\, e^{i[(n+1)\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},$$

$$\vec{E}^2 = \vec{E}^2(r)\, e^{i[(n+1)\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]},$$

$$\vec{E}^3 = \vec{E}^3(r)\, e^{i[(n-1)\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},$$

$$\vec{E}^4 = \vec{E}^4(r)\, e^{i[(n-1)\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t[},$$

$$\vec{H}^1 = \vec{H}^1(r)\, e^{i[(n+1)\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]}, \tag{28}$$

$$\vec{H}^2 = \vec{H}^2(r)\, e^{i[(n+1)\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]},$$

$$\vec{H}^3 = \vec{H}^3(r)\, e^{i[(n-1)\theta+(\gamma-p)z+(\omega+q)t]},$$

$$\vec{H}^4 = \vec{H}^4(r)\, e^{i[(n-1)\theta-(\gamma+p)z+(\omega-q)t]}.$$

Система уравнений (6) распадается на четыре системы, из которых процедурой, подобной описанной ранее, находим компоненты полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Для TM-волны:

$$f_1(r) = \frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{V}{r} + i\gamma W\right)E_r^0 + \frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial U}{\partial r}E_r^0 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r} - \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r}\right)E_\theta^0 + \frac{1}{2}\left(i\gamma U + \frac{\partial W}{\partial r}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$f_2(r) = \frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\bar{U}}{r} + \frac{\bar{V}}{r} - i\gamma \bar{W}\right)E_r^0 + \frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial r}E_r^0 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{i}{2}\left(-\frac{\bar{U}}{r} - \frac{\bar{V}}{r} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}\right)E_\theta^0 + \frac{1}{2}\left(-i\gamma \bar{U} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$f_3(r) = \frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_2}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{V}{r} + i\gamma W\right)E_r^0 + \frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial U}{\partial r}E_r^0 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r} - \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r}\right)E_\theta^0 + \frac{1}{2}\left(i\gamma U + \frac{\partial W}{\partial r}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$f_4(r) = \frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} + \frac{\bar{U}}{r} + \frac{\bar{V}}{r} - i\gamma \bar{W}\right)E_r^0 + \frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial r}E_r^0 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{i}{2}\left(-\frac{\bar{U}}{r} - \frac{\bar{V}}{r} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r}\right)E_\theta^0 + \frac{1}{2}\left(-i\gamma \bar{U} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial r}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$\varphi_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_\theta^0+\frac{a_2}{4}\left[-\frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times E_r^0+\frac{1}{r}(U+V)E_\theta^0-\frac{i}{2}\left(i\gamma V-\frac{W}{r}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$\varphi_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\bar W\right)E_\theta^0+\right.$$

$$+\frac{a_2}{4}\left[-\frac{i}{2}\left(-\frac{\bar U}{r}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial\bar V}{\partial r}\right)E_r^0+\frac{1}{r}(\bar U+\bar V)E_\theta^0-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{i}{2}\left(-i\gamma\bar V-\frac{\bar W}{r}\right)E_z^0\right]\right\},\tag{29}$$

$$\varphi_3(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_\theta^0+\right.$$

$$\left.+\frac{a_2}{4}\left[\frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{dr}\right)E_r^0+\frac{1}{r}(U+V)E_\theta^0+\frac{i}{2}\left(i\gamma V-\frac{W}{r}\right)E_z^0\right]\right\},$$

$$\varphi_4(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\bar W\right)E_\theta^0+\right.$$

$$+\frac{a_2}{4}\left[\frac{i}{2}\left(-\frac{\bar U}{r}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial\bar V}{\partial z}\right)E_r^0+\frac{1}{r}(\bar U+\bar V)E_\theta^0+\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\left(--i\gamma\bar V-\frac{\bar W}{r}\right)E_z^0\right\},$$

$$\psi_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_z^0+\frac{a_2}{4}\left[\left(i\gamma U+\frac{\partial W}{\partial r}\right)E_r^0-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{i}{2}\left(i\gamma V-\frac{W}{r}\right)E_\theta^0+i\gamma WE_z^0\right]\right\},$$

$$\psi_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\bar W\right)E_z^0+\frac{a_2}{4}\left[\left(-i\gamma\bar U+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial\bar W}{\partial r}\right)E_r^0-\frac{i}{2}\left(-i\gamma\bar V-\frac{\bar W}{r}\right)E_\theta^0-i\gamma\bar W E_z^0\right)\right\},$$

$$\psi_3(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_z^0+\frac{a_2}{4}\left[\left(i\gamma U+\frac{\partial W}{\partial r}\right)E_r^0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{i}{2}\left(i\gamma V-\frac{W}{r}\right)E_\theta^0+i\gamma W E_z^0\right]\right\},$$

$$\psi_4(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\bar W\right)E_z^0+\frac{a_2}{4}\left[\left(-i\gamma\bar U+\frac{\partial\bar W}{\partial r}\right)E_r^0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{i}{2}\left(-i\gamma\bar V-\frac{\bar W}{r}\right)E_\theta^0-i\gamma\,\bar W\,E_z^0\right]\right\}.$$

Для ТЕ-волны:

$$f_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_r^0+\frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial U}{\partial r}E_r^0-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)E_\theta^0\right]\right\},$$

$$f_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\bar W\right)E_r^0+\frac{a_2}{2}\left[\frac{\partial\bar U}{\partial r}E_r^0-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{i}{2}\left(-\frac{\bar U}{r}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial\bar V}{\partial r}\right)E_\theta^0\right]\right\},$$

$$f_3(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left\{\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_r^0+\right.$$
$$\left.+\frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial U}{\partial r}E_r^0+\frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)E_\theta^0\right]\right\},$$

$$f_4(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\bar W\right)E_r^0+\frac{a_2}{4}\left[\frac{\partial\bar U}{\partial r}E_r^0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{i}{2}\left(-\frac{\bar U}{r}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial\bar V}{\partial r}\right)E_\theta^0\right]\right\},$$

$$\varphi_1(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_\theta^0+\right.$$
$$\left.+\frac{a_2}{4}\left[-\frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r}-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)E_r^0+\frac{1}{r}(U+V)E_\theta^0\right]\right\},$$

$$\varphi_2(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\bar U}{\partial r}+\frac{\bar U}{r}+\frac{\bar V}{r}-i\gamma\,\bar W\right)E_\theta^0+\right.$$
$$\left.+\frac{a_2}{4}\left[-\frac{i}{2}\left(-\frac{\bar U}{r}-\frac{\bar V}{r}+\frac{\partial\bar V}{\partial r}\right)E_r^0+\frac{1}{r}(\bar U+\bar V)E_\theta^0\right]\right\},\qquad(30)$$

$$\varphi_3(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right)E_\theta^0+\frac{a_2}{4}\left[\frac{i}{2}\left(-\frac{U}{r}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial r}\right)E_r^0+\frac{1}{r}(U+V)E_\theta^0\right]\right\},$$

$$\varphi_4(r)=\frac{\omega}{c}\left\{\frac{a_1}{4}\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}+\frac{\overline{U}}{r}+\frac{\overline{V}}{r}-i\gamma\overline{W}\right)E^0_\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{a_2}{4}\left[\frac{i}{2}\left(-\frac{\overline{U}}{r}-\frac{\overline{V}}{r}+\frac{\partial\overline{V}}{\partial r}\right)E^0_r+\frac{1}{r}(\overline{U}+\overline{V})E^0_\theta\right]\right\},$$

$$\psi_1(r)=\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\left[\left(i\gamma U+\frac{\partial W}{\partial r}\right)E^0_r-\frac{i}{2}\left(i\gamma V-\frac{W}{r}\right)E^0_\theta\right],$$

$$\psi_2(r)=\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\left[\left(-i\gamma\overline{U}+\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}\right)E^0_r-\frac{i}{2}\left(-i\gamma\overline{V}-\frac{\overline{W}}{r}\right)E^0_\theta\right],$$

$$\psi_3(r)=\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\left[\left(i\gamma U+\frac{\partial W}{\partial r}\right)E^0_r+\frac{i}{2}\left(i\gamma V-\frac{W}{r}\right)E^0_\theta\right],$$

$$\psi_4(r)=\frac{\omega}{c}\frac{a_2}{4}\left[\left(-i\gamma\overline{U}+\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}\right)E^0_r+\frac{i}{2}\left(-i\gamma\overline{V}-\frac{\overline{W}}{r}\right)E^0_\theta\right].$$

Отметим, что при наличии упругих колебаний среды ТЕ- и ТМ-волны теряют свою индивидуальность — в среде распространяется волна, являющаяся суперпозицией ТЕ- и ТМ-волн, т. е. наличие упругих колебаний среды приводит к появлению ТЕ-волны при возмущении ТМ-волны и наоборот. Распространяющаяся в среде эллиптически поляризованная волна будет модулирована по амплитуде с частотой упругих колебаний q. Величины полуосей и ориентация эллипса поляризации изменяются с r, θ, z и t и являются функциями параметров q и γ, определяющих характер упругих колебаний среды.

Учитывая возмущение волнового числа p, в случае крутильных колебаний получаем, что эллипс поляризации поворачивается на угол

$$\delta=\frac{p_1'-p_2'}{2}\tag{31}$$

при перемещении волны на единицу длины вдоль оси z (здесь p'_1 — величина возмущения для решения с $n=m$, а p'_2 — величина возмущения для решения с $n=-m$, где m — целое положительное число). В случае продольных и поперечных колебаний величина возмущения волнового числа также сказывается только на ориентации и вращении осей эллипса поляризации.

Выражения, описывающие распространение электромагнитной волны в зазоре между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами, заполненном однородным и изотропным диэлектриком с бесконечно проводящими боковыми поверхностями, подверженном упругим колебаниям [5], аналогичны выражениям, получающимся для электромагнитной волны, распространяющейся вдоль бесконечного диэлектрического цилиндра, подверженного упругим колебаниям. Они не приводятся в данной работе ввиду их громоздкости. Волна, распространяющаяся в зазоре между коаксиальными цилиндрами, обладает теми же свойствами, что и волна, распространяющаяся в круговом цилиндре.

Автор приносит благодарность А. А. Янцевичу за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Adkins, R. Rivlin. The Faraday and Allied Effects in Circular Waweguides, Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 255 A, 1059, 1963, 389—416.

2. J. Adkins, R. Rivlin. Propagation of Elektromagnetic Wawes in Circular Rods in Torsion, Engng. Sci. Vol. 1, 1963, 187—198.

3. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, «Наука», 1970.

4. А. Ляв. Математическая теория упругости, ОНТИ НКТП СССР, 1935.

5. Б. Г. Колодяжный. О похгаммеровских волнах для одного вида упругих колебаний. «Вестник ХГУ, Математика и механика», вып. 37, 1970.

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ, БЛИЗКИХ К ОРТОГОНАЛЬНЫМ

В. И. Гурарий, Т. В. Пашкова

Многие свойства ортогональных рядов переносятся, как известно, на ряды, близкие к ортогональным (ряды по системам Рисса, Бесселя или Гильберта [1, 2]). В настоящей работе классы таких систем расширяются за счет отказа от их минимальности и полноты; изучаются вопросы сходимости и суммируемости по Чезаро почти всюду рядов по таким системам; вводятся и изучаются функции Лебега рядов Фурье по биортогональным системам в L^2.

§ 1. Системы векторов, близкие к ортогональным

Для системы векторов $\{\varphi_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ вещественного банахова пространства B составим два ряда:

$$(\text{А}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \qquad (\text{Б}) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

и будем систему $\{\varphi_k\}$ называть

1) **квази-бесселевой,** если из сходимости (А) следует сходимость (Б);

2) **квази-гильбертовой,** если из сходимости (Б) следует сходимость (А);

3) квази-ортогональной, если сходимость (А) равносильна сходимости (Б).

Эти определения отличаются от определений [1, 2, 5] тем, что здесь не предполагается ни полнота, ни минимальность системы $\{\varphi_k\}$. Нетрудно проверяется утверждение (ср. [7]):

Теорема 1. Для того чтобы система $\{\varphi_k\} \subset B$ была квази-бесселевой (соответственно квази-гильбертовой, квази-ортогональной), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $m > 0$ $(M < \infty)$, что для любых конечных наборов $c_1, \ldots, c_n$ выполнялось, соответственно, неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \geqslant m \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}, \tag{1}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \leqslant M \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}, \tag{2}$$

$$m \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \leqslant M \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}. \tag{3}$$

Справедливы также теоремы, обобщающие соответствующие работы Н. К. Бари и Б. Е. Вейца [1, 5].

Теорема 2. Для того чтобы система $\{\varphi_k\}$ была квази-бесселева (соответственно квази-гильбертова, квази-ортогональна), необходимо и достаточно, чтобы

1) существовал такой ограниченный линейный оператор (о. л. о.) A, действующий из B в l^2, что

$$A\varphi_k = e_k \, (e_k = [\delta_{nk}]);$$

2) существовал такой о. л. о. $C\,[l^2 \to B]$, при котором $Ce_k = \varphi_k$;

3) существовал такой обратимый о. л. о. $C\,[l^2 \to B]$, когда $C e_k = \varphi_k$.

Теорема 3. Всякая квази-бесселева система $\{\varphi_k\}$ минимальна, а среди ее сопряженных (биортогональных с ней) существует квази-гильбертова $\{\varphi_k^*\}$; при этом $\varphi_k^* = T\varphi_k$, где T — о. л. о., действующий из B в B^*. Наоборот, если для системы $\{\varphi_k\} \subset B$ найдется такой о. л. о. T, что система $\{T\varphi_k\}$ сопряжена с $\{\varphi_k\}$, то система $\{\varphi_k\}$ квази-бесселева, а система $\{T\varphi_k\}$ – квази-гильбертова, если система $\{\varphi_k\}$ полна.

Теорема 4. Если квази-гильбертова система $\{\varphi_k\}$ минимальна, то любая ее сопряженная $\{\varphi_k\}$ квази-бесселева, причем $\varphi_k = T\varphi_k^*$, где T о. л. о.

Как известно, две системы банахова пространства $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ называются квадратично-близкими, если $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varphi_k - \psi_k\right\|^2 < \infty$, а какое-либо свойство системы $\{\varphi_k\}$ называется квадратично-устойчивым, если оно сохраняется для всех систем, квадратично-близких к данной. Используя теорему I и замечая, что если $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varphi_k\right\|^2 < \infty$, то система $\{\varphi_k\}$ является квази-гильбертовой, получим утверждение:

Теорема 5. Свойство системы быть квази-гильбертовой квадратично-устойчиво.

В дальнейшем весьма полезна будет следующая модификация утверждения Р. П. Боаса (см. [7]).

Теорема Боаса. Если норма пространства B порождена скалярным произведением, то

I) условия (1) или (2) эквивалентны тому, что матрица Грама $\|(\varphi_k, \varphi_m)\|$ ограничена снизу или сверху в смысле Гильберта:

$$\sum_{m,k=1}^{n} c_m c_k (\varphi_m, \varphi_k) \geqslant m^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \tag{1а}$$

$$\sum_{m,k=1}^{n} c_m c_k (\varphi_m, \varphi_k) \leqslant M^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \tag{2а}$$

2) условие (1) эквивалентно тому, что для каждой последовательности $\{c_n\} \subset l^2$ существует такой вектор $f \in B$, что

$$c_n = (f, \varphi_n); \quad (f, f) \leqslant M^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \tag{1б}$$

3) условие (2) эквивалентно тому, что для каждого $f \in B$ и $c_n = (f, \varphi_n)$

$$m^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant (f, f). \tag{2б}$$

(Отсюда следует, что всякая почти-ортогональная в смысле Беллмана система [см. 3, 444—449] является квази-гильбертовой).

§ 2. Квази-гильбертовы системы в L^2 [0,1]

Система $\{\varphi_k\} \subset L^2[0,1]$ называется продолжимой на L^2 [0,2], если функции $\varphi_k(x)$ можно доопределить на отрезке [1,2] так, что при некоторой постоянной μ система $\{\mu\varphi_k\}$ окажется ортонормированной в L^2 [0,2] [см. 6]. Теорема И. Шура [см. 6] утверждает, что для продолжимости системы необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама была ограничена в смысле Гильберта. Отсюда, используя теорему Боаса, получим уточнение одной теоремы Е. М. Никишина [6].

Теорема 7. Для того чтобы система $\{\varphi_k\} \subset L^2[0,1]$ была квази-гильбертовой, необходимо и достаточно, чтобы она была продолжима на L^2 [0,2].

Отсюда следует, что на ряды по квази-гильбертовым системам переносятся все коэффициентные критерии сходимости типа теоремы Меньшова-Радемахера [см. 6 и 8], а также теорема Меньшова о том, что из всякой ортогональной системы можно выделить подсистему сходимости (см. теор. 9.2.3 из [3], теорема Меньшова-Марцинкевича 9.2.1 из [3].

Однако на ряды по квази-гильбертовым системам переносятся и теоремы другого характера: это связано с тем, что в доказательстве многих теорем используют лишь неравенства (2) и (2б), а они справедливы для любой квази-гильбертовой системы. Так, доказательство теоремы Меньшова-Радемахера основано на лемме 5.3.4 из [3], представляющей и самостоятельный интерес; доказательство этой леммы, данное Алексичем (см. 2.3.1 из [4]), легко переносится на квази-гильбертовы системы.

Теорема 8 (обобщение теоремы 5.8.3 из [3]). Если система $\{\varphi_k\}$ квази-гильбертова, а ряд (Б) сходится, то все методы суммирования Чезаро (C, $\alpha>0$) равносильны между собой и равносильны методу Абеля-Дирихле.

Теорема 9 (обобщение теоремы 2.7.3 из [4]). Если система $\{\varphi_k\}$ — квази-гильбертова, ряд (Б) сходится, а

$$1 < p \leq \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leq q < +\infty,$$

то для того, чтобы ряд (А) был почти всюду на $E \subset [0,1]$ суммируем методом Чезаро, необходимо и достаточно, чтобы его частные суммы $S_{\lambda_n}(x)$ сходились почти всюду на E.

Аналогичные теоремы 2.8.7 и 2.8.8 из [4] для суммирования по методу Рисса также переносятся на квази-гильбертовы системы.

§ 3. Функции Лебега

Пусть $\{\varphi_k(x), \ g_k(x)\}$ биортогональная система в $L^2[0,1]$. Тогда каждой $f \in L^2$ соответствует ряд Фурье по этой системе:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(x); \quad c_k(f) = \int_0^1 f(t)\,g_k(t)\,dt.$$

Его частные суммы имеют вид

$$S_n(x,f) = \int_0^1 f(t)\,K_n(x,t)\,dt, \quad \text{где} \quad K_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) g_k(t).$$

Введем для системы $\{\varphi_k, g_k\}$ две последовательности функций Лебега, управляющие поведением частных сумм Фурье для непрерывных функций $f(x)$ и для $f \in L^2[0,1]$

$$L_n(x) = \int_0^1 |K_n(x,t)|\,dt; \quad l_n(x) = \sqrt{\int_0^1 K_n^2(x,t)\,dt}.$$

Для чезаровских сумм $\sigma_n(x,f)$ получим соответствующие выражения

$$\sigma_n(x,f) = \int_0^1 f(t)\,K_n^{(1)}(x,t)\,dt,$$

$$K_n^{(1)}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\,g_k(t)\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

и введем также функции Лебега

$$L_n^{(1)}(x) = \int_0^1 |K_n^{(1)}(x,t)|\,dt; \quad l_n^{(1)}(x) = \sqrt{\int_0^1 [K_n^{(1)}(x,t)]^2 dt}.$$

Аналогичные функции Лебега можно ввести и для суммирования по методу Рисса. Заметим, что из неравенства Коши-Буняковского следует оценка $L_n^{(1)}(x) \leqslant l_n^{(1)}(x)$, а из теоремы Банаха-Штейнгауса получим: *ограниченность* $L_n^{(1)}(x_0)$ *(соответственно)* $l_n^{(1)}(x_0)$ *равносильна ограниченности* $\sigma_n(x_0,f)$ *для всех непрерывных функций* $f(x)$ *(соответственно для всех* $f \in L^2[0,1]$*)*. Для произвольных биортогональных систем $\{\varphi_k, g_k\}$ справедлива.

Теорема 10 (ср. 5. 9. 1 из [3]). Если на $E \subset [0,1]$ выполняется при $\lambda_n > 0$ соотношение $l_n^{(1)}(x) = 0(\lambda_n)$, то для сумм Чезаро ряда Фурье каждой $f \in L^2[0,1]$ почти всюду на E выполняется условие

$$\sigma_n(x, f) = O_x(\lambda_n).$$

Для чезаровских сумм $\sigma_n(x)$ функционального ряда (А) эта теорема приобретает вид (ср. 3. 3. 2 из [4]):

Теорема 11. Если система $\{\varphi_k\}$ — квази-гильбертова, а на $E \subset [0,1]$ при $\lambda_n > 0$ $l_n^{(1)}(x) = O(\lambda_n)$, то из сходимости ряда (Б) следует, что почти всюду на E.

$$\sigma_n(x, f) = O_x(\lambda_n).$$

Теорема 12 (ср. теор. 3. 3. 3. из [4]). Если $\{\varphi_k\}$ квази-гильбертова система, λ_n — неубывающая вогнутая последовательность положительных чисел, а на $E \subset [0,1]$ $l_n^{(1)}(x) = O(\lambda_n)$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n^2$ следует суммируемость ряда (А) по Чезаро почти всюду на Е. В частности, если $l_n^{(1)}(x)$ равномерно ограничены на E, то из сходимости ряда (Б) следует суммируемость ряда почти всюду на E.

Теорема 13 (ср. 9. 5. 5 из [3]). Если $\{\varphi_n\}$ квази-гильбертова система $\lambda_{n+1} \geqslant g\lambda_n$ $(g > 1)$ и $l_{\lambda_n}(x) < C$ на $E \subset [0,1]$, то при сходимости ряда (Б) ряд (А) суммируем по Чезаро почти всюду на E.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. О базисах в гильбертовых пространствах. «ДАН СССР», 54 (1946), 383—386.
2. Н. К. Бари. Биортогональные системы и базисы в гильбертовых пространствах. «Уч. зап. МГУ», вып. 148, т. IV (1951), 69—107.
3. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. М., 1958.
4. Г. Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
5. Б. Е. Вейц. Система Бесселя и Гильберта в пространствах Банаха и вопросы устойчивости. «Изв. вузов, Математика», № 2 (45), 1965, 7—23.
6. Е. М. Никишин. О сходимости некоторых функциональных рядов. «Изв. АН СССР, серия математика», 31 № 1, 15—26.
7. R. P. Boas, A general moment problem, Amer. Journ. of Math., 63 N 2 (1941), 361—370.
8. M. Kac, R. Salem, A. Zygmunt, A gap. theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 235—243.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Э. М. Жмудь. Об одном классе конечных групп 3
Г. Ч. Куринной. Новое доказательство теоремы Дилуорса 11
В. Я. Шварц. Коммутативные связки 16
В. Н. Калюжный. О существовании точной левоинвариантной метрики на группах 22
В. К. Дубовой. Мультипликативное представление характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов . . . 26
И. В. Ушакова. Некоторые теоремы единственности мероморфных функций 32
И. И. Антыпко. О краевой задаче бесконечного типа . . . 44
Г. Б. Клебанова. О финитном управлении распределенной системой 53
В. З. Соколовский. О случайных колебаниях распределенных систем 60
В. З. Соколовский. О приближенном решении стохастических дифференциальных уравнений 67
В. В. Меньшиков, Б. С. Элькин. Вариант альтернирующего метода Шварца 74
В. В. Меньшиков, Б. С. Элькин. О приближенном методе решения одной краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности 80
И. Г. Альперин. Некоторые неравенства, имеющие место в теории упругости 87
Е. А. Косачевская, Э. Н. Татарченко. Нестационарное магнитогидродинамическое течение вязко-пластической среды между двумя бесконечными пластинами 95
Б. Г. Колодяжный. О динамооптических эффектах в волноводах 100
В. И. Гурарий, Т. В. Пашкова. Суммирование рядов, близких к ортогональным 114

Редактор *С. Д. Сусло*
Техредактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Н. С. Калинина.*

Сдано в набор 21/IV 1972 г. Подписано к печати 29/III 1973 г. БЦ 50132. Формат $60\times90^1/_{16}$. Объем: 7,75 физ. печ. л., 7,75 усл. печ. л., 8,4 уч.-изд. л. Бум. л. 3,875. Зак. 1755. Тираж 1000. Цена 84 коп. Бумага типографская № 3.
Издательство Харьковского университета, ул. Университетская, 16.

Харьковская типография № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков-3, Университетская, 16.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.44

Об одном классе конечных групп. Жмудь Э. М. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 3—11.

В статье изучаются конечные группы, система неприводимых комплексных представлений которых совпадает с базисом по пересечению решетки нормальных делителей. Основной результат статьи дает теоретико-групповую характеристику групп, обладающих указанным свойством. Устанавливается также ряд структурных свойств таких групп. Строится серия разрешимых, но не ниотпотентных групп рассматриваемого класса.

Библиографических ссылок — 5.

УДК 519.123.

Новое доказательство теоремы Дилуорса. Куринной Г. Ч., «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 11—15.

В статье дается новое доказательство теоремы Дилуорса о том, что в конечной модулярной решетке количество элементов, покрываемых ровно m элементами, равно количеству ее элементов, покрывающих ровно m элементов.

Библиографических ссылок — 1.

УДК 519.45 519.48

Коммутативные связки. Шварц В. Я. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 16—22.

Построена теория коммутативных связок для позиционных оперативов. Доказан аналог теоремы Клиффорда о строении инверсных вполне регулярных полугрупп.

Библиографических ссылок — 7.

УДК 519.44

О существовании точной левоинвариантной метрики на группах. Калюжный В. Н. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 22—26.

В статье описываются группы, на которых существует левоинвариантная метрика, группа изометрий которой совпадает с группой левых сдвигов. Для формулировки результата вводится класс групп, являющийся обобщением группы кватернионов.

Библиографических ссылок — 1.

УДК 513.88

Мультипликативное представление характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. Дубовой В. К. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 26—32.

Вводится понятие мультипликативного интеграла Стилтьеса по мере. В терминах введенного мультипликативного интеграла описывается представление характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов.

Библиографических ссылок — 10.

УДК 517.92

Некоторые теоремы единственности мероморфных функций. Ушакова И. В. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 32—43.

Статья посвящена применению и развитию результатов, полученных автором в предыдущих работах [1].

Библиографических ссылок — 1.

УДК 517944

О краевой задаче бесконечного типа. Антыпко И. И. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 44—53.

Установлены необходимые и достаточные условия того, чтобы краевая задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0, \qquad (1)$$

$$x \in R^m, \quad t \in [0,T],$$

$$a_{i1}\,u(x,0) + a_{i2}\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + a_{i3}\,u(x,T) + a_{i4}\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0,$$

$i=1, 2$, $P(s)$ и $Q(s)$ — произвольные полиномы, a_{ik} $k=1, 2, 3, 4$, — комплексные числа, имела бесконечный тип. Последнее означает, [см. 1], что единственность решения рассматриваемой краевой задачи имеет место в тех же классах функций, что единственность решения задачи Коши для уравнения (1).

Библиографических ссылок — 3.

УДК 62.501.12

О финитном управлении распределенной системой. Клебанова Г. Б. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 53—59.

Решается задача финитного управления двумерной распределенной колебательной системой при различном пространственном расположении управляющих воздействий.

Библиографических ссылок — 3.

УДК 519.2.

О случайных колебаниях распределенных систем. Соколовский В. З. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 60—66.

В работе показано, что конечномерные распределения специальных систем стохастических дифференциальных уравнений, связанных с уравнением гиперболического типа, продолжаются до нормального распределения в гильбертовом пространстве L_2.

Библиографических ссылок — 6.

ру упругости. Устанавливаются некоторые формы этих неравенств и условия, при которых они имеют место.

УДК 519.2.

О приближенном решении стохастических дифференциальных уравнений. Соколовский В. З. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 67—74.

В статье приближенный метод решения дифференциальных уравнений, известный под названием метода Бубнова—Галеркина, распространяется на некоторые классы стохастических дифференциальных уравнений.

Библиографических ссылок — 4.

УДК 518 : 517.944+513.88

Вариант альтернирующего метода Шварца. Меньшиков В. В., Элькин Б. С. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 74—79.

Рассматривается вариант альтернирующего метода Шварца применительно к случаю неоднородного эллиптического уравнения при неоднородных краевых условиях III рода.

Рисунков — 1. Библиографических ссылок — 4.

УДК 518 : 517.944+513.88

О приближенном методе решения одной краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности. Меньшиков В. В., Элькин Б. С. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 80—86.

Предложен метод решения стационарного уравнения теплопроводности в области, представляющей собою параллелепипед, в котором коэффициент теплопроводности зависит лишь от одной координаты.

Рисунков — 1. Таблиц — 1. Библиографических ссылок — 2.

УДК 539.3.001

Некоторые неравенства, имеющие место в теории упругости. Альперин И. Г. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 87—95.

Рассматриваются неравенства коэрцитивности в применении к оператору теории упругости. Устанавливаются некоторые формы этих неравенств и условия, при которых они имеют место.

Библиографических ссылок — 4.

УДК 538.4

Нестационарное магнитогидродинамическое течение вязко-пластической среды между двумя бесконечными пластинами. Косачевская Е. А., Татарченко Э. Н. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 95—99.

Рассматривается нестационарное движение электропроводящего пластика Шведова—Бингама в зазоре между бесконечными пластинами при наличии скрещенных электрического и магнитного полей. Особенностью такого движения является возможность возникновения двух зон вязкого течения, разделенных квазитвердым ядром. Получено распределение скоростей и определены размеры ядра.

Рисунков — 1. Библиографических ссылок — 3.

УДК 517.532/533

О динамооптических эффектах в волноводах. Колодяжный Б. Г. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 100—114.

В статье стандартным методом теории возмущений рассматривается задача о рассеянии электромагнитной волны на упругих похгаммеровских волнах в цилиндрических волноводах.

Библиографических ссылок — 5.

УДК 513.8

Суммирование рядов, близких к ортогональным. Гурарий В. И., Пашкова Т. В. «Вестник Харьковского университета, математика», вып. 38, 1973, стр. 114—120.

В работе вводятся обобщения систем Бесселя, Гильберта и Рисса, изучаются вопросы сходимости почти всюду и суммируемости по Чезаро рядов по таким системам, вводятся и изучаются функции Лебега для чезаровского суммирования рядов Фурье по биортогональным системам.

Библиографических ссылок — 8.