

Числа

Лекції для студентів ММФ ХНУ.

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень - 2015

1 Лекція №1. Тема: Числа — 5 кілець і 5 полів.

1.1 Загальні слова про дисципліну

Кафедра геометрії (кафедра ім. О.В.Погорєлова) на 2 поверсі, під контрактним відділом, ауд. 2-29, тел. 707-54-92.

Курс річний, називається “Алгебра і геометрія”, іспит в середині червня 2012 року. В зв’язку з футболом можуть бути зміни в розкладі. На іспит виносяться всі питання, що вивчені протягом року.

Перший (осінній) семестр закінчується перед Новим роком, містить 18 лекцій. Звітність за перший семестр — залік.

В першому семестрі вивчаються два модулі. Перший модуль стосується алгебри — матриці, визначники, системі лінійних рівнянь, лінійні простори. Другий модуль стосується геометрії — вектори, пряма і площа, криві другого порядку — еліпс, гіпербола, парабола, що задані канонічними рівняннями. Студенти пишуть дві контрольні (20 балів за кожен) і здають два розрахункові завдання (по 30 балів за кожне). Всього студент може одержати 100 балів.

На перший заняттях студенти пишуть так звану нульову контрольну — вона стосується шкільного матеріалу, на звітність і на підсумкову оцінку студента ця контрольна не впливає, вона потрібна викладачам для більш конкретної уяви про стан шкільної підготовки студентів.

Дисципліна алгебра та геометрія вивчає базові конструкції аналітичної геометрії, загальної алгебри, вищої алгебри та лінійної алгебри.

Другий семестр налічує 17 лекцій і має два модулі. Перший модуль стосується алгебри — комплексні числа, многочлени, форми, лінійні простори із скаляр-

ним добутком, лінійні оператори. Другий стосується геометрії — поверхні і криві другого порядку, що задані загальними рівняннями. Студенти пишуть дві контрольні — по 10 балів за кожну, і виконують два розрахункові завдання — по 20 балів за кожне. 40 балів студент може одержати на іспиті. Всього в підсумку студент може одержати 100 балів.

Рекомендована література

№	Обов'язкова
1	Борисенко О.А. Аналітична геометрія. Харків:Основа, 1998
2	Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М.:Наука,
3	Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре
4	Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии
№	Додаткова
5	А.Г.Курош Лекции по общей алгебре. М.:Физматгиз, 1962
6	Калужнін Л.А. Вишенський В.А. Шуб Ц.О. Лінійні простори, К:Вища школа, 197

Готуючи і чи інші матеріали, співробітники кафедри використовують видавничу систему Latex (читається — латех). Ця система орієнтована на математиків і широкого розповсюдження не має. Підгоований в текстовому редакторі матеріал (текстовий файл з розширенням .tex перетворюється в типографський документ (файл з розширенням .dvi). Для використання студентами 1-го курсу dvi-файл непридатний. Тому такі файли переводять у формат pdf. Отже на кафедрі є навчальні матеріали у форматі .pdf. Latex — вільно поширюваний редактор, стислий підручник є на кафедрі і в інтранет (бібліотека) Див.

1. Власенко Д.І. Курінний Г.Ч. — “Введение в издательскую систему LaTeX” — электронная версия для интранет-сети : /Власенко Дмитрий Иванович Куринной, Григорий Чарльзович. - Х. : Издательство ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2010 . - 98 с. - Язык издания : рус. Рубрика : ХНУ = математична логіка - навчальні видання - для вузів Рубрика : ХНУ = электронная версия для интранет-сети Рубрика : ХНУ-труды ученых = механіко-математический факультет

http://library.univer.kharkov.ua/book/html/mat2/Kurinnij_LaTeX.pdf

2. Степанова, Елена Николаевна Издательская система LATEX : Учеб. пособие для вузов : / Степанова, Елена Николаевна, Широков, Борис Михайлович,

Петрозаводский государственный университет . - Петрозаводск : Издательство Петрозаводского университета, 1999 . - 156 с. - Библиогр.: с.146 (12 назв.). ISBN : 5-8021-0083-4 з970.62-018.1 Язык издания : рус. Рубрика : ХНУ = настольные издательские системы (5) Рубрика : ХНУ = настільні видавничі системи (4) Рубрика : ХНУ = Latex Носитель : Книга Библиотека : Харківський національний університет Филиал : абонемент научной литературы Шифр хранения : 0 Инв. номер : Н612193

Грецький алфавіт, логична та теоретико-множинна символіка, а також спеціальні знаки для підсумовування, множення та подібного використовуються в курсі алгебри та геометрії без пояснень. Цим питанням виділяється місце в курсі математичного аналізу та дискретної математики. Тому рекомендується самостійно протягом найближчого часу ознайомитися з методичною розробкою в інтранет ХНУ

Курінний, Григорій Чарльзович — “Висловлення, символи, множини”: електронна версія для інтранет-мережі. — Методична розробка для студентів 1 курсу ММФ ХНУ : / Курінний, Григорій Чарльзович . - Х. : Видавництво ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2010 . - 34 с. -

http://library.univer.kharkov.ua/book/html/mat2/L1_Kurinnnoj.pdf

Мова видання: укр. Рубрика : ХНУ = електронна версія для интранет-мережі
Мета першої лекції полягає в заміні словосполучення “множина чисел” на слова “поле”, “кільце”. Відповідно,

число розуміється як елемент поля, або елемент кільця.

Поля і кільця вивчаються в загальній алгебрі. Російськовні підручники — А.И. Кострикин “Введение в алгебру”, — М:Наука, 1977. та А.Г.Курош “Лекции по общей алгебре”, — М.:Физматгиз, 1962

1.2 Бінарна операція

Якщо є правило, яке ставить у відповідність двом елементам множини один, то це є двомісна (або бінарна) операція. Жорсткіше формулювання: Відображення із декартового квадрату M^2 множини M у цю множину M називається бінарною операцією на множині M .

Прикладами бінарних операцій на множині цілих чисел є додавання, множення, що відпрацьовані у школі. Для відомих бінарних операцій існують стандартні позначення, їх використовують у звичному записі: не пишуть $(x, y) \xrightarrow{+} z$, а пишуть $z = x + y$. Нижче те, що z є результатом застосування операції $\star$ до впорядкованої пари елементів (x, y) записуємо у вигляді $x \star y = z$.

Операція $\star$ називається

асоціативною, якщо для будь-яких трьох елементів a, b, c виконується рівність $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;

комутативною, якщо для будь-яких елементів a, b виконується рівність $a \star b = b \star a$.

Елемент n називається нейтральним відносно бінарної операції $\star$, якщо для будь-якого елемента a виконується рівність

$$a \star n = n \star a = a. \quad (1)$$

Якщо операція названа множенням, то нейтральний елемент називають одиницею і позначають 1, а якщо операція названа додаванням, то нейтральний елемент називають нулем і позначають 0.

Якщо n — нейтральний елемент відносно операції $\star$, і для деяких елементів a, b виконується рівність $a \star b = n$, то елемент a називається лівим оберненим до b , а елемент b називається правим оберненим до a . Якщо елементи a, b один до одного є і правим і лівим оберненим, то їх називають взаємно оберненими. Якщо операцію називають додаванням, то замість слова “обернені” вживають слово “протилежні”.

1.3 Напівгрупа, група, група підстановок

Непорожня¹ множина разом із асоціативною бінарною операцією називається напівгрупою. Напівгрупа, в якій є нейтральний елемент і кожен елемент має обернений, називається групою². Отже, множина S разом з бінарною операцією $*$ називається напівгрупою тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x, y, z \in S$ виконується рівність

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad (2)$$

¹Ніщо не заважає розглядати порожні напівгруп. Інколи такий підхід — порожня множина є напівгрупою — надає значні зручності

²Група має нейтральний елемент, тому порожня множина групою бути не може

Коли операція названа додаванням, тоді напівгрупа називається адитивною, а коли операція названа множенням, тоді напівгрупа називається мультиплікативною.

множина G разом з бінарною операцією $*$ називається групою тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x, y, z \in S$ виконується рівність (2), існує елемент $n \in G$ такий, що для будь-якого $a \in G$ виконуються рівності (1), і, крім того, для будь-якого елемента $a \in G$ існує елемент $b \in G$ такий, що

$$a * b = b * a = n. \quad (3)$$

Прикладом напівгрупи є множина всіх відображень непорожньої множини в себе: прикладом групи є множина всіх бієктивних відображень непорожньої множини в себе. В обох випадках операцією є композиція (або, іншими словами, суперпозиція) відображень. Якщо операцію в групі названо додаванням, то таку групу називають адитивною, якщо ж операція названа множенням, то групу називають мультиплікативною.

Ще раз нагадаємо, що група, це окремий випадок напівгрупи, кожна група є півгрупою. Порівнювати визначення півгрупи і групи можна за допомогою таблиць:

	Півгрупа	Група
Кількість операцій	1	1
Властивості операцій	Асоціативна	Асоціативна, є нейтральний і обрнений елементи

Введені терміни дозволяють далі говорити про групу цілих чисел із операцією додавання, півгрупа цілих чисел із операцією множення, група ненульових дійсних чисел із операцією множення, півгрупа натуральних чисел із операцією додавання, група бієктивних відображень із операцією суперпозиції.

1.4 Кільце

Кільцем називають непорожню множину, на якій є дві операції, що названі додаванням та множенням, причому разом з додаванням множина утворює групу³,

³Отже, кільце обов'язково не порожнє

разом із множенням множина утворює підгрупу, а між собою ці дві операції зв'язані двома дистрибутивними законами:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Якщо множення в кільці асоціативне, то кільце називають асоціативним; якщо множення комутативне, то кільце називають комутативним. Звичайно ми будемо працювати із асоціативними кільцями з одиницями. Тому далі під кільцем ми розуміємо тільки асоціативні кільця. Хоч у тих кільцях, які ми будемо розглядати, є одиниця, вимагати її не будемо, — і парні цілі числа будуть утворювати кільце.

Прикладами кілець є множина квадратних матриць заданого розміру з числовими коефіцієнтами (чи з елементами іншого кільця), многочлени з цілими коефіцієнтами, цілі числа з відомими стандартними операціями, кільце класів лишків за заданим модулем.

На кафедрі геометрії є дві методичні розробки з кілець

1. Методические указания и задания по изучению темы “Кольца”. Для студентов 2 курса ММФ ХНУ. /Сост. Л.Ф.Ковтун, Г.Ч.Куриной — Хароков, ХНУ 1986, — 70 с.
2. Методические указания по теме “Кольца”. Для студентов 1 курса ММФ ХНУ. /Сост. Л.Ф.Ковтун, Г.Ч.Куриной — Хароков, ХНУ 1984, — 47 с.

1.5 Кільце квадратних матриць заданого розміру

Матриця — це прямокутна таблиця чисел (в загальному випадку — елементів заданного поля F чи кільця R), отже вона має m рядків та n стовпчиків:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Кільце утворюють квадратні матриці одного розміру. Вони множаться та додаються за наступними правилами.

Додавання визначається правилом:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & & & \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{n,1} + b_{n,1} & a_{n,2} + b_{n,2} & \dots & a_{n,n} + b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Добуток матриць визначається правилом

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & & & \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \dots & & & \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,p} \\ \dots & & & \\ c_{p,1} & c_{p,2} & \dots & c_{p,p} \end{pmatrix},$$

і числа $c_{i,j}$ при $1 \leq i, j \leq p$ визначаються умовами:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj}.$$

1.6 Кільце формальних степеневих рядів і кільце многочленів

Кільце формальних степеневих рядів і кільце поліномів (многочленів) введемо в наступній лекції.

1.7 Кільце $\mathbb{Z}_n$ класів лишків за модулем n

Кільцями будуть також $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}, n > 1$ — кільця класів лишків за модулем n . Елементами кільця $\mathbb{Z}_n$ є числа $0, 1, 2, \dots, n-1$:Д ,И

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Сума $a \oplus b$ і добуток $a * b$ чисел $a, b \in \mathbb{Z}_n$ визначаються таким чином. Спочатку знаходимо звичайну суму $a + b$ і звичайний добуток $a \cdot b$ натуральних чисел a, b . Далі шукаємо остачі c, d від ділення суми і добутку відповідно на n , тобто шукаємо цылы числа $q_1, q_2, c, d \geq 0$ такі, щоб виконувалися

підмножини множини цілих чисел. Два цілі числа знаходяться в одній підмножині в тому і тільки тому випадку, коли їх різниця ділиться на n без залишку.

Щоб додати дві такі множини (або ще кажуть класи) потрібно в цих множинах вибрати довільним чином два цілі числа, додати їх чи перемножити і подивитись у яку третю множину попав результат. Оця третя множина є результатом додавання чи множення перших двох множин.

1.8 Поле

Якщо в асоціативному, комутативному кільці з одиницею кожний ненульовий елемент має обернений до нього, то таке кільце називають полем. Прикладами полів є поле раціональних чисел, поле дійсних чисел, поле комплексних чисел, поля $\mathbb{Z}_p$, де p просте число.

1.9 Поле комплексних чисел

Комплексними числами називаються вирази (картинки, послідовності,...) вигляду $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. i — просто символ. Числа $2 - 3i$, $0 + 0i$, $-e - \pi i$, $1 + 1i$ є комплексними. Комплексні числа можна множити і додавати.

При множенні використовуємо рівність $i^2 = -1$. Ця рівність узгоджується із загальним визначенням множення комплексних чисел:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Отже $(-4 + 7i) \cdot (2 + 5i) = (-8 - 35) + (-20 + 14)i = -43 - 6i$, $(5 + 6i) \cdot i = -6 + 5i$.

Додавання комплексних чисел здійснюється за правилом $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Отже $(5 + 2i) + (-5 - i) = i$.

Комплексні числа разом з операціями додавання та множення утворюють поле, тобто операції додавання та множення задовольняють аксіомам: обидві асоціативні —

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{асоціативність додавання});$$

$$x(yz) = (xy)z \quad (\text{асоціативність множення});$$

обидві комутативні —

$$x + y = y + x \quad (\text{комутативність додавання});$$

$$xy = yx \quad (\text{комутативність множення});$$

є нуль —

$$0 = 0 + 0i, \quad 0 + x = x + 0 = x,$$

є одиниця —

$$1 = 1 + 0i, \quad 1x = x1 = x,$$

для кожного елемента $z = a + bi$ є протилежний

$$-z = -a - bi, \quad z + (-z) = (-z) + z = 0,$$

і для ненульового елемента $z = a + bi \neq 0$ є обернений

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}, \quad zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Вивченням комплексних чисел планується завершити перший семестр.

Ще раз нагадаємо, що поле, це окремий випадок кільця, кожне поле є кільцем. Порівнювати визначення поля і кільця можна за допомогою таблицьки

	Кільце	Поле
Кількість операцій	2 (додавання та множення)	2 (додавання та множення)
Властивості додавання	Як в групі	Як в групі
Властивості множення	Асоціативне	Асоціативне, ненульові утворюють групу
Зв'язок між + та ×	Дистрибутивні закони	Дистрибутивні закони

На іспиті потрібно знати визначення згаданих груп, кілець та полів, та вміти перевіряти, що введені операції задовольняють потрібним аксіомам. При перевірці аксіом можна користуватися шкільними знаннями про числа.

Література

- [1] О.А.Борисенко, Л.М.Ушакова “Аналітична геометрія“, — Харків:Основа, 1993.

- [2] В.П.Ольшанський “<Короткий >курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії”: Лекції та лаб.роботи на ПЕОМ : Навч. посібник для студ. техн. вузів / В. П. Ольшанський ; Харківський політехнічний ун-т. — К. : ІСДО, 1994. - 216 с.
- [3] “Аналітична геометрія. Лінійна алгебра”: Навчально- методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. — Чернівці: Рута, 2007. — 244 с.
- [4] Методичні вказівки з теми “Визначники та елементи лінійної алгебри”, укладач Паламарчук В.О. // Краторськ, ДДМА, 2001, 30 стор. — vila.pdf
- [5] Олег Романів “Лінійна алгебра. Перший семестр1“, — Львів, 1 вересня 2013, інтернет
- [6] Л.А.Калужнін, В.А.Вишенський, Ц.А. Шуб “Лнійні простори“ — Київ: Вища Школа, 1971
- [7] В.І.Андрійчук , Б.В. Забавський “Алгебра і теорія чисел“ — Львів. — 2005.
- [8] В.І. Андрійчук , Б.В. Забавський “Лінійна алгебра“ — Львів. — 2008.
- [9] В.І. Андрійчук, Б.В. Забавський “Загальна алгебра“ — Львів. — 2009.
- [10] Гудименко Ф.С., Борисенко Д.М., Волкова В.О., Зражевська Г.М., Ющенко О.А. “Збірник задач з вищої математики“ — К., Видавництво Київського університету, 1967 р. 352 с.
- [11] И.В. Проскуряков “Сборник задач по линейной алгебре“. — М:Наука, 1967