УДК 517

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Пусть V — росток в особой точке $0 \in \boldsymbol{R}^n$ векторного поля класса C^∞. Для каждого ростка C^∞ — отображения $\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m): \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ положим

$$(V\varphi)(x) = ((V\varphi_1)(x); \ \dots; \ (V\varphi_m)(x)).$$

Рассмотрим уравнение

$$(V\varphi)(x)+Q(x)\varphi(x)=\gamma(x). \tag{1}$$

Здесь $Q: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$, $\gamma: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ — заданные C^∞-отображения, а $\varphi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$ — неизвестные.

Обозначим через Λ линейное приближение поля V, а через L_c — инвариантное подпространство, отвечающее части спектра, лежащей на мнимой оси.

Теорема. *Пусть L_c инвариантно относительно поля V, а сужение $V_c=V/L_c$ конечно определено. Тогда каждое формальное решение уравнения (1) восстанавливается до локального C^∞-решения.*

Утверждение теоремы означает, что для каждого формального решения $\hat{\varphi}$ уравнения (1) существует его локальное C^∞-решение, ряд Тейлора которого в нуле равен $\hat{\varphi}$.

Будем считать известными следующие факты о ростках векторных полей.

1. Конечная определенность поля V_c влечет неравенство $\dim L_c \leqslant 2$ (см. [1]). Если $\dim L_c=1$, то конечная определенность сводится к условию $\hat{V}_c \neq 0$ (т. е. ряд Тейлора в точке 0 отличен от нуля). В случае $\dim L_c=2$ конечная определенность имеет место тогда и только тогда, когда спектр сужения $\Lambda_c = \Lambda/L_c$ отличен от нуля, а поле V_c формально орбитально не эквивалентно своему линейному приближению Λ_c.

2. Если $\dim L_c=2$, то поле V_c некоторым C^∞-преобразованием $x \mapsto \Phi(x)$ окрестности начала координат в $\boldsymbol{R}^2$ можно привести к нормальной форме (см. [2])

$$(\Phi_* V_c)(x)=f_1(x)\frac{\partial}{\partial\xi}+f_2(x)\frac{\partial}{\partial\eta} \quad (x=(\xi,\ \eta)\in \boldsymbol{R}^2),$$

где

$$f(x)=(f_1(x),\ f_2(x))=\sum_{k=0}^{l} a_k \|x\|^{2k} U_k x,\ a_k \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Здесь $l<\infty$ и U_k — ортогональные операторы в $\boldsymbol{R}^2$.

3. Обозначим через $L_\pm$ инвариантное подпространство оператора Λ, отвечающее части спектра, лежащей в открытой левой (правой) полуплоскости. Существует такое C^∞-преобразование $x \mapsto \Phi(x)$, что подпространства $L_+ + L_c$ и $L_- + L_c$ инвариантны относительно поля $\Phi_* V$ (см [3]).

В дальнейшем мы считаем поле V таким, что V_c приведено к нормальной форме, а подпространства $L_\pm + L_c$ инвариантны относительно V.

В случае $L_c=0$ (т. е. для гиперболического ростка поля) теорема была доказана в [4], а для одного переменного ($n = \dim L_c = 1$) в [5].

Схема доказательства теоремы такова. Так как каждое формальное отображение $\hat{\varphi}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^m$ восстанавливается до некоторого локального C^∞-отображения $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^m$, то достаточно доказать разрешимость уравнения (1) при любой правой части γ, плоской в точке 0 (т. е. имеющей в этой точке нулевые производные всех порядков). Сначала мы доказываем разрешимость при любой правой части γ, плоской на L_c (используется «гиперболичность V на L_c); это утверждение, как и его аналог для функциональных уравнений, (см. [6]), верно для любого поля V). С учетом теоремы Уитни о восстановлении функции по ее производным на L_c, все сводится теперь к доказательству разрешимости уравнений

$$((V_\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) - \gamma(x))^{(k)} = 0 \quad (x \in L_c,\ k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Если $\dim L_c = 1$, то можно непосредственно использовать теорему А. Кузнецова [5]. Если $\dim L_c = 2$, то приходится предварительно приводить матрицу $Q(x)$ к нормальной форме (при $n = 1$ эта часть проделана в [5]).

Мы существенно используем здесь технику, развитую в [3] для функциональных уравнений.

2°. **Лемма 1.** *Пусть в уравнении (1) все производные правой части γ равны нулю на L_c. Тогда существует его локальное C^∞-решение $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^m$.*

Доказательство. Так как $L_+ + L_c \cap L_- + L_c = L_c$, то в силу [3, с. 105], существуют такие плоские на $L_\pm + L_c$ отображения $\gamma_\pm: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^m$, что $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$. Достаточно доказать разрешимость каждого из уравнений

$$(V\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) = \gamma_\pm(x). \tag{3}$$

Докажем разрешимость первого из них; второе рассматривается аналогично.

Положим

$$W(x,\ y) = (V(x);\ Q(x)y - \gamma_+(x)) \quad (x,\ y \in \mathbf{R}^{2n}).$$

Обозначим через H^t поток поля W. Тогда $H^t(x,\ y) = (F^t(x);\ A^t(x)y + \Gamma\ (x))$, где Γ^t — поток поля V. Достаточно доказать существование такого плоского на $L_+ + L_c$ отображения $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^m$, что

$$\varphi(F^t x) = A^t(x)\varphi(x) + \Gamma^t(x) \tag{4}$$

при малых t.

Пусть $x = x_+ + x_- + x_c \in \mathbf{R}^n$ $(x_\pm \in L_\pm,\quad x_c \in L_c)$ и $\rho(x,\ M)$ — расстояние от x до множества M. Тогда $\rho(x;\ L_+ + L_c) = \|x_-\|$. Можно выбрать такой представитель ростка V, чтобы некоторая δ-окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$ отображалась в себя под действием F^t при $t < 0$ и чтобы $\|F_-^{-t_0}(x)\| \leqslant q^{-t_0}\|x_-\|$, $t_0 > 0$, $q < 1$.

Зафиксировав такое δ и такой представитель ростка V, преобразуем (4) к виду

$$\varphi(x) = A^t(F^{-t}x)\varphi(F^{-t}x) + \Gamma^t(F^{-t}x). \tag{5}$$

В силу [3] уравнение (5) имеет при $t = t_0$ C^∞-решение $\varphi_0 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^m$, определенное в δ-окрестности начала координат и плоское на $L_+ + L_c$. В силу свойств отображения F^{t_0} такое решение единственно. Положим теперь

$$\varphi_t(x) = A^t(F^{-t}x)\varphi_0(F^{-t}x) + \Gamma^t_0(F^{-t}x).$$

Тогда φ_t определено в δ-окрестности нуля, плоское на $L_+ + L_c$ и удовлетворяет уравнению (5) при $t = t_0$. В силу единственности, $\varphi_t = \varphi_0$. Следовательно, φ_0 удовлетворяет уравнению (5) при всех t. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает утверждение теоремы в гиперболическом случае (при $\dim L_c = 0$).

3°. Пусть теперь $\dim L_c > 0$. Положим $x_1 = x_+ + x_- \in L_+ + L_-$, так что $x = x_1 + x_c$.

Полагая $V = f_1(x)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + f_c(x)\dfrac{\partial}{\partial x_c}$, получим, в силу инвариантности L_c, что $f_1(x) = 0$ $(x \in L_c)$. Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}[(V\varphi)(x) - Q(x)\varphi(x) - \gamma(x)]\big|_{x = x_c \in L_c} = 0. \tag{6k}$$

Уравнение (6_0) имеет вид

$$f_c(x_c)\frac{\partial\varphi}{\partial x_c} + Q(x_c)\varphi(x_c) = \gamma(x_c).$$

При $k \geqslant 1$ уравнение (6_k) можно записать в виде

$$f_c(x_c) = \frac{\partial\psi_k}{\partial x_c} + B(x_c)\psi_k(x_c) = \gamma_k(x_c).$$

Здесь $\psi_k(x_c) = \left.\dfrac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^k}\right|_{x = x_c \in L_c}$, а γ_k определяется по γ и производным от φ порядка $\leqslant k - 1$.

Пусть $\dim L_c = 1$. Так как $\hat{f}_c \neq 0$, то, в силу [5], все уравнения (6_k) имеют C^∞-решения, определенные в некоторой единой (не зависящей от k) окрестности нуля в L_c. Следуя теореме Уитни [3] построим в этой окрестности такое C^∞-отображение φ_0, для которого $\left.\dfrac{\partial^k\varphi_0}{\partial x_1^k}\right|_{x = x_e} = \psi_k(x_c)$. Тогда росток $\tilde{\gamma}(x) = +(V\varphi_0)(x) + Q(x)\varphi_0(x) - \gamma(x)$ является плоским на L_c. В силу леммы 1, уравнение $(V\tilde{\varphi})(x) + Q(x)\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\gamma}(x)$ имеет локальное C^∞-решение $\tilde{\varphi}$, плоское на L_c. Сумма $\tilde{\varphi} + \varphi_0$ является решением уравнения (1). Тем самым теорема доказана при $\dim L_c = 1$.

4°. Прежде, чем переходить к случаю $\dim L_c = 2$, докажем одно общее утверждение о матрицах $Q(x)$, участвующих в уравнении вида (1). Преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$ с некоторой C^∞-матрицей $T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$, $\det T(0) \neq 0$, переводит уравнение (1) в аналогичное уравнение с матрицей

$$\tilde{Q}(x) = T^{-1}(x)(Q(x)T(x) - (VT)(x)).$$

Тем самым возникает некоторая эквивалентность C^∞-матриц. C^∞-матрицы $Q(x)$ и $\tilde{Q}(x)$ называются формально эквивалентными, если существует такое формальное преобразование $\hat{T}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C}^{m^2}$, что

$$\hat{\tilde{Q}}(x) = \hat{T}^{-1}(x)(\hat{\tilde{Q}}(x)\hat{T}(x) - (VT)(x)).$$

Пусть D — полупростая часть матрицы $Q(0)$, а D_0 — полупростая часть линейного приближения поля V. Будем говорить, что матрица $\tilde{Q}(x)$ имеет нормальную форму, если $[D, \tilde{Q}(x)] = D_0\tilde{Q}(x)$ (здесь $[\,,\,]$ — коммутатор матриц).

Лемма 2. *Каждая матрица $Q(x)$ формально эквивалентна некоторой нормальной форме.*

Доказательство. Сначала докажем существование такого формального преобразования $\hat{T}$, что формальный ряд $\hat{\tilde{Q}}(x)$ имеет нормальную форму. Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичных утверждений для векторных полей, диффеоморфизмов и т. д. и, по существу, содержится в [3], где рассмотрены произвольные группы формальных преобразований.

В силу [3, с. 141], существует такая C^∞-матрица $\hat{Q}(x)$, ряд Тейлора которого в нуле равен $\hat{\tilde{Q}}$ и которая имеет нормальную форму. Матрица $\tilde{Q}$ — искомая.

Согласно лемме 2, уравнение (1) можно записать в виде

$$(V\varphi)(x) + Q(x)\varphi(x) + \tau(x)\varphi(x) = \gamma(x), \tag{7}$$

где Q имеет нормальную форму, а $\hat{\tau} = 0$.

5°. Будем теперь считать, что в (L) $n = 2$, поле V конечно определено и приведено к виду (2) (и Q также имеет нормальную форму). Пусть $\operatorname{spec}\Lambda = \{\pm\mu_i\}$ (здесь $\mu \neq 0$), а $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$. Тогда, полагая $\hat{Q}(x) = (\hat{Q}_{kj}(x))$, получим

$$\hat{Q}_{kj}(x) \neq 0 \Rightarrow \lambda_k - \lambda_j = s \cdot \mu_l, \ s \in \boldsymbol{Z}.$$

Введем на множестве $\{\lambda_k\}$ отношение эквивалентности, положив

$$\lambda_k \sim \lambda_j \leftrightarrow \lambda_k - \lambda_j = s \cdot \mu_i, \ s \in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть $M_1 \ldots M_p$ — классы эквивалентности. Занумеруем числа λ_k так, чтобы

$$\lambda_l \in M_\nu \ (k_{\nu-1} + 1 \leqslant l \leqslant k_\nu, \ \nu = 1, \ldots, p), \ k_0 = 0.$$

Тогда, переходя к комплексным координатам и полагая

$$\hat{Q}_{kj}(x) = B_{kj}(z, \bar{z}) \quad (x \in \boldsymbol{R}^2, \ z \in \boldsymbol{C}),$$

получим

$$\hat{B}_{ej}(z, \bar{z}) = \hat{b}_{ej}(|z|^2)\, \bar{z}^{s'_j - s^\nu_e} \quad (k_{\nu-1} + 1 \leqslant l, \ j \leqslant k_\nu).$$

Здесь $\hat{b}_{ej}$ — некоторые ряды от одной переменной, а

$$s^\nu_j = \frac{\lambda_{k_{\nu-1}+1} - \lambda_j}{\mu i} \quad (k_{\nu-1} + 1 \leqslant j \leqslant k_\nu).$$

Сделаем теперь в (7) преобразование, положив $\tilde{\varphi}(x) = T(z, \bar{z})\varphi(x)$, где $T(z, \bar{z}) = \operatorname{diag}\left(\bar{z}^{s'_1} \ \ldots \ \bar{z}^{s^1_{k_1}}; \ \bar{z}^{s^2_{k_1+1}} \ \ldots\right)$.

Такое преобразование допустимо, поскольку оно является изоморфизмом пространства отображений, плоских в начале координат. Уравнение (7) преобразуется в уравнение того же вида с матрицей $\tilde{Q}(x) = \tilde{b}(|z|^2) - \bar{h}(|z|^2)\, C$, где C — диагональная целочисленная матрица (с элементами $s^l_{k_\nu}$), а функция h связана с полем V равенством.

6°. Напомним, что нам остается доказать разрешимость уравнений (6_k) при $\dim L_c = 2$. В силу сказанного в предыдущем пункте, для этого, в свою очередь, достаточно доказать разрешимость уравнений вида (7), где $n = 2$, поле V приведено к нормальной форме (2), а $Q(x) = B(|z|^2) = B(\|x\|^2)$.

Преобразование $\varphi(x) = T(\|x\|^2)\,\tilde{\varphi}(x)$ приводит это уравнение к аналогичному, но с матрицей $\tilde{Q}(x) = \tilde{B}(|z|^2)$, где

$$\tilde{B}(t) = T^{-1}(t)\,(B(t)\,T(t) - W(t)\,T'(t)),$$

а $W(t) = \operatorname{Re} h(t) \cdot t$. В силу [5] найдется такое допустимое преобразование $T(t)$, что матрица $\tilde{B}(t)$ имеет жорданову форму с собственными значениями

$$\lambda_i(t) = \sum_{k=1}^{l_i} \lambda^i_k t^{q^i_k}, \quad \lambda^i_k \in \boldsymbol{C}, \ l_i < \infty,$$

где $q^i_k \geqslant 0$ — рациональны. Допустимость здесь означает, что $T(t)$ принадлежит классу C^∞ после замены $t \mapsto t^m$ и умножения на t^l при некоторых $m, \ l \in \boldsymbol{R}$.

В силу сказанного можно теперь считать, что матрица $Q(x)$ в уравнении (7) имеет вид $Q(x) = B(\|x\|^2)$, где $B(t)$ — жорданова с собственными значениями $\lambda_i(t)$.

Лемма 3. *Существует допустимое преобразование* $\tilde{\varphi}(x) = T(x)\varphi(x)$, *которое приводит уравнение* (7) *к виду*

$$(V\tilde{\varphi})(x) + \tilde{Q}(x)\tilde{\varphi}(x) = \gamma(x),$$

в котором $\tilde{Q}(x) = D(\|x\|^2) + N(x)$, *где* $D(t)$ — *диагональная матрица, а* $N(x)$ — *нильтреугольная* C^∞*-матрица.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $\operatorname{Re} h(t) = ct^r + \ldots$, $c > 0$. Замена $\varphi(x) = T(\|x\|^2)\tilde{\varphi}(x)$, где $T(t) = \operatorname{diag}(1, t^r, \ldots, t^{(m-1)r})$ преобразует матрицу $Q(x)$ в матрицу

$$\tilde{Q}(x) = \operatorname{diag}(\tilde{\lambda}_1)\|x\|^2, \ \ldots \ \tilde{\lambda}_m(\|x\|^2)) + \|x\|^{2r}N_0,$$

где $\tilde{\lambda}_j(t) = \lambda_j(t) - r(j-1)\operatorname{Re} h(t)$, а N_0 — нильпотентная жорданова матрица. Указанное преобразование допустимо. Все остальные преобразования будут принадлежать классу C^∞. Теперь мы считаем, что

$$Q(x) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ \ldots, \ \lambda_m(t)) + \|x\|^{2r}N_0 + \tau(x), \ \hat{\tau} = 0.$$

Пронумеруем собственные значения $\lambda_i(t)$ таким образом, чтобы при малых $t > 0$ выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_1(t) \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2(t) \geqslant \ \ldots \ \geqslant \operatorname{Re}\lambda_m(t).$$

Будем искать преобразующую матрицу в виде $T(x) = E + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — нижняя нильтреугольная C^∞-матрица с нулевым рядом Тейлора в нуле. Тогда, полагая $Q(x) = D(\|x\|^2) + \|x\|^{2r}G(x)$, $D(\|x\|^2) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ \ldots, \ \lambda_m(t))$, для элементов $\psi_{ij}(x)$ получим уравнения

$$V\psi_{ij}(x) = (\lambda_i(\|x\|^2) - \lambda_j(\|x\|^2))\psi_{ij}(x) + \|x\|^{2r} \times \\ \times \sum_k G_{ik}(x)\psi_{kj}(x) + \sum_k \psi_{ik}(x)n_{kj}(x) + \tau_{ij}(x) \ \ (j \leqslant i). \tag{8}$$

Элементы $\psi_{ij}(x)$ последовательно (при $j = 1, 2, \ldots$) находятся из этих уравнений с учетом равенств $\psi_{kj} = 0$ $(k \leqslant j)$, $n_{kj} = 0$ $(k \geqslant j)$. Элементы $n_{ij}(x)$ $(i < j)$ определяются из равенств

$$\|x\|^{2r} \cdot \sum_k G_{ik}(x)\psi_{kj}(x) = n_{ij}(x) + \sum_k \psi_{ik}(x)n_{kj}(x) + \tau_{ij}(x).$$

Зафиксируем j и положим $f(x) = (\psi_{l+1,j}(x), \ \ldots, \ \psi_{mj}(x))$. Тогда (8) можно записать в виде

$$(Vf)(x) = \Delta(\|x\|)^2 f(x) + \|x\|^{2r}L(x)f(x) + \theta(x), \tag{9}$$

где $\Delta(t) = \operatorname{diag}(\lambda_{j+1}(t) - \lambda_j(t), \ \ldots, \ \lambda_m(t) - \lambda_j(t))$, L — некоторая C^∞-матрица, а $\theta(x) = (\tau_{j+1,j}(x), \ldots, \tau_{mj}(x))$.

Рассмотрим поле

$$W(x, y) = (V(x);\ \Delta(\|x\|^2 y + \|x\|^{2r} L(x) y + \theta(x))$$

в $R^2 \times C^m$. Пусть

$H^t(x, y) = (F^t(x);\ A^t(x) y + \Gamma^t(x))$ — его поток. Для доказательства разрешимости уравнения (9) достаточно доказать существование такого f, что $f(F^t x) = A^t(x) f(x) + \Gamma^t(x)$ при малых $t > 0$. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$f(x) = A^t(F^{-t}x) f(F^{-1}x) + \Gamma^t(F^{-t}x). \tag{10}$$

Зафиксируем малое $t_0 > 0$. Тогда F^{-t_0} — является квазисжатием порядка $2r$ в смысле [3], а $\|A^{t_0}(F^{-t_0}x)\| \leqslant 1 + C\|x\|^{2r}$. Повторяя рассуждения из [3], получим, что уравнение (10) при $t = t_0$ имеет единственное C^∞-решение f_0, определенное в δ — окрестности нуля и плоское в точке $x = 0$. Отображение

$$f_t(x) = A^t(F^{-t}x) f_0(F^{-t}x) + \Gamma^t(F^{-t}x)$$

также удовлетворяет (10) при $t = t_0$, определено в той же окрестности, что и f_0 и плоское в точке $x = 0$. В силу единственности, $f_t = f_0$. Следовательно, f_0 удовлетворяет (10) при всех t.

Таким образом, уравнения (8) разрешимы. Лемма доказана.

7°. В этом пункте завершим доказательство нашей теоремы. В силу леммы 3 можно считать, что матрица $Q(x) + \tau(x)$ в (7) треугольна. Это, в свою очередь, сводит доказательство разрешимости уравнения (7) к разрешимости серии одномерных ($m = 1$) уравнений вида

$$(Vf)(x) = (d(\|x\|^2 + \delta(x)) f(x) + a(x) \quad (x \in R^2). \tag{11}$$

Здесь $\hat{\delta} = 0$, $d(t) = d_0 + d_1 t^\rho + 0(t^\rho)$, где $\rho > 0$ — вещественно, а d_0, d_1 — некоторые комплексные числа (может случиться, что $d = 0$, тогда мы полагаем $d_0 = 0$, $\rho = \infty$).

Как и выше, для доказательства разрешимости уравнения (11), перейдем к потоку:

$$f(F^t x) = a^t(x) f(x) + b^t(x). \tag{12}$$

Выбором представителей ростков можно добиться, чтобы $b^t(x) = 0$, $a^t(x) = 1$ ($\|x\| \geqslant \delta$). Пусть сначала $\operatorname{Re} d_0 < 0$. Тогда $|a^t(x)| \leqslant q - 1$ при малых t, x. Сведем уравнение (12) к уравнению

$$f(x) = a^t(F^{-t}x) f(F^{-t}x) + b^t(F^{-t}x),$$

которое решается, как и (10).

Пусть теперь $\operatorname{Re} d_0 > 0$. При $t = t_0 > 0$ запишем (12) в виде

$$f(x) = (a^{t_0}(x))^{-1} f(F^{t_0}(x)) - (a^{t_0}(x)^{-1} b^{t_0}(x). \tag{13}$$

Здесь $F^{t_0}(x)$ — квазирастяжение в смысле [3]. Следуя [3, с. 126] для решения (13) рассмотрим компакт функций f, равных нулю вне δ — окрестности нуля и удовлетворяющих оценкам

$$\|f^{(k)}(x)\| \leqslant C_{k\nu} \cdot \begin{cases} \|x\|^\nu, & (\|x\| \leqslant \delta_{k\nu}), \\ a_{k\nu}\|x\|^{-\nu}, & (\|x\| \geqslant \delta_{k\nu}). \end{cases} \quad (\nu \geqslant \nu_k)$$

Подбором параметров ν_k, $\delta_{k\nu}$, $\alpha_{k\nu}$ и $c_{k\nu}$ можно добиться того, чтобы этот компакт переводился в себя под действием оператора, стоящего в правой части (13) (заметим, что $|a^{t_0}(x)^{-1} \leqslant q-1$ при малых x).

Следовательно, уравнение (13) имеет некоторое C^∞-решение $f_0(x)$, равное нулю при $\|x\| \geqslant \delta$. Такое решение единственно. Функция

$$f_t(x) = (a^t(x))^{-1} f_0(F^t x) - b^t(F^t x)(a^t(x))^{-1}$$

также является решением уравнения (13) и равна нулю при $\|x\| \geqslant \delta$. Следовательно, $f_+ = f_0$ является решением (12) при всех t.

Пусть теперь $\mathrm{Re}\, d_0 = 0$. Если $\rho \geqslant r$ или $\rho < r$, но $\mathrm{Re}\, d_1 < 0$, то уравнение (11) решается точно так же, как и (10).

Допустим, что $\mathrm{Re}\, d_0 = 0$, $\rho < r$, $\mathrm{Re}\, d_l > 0$. Тогда для решения уравнения (12) следует рассмотреть тот же компакт, что и для уравнения (13). (Здесь $|a^{t_0}(x)|^{-1} \leqslant 1 \leqslant -\alpha \|x\|^\rho$, $\alpha > 0$).

Таким образом, мы доказали разрешимость уравнений (6_k) при $\dim L_c = 2$. Теперь доказательство теоремы завершается как и в случае $\dim L_c = 1$.

Список литературы: 1. *Ichikava F.* Finitely determined singularities of formal Vector fields. — In vent. math., 1982, p. 199—214. 2. *Takens F.* Normal forms certain singularities of vectorfields. — Ann. Inst. Fourier, 1973, 23, N 2, p. 183—195. 3. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. — К.: Наук. думка, 1979.—170 с. 4. *Лычагин В. В.* О достаточных орбитах группы контактных диффеоморфизмов. — Мат. сб., 1977, 104, вып. 2, с. 248—270. 5. *Кузнецов А. И.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений. — Функцион. анализ и его прил., 1979, вып. 2, с. 41—51. 6. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса.— Мат. сб., 1973, 91, № 4, с. 565—579.

Поступила в редколлегию 18.02.85.