

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра вищої математики та інформатики

Кваліфікаційна робота магістра

на тему *«Впровадження теорії графів у шкільну освіту як засіб розвитку
математичних компетентностей і міжпредметних зв'язків»*

Виконала:
здобувачка ЗВО
групи МСз-61, 2 курсу
спеціальності 014.04 «Середня освіта
(Математика)»,
освітньо-професійна програма
«Математика та інформатика»
Свіщ Ольга Олександрівна

Науковий керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Лисиця В.Т.

Рецензент: канд. пед. наук,
доцент кафедри «Математики»
Харківського національного
педагогічного університету
імені Г.С. Сковороди
Проскурня О.І.

Харків – 2025р.

АНОТАЦІЯ

Свіщ О.О. Впровадження теорії графів у шкільну освіту як засіб розвитку математичних компетентностей і міжпредметних зв'язків

В даній роботі теорія графів розглядається як засіб реалізації міжпредметних зв'язків, оскільки вона тісно пов'язана з багатьма розділами математики (геометрією, топологією, теорією множин, математичною логікою, теорією ймовірностей) та має важливі застосування в природничих науках. Впровадження цієї теорії дозволяє учням познайомитися із затребуваним розділом прикладної математики та навчитися застосовувати графові алгоритми для вирішення завдань у галузі техніки, економіки, управління, логістики, інформаційних систем та природничих наук.

В роботі проведено аналіз освітніх систем США, Австралії, Сінгапуру, Італії та інших країн, який показав світову освітню тенденцію впровадження теорії графів в навчальний процес. Систематизований перелік проблем, із якими стикається інтеграція теорії графів в шкільну освіту в Україні.

В кваліфікаційній роботі запропонована методика викладання теорії графів, яка базується на принципах наростання складності та практичної спрямованості. В основу методики покладено «дорожню карту» (7-11 клас).

Наведено приклади задач, які дозволяють застосовувати графові моделі для розв'язання як комбінаторних задач шкільного курсу, так і складних прикладних кейсів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теорія графів, STEM – освіта, математичні компетентності, пошук найкоротшого шляху, мінімального остовного дерева.

ABSTRACT

Svishch O.O. Introduction of graph theory into school education as a means of developing mathematical competencies and interdisciplinary connections

In this work, graph theory is considered as a means of implementing interdisciplinary connections, since it is closely related to many sections of mathematics (geometry, topology, set theory, mathematical logic, probability theory) and has important applications in the natural sciences. The introduction of this theory allows students to become familiar with a sought-after section of applied mathematics and learn how to apply graph algorithms to solve problems in the fields of technology, economics, management, logistics, information systems, and natural sciences.

The work analyzes the educational systems of the United States, Australia, Singapore, Italy, and other countries, revealing a global educational trend toward introducing graph theory into the educational process. It provides a systematic list of problems encountered in integrating graph theory into school education in Ukraine. The thesis proposes a methodology for teaching graph theory based on the principles of increasing complexity and practical orientation. The methodology is based on a “road map” (grades 7-11).

Examples of problems are given that allow graph models to be applied to solve both combinatorial problems in the school curriculum and complex applied cases.

KEYWORDS: graph theory, STEM education, mathematical competencies, shortest path search, minimum spanning tree.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ.....	8
1.1. Обґрунтування впровадження викладання теорії графів у закладах загальної середньої освіти.....	8
1.2. Основні поняття теорії графів, необхідні для проведення занять у профільних класах.....	15
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1.....	21
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ НА УРОКАХ У ШКОЛІ.....	22
2.1. Методичні рекомендації щодо використання теорії графів на заняттях.....	22
2.2. Задачі на використання теорії графів.....	27
2.3. Розробка уроку.....	40
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2.....	51
ВИСНОВКИ.....	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	54

ВСТУП

Актуальність та ступінь дослідження проблеми. Сучасна система шкільної освіти спрямована на формування всебічно розвиненої, високоосвіченої особистості з цілісним уявленням процесів та явищ навколишнього світу. Проте предметна роз'єднаність процесу освіти у школі стає однією з причин фрагментарності світогляду випускників школи, тоді як у світі переважають тенденції до технічної, економічної, інформаційної, культурної інтеграції. Одними з основних дисциплін, які забезпечують цю інтеграцію, є математика та інформатика. Сама специфіка інформатики та математики сприяє формуванню міжпредметних зв'язків у процесі навчання школярів цим дисциплінам. Міжпредметні зв'язки у шкільній освіті є дидактичною умовою та методом повного та всебічного засвоєння основ усіх дисциплін. В роботі [1] розглянуті можливості застосування теорії графів у класах гуманітарного напрямку. Теорія графів може використовуватися як один із засобів реалізації міжпредметних зв'язків і в профільних класах математичної, інформаційної та природничої спрямованості. Теорія графів тісно пов'язана з геометрією та топологією, теорією множин та математичною логікою, теорією ймовірностей та математичною статистикою, теорією матриць та іншими розділами математики. Але не менш важливі і цікаві застосування теорії графів можуть бути здійснені і в природничих науках. Актуальність викладання теорії графів у школі, як засобу реалізації міжпредметних зв'язків, полягає в тому, що вона дозволяє учням познайомитися з цим затребуваним розділом прикладної математики, а також навчитися застосовувати основні графові алгоритми на уроках інформатики для вирішення завдань у галузі техніки, економіки, управління, логістики, а також в інформаційних системах, у природничих науках.

Шкільною програмою з математики за 10-11 клас не передбачено вивчення основ теорії графів. Лише в підручниках Бевза Г.П., Істера О.С., Мерзляка А.Г. є завдання, розв'язувати які можна із використанням засобів цієї теорії [2, 3, 4].

Незважаючи на це, задачі, які розв'язуються за допомогою графів, досить часто зустрічаються на шкільних математичних конкурсах, турнірах, олімпіадах.

Таким чином, використання теорії графів у профільних класах математичного, інформатичного, природничого спрямування має безсумнівну освітню цінність, однак воно також супроводжується низкою проблем, які можуть ускладнювати ефективне засвоєння матеріалу. Саме розв'язанню деяких з цих проблем присвячена кваліфікаційна робота.

Враховуючи світову тенденцію поширювати мережеву грамотність серед учнів, тематика дипломної роботи є своєчасною і актуальною.

Об'єкт дослідження. Теорія графів.

Предмет дослідження. Використання теорії графів у профільних класах математичного, інформатичного і природничого напрямів.

Мета дослідження: Розробити та обґрунтувати методику використання теорії графів у класах математичного, інформатичного і природничого напрямів. Обґрунтувати необхідність впровадження теорії графів у шкільний курс математики. Надати пропозиції щодо впровадження теорії графів у закладах загальної середньої освіти.

Завдання дослідження:

Для досягнення мети дослідження було вирішено наступні завдання:

1. Проаналізувати науково-методичну літературу з проблеми розвитку математичних компетентностей учнів профільних класів математичного, інформатичного і природничого напрямів.
2. Визначити особливості сприйняття теорії графів учнями профільних класів та основні труднощі у її вивченні.
3. Дослідити можливості застосування теорії графів в освітньому процесі.
4. Розробити систему завдань для учнів профільних класів з використанням графів.
5. Перевірити ефективність використання графів у навчальному процесі.

6. Сформулювати методичні рекомендації для вчителів щодо застосування графів у навчальному процесі.

Для досягнення мети та вирішення завдань застосовуються такі **методи дослідження**: теоретичні – аналіз науково-педагогічних та методичних джерел; аналіз, синтез, класифікація, систематизація, узагальнення методів дослідження і застосування теорії графів у профільних класах.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що у кваліфікаційній роботі детально проводяться дослідження використання теорії графів в освіті у різних країнах. Проведено порівняльний аналіз впровадження теорії графів в освіті у різних зарубіжних країнах. Запропоновано методику використання теорії графів у профільних класах. Запропоновано «дорожню карту» впровадження теорії графів у закладах загальної середньої освіти. Ця робота допоможе вчителям математики готувати і проводити заняття і впроваджувати елементи STEM-освіти у профільних класах.

Теоретична значення дослідження полягає в тому, що набули подальшого розвитку методи впровадження STEM-освіти у закладах загальної середньої освіти.

Практична значущість: використання теорії графів у навчанні підвищує зацікавленість учнів до вивчення математики у профільних класах, сприяє розвитку «мережевої освіти» учнів. Це розвиває математичні компетентності учнів профільних класів.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, 2-х розділів, 5 підрозділів, висновків, списку використаних джерел (50 найменувань). Загальний обсяг роботи становить 63 сторінки, із них – 53 сторінки основного текст. Робота містить 5 таблиць та 22 рисунки.

Апробація результатів: Деякі результати роботи представлено у роботах [5, 6].

РОЗДІЛ 1

ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

1.1. Обґрунтування впровадження викладання теорії графів у закладах загальної середньої освіти

Як було зазначено у вступі, при впровадженні теорії графів у навчальний процес виникають певні проблеми. Основні проблеми можна поділити на методичні, психолого-педагогічні та організаційні.

Методичні проблеми.

Відсутність адаптованих навчальних матеріалів:

- більшість навчальних посібників з теорії графів орієнтовані на студентів або науковців, і не пристосовані до рівня знань школярів;
- немає достатньої кількості задач, що відповідають програмам ЗНО або реальним прикладним задачам.

Складність абстрактного апарату:

- теорія графів потребує розуміння таких понять як граф, дуга, вершина, ізоморфізм, цикли, планарність тощо, які для школярів можуть бути надто абстрактними без відповідної візуалізації або життєвих прикладів.

Нестача міжпредметних зв'язків:

- теорія графів може ефективно інтегруватися з інформатикою, географією (карти), економікою (мережі), але часто подається ізольовано.

Психолого-педагогічні проблеми.

Перевантаження учнів:

- в учнів математичних, інформатичних або природничих профілів часто вже великий обсяг складних дисциплін, і введення нових тем може викликати перевантаження.

Низький рівень мотивації:

- без чіткого пояснення практичного застосування (наприклад, пошук найкоротшого шляху, розклад уроків, маршрутизація в Інтернеті) учні не бачать сенсу вивчати граfi.

Різнй рівень підготовки учнів:

- у класі можуть бути учні з дуже різним рівнем математичної бази, що ускладнює вибір оптимального темпу та глибини вивчення.

Організаційні проблеми.

- *Відсутність у програмі або обмежений час:*
- у типових навчальних планах для шкіл тема графів або не передбачена зовсім, або відведено надто мало часу.

Недостатня підготовка вчителів:

- не всі вчителі інформатики або математики мають глибокі знання з теорії графів або досвід викладання цієї теми школярам.

Незважаючи на проблеми, які виникають при введенні теорії графів у шкільні курси математики, цій проблемі приділяється увага у школах різних країн світу. Це пов'язано з тим, що в останні роки теорія графів ефективно використовується у природничих науках, логістиці, оптимізації, програмуванні, обробці зображень [8–15] у економіко-соціальних науках [16– 21], у створенні оптимальних пошукових систем [22–24].

В роботі [5] було досліджено мотиви і здійснення впровадження теорії графів у школах зарубіжних країн.

Хоча теорія графів бере свій початок із класичної праці Леонарда Ейлера (1736 р.) і давно стала фундаментальною галуззю математики, останніми роками з'явилися нові сфери її застосування. Зокрема, теорію графів активно використовують для розв'язування типових задач логістики, оптимізації, програмування, у сфері обробки зображень, хімії та біології [8–15]. Сформувалися сучасні напрями використання графових методів для аналізу соціальних мереж, економічних процесів, побудови та виявлення кримінальних

мереж поширення заборонених речовин і зброї, ворожих військових структур, а також для моделювання поширення інфекцій серед населення й визначення ключових носіїв або осередків захворювань [16–21].

У сучасному технологічному середовищі теорія графів широко застосовується для дослідження соціальних комп'ютерних мереж, виявлення зв'язків між користувачами, аналізу їхніх уподобань для цільової реклами, а також для оцінювання взаємозв'язків між вебсторінками з метою створення ефективних пошукових систем [22–24]. Це свідчить, що теорія графів є потужним математичним інструментом для розв'язання широкого кола практичних задач у різних галузях науки й техніки.

Тому особливої актуальності набуває впровадження «мережевої» грамотності (networked learning) серед учнів і студентів вищої школи [18–34]. У світі цьому приділяють значну увагу. Наприклад, у США діє освітня програма **NetSci High**, що фінансується Національним науковим фондом (NSF) і спрямована на учнів старших класів, недостатньо представлених у STEM, та їхніх учителів. Європейський Союз також активно просуває мережеву та цифрову освіту, акцентуючи увагу на доступності, міжнародній співпраці та розвитку цифрової грамотності.

Теорія графів зарекомендувала себе як дієвий засіб для моделювання різноманітних реальних процесів і набула широкого поширення завдяки своїй універсальності. Її апарат активно застосовується у біології, інженерії, хімії, економіці, аналізі соціальних мереж, обробці зображень та в освіті, що підкреслює міждисциплінарну природу цього напрямку. Завдяки наочності графових моделей базові поняття можна вводити вже в середній школі, формуючи в учнів розуміння математики як засобу аналізу та моделювання, а не лише як набору технічних прийомів. Важливим є створення завдань, які передбачають не механічне застосування алгоритмів, а потребують їх адаптації, творчого мислення та дослідницького підходу.

Попри значну практичну цінність теорії графів, у закладах вищої освіти вона здебільшого викладається в межах математичних та комп'ютерних дисциплін без достатнього зосередження на моделюванні. Більшість навчальних джерел — це підручники й посібники з дискретної математики чи теорії графів, що містять приклади використання алгоритмів, проте задачі з реальними сюжетами, які потребують модифікації рішень, зустрічаються нечасто. Хоча в освіті вже з'являються інноваційні підходи, моделювання ще не зайняло належного місця в методології викладання.

У низці європейських країн уже розпочато процес інтеграції теорії графів у шкільні програми. Так, в Італії вона офіційно включена до обов'язкового змісту навчання, тоді як у багатьох інших країнах її опановують факультативно або в межах позакласної діяльності [35, 36]. У Чехії теорія графів не є частиною обов'язкової програми, проте учні знайомляться з її елементами в різних навчальних предметах — хімії (молекулярні структури), біології (родинні дерева), мовознавстві (дерева синтаксичного розбору), географії (карти тощо). Водночас формальних знань про графи вони не отримують [37]. У Нідерландах у межах досліджень методики викладання математики проводили спрощені ознайомчі заняття: наприклад, учні 13–14 років розв'язували задачу на побудову графа, що відображав геометричні взаємозв'язки, після чого аналізували та вдосконалювали свої побудови [38]. У Франції оновлення програми старшої школи (зокрема для профільних напрямів ES) передбачало введення елементів теорії графів у поєднанні з міждисциплінарними проєктами (TPE). Однак ефективне викладання вимагало значної методичної підтримки та підвищення кваліфікації вчителів.

Підвищена увага до дискретної математики, зокрема до теорії графів, спостерігається й за межами Європи. У США Національна рада вчителів математики (NCTM) започаткувала реформу змісту математичної освіти, рекомендувавши включити дискретну математику до програм 7–12 класів. На

думку NCTM, це один із ключових напрямів сучасної математики, що має широке застосування у промисловості та бізнесі, а тому має стати обов'язковою складовою шкільного курсу. Саме тому багато країн світу поступово інтегрують елементи дискретної математики в навчальні програми. Ця тенденція активно розвивається й в Азії. Наприклад, у Таїланді до шкільної програми офіційно включено розділи з дискретної математики, зокрема комбінаторику й теорію графів. Подібний підхід запроваджено й в Індонезії [34]. Хоча там немає систематичного викладання теорії графів, учні стикаються з її елементами з молодшого віку — під час вивчення харчових ланцюгів, біологічних циклів, організації виробничих процесів, проблем вибору, складання розкладів, побудови структур учнівського самоврядування, а також при аналізі транспортних мереж і соціальних взаємозв'язків (наприклад, у мережах друзів у Facebook). При цьому школярі зазвичай не розуміють, що фактично мають справу з графовими структурами, адже ці знання не подаються формально. Це свідчить, що графи природно описують багато явищ повсякденного життя та можуть бути ефективним засобом їх моделювання.

У Сінгапурі, за висновками Хіюка Квека Сена та його колег [40], дискретна математика посідає важливе місце у шкільній освіті. Учні старших класів вивчають комбінаторику й теорію графів, що пов'язано з їх високими результатами у міжнародних тестуваннях, таких як PISA і TIMSS.

В Австралії Міністерство освіти запровадило обов'язкове вивчення дискретної математики для учнів 9–12 класів. Програма охоплює теми з комбінаторики та теорії графів із наголосом на практичне застосування. Учні розв'язують сучасні задачі, що виникають у сфері комп'ютерних наук, використовуючи такі дискретні структури, як нескінченні графи, матриці суміжності, поняття сусідства, послідовності та рекурсивні співвідношення, притаманні алгоритмічним процесам.

З огляду на міжнародний досвід можна стверджувати, що впровадження теорії графів у шкільні курси математики й інформатики в Україні є цілком виправданим.

По-перше, теорія графів є ключовим елементом сучасної дискретної математики, широко застосовуваної в ІТ-галузі, комп'ютерних науках, економіці, біології та соціології. Її опанування формує в учнів навички структурного та алгоритмічного мислення, необхідного для розв'язування міждисциплінарних задач.

По-друге, використання графових моделей у шкільному курсі сприяє розвитку практичних умінь, адже дає можливість аналізувати явища повсякденного життя — транспортні мережі, соціальні зв'язки, біологічні процеси, структури організацій. Це підвищує мотивацію учнів і сприяє інтеграції математики з іншими галузями в межах STEM-підходу.

По-третє, упровадження теорії графів відповідає глобальним освітнім тенденціям. Як зазначалося, у багатьох країнах (США, Австралія, Сінгапур, Італія, Велика Британія, Франція) дискретна математика, зокрема її графовий компонент, уже входить до шкільних програм, що забезпечує випускникам конкурентоспроможність у світовому освітньому та професійному просторі.

Короткий огляд щодо підходів до впровадження дискретної математики й теорії графів у середній та старшій школі у різних країнах наведено у табл. 1.1, яка опублікована у роботі [5]. Зрозуміло, що при впровадженні теорії графів у навчальний процес постають певні проблеми.

Зрозуміло, що при впровадженні теорії графів у навчальний процес постають певні проблеми.

Таблиця 1.1

*Короткий огляд щодо підходів до впровадження дискретної математики
й теорії графів у середній та старшій школі у різних країнах*

Країна	Інтеграція дискретної математики / графів	Ключові теми або контекст
Австралія	Вимагається вивчення дискретної математики у 9–12 класах.	Комбінаторика, теорія графів, матриці суміжності, рекурсивні структури
Сінгапур	Просунута програма (НЗ) включає комбінаторику й теорію графів.	Комбінаторика, графи
Індонезія	Спочатку графи були включені; з програми 2013 — вилучені, лишилися тільки комбінаторні елементи.	Перестановки, комбінації
Таїланд	Заявлена інтеграція дискретної математики, комбінаторики та графів, але деталі не підтверджені.	
Угорщина, Італія	Графи вводяться в 8–12 класах як частина дискретної математики.	Теорія графів, застосування в житті.
Великобританія	Further Mathematics включає «Decision Mathematics»: мережі, алгоритми.	Графи, мережі, алгоритми
Нідерланди	Графи згадуються, але як опція в контексті інформаційної обробки, не є обов'язковими.	Матриці, статистика, графи
Франція	Освітня програма централізована; алгоритми й моделювання включені в STEM-навчання, але графи не окреслені явно.	Моделювання, алгоритмічне мислення, міждисциплінарність

Багато шкільних вчителів математики та інформатики недостатньо підготовлені з дискретної математики, зокрема із сучасних застосувань графів. Сьогодні спостерігається перевантаження шкільних програм і тому треба шукати шляхи, яким чином інтегрувати нові розділи у шкільний курс математики. Крім того існує нестача підручників та навчальних посібників українською. Але незважаючи на труднощі можна поступово, починаючи з молодших класів, впроваджувати теорію графів у шкільний курс математики.

1.2. Основні поняття теорії графів, необхідні для проведення занять у профільних класах

Розглянемо основні поняття теорії графів, які будемо використовувати у кваліфікаційній роботі. В основному будемо використовувати термінологію, викладену у джерелах [44, 45].

При розв'язанні задач використовуються різні способи задання графів.

Означення 1 [45].

Нехай задано скінченну непорожню множину V . Позначимо через V^2 множину всіх неупорядкованих двоелементних підмножин множини V . Нехай $E \subseteq V^2$. **Неорієнтованим графом** називають пару множин (V, E) і позначають $G=(V, E)$. Елементи множини V називаються вершинами графа, а множини V^2 – ребрами графа.

Елементи множин V і V^2 будемо записувати у фігурних дужках:

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $V^2 = \{(v_i, v_j)\}$. Будемо ототожнювати двоелементні множини (v_i, v_j) і (v_j, v_i) тобто вважатимемо, що $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$. **Кінцями ребра** (v_i, v_j) називаються вершини v_i і v_j . Граф називається **тривіальним**, якщо він складається тільки з однієї вершини, і граф називається **порожнім**, якщо у нього відсутні ребра, тобто $G=(V, \emptyset)$. Вершини v_i і v_j називаються **суміжними**, якщо вони є кінцями одного і того ж ребра. Якщо вершина v_i є кінцем ребра (v_i, v_j) , то вершина і відповідне ребро називаються **інцидентними**. Ребро називається **петлею** якщо його кінці збігаються, тобто ребро (v_i, v_i) – **петля**. Вершина називається **ізолюваною** якщо вона не інцидентна жодному ребру. Якщо у множині ребр E присутні ребра, які з'єднують одну і ту ж пару вершин v_i і v_j , то такі ребра називаються **паралельними**. Граф називається **простим**, якщо у нього відсутні петлі і паралельні ребра. Надалі будемо розглядати тільки прості графи.

При комп'ютерній обробці даних зазвичай використовують граф, який задається означенням 1. Часто граф зручно подавати у вигляді рисунка. Вершини графа зображуються точками, а ребра – відрізками, які з'єднують ці точки. Таке зображення графа називається **діаграмою графа**. Такий підхід є зручним, особливо коли треба візуально представити зв'язки у графі.

Скінченна послідовність вершин та інцидентних їм ребр, які утворюють неперервну криву одним кінцем якої є вершина v_i , а іншим – вершина v_j , називається **маршрутом**, який з'єднує вершини v_i і v_j графа. У маршруті ребра можуть повторюватись.

Кількість ребр у цьому маршруті (з урахуванням повторів) називається **довжиною маршруту**.

Маршрут називається **замкненим маршрутом**, якщо його кінці збігаються, тобто $v_i = v_j$.

Маршрут називається **ланцюгом**, якщо його ребра не повторюються. Якщо до того ж не повторюються вершини, то такий маршрут називається **простим ланцюгом**.

Якщо будь-які дві його вершини графа можна з'єднати маршрутом, то він $G=(V, E)$ називається **зв'язним графом**.

Підграф називається будь-яка частина графа, яка сама є графом.

Відстанню між вершинами графа v_i і v_j називається довжини найкоротшого ланцюга, що їх з'єднує і позначається як $\rho(v_i, v_j)$.

Діаметром графа називається найбільша відстань між вершинами графа і позначається як $d(G)$. Тобто, $d(G)=\max \rho(v_i, v_j)$.

Ексцентриситетом вершини v_i називається відстань від v_i до найбільш віддаленої точки і позначається як $\varepsilon(v_i)$.

Радіусом графа називається найменший з ексцентриситетів вершин і позначається $r(G)$.

Вершина v_i називається **центральною**, якщо вона має найменший ексцентриситет. Іншими словами, якщо ексцентриситет вершини дорівнює радіусу графа. Множина центральних вершин називається **центром графа**.

Граф називається **повним**, якщо для будь-якої пари вершин v_i і v_j існує ребро (v_i, v_j) , що їх з'єднує.

Кількість ребр, інцидентних вершині v називається **степенем вершини** і позначається як $\delta(v)$. Якщо $\delta(v) = 0$, то вершина v називається **ізолюваною**, якщо $\delta(v) = 1$, то вершина називається **кінцевою**, або **висячою**.

Якщо позначити через $|E|$ кількість ребер графа, тоді виконується рівняння $\sum_{v \in G} \delta(v) = 2 |E|$. Тобто, сума степенів всіх вершин графа дорівнює подвійній кількості ребр. Це випливає з того, що кожне ребро графа інцидетне двом вершинам. Звідси виходить, що у будь-якому графі сума степенів вершин є парне число.

У багатьох прикладних задачах використовуються неорієнтовані зважені графи. Це важливо у тих випадках, коли треба розраховувати довжину шляху з урахуванням ваги ребр. Тобто важлива не тільки наявність зв'язку, але і його вага. У цьому випадку існують алгоритми пошуку найкоротших шляхів між вершинами. Один з таких алгоритмів – алгоритм голландського вченого Едсгера Дейкстри. Розглянемо цей алгоритм на прикладі. Будемо розглядати прості графи, тобто такі, у яких немає петель і паралельних ребр. Кількість ребр графа $|E|$ будемо називати його **розміром**, а кількість вершин $|V|$ – **порядком**. Для того, щоб побачити, як працює алгоритм Дейкстри, простежимо його роботу на прикладі графа, який задано на рис. 1.1. У цього графа $|E| = 7$, $|V| = 6$. Для прикладу знайдемо найкоротші шляхи від вершини 1 до інших вершин. Для цього розглянемо вектор вимірності $|V|$. Тобто, вимірність вектора дорівнює порядку графа. Номер координати вектора відповідає номеру вершини.

На першому кроці напишемо координати цього вектора наступним чином: перша координата дорівнює 0 (відстань вершини 1 до себе ж, оскільки немає петель). Решту координат умовно прирівнюємо до ∞ , тобто, маємо вектор $V_6 = (0; \infty; \infty; \infty; \infty; \infty)$. Активною вершиною тут виступає вершина 1.

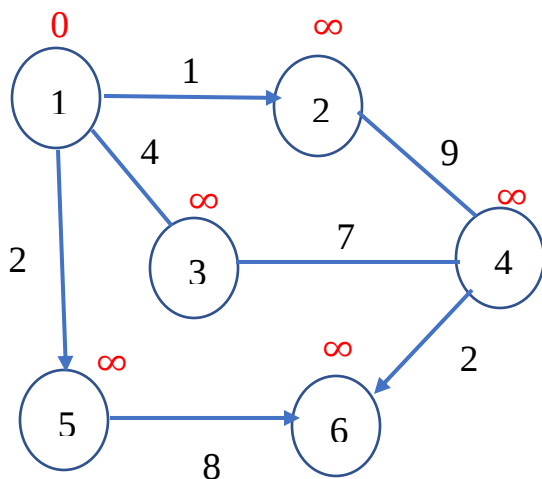


Рис. 1.1.

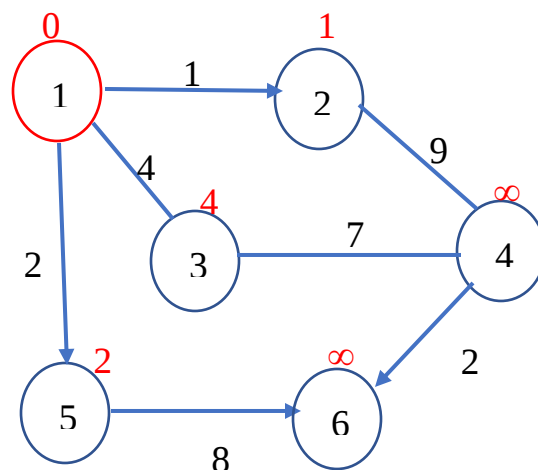


Рис. 1.2.

Суміжними вершинами до вершини 1 є вершини 2, 3 і 5.

На другому кроці припишемо тепер вершинам 2, 3 і 5 відповідно числа 1, 4 і 2. Це ваги ребер $(1; 2)$, $(1; 3)$ і $(1; 5)$. Ми додаємо ваги відповідних ребер до ваги першої вершини, яка дорівнює 0. На даному кроці це відстані від вершини 1 до суміжних вершин (рис. 1.2.). І на відповідних місцях змінимо координати вектора: $V_6 = (0; 1; 4; \infty; 2; \infty)$.

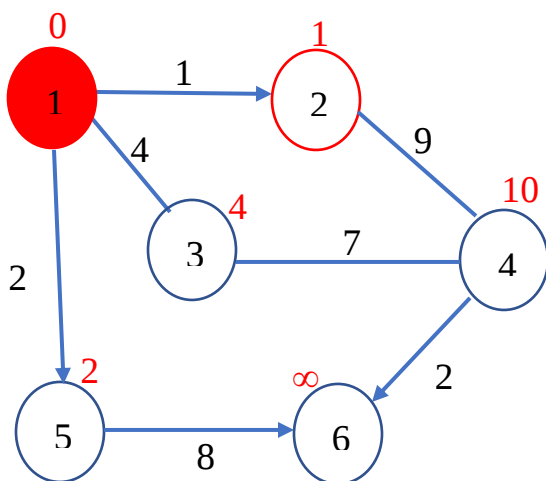


Рис. 1.3.

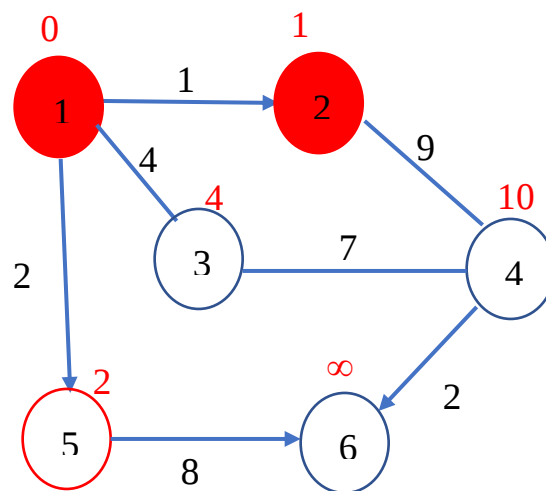


Рис. 1.4.

На третьому кроці активною вершиною вважаємо якусь вершину, суміжну з вершиною 1. Наприклад, це буде вершина 2. Вершина 1 вже відвідана.

У вершини 2 тільки одна суміжна активна вершина 4. Вершині 4 приписуємо її відстань від 1 по цьому шляху, додаючи до відстані вершини 2 вагу ребра (2; 4), тобто $1+9=10$. Змінимо вектор: $V_6 = (0; 1; 4; 10; 2; \infty)$. Вершина 2 тепер стає неактивною (рис. 1.4.).

Крок четвертий. Активізуємо тепер вершину 5 (у неї відстань до вершини 1 менша, ніж у вершини 3). Аналогічно тому, як і в на попередньому кроці, приписуємо вершині 6 значення $2+8=10$. Вершину 5 виключаємо з активних (рис. 1.4.). Тепер вектор $V_6 = (0; 1; 4; 10; 2; 10)$.

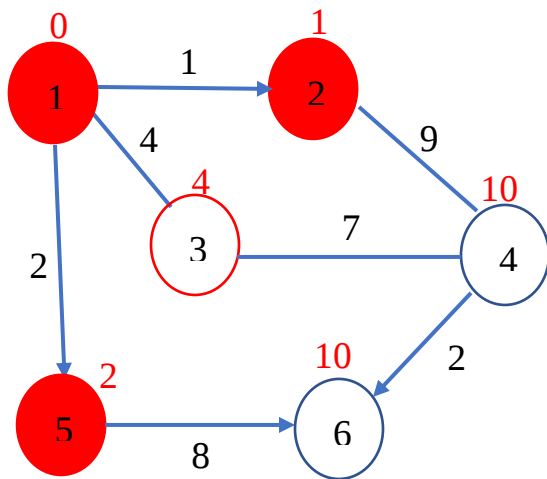


Рис. 1.5.

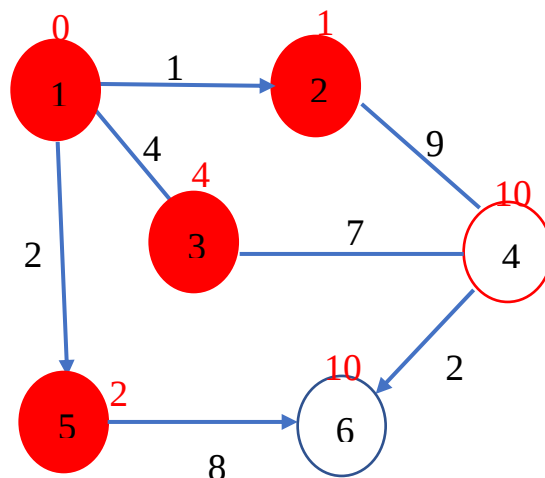


Рис. 1.6.

Крок четвертий. Активізуємо вершину 3 (рис. 1.5.). Знову знаходимо відстань до вершини 4, враховуючи вагу вершини 3: $4+7=11$. Це довжина зваженого шляху від вершини 1 до вершини 4 через вершину 3. Вона більша, ніж довжина шляху від 1 до 4 через вершину 2, яка знайдена на кроці третьому. Отже четверту координату вектора залишаємо 10.

Крок п'ятий. Видаляємо вершину 3 як активну і активізуємо вершину 4 (рис. 1.6.). Знаходимо відстань до вершини 6 через вершину 4: $10+2=12$. Ця відстань більша, ніж шлях до вершини 6 через вершину 5. Тому шосту координату вектора залишаємо.

Отже координати вектора $V_6 = (0; 1; 4; 10; 2; 10)$ дають відстані від вершини 1 до усіх вершин зваженого графа. На цьому Алгоритм Дейкстри для заданого графа завершено.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

В першому розділі кваліфікаційної роботи обґрунтовано, що теорія графів є фундаментальним компонентом сучасної математики та ключовим інструментом в ІТ, програмуванні, економіці, біології та аналізі мережевих структур.

Виявлено та систематизовано три групи бар'єрів на шляху до впровадження вище вказаної теорії в закладах загальної середньої освіти.

Проведено аналіз освітніх систем США, Австралії, Сінгапуру, Італії та інших країн. Підтверджено глобальну тенденцію інтеграції теорії графів у шкільні програми (7-12 класи).

Визначено основні поняття теорії графів та ключові алгоритми, які можуть бути ефективно введені в профільних класах для розв'язання прикладних задач.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ НА УРОКАХ У ШКОЛІ

2.1. Методичні рекомендації щодо використання теорії графів на заняттях

Загальні методичні підходи

Необхідно зазначити, що теорія графів природно візуальна дисципліна. Графи більш зрозуміло сприймаються, коли використовуються їх діаграми. На уроках рекомендується використовувати рисунки на дошці, або в якості вершин використовувати картки, а в якості ребр брати стрічки або мотузки. Для учнів старших класів доцільно використовувати цифрові інструменти – GeoGebra, Desmos, GraphOnline.

Вивчення графів краще починати з простих життєвих і зрозумілих задач. Учні краще розуміються на різноманітних мережах: транспортні маршрути, плани метрополітену, соціальні мережі, схеми електричних мереж, лабіринти тощо.

На простих моделях поступово вводити поняття самого графа, ребр, вершин, маршрутів, шляхів, циклів. Поступово перейти до поняття зв'язності, дерева. Після засвоєння основних понять можна переходити до ейлерових і гамільтонових графів, потім до поняття планарності.

Важливою темою в теорії графів є розфарбування графів, правильне розфарбування. Розфарбування графів можна моделювати за допомогою кольорових карток і мотузок (ниток). Це дає можливість підвести учнів до проблеми чотирьох фарб.

Потім перейти до проблемно-пошукового методу. Учням дається практична задача, вони будують графову модель і досліджують властивості побудованого графа.

Очікувані результати

Перш за все треба очікувані результати після опрацювання теми. Учні повинні:

- розуміти, що граф є моделлю структури зв'язків;
- вміти будувати графи за текстовими умовами, причому вміти записувати їх у символічному вигляді, так і будувати їх діаграму;
- вміти аналізувати графи за їх структурою: знаходити маршрути, шляхи, цикли, степені вершин;
- розв'язувати практичні задачі щодо знаходження оптимальних маршрутів, розподілу ресурсів, пошук шляхів;
- вміти використовувати комп'ютерні інструменти (GeoGebra, Desmos, GraphOnline) для роботи з графами;
- вміти використовувати графи міжпредметно: в інформатиці, фізиці, географії, економіці.

Рекомендації щодо організації занять

Мета: показати, що багато реальних задач описуються графами.

Методичні прийоми: Навести приклади з різних сфер життєдіяльності суспільства. Тут можна продемонструвати схему метро як граф, на простих графах розв'язати задачу «комівояжера» («листоноші») і підвести до поняття ейлерового циклу, обговорити структуру соцмереж і підвести до поняття «ступінь вершини».

Важливо не захоплюватись теорією. Зосередитись на максимальній кількості візуальних прикладів.

Введення основних понять

Рекомендується спочатку спонукати учнів самим сформулювати означення. Для цього використовувати маніпулятивні моделі: вершини – картки, ребра – мотузки (нитки). Продемонструвати неорієнтовані і орієнтовані графи. На простих прикладах пояснити різницю між маршрутом, шляхом, циклом.

Типові завдання: скласти граф шкільних кабінетів, пов'язаних переходами; скласти граф мікрорайону (будинки – вершини, вулиці – ребра).

Використання графів у задачах

На прикладах підкреслюємо умови існування ейлерового циклу й шляху. Показуємо застосування: Маршрут сміттєвоза, обхід вулиць мікрорайону.

Для засвоєння гамільтонових шляхів та циклів: «задача комівояжера» — у спрощеному варіанті. Можна використати географічні карти чи шкільні кабінети.

Дерева: показати, чому мережі електропередач будуються як дерева. Навчити учнів знаходити остовні дерева (мінімальні дерева) — на інтуїтивному рівні.

Планарні графи та кольорування: ввести поняття правильного розфарбування графа на простих прикладах, поняття хроматичного числа, сформулювати задачу про 4 фарби як елемент математичної культури. Пропозиція: учні розфарбовують карту районів міста мінімальною кількістю кольорів.

Методи активізації навчальної діяльності

Ігрові методи: «Знайди цикл», «Проклади найкоротший маршрут», «З'єднай граф».

Групова робота: кожна група будує свій граф за текстом і пояснює іншим.

STEM-завдання: створення схем мереж Wi-Fi; побудова маршруту збору пакунків кур'єром; моделювання «розумного міста».

Проектні роботи: «Мережа доріг нашого району як граф», «Мінімальна мережа освітлення вулиці».

Використання цифрових інструментів

GraphOnline – побудова, аналіз, знаходження ейлерових/гамільтонових шляхів.

GeoGebra Graphing – зручне креслення графів.

Desmos (Geometry) – створення інтерактивних моделей.

VisuAlgo – демонстрація алгоритмів на графах (старші класи).

Дати учням готові заготовки – нехай доповнять граф до повного графа, до зв'язного графа.

Показувати на екрані, як міняються маршрути при додаванні/видаленні ребер.

Оцінювання навчальних результатів

Що перевіряти: уміння будувати графи; читання графічних моделей; застосування теорії для розв'язання задач; пояснення логіки вибору маршруту; здатність перевіряти чи існує цикл/шлях.

Форми оцінювання: міні-тести (визначення, елементи графів); практичні завдання (побудувати граф, знайти маршрут); груповий проєкт; рефлексія: «Що нового я можу моделювати за допомогою графів?».

Приклади завдань

Побудувати граф міського транспорту для свого району.

Знайти, чи існує ейлерів шлях у заданому графі.

Розфарбувати карту областей так, щоб сусідні мали різні кольори.

Створити граф «друзі у класі» і знайти учнів з найбільшим ступенем вершини.

Побудувати мінімальне дерево для з'єднання 6 будинків в одну мережу.

Рекомендації щодо диференціації

Слабшим учням давати задачі на побудову простих графів. **Сильнішим** — задачі на мінімальні дерева, оптимальні маршрути. **Змішаним групам** давати реальні кейси (місто, школа, мережа доріг).

Міжпредметні зв'язки

Інформатика: алгоритми графів, маршрути, мережі.

Фізика: електричні кола (як графи).

Географія: карти, маршрути, транспортні шляхи.

Економіка: оптимізація витрат, логістика, розподіл ресурсів.

Біологія: дерева еволюції, харчові ланцюги.

Поради вчителю

Уникайте надмірної формалізації – графи мають бути «видимими».

Частіше використовуйте реальні приклади.

Дозволяйте учням самим придумувати свої графи.

Застосовуйте логічні ігри та головоломки (лабіринти, задачі на зв'язність).

Надавайте учням свободу творчості — графи чудово підходять для цього.

У роботі [5] запропонована дорожня карта щодо впровадження теорії графів у навчання. Можна сформулювати основні принципи впровадження графів з наростанням складності та міжпредметними зв'язками.

7 клас (перше знайомство і базовий рівень). **Мета:** сформувати в учнів візуальне розуміння графів на інтуїтивному рівні як моделей зв'язків. **Тематика:** **перше розуміння графа:** вершини, ребра, найпростіші приклади з життя; перші поняття соціальних мереж (графи друзів); графи на схемах (міста, дороги, метро); моделювання простих графів (рисунок, картки з мотузками), знаходження "схожих" структур.

8 клас (розширення можливостей графа, виконання прикладних завдань). **Мета:** засвоєння базових понять і простих алгоритмів. **Тематика:** **розглядається суміжність вершин, інцидентність вершини і ребра, ступінь вершини, типи вершин (ізолювані вершини, висячі вершини); шляхи й цикли; дерева та ієрархії (родинні дерева, дерево рішень); поняття зв'язності.**

9 клас (формалізація понять, перші алгоритми). **Мета:** сформувати в учнів елементи алгоритмічного мислення. **Тематика:** **орієнтовані та неорієнтовані графи; матриця суміжності, список суміжності; найкоротші шляхи (алгоритм Дейкстри у простій формі); мінімальне дерево покриття (інтуїтивно).**

10 клас (підвищення алгоритмічного рівня, інтеграція з інформатикою). **Мета:** навчити роботі з графами у програмуванні, вивчити базові алгоритми.

Тематика: обхід у глибину й ширину; алгоритми пошуку компонент зв'язності; двочасткові графи, розфарбування графів; планарність; задача про чотири фарби (оглядово).

11 клас (перехід на поглиблений рівень, підготовка до ВНЗ та ІТ). **Мета:** засвоїти з учнями інструменти, які використовуються в університетах та ІТ.

Тематика: пошук найкоротших шляхів (Дейкстра, Флойд-Уоршелл); знаходження мінімального остовного дерева (Краскал, Прім); розгляд алгоритмів на орієнтованих графах (топологічне сортування); приклади використання у базах даних, комп'ютерних мережах, штучному інтелекті.

2.2. Задачі на використання теорії графів

Вивчення теорії графів у профільних класах сприяє формуванню навичок моделювання реальних ситуацій за допомогою графів, розвитку логічного, алгоритмічного й комбінаторного мислення, підготовці учнів до участі в олімпіадах з математики.

Відповідно до модельної навчальної програми «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти [46] тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей» починає вивчатися в п'ятому класі, та учні знайомляться з розв'язанням комбінаторних задач. Тому я вважаю доцільним розпочинати вивчення теорії графів, починаючи з сьомого класу відповідно до дорожньої карти [5] на прикладі аналогічних задач, вже знайомих для учнів, за рахунок резервного навчального часу [47]. Наведемо нижче приклади розв'язання таких задач.

Приклад задачі для учнів сьомого класу беремо в підручнику «Математика» Істер О.С. за 5 клас з теми «Найпростіші комбінаторні задачі» представлена до розв'язання наступна задача: “З Хмельницького до Житомира

ведуть 2 дороги, а з Житомира до Києва – 3 дороги. Скількома способами можна доїхати з Хмельницького до Києва через Житомир?» [48].

Розв'язання.

Представимо умову у вигляді графа. При розв'язанні цієї задачі учні знайомляться з поняттями «граф» (G), «вершина» (V), «ребро» (E). Зобразимо міста вершинами графа «Хмельницький», «Житомир», «Київ», а дороги, що їх сполучають, ребрами (рис. 2.1).

Кількість способів, якими можна дістатись з Хмельницького до Києва через Житомир підраховуємо за рис. 2.1. В результаті підрахунку отримаємо 6 способів.

Відповідь: 6 способами можна доїхати з Хмельницького до Києва через Житомир.

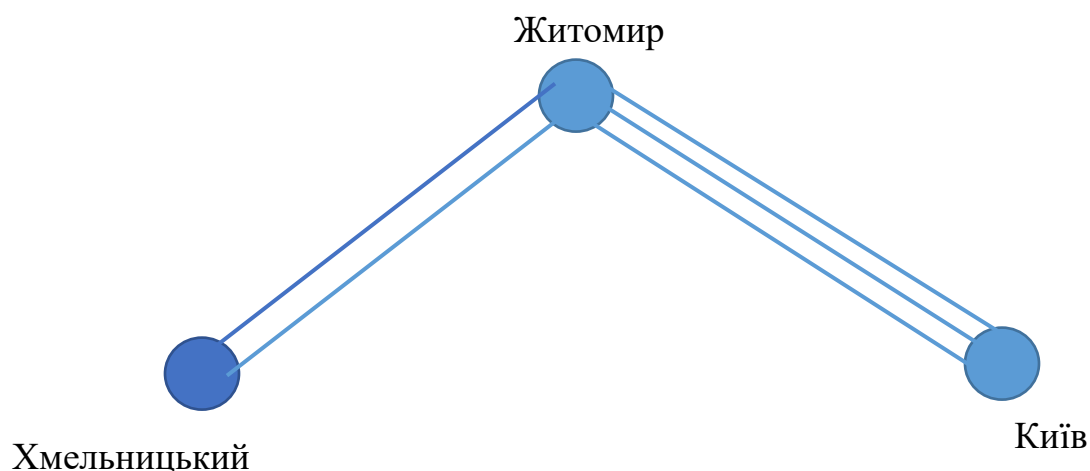


Рис. 2.1. Розв'язання задачі за допомогою графа

Приклади задач для учнів восьмого класу. В підручнику «Математика» Істер О.С. за 5 клас за темою «Найпростіші комбінаторні задачі» пропонується до розв'язання наступна задача: “Під час зустрічі 8 чоловіків обмінялися рукоштовками. Скільки рукоштовок було здійснено?” [48].

При розв'язанні цієї задачі учні знайомляться з поняттями «ступінь вершини графа», «кількість ребр в повному графі» (E).

Розв'язання:

Зобразимо чоловіків вершинами, а рукостискання, якими вони обмінялись, ребрами графа (рис. 2.2).

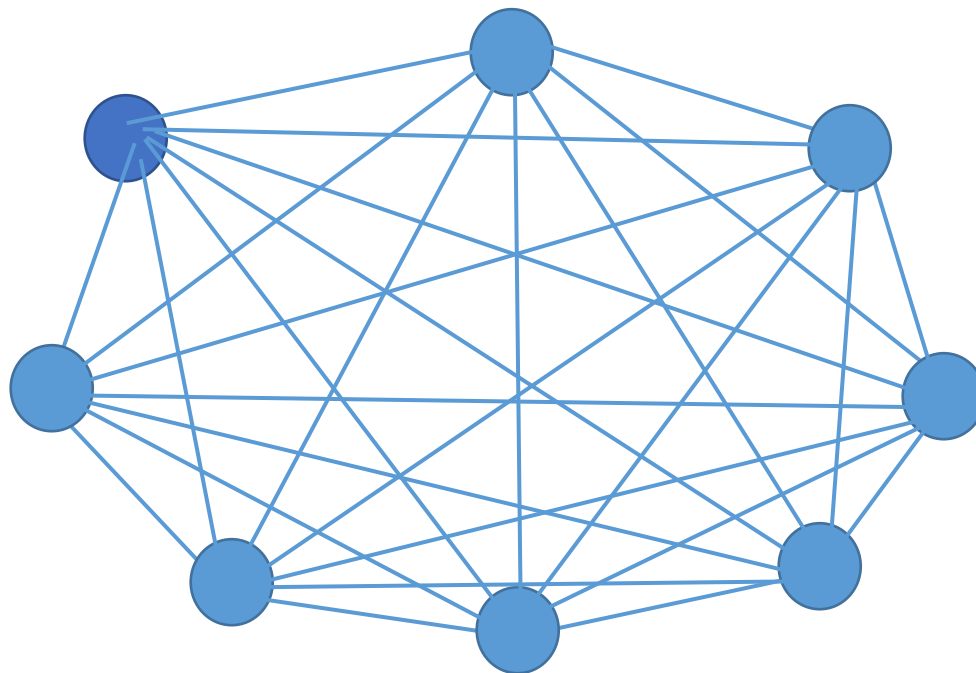


Рис. 2.2. Розв'язання задачі за допомогою графа

Кількість рукостискань, якими обмінялись чоловіки, дорівнює кількості ребр у графі. Кількість ребр в повному графі на n вершин знаходимо за наступною формулою:

$$E = \frac{n \times (n-1)}{2}, \quad (2.1)$$

де E – кількість ребр у графі;

n – кількість вершин у графі;

$n-1$ – степінь вершини графа.

$$E = \frac{n \times (n-1)}{2} = \frac{8 \times (8-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Візуально кількість ребр, а отже, і кількість здійснених рукостискань можна побачити на графі на рис. 2.2.

Відповідь: 28 рукостискань здійснили чоловіки.

З теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей» з підручника Мерзляка А.Г. «Алгебра і початки аналізу: профільний рівень» [2] за 11 клас розглянемо наступну задачу: “Скільки п’ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися із запису 34”.

В ході розв’язання даної задачі учні знайомляться із поняттям «дерево рішень».

Розв’язання.

Представимо розв’язок даної задачі у вигляді дерева рішень (рис. 2.3.).

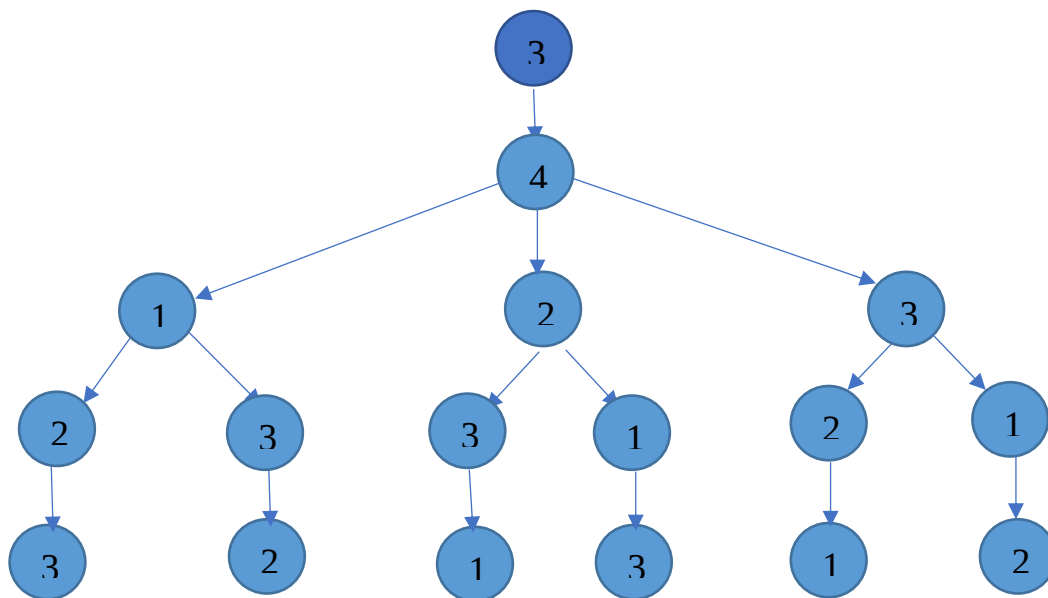


Рис.2.3. Дерево рішень

Оскільки на олімпіадах зустрічаються задачі, які розв’язуються із застосуванням теорії графів, доцільним є також розбір подібного типу завдань.

Наведемо приклад такої задачі.

У класі 30 учнів. Чи може бути так, що 9 з них мають по 3 друзів (у цьому класі), 11 – по 4 друзів, а 10 – по 5 друзів? [49].

Розв’язання.

Якщо зобразити учнів у вигляді вершин графу, а ребрами поєднати тих з них, що товаришують між собою, то отримаємо граф, у якому 30 вершин, 9 з яких

мають степінь 3, 11 – степінь 4, 10 – степінь 5. В такому графі парних вершин буде 11, а непарних $9 + 10 = 19$, тобто непарна кількість, що суперечить теоремі: «Будь-який неорієнтований граф має містити парну кількість непарних вершин».

Кількість ребр графа дорівнює половині суми степенів всіх його вершин. Вершини графа є парними і непарними. Сума степенів парних вершин графа парна, $11 \times 4 = 44$. Сума непарної кількості непарних степенів вершин непарна, $9 \times 3 + 10 \times 5 = 77$. Тоді сума степенів всіх вершин графа буде непарна, $44 + 77 = 121$.

Половина цієї суми буде нецілим числом, $121 \div 2 = 60,5$, тобто в графі неціла кількість ребр, а такого бути не може.

Отримане протиріччя доводить, що кількість непарних вершин графа не може бути непарною. Отже, такого графу не існує.

Відповідь: такого не може бути.

Приклади задач для учнів дев'ятого – одинадцятого класу.

З Пункту 1 до Пункту 3 можна дістатись кількома шляхами.

Карту доріг представлено на (рис. 2.4.). Потрібно розв'язати наступні підзадачі:

1. Знайти найкоротший шлях, яким можна потрапити із Пункту 1 в Пункт 3.
2. Знайти оптимальне дерево шляхів, по яких можна дістатись з Пункту 1 до Пунктів 2, 3, 4, 5, 6 [6].

Розв'язання.

Розв'яжемо першу підзадачу в даній задачі. Як видно з рис.2.4. карту доріг представлено у вигляді простого неорієнтованого графу. Знаходячи найкоротшу відстань між Пунктом 1 та Пунктом 3, приймемо за умову, що ребра графа мають однакову вагу, наприклад, довжину, яка дорівнює 1.

Проведемо ранжування вершин графу. В якості рангу прийматимемо відстань від вершини v_1 до даної вершини v_i , заміряну в вагах ребр. Відповідно

вершина v_1 , від якої починаємо будувати шлях, матиме ранг 0. Наступний ранг $i+1$ надаємо вершинам, які суміжні з попередніми i -ми вершинами, але ще не мають рангу [50].

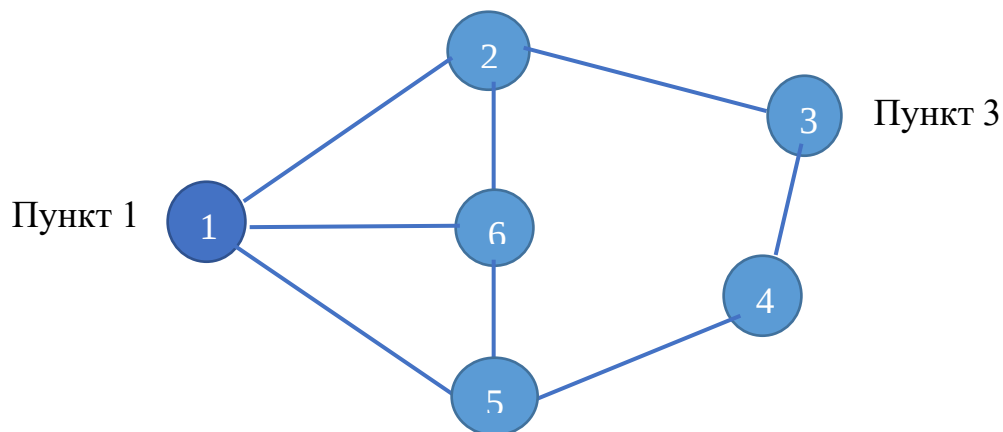


Рис. 2.4. Карта доріг

Ранги вершин представлено в табл. 2.1, які є в свою чергу найкоротшими маршрутами від вершини v_1 до v_i .

Таблиця 2.1

Ранги вершин

Ранг	Вершини
0	v_1
1	v_2, v_5, v_6
2	v_3, v_4

Вершина v_3 , якою на графі позначено Пункт 3, має ранг 2. Відповідно найкоротший шлях дорівнюватиме 2.

Розв'яжемо другу підзадачу побудови оптимального дерева шляхів в даній задачі. Деревом називається підграф, який включає в себе всі вершини вихідного графа, а кількість ребр така, що підграф має бути зв'язним і не мати циклів. Виходячи із означення дерева, на даному графі можна побудувати наступні дерева (рис.2.5., рис.2.6., рис.2.7., рис.2.8.).

Обійдемо дерево, зображене на рис. 2.5., використовуючи алгоритм пошуку в глибину. Даний алгоритм полягає в наступному: починаємо обхід з

вершини v_1 та рухаємось, наприклад, завжди вліво. Отримаємо наступний маршрут пошуку: 1, 2, 3, 2, 1, 6, 1, 5, 4, 5, 1.

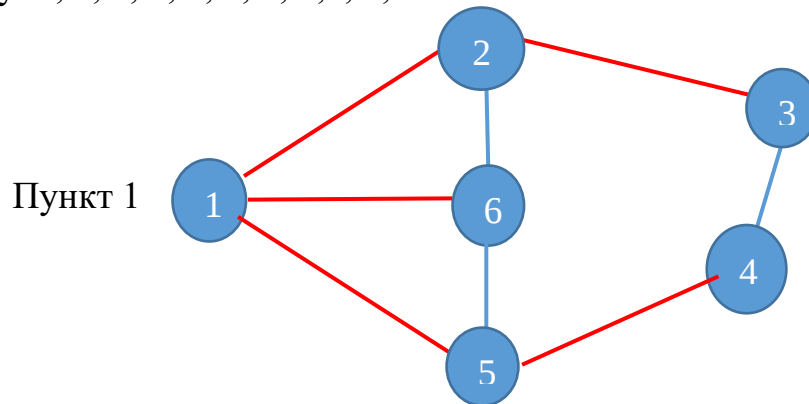


Рис. 2.5. Варіант 1 побудови дерева на даному графі

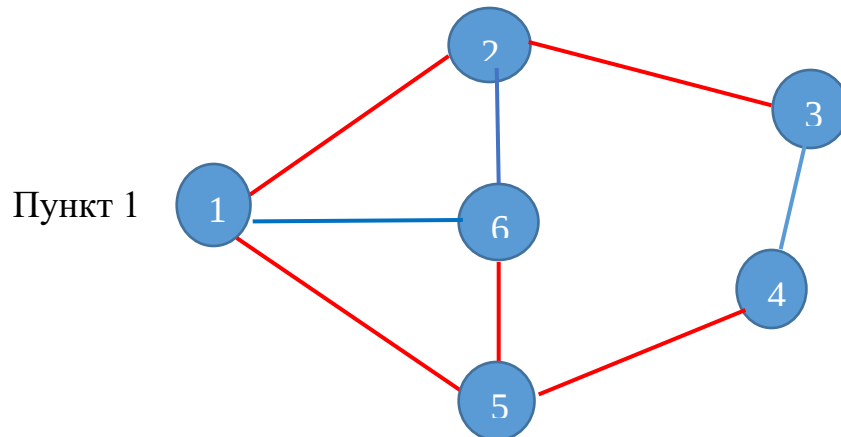


Рис. 2.6. Варіант 2 побудови дерева на даному графі

Обійдемо дерево, зображене на рис. 2.6., використовуючи алгоритм пошуку в глибину. Отримаємо наступний маршрут пошуку: 1, 2, 3, 2, 1, 5, 6, 5, 4, 5, 1.

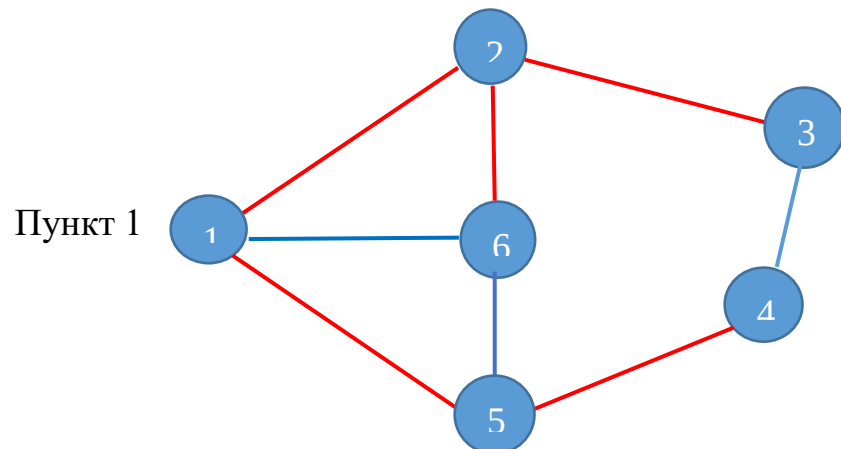


Рис. 2.7. Варіант 3 побудови дерева на даному графі

Обійдемо дерево, зображене на рис. 2.7., використовуючи алгоритм пошуку в глибину. Отримаємо наступний маршрут пошуку: 1, 2, 3, 2, 6, 2, 1, 5, 4, 5, 1.

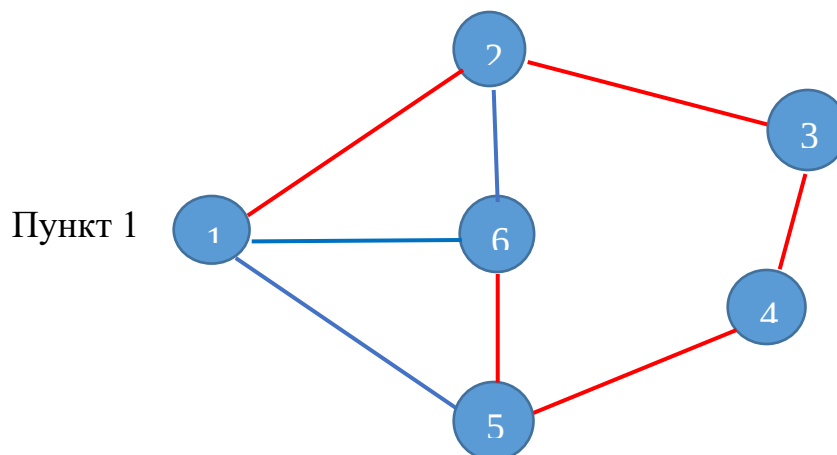


Рис. 2.8. Варіант 4 побудови дерева на даному графі

Обійдемо дерево, зображене на рис. 2.8., використовуючи алгоритм пошуку в глибину. Отримаємо наступний маршрут пошуку: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Із побудованих маршрутів видно, що найкоротший отримали при обході дерева, зображеного на рис. 2.8.. Отже, це і буде оптимальне дерево шляхів.

Задача на пошук найкоротшого шляху.

Дано фрагмент місцевості у вигляді зваженого графу (рис. 2.9.), де вершини графу – це населені пункти; ребра або дуги – це дороги, що сполучають ці населені пункти; вага над ребрами або дугами – це відстань між населеними пунктами. Потрібно знайти найкоротший шлях з населеного пункту, позначеного вершиною X_1 , до населеного пункту, позначеного на даному графі вершиною X_9 .

Розв'язання.

Для розв'язання даної задачі використаємо алгоритм відомого нідерландського математика і інформатика Едсгера Дейкстри. Суть алгоритму Дейкстри полягає в русі через найкоротше ребро, з найменшою вагою [50].

Для зручності та більшої наочності розв'язок даної задачі представимо у вигляді табл. 2.2.

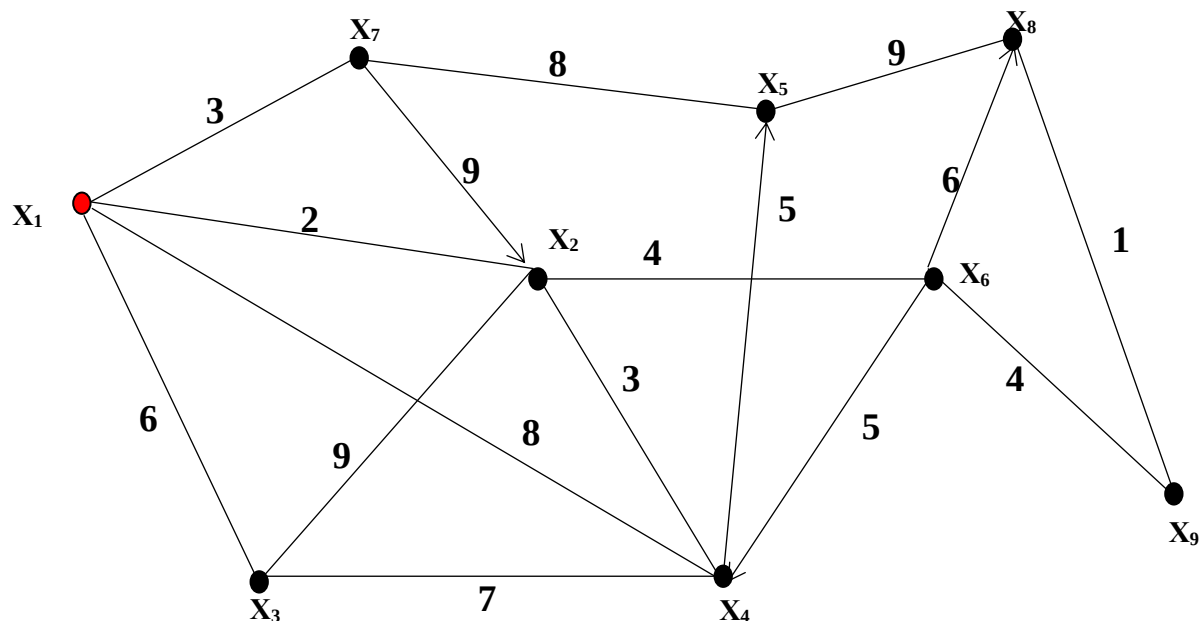


Рис.2.9. Фрагмент місцевості у вигляді зваженого графу

Почнемо з нульового кроку. Дослідження вершин у даному графі починаємо з вершини X_1 , яку позначили як початок шляху. У таблиці вкажемо відстань від вершини X_1 до інших вершин. Відстань до вершини X_1 дорівнюватиме 0, а відстані до інших вершин позначимо як ∞ , оскільки на даному кроці ми їх не знаємо. Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_1 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у табл. 2.2. виділимо рядок, який відповідає вершині X_1 .

На першому кроці визначимо вершини, які пов'язані із вершиною X_1 , тобто вершини, в які можна потрапити із вершини X_1 . В даному прикладі це вершини X_2 , X_3 , X_4 та X_7 . Для цих вершин оновимо відстані. Для інших вершин відстані залишаються без змін.

Нова відстань для вершини визначається за наступною формулою:

$$d(v_i) = \min \{ d(v_i), d(y) + l(y, v_i) \} \quad (2.2)$$

де $d(v_i)$ - поточна відстань для даної вершини;

$d(y)$ - поточна відстань для суміжної вершини;

l – вага ребра, інцидентного для вершин $d(v_i)$ та $d(y)$ [50].

Таблиця 2.2

Знаходження найкоротшого шляху у зваженому графі

	0	1	2	3	4	5	6
X_1	0 (X_1)						
X_2	∞	2 (X_1)					
X_3	∞	6 (X_1)	6 (X_1)	6 (X_1)	6 (X_1)		
X_4	∞	8 (X_1)	5 (X_2)	5 (X_2)			
X_5	∞	∞	∞	11 (X_7)	10 (X_4)	10 (X_4)	10 (X_4)
X_6	∞	∞	6 (X_2)	6 (X_2)	6 (X_2)		
X_7	∞	3 (X_1)	3 (X_1)				
X_8	∞	∞	∞	∞	∞	12 (X_6)	11 (X_9)
X_9	∞	∞	∞	∞	∞	10 (X_6)	

Для вершини X_2 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_1) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_1 та X_2 , дорівнює $0 + 2 = 2$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 2. Це 2. Отже, оновлена відстань для вершини X_2 дорівнюватиме 2. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_3 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_1) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_1 та X_3 , дорівнює $0 + 6 = 6$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 6. Це 6. Отже, оновлена відстань для вершини X_3 дорівнюватиме 6. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_4 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_1) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_1 та X_4 , дорівнює $0 + 8 = 8$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 8. Це 8. Отже, оновлена відстань для вершини X_3 дорівнюватиме 8. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_7 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_1) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_1 та X_7 , дорівнює $0 + 3 = 3$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 3. Це 3. Отже, оновлена відстань для вершини X_7 дорівнюватиме 3. Занесемо це значення до таблиці 2.2.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_2 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.2. виділимо рядок, який відповідає вершині X_2 .

Переходимо до виконання другого кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_2 . В даному прикладі це вершини X_1 , X_3 , X_4 та X_6 . Вершина X_1 вже досліджена, тому будемо розглядати тільки вершини X_3 , X_4 та X_6 . Для цих вершин оновимо відстані. Для інших вершин відстані залишаються без змін.

Для вершини X_3 поточна відстань дорівнює 6, а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_2) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_2 та X_3 , дорівнює $2 + 9 = 11$. Обираємо мінімальне з двох значень 6 та 11. Це 6. Отже, відстань для вершини X_3 залишається 6. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_4 поточна відстань дорівнює 8, а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_2) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_2 та X_4 , дорівнює $2 + 3 = 5$. Обираємо мінімальне з двох значень 8 та 5. Це 5. Отже, оновлена відстань для вершини X_4 дорівнюватиме 5. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_6 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_2) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_2 та X_6 , дорівнює $2 + 4 = 6$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 6. Це 6. Отже, оновлена відстань для вершини X_6 дорівнюватиме 6. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_7 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися

постійним. Для зручності у таблиці 2.2. виділимо рядок, який відповідає вершині X_7 .

Переходимо до виконання третього кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_7 . В даному прикладі це вершини X_1 , X_2 та X_5 . Вершини X_1 та X_2 вже досліджені, тому будемо розглядати тільки вершину X_5 . Для цієї вершини оновимо відстань. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Для вершини X_5 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_7) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_7 та X_5 , дорівнює $3 + 8 = 11$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 11. Це 11. Отже, оновлена відстань для вершини X_5 дорівнюватиме 11. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_4 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.2. виділимо рядок, який відповідає вершині X_4 .

Переходимо до виконання четвертого кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_4 . В даному прикладі це вершини X_1 , X_2 , X_3 та X_5 . Вершини X_1 та X_2 вже досліджені, тому будемо розглядати тільки вершини X_3 та X_5 . Для цієї вершини оновимо відстань. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Для вершини X_3 поточна відстань дорівнює 6, а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_4) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_4 та X_3 , дорівнює $5 + 7 = 12$. Обираємо мінімальне з двох значень 6 та 12. Це 6. Отже, відстань для вершини X_3 залишається 6. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_5 поточна відстань дорівнює 11, а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_4) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_4 та X_5 , дорівнює $5 + 5 = 10$. Обираємо мінімальне з двох значень 11 та 10. Це 10. Отже, оновлена відстань для вершини X_5 дорівнюватиме 10. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершини X_3 та X_6 . Значення відстані до цих вершин вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.2. виділимо рядки, які відповідають вершинам X_3 та X_6 .

Переходимо до виконання п'ятого кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_3 . В даному прикладі це вершини X_1 , X_2 та X_4 . Ці вершини вже досліджені, відстані до них вже не будуть покращені. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_6 . В даному прикладі це вершини X_2 , X_4 , X_8 та X_9 . Вершини X_2 та X_4 вже досліджені, тому будемо розглядати тільки вершини X_8 та X_9 . Для цієї вершини оновимо відстань. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Для вершини X_8 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_6) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_6 та X_8 , дорівнює $6 + 6 = 12$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 12. Це 12. Отже, оновлена відстань для вершини X_8 дорівнюватиме 12. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Для вершини X_9 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_6) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_6 та X_9 , дорівнює $6 + 4 = 10$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та 10. Це 10. Отже, оновлена відстань для вершини X_9 дорівнюватиме 10. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_9 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.2. виділимо рядок, який відповідає вершині X_9 .

Переходимо до виконання шостого кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_9 . В даному прикладі це вершини X_6 та X_8 . Вершина X_6 вже досліджена, тому будемо розглядати тільки вершину X_8 . Для цієї вершини оновимо відстань. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Для вершини X_8 поточна відстань дорівнює 12, а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_9) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_8 та X_9 , дорівнює $10 + 1 = 11$. Обираємо мінімальне з двох значень 12 та 11. Це 11. Отже, оновлена відстань для вершини X_8 дорівнюватиме 11. Занесемо це значення до табл. 2.2.

Оскільки вершина X_9 (кінцева точка маршруту) вже досліджена та має постійне значення, виконання алгоритму Дейкстри на цьому завершуємо.

Найкоротший шлях у даному графі будуємо у зворотному напрямку від вершини X_9 : $X_9 \rightarrow X_6 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$ (рис.2.10.).

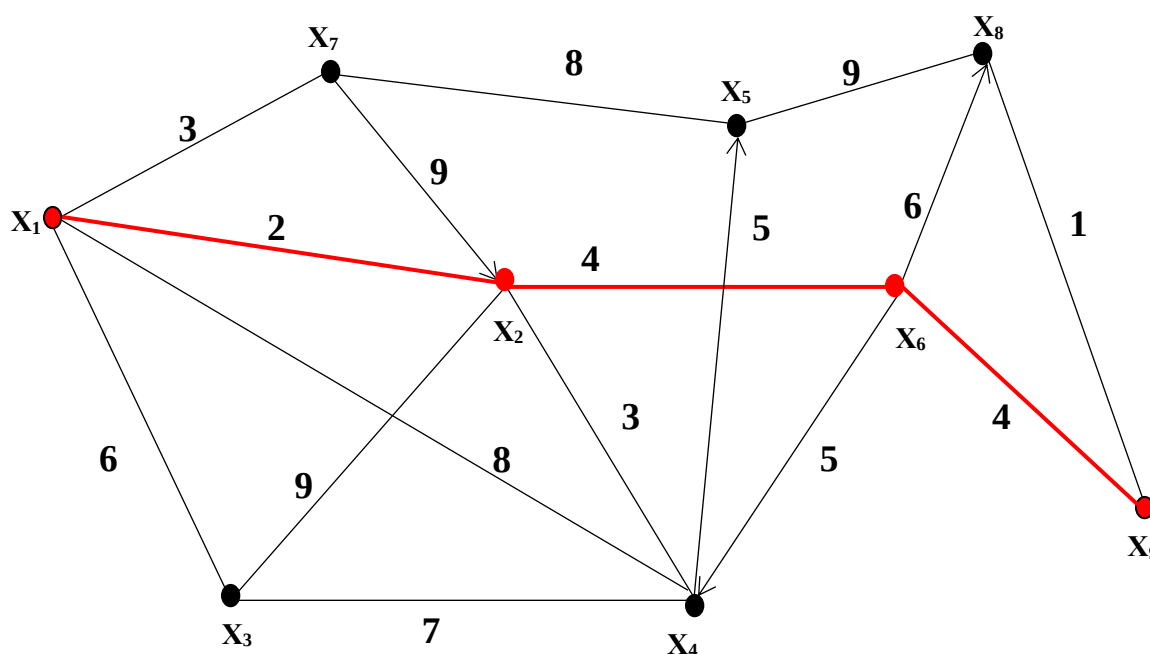


Рис.2.10. Найкоротший шлях на зваженому графі

2.3. Розробка уроку

Тема уроку: Пошук найкоротшого шляху в зваженому графі.

Клас: 11 клас.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Формат: дистанційний урок.

Обладнання: ноутбук, конспект в електронному вигляді, платформа для зв'язку Zoom, Google Meet.

Мета уроку:

Навчальна: Ознайомити здобувачів освіти з алгоритмом пошуку найкоротшого шляху в зваженому графі.

Розвивальна: розвинути логічне мислення, увагу та пам'ять.

Виховна: виховати уважність, самостійність, активність.

Хід уроку

I. Організаційний етап (2 хв).

Привітання учнів, перевірка готовності учнів до уроку, налаштування їх на роботу (відображення їх настрою на початку уроку).

II. Актуалізація знань (5 хв).

Метод «Мікрофон», питання для повторення.

Слова вчителя: Сьогодні на уроці ви дізнаєтесь, як розв'язується практична задача пошуку найкоротшого шляху між двома пунктами призначення. Розв'язання даної задачі зводиться до пошуку найкоротшого шляху у зваженому графі. Але спочатку давайте пригадаємо те, що вам відомо про графи та масштаб карти.

Що називають графом?

Очікуваний результат:

Граф – це абстрактний комбінаторний об'єкт, що складається з двох множин V (vertex) – множина вершин і E (edge) – множина ребр [50].

Які вершини називають суміжними?

Очікуваний результат:

Якщо вершини v_i і v_j є кінцями одного і того ж ребра, то вони називаються **суміжними**.

Які ребра називають інцидентними вершині?

Очікуваний результат:

Якщо вершина v_i є кінцем ребра (v_i, v_j) , то вершина i і відповідне ребро називаються **інцидентними**.

Що називають масштабом?

Очікуваний результат:

Масштаб – це відношення відстані на карті до відповідної відстані на місцевості. Іншими словами, масштаб показує у скільки разів збільшене або зменшене реальне зображення.

Як визначити, якій відстані на місцевості відповідають 2 см на карті, якщо масштаб карти 1 : 70 000?

Очікуваний результат:

$$2 * 70\,000 = 140\,000 \text{ см} = 1\,400 \text{ м} = 1,4 \text{ км}$$

III. Пояснення нового матеріалу (20 хв).

Слова вчителя: А тепер я вам пропоную перейти до розгляду такої практичної задачі.

Потрібно дістатись від станції метро «Перемога» до станції метро «23 серпня» міста Харкова автомобілем. Потрібно визначити найкоротший шлях, яким можна подолати цю відстань (рис. 2.11.)?

Позначимо на карті за вершини графу – перетини доріг, а за ребра – самі дороги, що сполучають ці перетини. В такий спосіб ми отримали граф (рис. 2.12.).

Тепер задамо вагу ребрам цього графу. На карті відрізкам доріг відповідають наступні виміри в сантиметрах (рис. 2.13.). Перетворіть сантиметри в кілометри, якщо масштаб карти 1 : 24 500.

Очікуваний результат:

$$24\,500 \text{ см} = 245 \text{ м} = 0,245 \text{ км}$$

$$1 * 0,245 = 0,245;$$

$$3 * 0,245 = 0,735;$$

$$6,5 * 0,245 = 1,59;$$

$$3,5 * 0,245 = 0,857;$$

$$2 * 0,245 = 0,49;$$

$$2,5 * 0,245 = 0,613;$$

$$2,7 * 0,245 = 0,662;$$

$$5,5 * 0,245 = 1,35;$$

$$6 * 0,245 = 1,47.$$

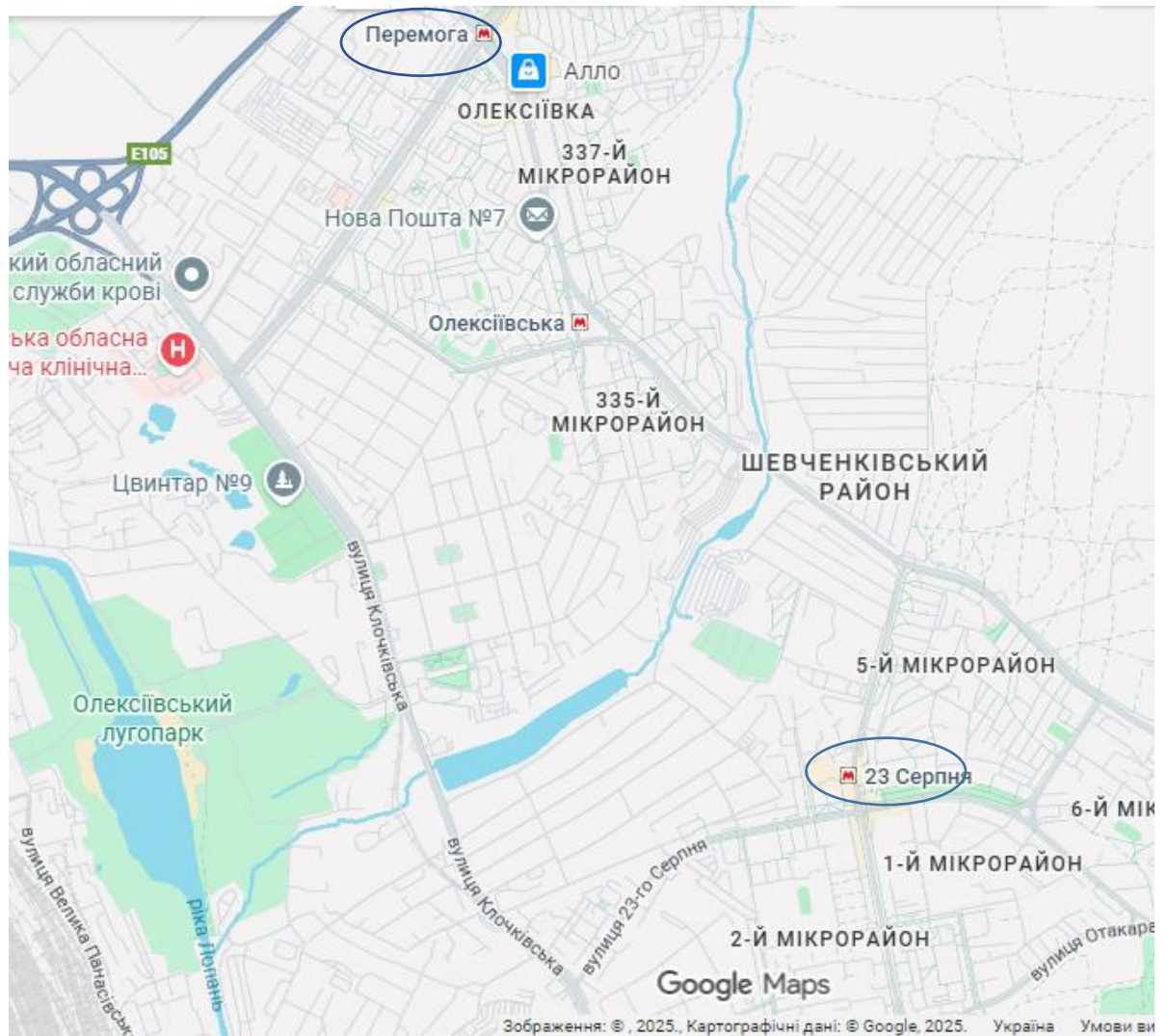


Рис. 2.11. Скриншот карти Харкова з Google Maps

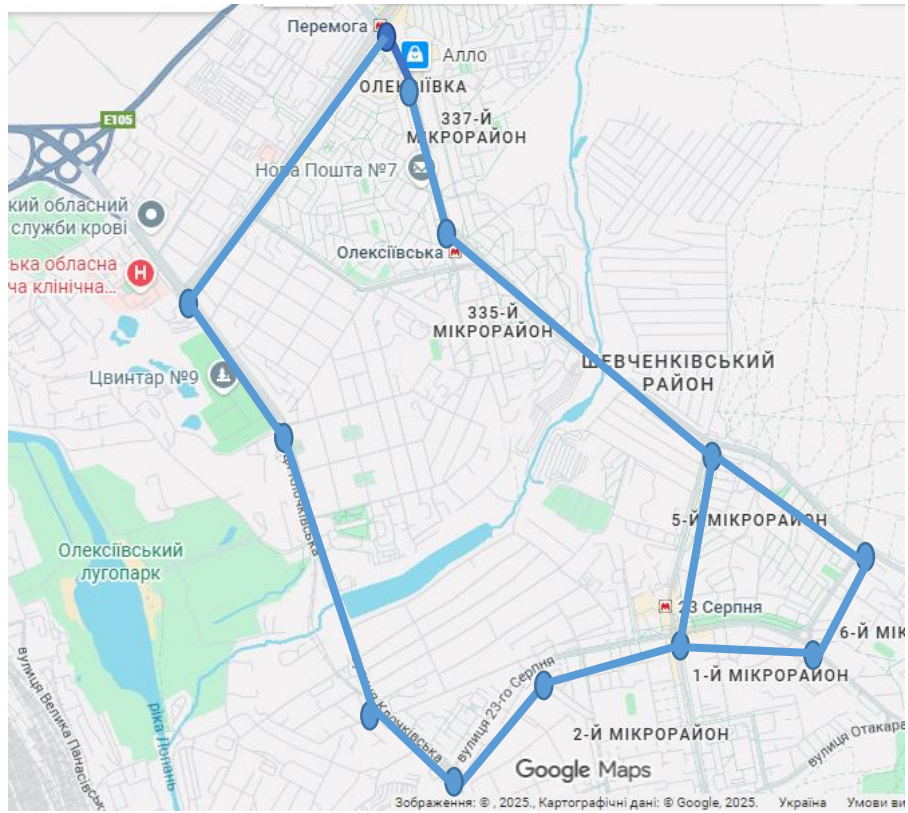


Рис. 2.12. Зображення графа на карті

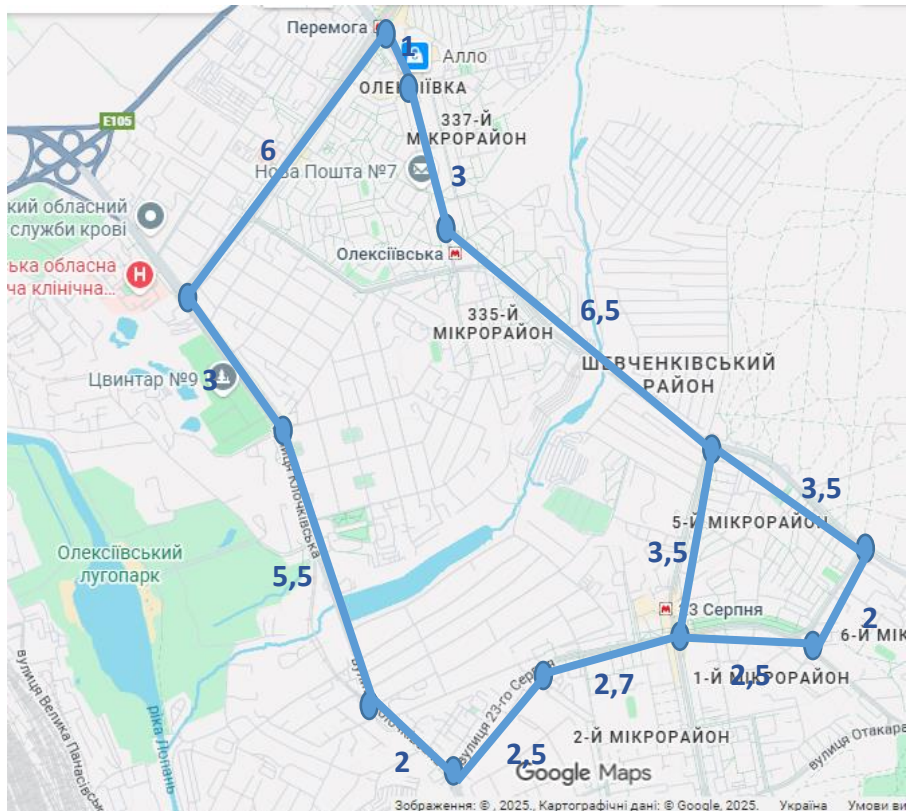


Рис. 2.13. Зображення зваженого графа на карті

Слова вчителя: Після перетворень отримаємо зважений граф, ваги на ребрах якого представлені в кілометрах (рис. 2.14.). Зобразьте наведений граф в зошиті.

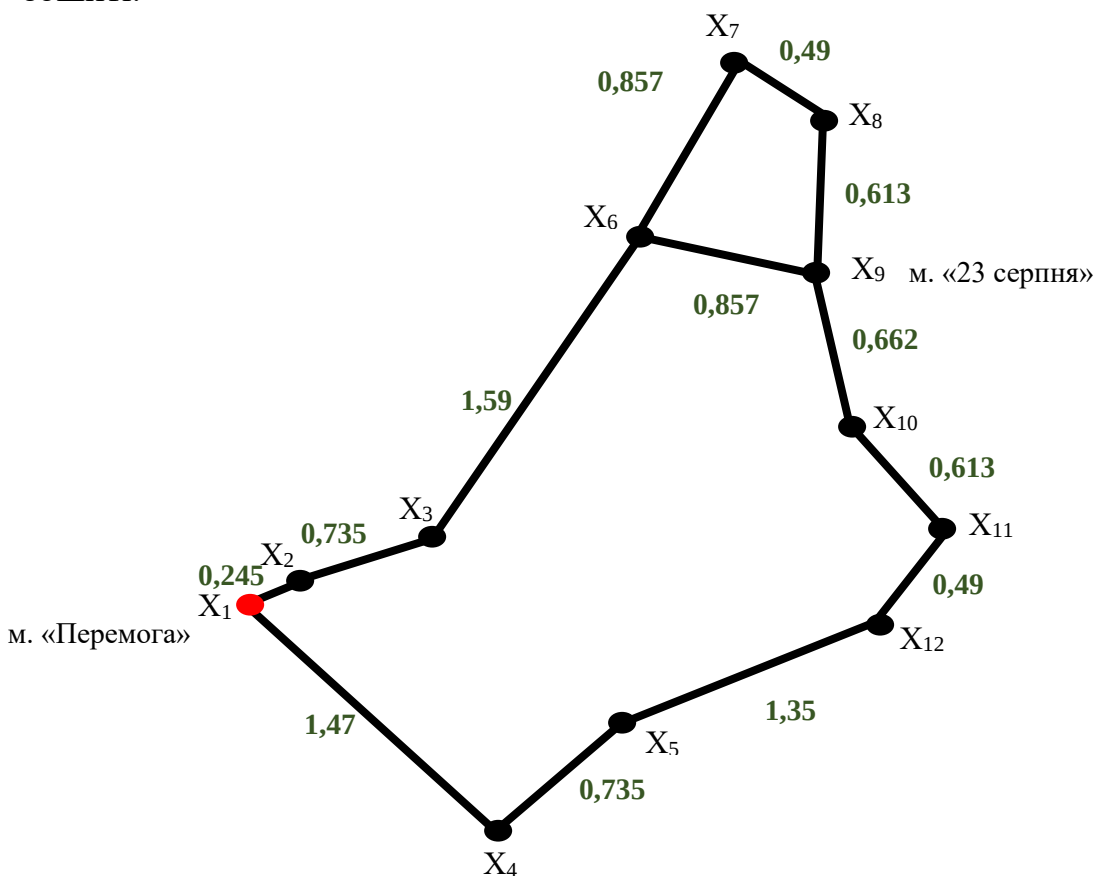


Рис. 2.14. Зважений граф

Тепер розглянемо алгоритм знаходження найкоротшого шляху у зваженому графі, названий на честь відомого нідерландського математика і інформатика Едсгера Дейкстри. Суть алгоритму Дейкстри полягає в русі через найкоротше ребро, з найменшою вагою [50].

Позначимо червоним вершину X_1 (м. «23 серпня») як початкову точку маршруту. Потрібно знайти найкоротший шлях до населеного пункту, позначеного на даному графі вершиною X_9 (м. «23 серпня»).

Для зручності та більшої наочності розв'язок даної задачі представимо у вигляді таблиці 2.3. Зобразьте дану таблицю в зошиті.

Почнемо з нульового кроку. Дослідження вершин у даному графі починаємо з вершини X_1 , яку позначили як початок шляху. У таблиці вкажемо відстань від вершини X_1 до інших вершин. Відстань до вершини X_1 дорівнюватиме 0, а відстані до інших вершин позначимо як ∞ , оскільки на даному кроці ми їх не знаємо. Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_1 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.3. виділимо рядок, який відповідає вершині X_1 .

Таблиця 2.3.

Знаходження найкоротшого шляху в зваженому графі

	0	1	2	3	4	5	6
X_1	0 (X_1)						
X_2	∞	0,245 (X_1)					
X_3	∞	∞	0,98 (X_3)				
X_4	∞	1,47 (X_1)	1,47 (X_1)	1,47 (X_1)			
X_5	∞	∞	∞	∞			
X_6	∞	∞	∞	2,57 (X_3)			
X_7	∞	∞	∞	∞			
X_8	∞	∞	∞	∞			
X_9	∞	∞	∞	∞			
X_{10}	∞	∞	∞	∞			
X_{11}	∞	∞	∞	∞			
X_{12}	∞	∞	∞	∞			

На першому кроці визначимо вершини, які пов'язані із вершиною X_1 , тобто вершини, в які можна потрапити із вершини X_1 . В даному прикладі це вершини X_2 та X_4 . Для цих вершин оновимо відстані. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Нова відстань для вершини визначається за наступною формулою:

$$d(v_i) = \min \{ d(v_i), d(y) + l(y, v_i) \} \quad (2.3)$$

де $d(v_i)$ - поточна відстань для даної вершини;

$d(y)$ - поточна відстань для суміжної вершини;

l – вага ребра, інцидентного для вершин $d(v_i)$ та $d(y)$ [50].

Для вершини X_2 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_1) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_1 та X_2 , дорівнює $0 + 0,245 = 0,245$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та $0,245$. Це $0,245$. Отже, оновлена відстань для вершини X_2 дорівнюватиме $0,245$. Занесемо це значення до таблиці 2.3.

Для вершини X_4 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_1) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_1 та X_4 , дорівнює $0 + 1,47 = 1,47$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та $1,47$. Це $1,47$. Отже, оновлена відстань для вершини X_4 дорівнюватиме $1,47$. Занесемо це значення до таблиці 2.3.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_2 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.3. виділимо рядок, який відповідає вершині X_2 .

Переходимо до виконання другого кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_2 . В даному прикладі це вершини X_3 . Для цієї вершини оновимо відстань. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Для вершини X_3 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_2) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_2 та X_3 , дорівнює

$0,245 + 0,735 = 0,98$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та $0,98$. Це $0,98$. Отже, оновлена відстань для вершини X_3 дорівнюватиме $0,98$. Занесемо це значення до таблиці 2.3.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_3 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.3. виділимо рядок, який відповідає вершині X_3 .

Переходимо до виконання третього кроку. Визначаємо вершини, які пов'язані із вершиною X_3 . В даному прикладі це вершини X_6 . Для цієї вершини оновимо відстань. Для інших вершин відстані залишаться без змін.

Для вершини X_6 поточна відстань дорівнює ∞ , а сума поточної відстані для суміжної вершини (X_3) та ваги ребра, інцидентного до вершин X_3 та X_6 , дорівнює $0,98 + 1,59 = 2,57$. Обираємо мінімальне з двох значень ∞ та $2,57$. Це $2,57$. Отже, оновлена відстань для вершини X_6 дорівнюватиме $2,57$. Занесемо це значення до таблиці 2.3.

Далі обираємо вершину із найменшою відстанню, це вершина X_4 . Значення відстані до цієї вершини вже не буде покращено, воно буде залишатися постійним. Для зручності у таблиці 2.3. виділимо рядок, який відповідає вершині X_4 .

IV. Самостійна робота (10 хв).

Слова вчителя: Продовжить дослідження інших вершин, поки не буде досліджена вершина X_9 (кінцева точка маршруту) та не прийме постійне значення.

Очікувані результати:

Найкоротший шлях у даному графі будуємо у зворотному напрямку від вершини X_9 : $X_9 \rightarrow X_6 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$.

Таблиця 2.4

Знаходження найкоротшого шляху в зваженому графі

	0	1	2	3	4	5	6
X ₁	0 (X ₁)						
X ₂	∞	0,245 (X ₁)					
X ₃	∞	∞	0,98 (X ₃)				
X ₄	∞	1,47 (X ₁)	1,47 (X ₁)	1,47 (X ₁)			
X ₅	∞	∞	∞	∞	2,205 (X ₄)		
X ₆	∞	∞	∞	2,57 (X ₃)	2,57 (X ₃)	2,57 (X ₃)	
X ₇	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
X ₈	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
X ₉	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3,427 (X ₆)
X ₁₀	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
X ₁₁	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
X ₁₂	∞	∞	∞	∞	∞	3,555 (X ₅)	3,555 (X ₅)

V. Підсумок уроку (2 хв).

Слово вчителя: Сьогодні ви навчилися знаходити найкоротший шлях у зваженому графі. Відобразимо цей шлях на рис. 2.15. Найкоротший шлях від станції метро «Перемога» до станції метро «23 серпня» становитиме 3,427 км.

VI. Рефлексія (3 хв).

Слово вчителя: Чи сподобався Вам урок? Чи залишились запитання щодо навчального матеріалу? (Проходить обговорення уроку між учнями та вчителем).

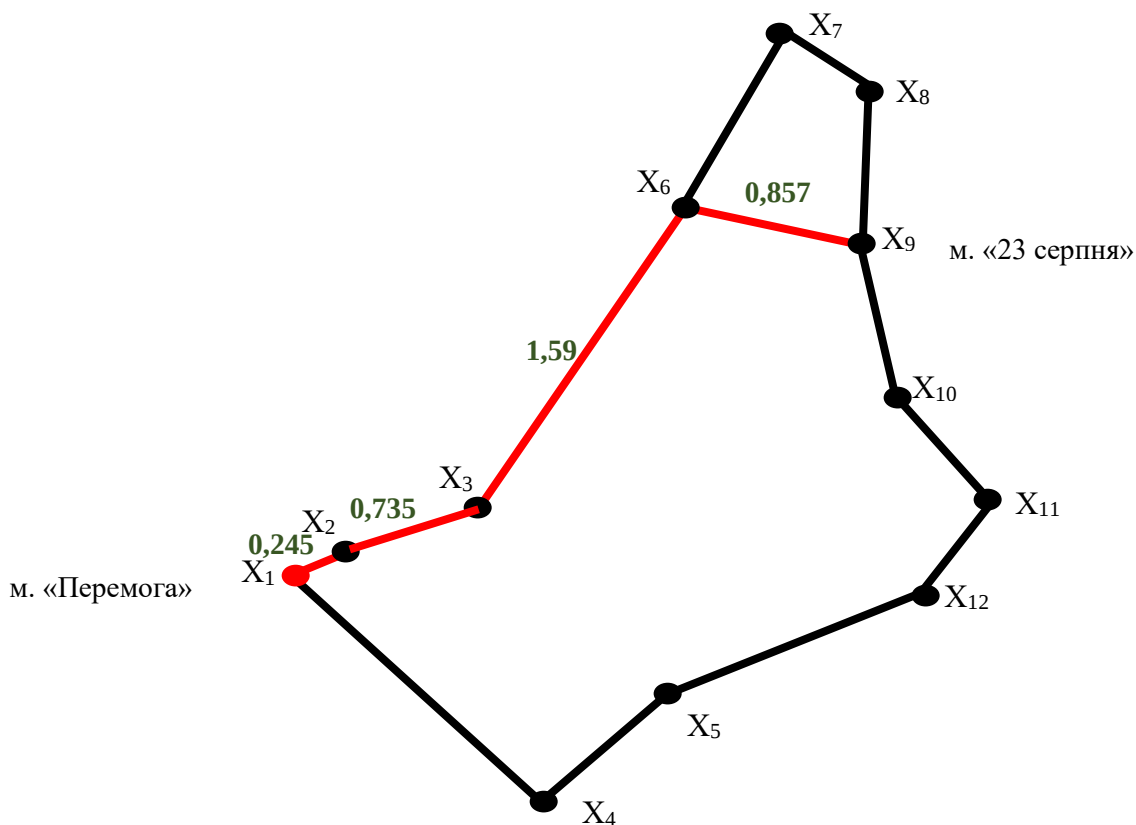


Рис. 2.15. Найкоротший шлях на зваженому графі

VII. Домашнє завдання (2 хв).

Знайдіть найкоротший шлях у зваженому графі, зображеному на рис. 2.16., починаючи з вершини X_1 до вершини X_6 , використовуючи алгоритм Дейкстри.

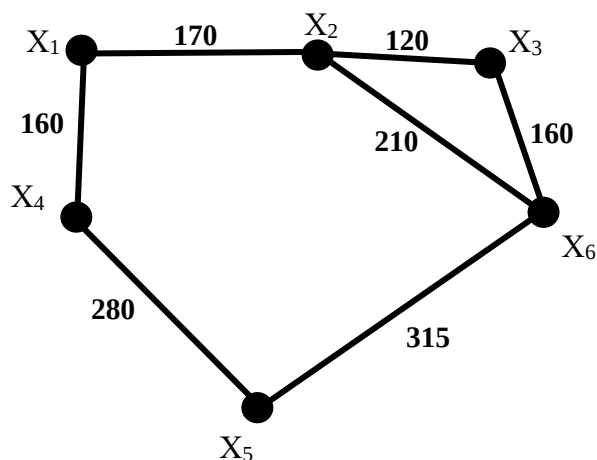


Рис. 2.16. Зважений граф

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

В другому розділі кваліфікаційної роботи розроблена методика впровадження елементів теорії графів в навчальний процес середньої школи. В даній методиці запропоновано задля забезпечення наочності навчального процесу активне використання як традиційних фізичних моделей (карток, мотузок), так і сучасних цифрових інструментів. Рекомендовано розпочинати з простих, зрозумілих життєвих задач, які легко моделюються графами (наприклад, транспортні мережі), поступово вводячи ключові поняття: вершини, ребра, шляхи, цикли, зв'язність, дерева.

Запропоновано поетапну «дорожню карту» впровадження теорії графів протягом 7-11 класів, яка передбачає наростання складності від інтуїтивного, візуального розуміння в 7 класі до засвоєння формалізованих алгоритмів на старшому профільному рівні в 11 класі.

Наведена добірка типових задач для учнів різних вікових груп 7-11 класів. Ці завдання охоплюють спектр застосування теорії графів: від базових комбінаторних задач із застосуванням дерева рішень до розв'язання складних алгоритмічних завдань на пошук найкоротшого шляху або мінімального остовного дерева.

Як приклад дидактичного забезпечення, було розроблено план-конспект уроку для 11 класу на тему «Пошук найкоротшого шляху у зваженому графі». На прикладі моделювання реального транспортного маршруту (на карті м. Харків) продемонстровано послідовність кроків: моделювання графа, зважування ребр та покрокове застосування алгоритму Дейкстри з фіксацією результатів.

ВИСНОВКИ

Проведене в кваліфікаційній роботі дослідження підтвердило актуальність і стратегічну значущість теми впровадження теорії графів у заклади загальної середньої освіти України як дієвого інструменту для модернізації математичної освіти, розвитку ключових компетентностей та посилення міжпредметних зв'язків.

Теорія графів, що є ключовим елементом дискретної математики, визнана універсальним математичним апаратом, який ефективно застосовується у сучасних галузях: ІТ, логістиці, біології, економіці, аналізі соціальних мереж.

Проведене в роботі дослідження міжнародного досвіду (Австралія, Сінгапур, Італія, США, Франція) показало, що інтеграція теорії графів у шкільні програми є світовою освітньою тенденцією. Це необхідно для формування в учнів так званої «мережевої грамотності» та забезпечення їхньої конкурентоспроможності.

Графи слугують потужним засобом моделювання реальних життєвих ситуацій (транспортні мережі, схеми метро, схеми електропередач), що перетворює вивчення математики з набору технічних прийомів на засіб аналізу та дослідження навколишнього світу в межах STEM-підходу.

Опанування основ теорії графів формує в учнів структурне, алгоритмічне та логічне мислення, необхідне для успішного розв'язання міждисциплінарних задач.

Незважаючи на високу актуальність, впровадження теорії графів в навчальний процес зіштовхується із низкою проблем, які були систематизовані в роботі.

В кваліфікаційній роботі запропонована методика викладання теорії графів, яка базується на принципах наростання складності та практичної спрямованості. В основу методики покладено «дорожню карту» (7-11 клас), в якій зміст навчання структуровано від інтуїтивного знайомства (7 клас: вершина,

ребро, графічне представлення) до формалізації та вивчення ключових алгоритмів (11 клас: Дейкстри, обхід в глибину/ширину). Також акцент робиться на активному використанні маніпулятивних моделей (карти, мотузки) для введення понять (граф, шлях, цикл) та демонстрації властивостей.

В роботі наведено приклади задач, які дозволяють застосовувати графові моделі для розв'язання як комбінаторних задач шкільного курсу (наприклад, про рукостискання), так і складних прикладних кейсів (пошук найкоротшого шляху, мінімального остовного дерева).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лисиця В.Т. Застосування теорії графів як засіб впровадження STEM-освіти у профільних гуманітарних класах / В.Т. Лисиця, О.В. Ликова, Л.Ю. Семенюк // Актуальні питання у сучасній науці. – 2025. – № 8 (38). с. 1310 – 1323 URL: [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-8\(38\)-1310-1323](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-8(38)-1310-1323) (дата звернення: 2.08.2025)
2. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень. – Х.: Гімназія, 2019. – 352с.
3. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень. – К.: Генеза, 2019. – 416с.
4. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. – 272с.
5. Лисиця В.Т. Теорія графів у шкільній математиці як засіб розвитку математичних компетентностей і впровадження STEM-освіти / В.Т. Лисиця, С.В. Вельма, О.О. Свіщ // Актуальні питання у сучасній науці. – 2025. – № 9 (39). с. 1327 – 1344. URL: [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-9\(39\)-1329-1344](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2025-9(39)-1329-1344) (дата звернення: 21.10.2025)
6. Свіщ О.О. Використання теорії графів у викладанні математики у профільних класах: тези доп. XIX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених (м. Харків, 6 - 7 травня 2025 р.). Харків, 2025. С. 146 – 149.
7. Бобрицька Г.С. Прикладне застосування теорії графів у різних сферах життя суспільства та окремої особистості / Г.С. Бобрицька // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2017. – Випуск 3(13). – С. 26-30.
8. Supundrika Subasinghe, S. M., Gersib, Simon G., Mankad, Neal P. Large Language Models (LLMs) as Graphing Tools for Advanced Chemistry Education and

Research [Электронный ресурс] / S. M. Supundrika Subasinghe, Simon G. Gersib, Neal P. Mankad // Journal of Chemical Education. –2025. – Vol. 102, issue 4. – p. 1563 – 1571. URL:

https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/acs.jchemed.4c01498?utm_source (дата
звернення: 4.08.2025)

9. Gardner Stephanie M. Supporting Student Competencies in Graph Reading, Interpretation, Construction, and Evaluation [Электронный ресурс] / Stephanie M. Gardner, Aakanksha Angra, and Joseph A. Harsh // CBE—Life Sciences Education. – 2024. URL:

<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC10956603/pdf/cbe-23-fe1.pdf> (дата
звернення: 7.08.2025)

10. Hrubes, Jan. Integrating Computational Chemistry into Secondary School Lessons [Электронный ресурс] / Jan Hrubes, Adam Jaros, Tatiana Nemirovich, Milada Teplá, and Simona Petrzelová // Journal of Chemical Education. – 2024. – vol. 101, issue 6, p. 2343–2353. URL:

https://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/acs.jchemed.3c00908?ref=article_openPDF
(дата звернення: 9.08.2025)

11. Jordán, Cristina. The STEM Methodology and Graph Theory: Some Practical Examples [Электронный ресурс] / Cristina Jordán, Marina Murillo-Arcila, Juan R. Torregrosa // Mathematics. – 2021. – 9, issue 23, 3110. URL:

<https://www.mdpi.com/2227-7390/9/23/3110> (дата звернення: 12.08.2025)

12. Blinov, M.L. Graph Theory for Rule-Based Modeling of Biochemical Networks [Электронный ресурс] / M.L. Blinov, J. Yang, J.R. Faeder, W.S. Hlavacek // Conference Proceedings In Transactions on Computational Systems Biology VII; Eds. Corrado Priami, Anna Ingolfssdottir, Bud Mishra, Hanne Riis Nielson / Lecture Notes in Computer Science, Springer: Berlin-Heidelberg, Germany, 2006. – Volume 4230. P. 89 – 106. URL:

https://link.springer.com/chapter/10.1007/11905455_5 (дата звернення: 14.08.2025)

13. Huber, W. Graphs in molecular biology [Электронный ресурс] / W. Huber, V.J. Carey, L. Long, S. Falcon, R. Gentleman // Otto Warburg International Summer School and Workshop on Networks and Regulation / BMC Bioinform, 2007. – Vol. 8, supplement 6, article S8. URL:

<https://bmcbioinformatics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2105-8-S6-S8>

(дата звернення: 17.08.2025)

14. Costa, Paulo C. S. Chemical Graph Theory for Property Modeling in QSAR and QSPR – Charming QSAR & QSPR [Электронный ресурс] / Paulo C. S. Costa, Joel S. Evangelista, Igor Leal and Paulo C. M. L. Miranda // Mathematics. – 2021. – v. 9, issue 1, 60. URL:

<https://www.mdpi.com/2227-7390/9/1/60> (дата звернення: 19.08.2025)

15. Pérez-Benito, C. A model based on local graphs for colour images and its application for Gaussian noise smoothing [Электронный ресурс] / C. Pérez-Benito, S. Morillas, C. Jordán, J.A. Conejero // J. Comput. Appl. Math. 2018. – v. 330, p. 955–964. URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042717302492?via%3Dihub>

(дата звернення: 22.08.2025)

16. Machado, J.A.T., Mata, M.E. A fractional perspective to the bond graph modeling of world economies / J.A.T. Machado, M.E. Mata // Nonlinear Dyn. – 2015. – v. 80, p. 1839–1852

17. Pedroche, F. A model to classify users of social networks based on pagerank / F. Pedroche // Int. J. Bifurc. Chaos. 2012. – v. 22, No 7, 1250162. URL:

<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127412501623> (дата

звернення: 25.08.2025)

18. Bellingeri, Michle. The Critical Role of Networks to Describe Disease Spreading Dynamics in Social Systems: A Perspective / Michle Bellingeri, Daniele Bevacqua, Francesco Scotognella and Davide Cassi // Mathematics. – 2024. – v. 12, issue 6, 792. URL:

https://www.mdpi.com/2227-7390/12/6/792?utm_source (дата звернення: 2.08.2025)

19. Schäfer, Samuel. scDrugPrio: a framework for the analysis of single-cell transcriptomics to address multiple problems in precision medicine in immune-mediated inflammatory diseases [Електронний ресурс] / Samuel Schäfer, Martin Smelik, Oleg Sysoev, Yelin Zhao, Desire Eklund, Sandra Lilja // Preprint. – 2023. – 566249. doi: [10.1101/2023.11.08.566249](https://doi.org/10.1101/2023.11.08.566249). URL:

<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC10680570/> (дата звернення: 27.08.2025)

20. Cavallaro, Lucia. Graph and Network Theory for the analysis of Criminal Networks / Lucia Cavallaro, Ovidiu Bagdasar, Pasquale De Meo, Giacomo Fiumara, Antonio Liotta // Preprint. – 2021. DOI: [10.48550/arXiv.2103.02504](https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.02504). URL:

https://www.researchgate.net/publication/349759071_Graph_and_Network_Theory_for_the_analysis_of_Criminal_Networks (дата звернення: 30.08.2025)

21. Velasco, Oscar Contreras. The Use of Similarity-based Algorithms to Predict Links in Mexican Criminal Networks / Oscar Contreras Velasco, Nathan P. Jones, Daniel Weisz Argomedo, John P. Sullivan, Chris Callaghan // Rise University's, Baker Institute for Public Policy. – 2023. URL:

https://www.bakerinstitute.org/research/use-similarity-based-algorithms-predict-links-mexican-criminal-networks?utm_source (дата звернення: 1.09.2025)

22. Theodorakopoulos, Leonidas. Interactive Viral Marketing Through Big Data Analytics, Influencer Networks, AI Integration, and Ethical Dimensions / Leonidas Theodorakopoulos, Alexandra Theodoropoulou and Christos Klavdianos // J. Theor. Appl. Electron. Commer. Res. – 2025. – v. 20, issue 2. <https://doi.org/10.3390/jtaer20020115>. URL:

https://www.mdpi.com/0718-1876/20/2/115?utm_source (дата звернення: 2.08.2025)

23. Solanki, Shano. A survey on information diffusion and competitive influence maximization in social networks [Електронний ресурс] / Shano Solanki, Mukesh Kumar, Rakesh Kumar // Social Network Analysis and Mining. – 2025. – v. 15, issue 1, article 41. URL:

<https://doi.org/10.1007/s13278-025-01459-2> (дата звернення: 3.09.2025)

24. Abhijit, Chelluru Srinivas Uday. Exploring Consumer Choices with the application of Graph Theory-Some Assumptions / Chelluru Srinivas Uday Abhijit, Mudunuru Murali Krishna Raju // International Journal of Scientific Research and Engineering Development. – 2025. – Volume 8, Issue 3. – p. 504 – 513. URL:

https://www.ijared.com/volume8/issue3/IJARED-V8I3P71.pdf?utm_source (дата звернення: 6.09.2025)

25. Chai, A. Applying Graph Theory to Examine the Dynamics of Student Discussions in Small-Group Learning / A. Chai, J.P. Le, A.S. Lee, S.M. Lo // CBE-Life Sci. Educ. – 2019. – v. 18, No. 2. Режим доступу: URL:

<https://www.lifescied.org/doi/10.1187/cbe.18-11-0222> (дата звернення: 8.09.2025)

26. Ramle, R. Question-led approach in designing Dijkstra algorithm game-based learning: A pilot study [Електронний ресурс] / R. Ramle, D.I. Rosli, S.S. Nathan, M. Berahim // Int. J. Eval. Res. Educ. – 2020. – v. 9, No. 4. – p. 926–933. URL:

<https://ijere.iaescore.com/index.php/IJERE/article/view/20651> (дата звернення: 11.09.2025)

27. Sánchez-Torrubia, M.G. Path Finder: A Visualization eMathTeacher for Actively Learning Dijkstra's Algorithm / M.G. Sánchez-Torrubia, C. Torres-Blanc, M.A. Lopez-Martinez // Electron. Notes Theor. Comput. Sci. – 2009. – v. 224, p. 151–158. URL:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571066108005227?via%3Dihub>

(дата звернення: 14.09.2025)

28. Chen, P. A Study of Learning Effectiveness on the Dijkstra's Algorithm Modeled in an Interactive KLA Approach [Електронний ресурс] / P. Chen, P. Chiou, G. Young // In Proceedings of the 13th International Conference on Frontiers in Education: Computer Science and Computer Engineering (FECS'17), Las Vegas, NV, USA, 17–20 July 2017. – pp. 234–238. URL:

https://conference.researchbib.com/view/event/65301#google_vignette (дата звернення: 16.09.2025)

29. Баруліна, Юлія. Впровадження теорії графів до розв'язування задач з логічним навантаженням у початковій школі [Електронний ресурс] / Юлія Баруліна // Освіта. Інноватика. Практика. – 2024. – Том 12, №1. URL: https://oip-journal.org/index.php/oip/article/view/290?utm_source (дата звернення: 19.09.2025)

30. Друшляк М.Г. Навчання майбутніх вчителів математики розв'язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA [Електронний ресурс] / М.Г. Друшляк, Т.Д. Лукашова, Л.В. Скасків // Фізико-математична освіта. – 2019. – Випуск 1(19). С. 35-40. URL: https://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/journals/2019-v1-19/2019_1-19-Drushlyak_Lukashova_Skaskiv_FMO.pdf (дата звернення: 21.09.2025)

31. Зінченко А. ТЕОРІЯ ГРАФІВ: ІСТОРИЧНИЙ АСПЕКТ [Електронний ресурс] / А. Зінченко, І. Сіра // Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі : збірник тез доповідей IV Всеукраїнської (з міжнародною участю) науково-практичної конференції молодих учених (м. Харків, 11-12 травня 2022 року) с. 190 – 192. URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/handle/123456789/9079> (дата звернення: 23.09.2025)

32. Francis, John Saqware. The impact of graph theory and geometry based on some topics to develop critical thinking of secondary school mathematics' students: A case of Mbulu district / John Saqware Francis & Jesline Elieza Gowelee // International Journal of Statistics and Applied Mathematics. – 2024. – vol. 9, issue 1, p. 139 – 144. URL: <https://www.researchgate.net/publication/378698877> (дата звернення: 25.09.2025)

33. [Gibson](#), J. Paul. Teaching graph algorithms to children of all ages [Електронний ресурс] / [J. Paul Gibson](#) // [ITiCSE '12: Proceedings of the 17th ACM](#)

[annual conference on Innovation and technology in computer science education](#). – 2012, Pages 34 – 39. URL:

<https://doi.org/10.1145/2325296.2325308> (дата звернення: 27.09.2025)

34. Dafik, Ika Hesti Agustin. Integrating A Graph Theory In A School Math Curriculum Of Indonesia Under Realistic Mathematics Education / Ika Hesti Agustin Dafik, Ridho Alfarisi, E. Y. Kurniawati // INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC & TECHNOLOGY RESEARCH. – 2020. – Vol. 9, issue 01, p. 2437 – 2445. URL:

https://www.ijstr.org/final-print/jan2020/-Integrating-A-Graph-Theory-In-A-School-Math-Curriculum-Of-Indonesia-Under-Realistic-Mathematics-Education-.pdf?utm_source (дата звернення: 29.09.2025)

35. Sandefur, James. Teaching and learning discrete mathematics / James Sandefur, Elise Lockwood, Eric Hart, Gilbert Greefrath // ZDM – Mathematics Education. – 2022. – V. 54, p. 753 – 775. URL:

https://www.researchgate.net/publication/362127843_Teaching_and_learning_discrete_mathematics (дата звернення: 1.10.2025)

36. Gaio, Aaron. Discrete Mathematics in Lower School Grades? Situation and Possibilities in Italy [Електронний ресурс] / Aaron Gaio & Benedetto Di Paola // In Monographs “Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Reserch”. – 2017. – p. 41 – 51. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70308-4_3 (дата звернення: 3.10.2025)

37. Lessner, D. Graph Theory in High School Education / D. Lessner // Departm. Soft. Comp. Sci. Edu., Fac. Math. Phis., Charles Univ., Prague. URL: <https://www.scribd.com/document/434124560/Do-it-mass> (дата звернення: 5.10.2025)

38. Heuvel-Panhuizen, Marja van den. Didactics of Mathematics in the Netherlands [Електронний ресурс] / Marja van den Heuvel-Panhuizen // Chapter in

“European Traditions in Didactics of Mathematics” eds. Werner Blum, Michele Artigue, Maria Alessandra Mariotti, Rudolf Sträßer, Marja Van den Heuvel-Panhuizen. – 2016. – Springer, P. 57 – 94. URL:

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-05514-1_3?utm_source (дата
звернення: 7.10.2025)

39. Ruiz, Angel. A First Exploration to Understand Mathematics Curricula Implementation: Results, Limitations and Successes [Електронний ресурс] / Angel Ruiz, Mogens Niss, Michèle Artigue, Yiming Cao & Enriqueta Reston // in Monographs “Mathematics Curriculum Reforms Around the World”, eds. Yoshinory Shimizu, Renuka Vithal, 2023. – Springer, p.p. 231–260. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-13548-4> (дата
звернення: 9.10.2025)

40. Khiok Seng, Quek. Teaching of Discrete Mathematics at Advanced Level in Singapore: Teachers’ Perspectives / Quek Khiok Seng, Toh Tin Lam, Boey Kok Leong, Tay Eng Guan and Dong Fengming // National University of Singapore. – 2015. URL: https://www.academia.edu/30624142/Teaching_of_Discrete_Mathematics_at_Advanced_Level_in_Singapore_Teachers_Perspectives (дата
звернення: 11.10.2025)

41. What is the position of mathematics and informatics education in a coherent STEM curriculum / Proceedings of the CIDREE STEM meeting 2016 eds. Jos Tolboom and Michie Doorman. – 2017, 87 p. URL: https://www.researchgate.net/publication/327836191_What_is_the_position_of_mathematics_and_informatics_education_in_a_coherent_STEM_curriculum (дата
звернення: 14.10.2025)

42. Hankeln, Corinna. Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students’ modeling processes [Електронний ресурс] / Corinna Hankeln // Educational Studies in Mathematics. – 2020. – vol. 103, p. 209–229. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-019-09931-5?utm_source (дата
звернення: 16.10.2025)

43. Mathematical Education Around the World: Bridging Policy and Practice / Reflections from the 2001 International Panel on Policy and Practice in Mathematics Education. Institut for Advanced Study Princeton, eds. Joan Ferrini-Mundy, Gail Burrill, Glenda Breaux, July 19-23, 2001, 121 p. URL: https://studylib.net/doc/9030526/mathematics-education-around-the-world?utm_source (дата звернення: 18.10.2025)

44. Бондаренко М.Ф. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Харків: Компанія Сміт, 2004. – 408 с.

45. Трохимчук М.Р. Дискретна математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник / М.Р. Трохимчук, М.С. Нікітченко. – Київ: Київський університет, 2017. – 248 с.

46. Модельна навчальна програма «Математика 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти, автор Істер О.С. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Ister.14.07.pdf> (дата звернення: 5.11.2025)

47. Модельна навчальна програма «Математика 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти, автор Істер О.С. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Ister.26.07.2023.pdf> (дата звернення: 5.11.2025)

48. Істер О.С. Математика: підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2022. – 304с.

49. Харківська обласна олімпіада. URL: <https://mathedu.kh.ua/> (дата звернення: 12.11.2025)

50. Кузьменко І.М. Теорія графів. – Київ: КП: ім. Ігоря Сікорського, 2020.
– 71 с.