

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

В. М. КУКЛИН

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
(ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА)**

Харьков – 2018-2021

Рецензенты русскоязычного издания:

А. А. Рухадзе – главный научный сотрудник ИОФАН им. А. М. Прохорова, профессор, доктор физ.-мат. наук, действительный член Национальной академии наук Грузии;

В. А. Буц – начальник лаборатории ННЦ ХФТИ, профессор ХНУ им. В. Н. Каразина, доктор физ.-мат. наук.

Рецензенты англоязычного издания¹:

В. А. Буц – начальник лаборатории ННЦ ХФТИ, профессор ХНУ им. В. Н. Каразина, доктор физ.-мат. наук.

А. В. Тур – директор, заслуженный профессор Национального Центра научных исследований Франции (CNRS), Университета Поль Сабатье, доктор наук.

*Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(русскоязычное издание 2018 г. протокол № 18 от 22 декабря 2017 года;
англоязычное издание 2021 г. протокол № 3 от 22 февраля 2021 года)*

Куклин В. М.

К 89 Избранные главы (теоретическая физика) 4 тираж / В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2021. 271 с.

В книге рассмотрено спонтанное и индуцированное излучение частиц и волн. Изучается формирование когерентных импульсов вблизи обнаруженного нового порога индуцированного излучения. Показано, как модуляционные неустойчивости порождают самоподобные структуры и аномальные волны. Представлено сравнение динамики неустойчивости ленгмюровских колебаний в плазме и нагрева ионов в моделях Силина и Захарова. Рассматривается турбулентно-волновая неустойчивость и представлен новый подход к описанию эффекта Мессбауэра. Отмечено подобие процессов сверхизлучения и диссипативной неустойчивости. Исследуются структурные переходы в конвективном слое и возникновение крупномасштабных вихрей при модуляционной неустойчивости развитой конвекции и другие актуальные задачи.

Для специалистов, аспирантов и студентов физических факультетов.

PACS 52.35 Mw;41.60.-m;
05.45 Xt;03.65 Sq;47.55 p
УДК 53.01

ISBN русскоязычного издания
978-966-285 457-2

© Куклин В. М., 2021
© Дончик И.Н. дизайн, 2021

¹ Представленный материал – 4 тираж русскоязычного издания, полностью идентичный англоязычной версии: Kuklin V. M. Selected chapters (theoretical physics) / V. M. Kuklin. Kh. : V. N. Karazin KhNU. 2021. – 244 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление	
Предисловие.....	
Введение.....	
ЧАСТЬ I. ПРОЦЕССЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ	
Глава 1. Спонтанное и индуцированное излучение	
Раздел 1. Двухуровневая система	
Литература к разделу 1	
Раздел 2. Спонтанное и индуцированное излучение частиц пучка в плазме	
Литература к разделу 2.....	
Раздел 3. Спонтанные и индуцированные эффекты в рамках трехволнового взаимодействия	
Литература к разделу 3.....	
Раздел 4. Полуклассическая модель Укороченные уравнения.....	
Балансные уравнения.....	
Возбуждение резонатора с активной средой.	
Литература к разделу 4.....	
Глава 2. Спонтанное vs индуцированное излучение	
Раздел 5. Новый порог индуцированного излучения.....	
Литература к разделу 5.....	
Раздел 6. Периодические изменения светимости квантовых источников	
Литература к разделу 6.....	
Раздел 7. Турбулентно-волновая неустойчивость.....	
Литература к разделу 7.....	
Глава 3. Пространственно-временная динамика некоторых типов неустойчивостей.....	
Раздел 8. Пространственно-временная динамика распадной трехволновой неустойчивости.....	
Литература к разделу 8.....	
Раздел 9. Пространственно-временная динамика пучково-плазменной неустойчивости.....	
Развитие кинетической неустойчивости	
Развитие гидродинамической неустойчивости.....	
Литература к разделу 9.....	
Глава 4. Диссипативные неустойчивости	
Раздел 10. Диссипативные пучковые неустойчивости	
Аномальные потери энергии пучка	
Многомодовые режимы	
Литература к разделу 10	

Раздел 11. Пучковые неустойчивости при нелинейной и отрицательной диссипации	
Развитие пучковой неустойчивости в горячей плазме	
Изменение характера пучковой неустойчивости с возбуждением поверхностных волн в плазме с размытой границей	
Структура «волна – захваченные частицы» в слабоионизованном потоке газа.....	
Литература к разделу 11	
Глава 5. Режимы сверхизлучения	
Раздел 12. Формирование тонкой структуры электронных сгустков инжектируемых в плазму	
Пример отрицательной макроскопической диэлектрической проницаемости	
Кластеры.....	
Самопрофилирование короткого сгустка электронов, движущегося в плазме	
Литература к разделу 12	
Раздел 13. Диссипативные неустойчивости и режимы сверхизлучения	
Пучок электронов в продольно ограниченной системе	
Система осцилляторов, центры которых неподвижны, в поле излучения.....	
Литература к разделу 13	
Глава 6. Циклотронные неустойчивости потоков частиц	
Раздел 14. Возбуждение те волны пучком заряженных частиц.....	
Литература к разделу 14	
Раздел 15. Уравнения, описывающие возбуждение тм волны.....	
Возбуждение продольной волны в магнитоактивном плазменном волноводе.....	
Литература к разделу 15	
Глава 7. Модуляционная неустойчивость и самоподобные структуры	
Раздел 16. Модуляционная неустойчивость	
Как начинается неустойчивость	
Моделирование процесса при больших уровнях поглощения	
Интегральные и локальные характеристики процесса неустойчивости	
Литература к разделу 16	
Раздел 17. Формирование самоподобной структуры поля.....	
Долгоживущие квазиустойчивые состояния	
Появление самоподобных структур поля	
Литература к разделу 17	
Глава 8. Модуляционные неустойчивости.	
Возникновение волн аномальной амплитуды	
Раздел 18. Модуляционная неустойчивость вдали от порога	
Неустойчивости волны большой амплитуды	

	в 2d модели Лайтхилла
	Сравнение 1d моделей Лайтхилла в случаях применения S-теории и прямого вычисления уравнения
	Режим неустойчивости вдали от порога
	Литература к разделу 18
Раздел 19.	Модуляционная неустойчивость гравитационных волн на поверхности воды
	Численный анализ динамики и статистические показатели при использовании S-теории
	Сравнение 1d моделей в случаях применения S-теории и более общего описания
	Литература к разделу 19
Глава 9.	Параметрическая и/или модуляционная неустойчивость интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме
Раздел 20.	Модели Силина и Захарова
	Проблемы описания
	Уравнения гибридной модели Силина
	Уравнения гибридной модели Захарова
	Нелинейные режимы неустойчивостей
	Литература к разделу 20
Раздел 21.	Сравнение моделей Силина и Захарова, нагрев ионов
	Результаты численного моделирования
	Литература к разделу 21
Глава 10.	Структуры разного масштаба и топологии в тонком слое конвекции
Раздел 22.	Структурно-фазовые переходы в тонком слое конвективно неустойчивой среды
	Уравнение Проктора – Сивашинского
	Аморфное состояние. Механизм конкуренции мод
	Структурно-фазовые переходы
	Литература к разделу 22
Раздел 23.	Модуляционная неустойчивость системы конвективных ячеек в тонком слое. Эффект гидродинамического динамо
	Модель Сивашинского–Проктора-Письмена
	Модуляционная неустойчивости системы конвективных ячеек
	Эффект регулярного гидродинамического динамо
	Литература к разделу 23
ЧАСТЬ II. ПРИЛОЖЕНИЯ	
Приложение I.	Традиционный порог индуцированного излучения
Приложение II.	Спонтанное и индуцированное излучение пучка электронов. Затухание Ландау. Уравнения кинетической неустойчивости горячего пучка электронов в плазме
	Литература к приложению II
Приложение III.	О спонтанном и индуцированном излучении волнами
	Об описании процессов самовоздействия

	Литература к приложению III.....
Приложение IV.	О природе эффекта Мессбауэра..... Учет процессов релаксации НЧ возбуждений в сплошных средах..... Влияние дрожания потенциальной ямы..... Литература к приложению IV.....
Приложение V.	Матрица плотности и уравнения полуклассической модели... Литература к приложению V.....
Приложение VI.	Расчет параметров импульсов индуцированного излучения... Литература к приложению VI.....
Приложение VII.	Вывод уравнений турбулентно-волновой неустойчивости.....
Приложение VIII.	Пространственно-временная динамика неустойчивости при трехволновом взаимодействии.....
Приложение IX.	Пространственно-временное развитие пучковой неустойчивости в плазме.....
Приложение X.	Взаимодействие нерелятивистского пучка электронов с плазмой в многомодовом режиме.....
Приложение XI.	Диссипативный режим генерации в резонаторе, заполненном активным веществом..... Литература к приложению XI.....
Приложение XII.	Кавитоны, формируемые в области плазменного резонанса.... Литература к приложению XII.....
Приложение XIII.	Затухание волнового пакета в резонаторе, заполненном активной средой..... Литература к приложению XIII.....
Приложение XIV.	Затухание волнового пакета в резонаторе, заполненном неизотермической плазмой..... Литература к приложению XIV.....
Приложение XV.	Кильватерное поле движущегося в плазме электронного сгустка..... О применимости описания..... Литература к приложению XV.....
Приложение XVI.	Режим сверхизлучения сгустка осцилляторов..... Поля отдельной частицы и сгустка частиц..... Литература к приложению XVI.....
Приложение XVII.	Вывод уравнений плазменного гиротрона..... Литература к приложению XVII.....
Приложение XVIII.	Интегралы систем уравнений, описывающих циклотронные неустойчивости..... Литература к приложению XVIII.....
Приложение XIX.	Модуляционная неустойчивость плоской волны в двумерном случае.....
Приложение XX.	Самоподобные структуры на поверхности и в объеме кристаллов..... Литература к приложению XX.....

Приложение XXI.	Природа вынужденной интерференции..... Литература к приложению XXI.....
Приложение XXII.	Волны аномальной амплитуды в океане..... Литература к приложению XXII.....
Приложение XXIII.	Холодная плазма, одномерные уравнения Сирина..... Литература к приложению XXIII.....
Приложение XXIV	Аномальные осцилляции коэффициента отражения электромагнитной волны от поверхности плазмы..... Литература к приложению XXIV.....
Приложение XXV.	Фазовые переходы в модели Проктора-Сивашинского в условиях зависимости вязкости от температуры.....
Приложение XXVI.	Критерии дефектности пространственных периодических структур..... Спектральная и визуальная дефектности..... учет внешнего шума и неустойчивости границ системы..... Литература к приложению XXVI
Приложение XXVII.	О применимости модели Проктора-Сивашинского-Письмена к описанию модуляционной неустойчивости развитой структуры конвективных ячеек..... Литература к приложению XXVII.....
Приложение XXVIII	Полуклассическая модель сверхизлучения Литература к приложению XXVIII
Предметный указатель.....	
Вместо заключения.....	

ПРЕДИСЛОВИЕ

После длительного периода изучения разнообразных явлений в области плазменной электроники, под влиянием известных ученых-преподавателей физико-технического факультета Я. Б. Файнберга, В. Д. Шапиро, В. Г. Барьяхтара, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанова и др., в результате совместной работы с моим научным руководителем кандидатской диссертации А. Н. Кондратенко круг задач несколько расширился. Этому способствовали прежде всего замечательные книги В. Л. Гинзбурга и А. А. Рухадзе (рецензент русскоязычного издания 2018 г. данной монографии), В. П. Силина, В. Н. Цытовича и В. И. Карпмана, а позднее и прямое общение с некоторыми из них, а также с Н. А. Армандом, В. М. Яковенко, Ю. А. Романовым, С. С. Моисеевым, Ю. Л. Климонтовичем, Х. Вильгельмсоном и многими другими. Большую роль в расширении кругозора сыграли стажировка и написание диплома в ХФТИ, выполнение работ в ИРЭ (Фрязино), ИКИ, а также длительное участие в семинаре В. П. Силина, за продуктивное общение с которым я искренне благодарен судьбе. Из международных контактов эффективными оказались командировки в Хайфу к Л. М. Письмену и в Гамбург к К. Шунеману. Работы, которые вошли данную книгу далеко не все, которые были выполнены за период научной деятельности. Однако они показались автору наиболее интересными и имеющими очевидную перспективу дальнейших исследований.

Внимание к роли спонтанного излучения в физических процессах было привлечено еще трудами В. Л. Гинзбурга, А. Г. Ситенко, В. Н. Цытовича, обсуждалось на лекциях В. И. Курилко и в дискуссиях с И. Ф. Харченко. Подобные вопросы также возникли при подготовке публикации с А. Н. Кондратенко монографии «Основы плазменной электроники». Это заставило разбираться с общей структурой описания спонтанных и индуцированных явлений в квантовых и, более всего, в классических моделях. Конкуренция между спонтанными и индуцированными процессами была использована также в полученной под влиянием идей С. С. Моисеева универсальной системе уравнений, описывающей турбулентно-волновую неустойчивость.

Выявленный нами с А. Г. Загородним новый порог возникновения индуцированного излучения, обусловленный его конкуренцией со спонтанными процессами, позволил осознать природу формирования когерентных импульсов с интенсивностью, сравнимой с интенсивностью спонтанного излучения при крайне небольших уровнях инверсии, понимаемой в широком смысле.

Работы А. М. Федорченко и Н. Я. Коцаренко, а затем и Л. М. Горбунова, подтолкнули к поиску более простого описание пространственно-временной динамики многоволновых процессов.

Интересный эффект аномального отбора энергии у пучка заряженных частиц в среде с заметным поглощением ВЧ энергии, обнаруженный совместно с А. Н. Кондратенко и В. И. Ткаченко, был оценен Ю. А. Романовым с коллегами в Нижнем Новгороде и заставил пристально вникать в детали подобных процессов. А уменьшение уровня поглощения среды из-за нелинейных механизмов вызвало к жизни ряд работ по переходам диссипативных режимов процессов в реактивные.

Большой интерес к проблемам ускорения частиц в кильватерных полях ступок позволил вовремя и, по-видимому, прежде других, опубликовать работы по самосогласованному описанию динамики ступок в поле собственного излучения. Это далеко не сразу дало возможность увидеть связь этого явления сначала с диссипативными режимами пучковых неустойчивостей, а затем и со сверхизлучением, чем оно скорее всего и является.

Появление плазмы малой плотности, возникающей при работе мощных гиротронов, теория которых была прежде создана нижегородскими учеными, заставила разобраться с описанием возбуждения циклотронных колебаний в контакте с К. Шунеманом и Г. И. Загинайловым. Хотя учет конечного ларморовского радиуса в задачах генерации продольных волн в плазменных волноводах был прежде выполнен еще с Й. Круша.

Обнаружение явления формирования самоподобных структур в волновых средах в результате модуляционной неустойчивости позволило затем вместе с А. В. Киричком и О. В. Куклиной системно исследовать это явление. Позднее удалось пояснить природу формирования этих структур и провести численные эксперименты с Е. В. Белкиным, которые показали согласие с аналитическими оценками.

Большой интерес научной общественности к появлению волн аномальной амплитуды в океане заставил вспомнить подходы S-теории, построенной В. С. Львовым и В. Е. Захаровым для описания возбуждения спиновых волн. Используя разработанную с помощью В. М. Воробьева модифицированную S-теорию, удалось понять природу вынужденной интерференции и пояснить формирование волн аномальной амплитуды и всплесков модуляции, интенсивность которых на порядок превосходила средние уровни. Не представляло труда создать на основе S-теории описание поведения волн на поверхности океана. Верификация S-теории была проведена позднее на примерах распространения волн в волноводах и в океане путем сравнения прежних полученных Е. В. Белкиным данных с прямыми вычислениями, проведенными А. В. Приймаком.

Удачным результатом исследований было в середине 80-годов обобщение системы уравнений В. П. Силина и построение так называемой модели Силина параметрической неустойчивости ленгмюровской волны в холодной плазме. Первые численные эксперименты, выполненные с И. П. Панченко и С. М. Севидовым показали глубокую модуляцию плотности плазмы и передачу энергии ионам, что прежде было обнаружено при развитии модуляционной неустойчивости в разных модификациях модели В. Е. Захарова. Сравнение параметрической неустойчивости В. П. Силина с известной моделью В. Е. Захарова модуляционной неустойчивости ленгмюровской волны в неизотермической плазме уже в последние годы, проведенное с А. Г. Загородним и А. В. Киричком с помощью А. В. Приймака, выявило прямую связь между этими процессами.

Анализируя результаты исследований конвекции в тонком слое жидкости и газа удалось обнаружить существование структурно-фазовых переходов между метастабильными и стабильными состояниями. Вместе с И. В. Гуциным и А. В. Киричком было найдена функция состояния и построена модель таких явлений. В последнее время большой объем новых результатов, которые спровоцировали внесение поправок в разделы книги, выполнен с Е. В. Поклонским.

Интересен читателю также может оказаться новый взгляд на природу эффекта Мессбауэра, представленный совместно с А. Г. Загородним и А. В. Киричком. Именно поддержка В. Г. Кириченко и расчеты, проведенные с О. В. Куклиной, позволили вплотную приблизиться к решению этой задачи. С И. П. Панченко были численно исследованы обобщенные нами модели В. П. Силина, описывающие интенсивные осцилляции коэффициента отражения электромагнитной волны от поверхности плазмы, обнаружено явление модуляционной неустойчивости в развитой конвекции, где понадобилась помощь А. В. Киричка. Данная задача поиска условий развития «регулярного» гидродинамического динамо была поставлена еще С. С. Моисеевым на основе модели описания, развитой Л. М. Письменом.

В заключении следует выразить особую благодарность за поддержку и внимание А. Н. Кондратенко, своим коллегам В. А. Буцу, А. Г. Загороднему, В. И. Карасю и В. В. Яновскому, а также А. В. Киричку, которые были рядом в моих начинаниях последних лет, в особенности в успешно начатой публикации серии научных трудов «Проблемы теоретической физики». Хотя нет возможности перечислить всех, кто поддерживал меня в поисках решений, в их обсуждениях и реализации, им всем я также очень благодарен.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

В книге рассмотрены проблемы и задачи, к которым у автора возник интерес, и к которым он имел самое непосредственное отношение. Но решение которых было бы невозможно без заинтересованного участия как именитых, так и его младших коллег, а также учеников, только начинавших свою научную карьеру. Лишь немногие задачи были решены за относительно непродолжительное время, но основная часть выполненных работ продолжалась годами, а порой десятилетиями. Такая странная привязанность автора и его коллег к определенным темам была спровоцирована постоянно открывавшимися все новыми сторонами одних и тех же процессов, связана с обнаружением связей между на первый взгляд совершенно разными явлениями. Такое впечатление, что судьба не давала уйти в сторону от выбранных тем, предопределяя направления размышлений.

В первой главе первой части книги рассмотрены спонтанные и индуцированные процессы во взаимодействиях волна-частица и волна-волна. Показано, как используя выражение для спонтанного излучения, можно легко и корректно получить слагаемые уравнений, которые определяют индуцированные процессы, процедура прямого расчета которых порой весьма затруднительна. Дополнительно представлено описание излучения активной средой электромагнитного поля в рамках полуклассической теории.

Во второй главе обсуждается новый порог индуцированного излучения. Представлен механизм формирования когерентных импульсов, интенсивность которых сравнима или превышает интенсивность спонтанного поля вблизи обнаруженного нового порога индуцированного излучения. Вблизи этого порога также возможна генерация периодических импульсов когерентного излучения, формирующихся в результате конкуренции между спонтанными и индуцированными процессами. Обсуждается динамика неустойчивости в такой же близости к порогу индуцированного излучения, которая приводит к росту турбулентных пульсаций под действием внешней волны.

В третьей главе представлена пространственно-временная динамика развития нескольких видов неустойчивостей. Отмечается, что учет нелинейности волновых движений мало влияет на характер пространственно-временной динамики, так как дисперсионные свойства собственных волн в среде в значительно большей степени определяют их поведение в сравнении с разными видами нелинейных механизмов, по крайней мере в подавляющем числе случаев. Показано, что анализ такой динамики существенно облегчается при переходе в движущуюся систему координат.

В четвертой главе рассмотрен эффект аномального отбора энергии у пучка заряженных частиц, обусловленный возникновением взаимно синхронизованного торможения волны и захваченных полем частиц пучка в условиях заметного уровня поглощения волновой энергии в системе. Показано, что учет нелинейности в механизмах диссипации, как правило, снижает ее среднее значение.

Подобие диссипативных неустойчивостей и режимов сверхизлучения обсуждается в пятой главе, в частности, на примере излучения короткого пучка электронов, движущегося в плазме. Сверхизлучение, основой которого является взаимодействие между собой частиц или осцилляторов посредством излучаемого каждым из них поля, в классическом представлении определяется процессами пространственной и/или фазовой их синхронизации, которая усиливается при учете их подвижности.

В шестой главе изучены процессы возбуждения электронными пучками электромагнитных волн разной поляризации в магнитоактивных волноводах. Проведен учет плазмы малой плотности для традиционных уравнений, описывающих генерацию колебаний в гиротронах, обсуждается влияние на характер процессов конечного радиуса вращения электронов пучка.

В седьмой главе пояснено возникновение каскада модуляционных неустойчивостей, вблизи порога их развития, формирующих самоподобные структуры за счет сужения спектров каждого такого отдельного процесса и создания условий для развития нового, более крупномасштабного. При этом постепенно появляются все более крупномасштабные модуляции (огибающие) основной структуры. Узкие спектры каждой неустойчивости каскада формируют четко наблюдаемую на каждом масштабе самоподобную пространственную структуру.

Восьмая глава представляет явления формирования волн и их огибающих большой амплитуды при развитии модуляционной неустойчивости интенсивного волнового движения. Обсуждаются природа и частота появления гравитационных волн аномальной амплитуды на поверхности океана.

Девятая глава дает возможность сравнить модели Силина и Захарова модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн, соответственно в холодной и неизотермической плазме. Показано, что в режиме развитой неустойчивости доля переданной энергии ионам не превышает 5-6 % начальной энергии поля, распределение ионов по скоростям близко к максвелловскому, что позволяет говорить об их температуре.

В десятой главе рассмотрены структурно-фазовые переходы в тонком слое конвекции жидкости или газа. Представлена функция состояния, причем характерные времена каждого следующего структурно-фазового перехода увеличиваются, а изменения функции состояния – уменьшаются.

Вторая часть книги – это приложения к обсуждаемым вопросам, позволяющие разобраться в формализмах описания эффектов. Хотя отдельные темы приложений представляют самостоятельный интерес, например, характер распределенных дефектов в твердом теле, оценка количества дефектов по спектральным характеристикам пространственной структуры, самоподобные наноструктуры на поверхности графита, новое представление о механизме эффекта Мессбауэра.

Очень часто обратившие на физическое явление пионерские работы талантливых ученых обнаруживают лишь одну, обычно качественную сторону явления. При этом остаются в тени реальные физические механизмы, уже количественно определяющие процесс, которые обыкновенно выясняются позднее в результате привлечения внимания научной общественности к этому эффекту или явлению.

Так, например, нелинейное затухание интенсивных ленгмюровских волн, которое приводило к ее нагреву, часто пояснялось затуханием Ландау в возникающих коллапсирующих кавернах плотности плазмы, что по видимому лишь в некоторой степени имеет место. Но определяющим механизмом передачи энергии поля ионам и их дальнейшей термализации является многократное рассеяние на многочисленных возникающих при неустойчивости кавернах-неоднородностях поля (подробнее см. раздел 20). Волны аномальной амплитуды в условиях развитого волнения, которые часто представляют, как перманентно существующие и непредсказуемо проявляющие себя в этих условиях автоволны–солитонообразные возмущения с переменной амплитудой в неравновесных средах в действительности весьма определенно генерируются модуляционной неустойчивостью. Которая формирует волну (или огибающую) аномальной амплитуды за счет вынужденной интерференции мод спектра неустойчивости под действием волнового движения. Природа эффекта Мессбауэра также может быть достаточно просто пояснена особенностями излучения осциллирующих в потенциальных ямах кристаллической структуры атомов с возбужденным ядром.

Могут быть интересны такие темы приведенных в приложениях исследований, как кильватерное поле и самомодуляция движущегося в плазме электронного сгустка; аномальные осцилляции коэффициента отражения электромагнитной волны от поверхности плазмы и ряд других. Тексты этого четвертого тиража книги идентичны текстам англоязычной версии данной монографии автора “Selected Chapters (theoretical physics)”.

ЧАСТЬ I

Процессы в неравновесных средах

ГЛАВА 1. Спонтанное и индуцированное излучение

Представлены особенности описания процессов спонтанного и вынужденного излучения частиц и волн. Обсуждается роль спонтанного шума при инжекции пучка заряженных частиц и переход к развитию пучковой неустойчивости. Рассмотрен процесс генерирования волны током, который является результатом взаимодействия других волн, показано, что это явление носит характер спонтанного излучения. Используя выражение для эффективности такого излучения, можно корректно получить нелинейные слагаемые уравнения, описывающего процессы индуцированного взаимодействия. Таким образом, показана простая связь между выражениями для спонтанного и индуцированного излучения частиц и волн.

РАЗДЕЛ 1.

ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА

В самом общем случае излучение частиц может носить как спонтанный, не зависящий от внешнего воздействия, так и вынужденный, навязанный интенсивным внешним полем характер. В неравновесных системах и средах все эти явления приобретают коллективные свойства. Связь вынужденного или индуцированного излучения с подобными спонтанными процессами была открыта и описана в работе А. Эйнштейна [1-1] и экспериментально подтверждена Р. Ладенбургом (см. ссылки в обзорной работе [1-2]).

Рассмотрим частицу, которая имеет собственное поле. Если это поле или его часть не способны распространяться независимо от частицы, сопутствуют частице, то излучения нет. Работа поля над частицей в этом случае будет равна нулю. Если же при движениях частицы поступательном (например, со скоростью большей скорости собственных волн среды [1-3] – [1-5]) или осцилляторном (диполь), рассмотреть поле частицы, то в нем при некоторых условиях будет часть, которая окажется способной распространяться в среде самостоятельно. Работа этой части поля над частицей будет не равна нулю и приведет к ее торможению или к снижению амплитуды осцилляций, соответственно, что является признаком наличия излучения энергии поля частицей [1-6].

Важно также отметить, что значение работы собственного поля частицы над ее же собственным током *всегда оказывается знакоопределенным* и описывает только процесс излучения. Кстати, эта знакоопределенность является одним из характерных признаков спонтанных процессов. Другим характерным признаком спонтанного излучения является тот факт, что его источники являются независимыми и процесс излучения *не навязан волной на этой частоте*, существующей в данной среде или системе (см., например, [1-7]).

Индукцированное же излучение обусловлено тем обстоятельством, что внешнее поле во всем пространстве взаимодействия модулирует движение частиц среды. При этом излучение (или поглощение) расположенных в разных точках пространства многих частиц происходит в фазе с этим полем. На это обратил внимание в своей Нобелевской лекции Ч. Х. Таунс: «...энергия, излучаемая молекулярными системами, имеет то же самое распределение поля и ту же самую частоту, что и индуцирующее излучение, а, следовательно, и постоянную (возможно нулевую) разность фаз» [1-8]. Подобное, синхронизированное внешним полем излучение и поглощение частиц приводит к резкому увеличению эффективности взаимодействия частиц и поля. Сразу же отметим, что наличие процессов, нарушающих фазовое согласование внешнего поля и навязанное этим полем движение частицы, способно ослаблять эффективность подобного взаимодействия. Причиной индуцированного (вынужденного) излучения, как выяснилось, является наличие инверсии населенностей (положительно определенной разности частиц на высших и низших энергетических уровнях) [1-1].

Согласно представлениям А. Эйнштейна, описание простейшей одномерной двухуровневой системы при наличии излучения на частоте перехода $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \hbar\omega_{12}$ следующее:

$$\partial n_2 / \partial t = -(u_{21} + w_{21} \cdot N_k) \cdot n_2 + w_{12} \cdot N_k \cdot n_1, \quad (1.1)$$

$$\partial n_1 / \partial t = -w_{12} \cdot N_k \cdot n_1 + (u_{21} + w_{21} \cdot N_k) \cdot n_2, \quad (1.2)$$

причем полное число частиц системы в первом и во втором уровне постоянно $n_1 + n_2 = Const$, u_{21} – скорость изменения количества квантов второго возбужденного уровня за счет спонтанных процессов излучения. Скорость изменения количества квантов (частиц) на этих уровнях за счет индуцированных процессов излучения $w_{21} \cdot N_k \cdot n_2$ и поглощения $w_{12} \cdot N_k \cdot n_1$. Здесь N_k – число квантов излучения (спектральная плотность) на частоте перехода, для которого справедливо уравнение

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = (u_{21} + w_{21} \cdot N_k) \cdot n_2 - (w_{12} \cdot N_k) \cdot n_1. \quad (1.3)$$

В статистическом равновесии при температуре T производные $\partial n_i / \partial t = 0$, и $n_i = const \cdot \exp\{-\varepsilon_i / kT\}$, причем ε_i – энергия частиц в i -том состоянии. В случае статистического равновесия для интенсивности излучения должно быть справедливо соотношение $N_k = N_{k0}$, где правая часть определяется формулой Планка

$$N_{k0} = \frac{1}{\exp\{\hbar\omega / kT\} - 1}, \quad (1.4)$$

а при вычислении интегральной интенсивности суммирование осуществляется по волновым числам, при этом $\omega = \omega(\vec{k})$ и выражение (1.4) сохраняет свой вид независимо от размерности задачи.

Чтобы уравнение (1.3) оставалось справедливым в состоянии статистического равновесия, необходимо чтобы выражение

$$N_{k0} = \frac{u_{21}}{w_{12} \exp\{\hbar\omega / kT\} - w_{21}} \quad (1.5)$$

совпадало с формулой Планка (1.4). Другими словами, для коэффициентов оказываются справедливыми соотношения

$$u_{21} = w_{12} = w_{21}. \quad (1.6)$$

Отметим, что в 3D случае связь между коэффициентами u_{21} и w_{21} можно представить следующим образом

$$\frac{u_{21}}{w_{21}} = g = \frac{A_{21}}{\hbar\omega \cdot B_{21}} = \frac{2\omega^2}{\pi c^3} \quad (1.6a)$$

где A_{21} и B_{21} – соответствующие коэффициенты Эйнштейна. Размерность данного отношения – время на единицу объема, так как речь идет о спектральной плотности квантов. Для желтого света численное значение $g \approx 0.25$, для фиолетового на краю видимого спектра $g \approx 0.6$.

Используя полученные соотношения, уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega)} N_k \cdot \hbar\omega, \quad (1.7)$$

где $u_{21} \cdot (n_2 - n_1) = u_{21} \cdot [n(\varepsilon_2) - n(\varepsilon_1)] = \frac{\partial \Sigma}{\partial(\varepsilon)} \cdot \hbar\omega = \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega)} \cdot \hbar\omega$, и $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \hbar\omega$, а также $\Sigma = u_{21} \cdot n_2 = u_{21} \cdot n(\varepsilon_2)$.

Полезно ввести понятие инверсии $\mu = (n_2 - n_1)$. Если начальные значения величин $n_2(0) \gg N_k(0), n_1(0)$, и $\mu > 0$, то можно пренебречь спонтанными процессами, тогда

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -2u_{21} \cdot \mu \cdot N_k = -2\gamma \cdot N_k. \quad (1.8)$$

Обратим внимание, что только учет индуцированных процессов позволяет обнаружить при значительной инверсии населенностей уровней явление неустойчивости – быстрого роста количества квантов поля N_k на начальной стадии $\propto \exp\{\gamma \cdot t\}$ с инкрементом равным γ , когда изменениями инверсии можно пренебречь (см. приложение I).

Литература к разделу 1

1-1. Einstein A. Quantentheorie der Strahlung. // Mitteilungen d. Phys. Ges. Zurich, 1916. Nr. 18; Phys. Zs. 1917. Nr.18, P.121. Перев.: К квантовой теории излучения. // УФН. 1965. – Т. 86. – В. 3, – С. 371–381.

1-2. Ладенбург Р. Дисперсия в электрически возбужденных газах // УФН, 1934. – Т. 14. – В. 6. – с. 721–741; Reviews of Modern Phys. 1933. – N. 4. – P. 243–260.

1-3. Гинзбург В. Л. О природе спонтанного излучения // УФН, 1983. – Т. 140. – № 4. – С. 687– 698.

1-4. Гинзбург В. Л. Излучение равномерно движущихся источников (эффект Вавилова-Черенкова, переходное излучение и некоторые другие явления) // УФН, 1996. – Т. 166. – № 10. – С. 1033–1042.

1-5. Гинзбург В. Л. Несколько замечаний об излучении зарядов и мультиполей, равномерно движущихся в среде // УФН, 2002. – т. 172. – № 2. – С. 373–376.

1-6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М. : ГИФЛМЛ, 1959. – 532 с.

1-7. Загородний А. Г., Куклин В. М. Особенности излучения в неравновесных средах / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский; ред. вып. В. М. Куклин. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – 532 с. С. 13–81 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики»; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

1-8. Таунс Ч. Получение когерентного излучения с помощью атомов и молекул // УФН, 1966. – Т. 88. – В. 3. – С. 461–483.

РАЗДЕЛ 2. СПОНТАННОЕ И ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим процесс спонтанного излучения плазменных (ленгмюровских) волн отдельным электроном, движущимся со скоростью V в направлении оси OZ . Ограничимся для простоты описания одномерным случаем [2-1] (см. также [2-2]). Представим плотность заряда электрона в следующем виде:

$$\rho = -e \cdot \delta(v \cdot t - z + s). \quad (2.1)$$

В данном одномерном представлении частицы пучка излучают и поглощают кванты продольных (ленгмюровских) волн – плазмоны, энергия которых равна $\hbar\omega(k)$. Определим число квантов продольных волн, излучаемых в единицу времени в интервале волновых чисел dk в случаях спонтанного и индуцированного процессов $n_m u_{mn} dk$ и $n_m w_{mn} N_k dk$, соответственно. При этом частицы, излучающие плазмон, переходят из состояния m в состояние n . Аналогично определим в этом же интервале волновых чисел скорость поглощения плазмонов $n_n w_{nm} N_k dk$, где n_m – число частиц в состоянии m , а N_k – число квантов поля u_{mn} , w_{mn} , w_{nm} – коэффициенты в уравнениях А. Эйнштейна для этого случая.

Уравнения, описывающие изменение количества частиц на верхнем и нижнем уровнях энергии, имеют вид, подобный (1.1) и (1.2):

$$\partial n_m / \partial t = -(u_{mn} + w_{mn} \cdot N_k) \cdot n_m + w_{nm} \cdot N_k \cdot n_n, \quad (2.2)$$

$$\partial n_n / \partial t = -w_{nm} \cdot N_k \cdot n_n + (u_{mn} + w_{mn} \cdot N_k) \cdot n_m. \quad (2.3)$$

В тепловом равновесии, очевидно $n_m / n_n = \exp\{\hbar\omega(k) / T\}$, число излученных и поглощенных квантов поля равны (постоянную Больцмана здесь и ниже будем считать равной единице), а для количества квантов поля справедлива формула Планка $N_{k0} = [\exp\{\hbar\omega(k) / T\} - 1]^{-1}$, что также приводит к соотношению $u_{mn} = w_{mn} = w_{nm}$. Таким образом, в неравновесном случае для описания динамики количества плазмонов получим уравнение

$$dN_k / dt = u_{mn} \cdot n_m \{(1 - n_n / n_m) \cdot N_k + 1\}. \quad (2.4)$$

Отметим, что изменение плотности энергии плазмонов

$dE_k / dt = \hbar\omega(k) \cdot u_{mn} \cdot n_m$ в отсутствии других механизмов излучения и поглощения их энергии, кроме спонтанного излучения частиц пучка равно потерям его энергии в единицу времени $w(k)$. С учетом этого, уравнение (2.4) принимает вид:

$$dE_k / dt = w(k) \cdot \{(1 - n_n / n_m) \cdot N_k + 1\}. \quad (2.5)$$

Изменение импульса частиц при излучении плазмона $m \cdot (v_m - v_n) = \hbar k$, откуда следует, что $v_m = v_n + \hbar k / m$ и в случае, если интервал скоростей, на котором существенно изменяется функция распределения частиц заметно превышает $\hbar k / m$, то

$$n_n / n_m = f(v_m - \hbar k / m) / f(v_m) \approx 1 - (\hbar k / m) \cdot df(v_m) / f(v_m) dt. \quad (2.6)$$

и уравнение (2.5) принимает вид (см. Приложение II)

$$dE_k / dt = 2\pi^2 e^2 [\omega^2(k) / k^2] \cdot \{f_b[\omega(k) / k] + E_k \cdot (k / \omega(k) \cdot m) \cdot \partial f_b(v) / \partial v|_{v=\omega(k)/k}\} - \delta_D E_k, \quad (2.7)$$

где $\gamma_L = \frac{2\pi^2 e^2 \omega^2}{mk^2} \partial f_b(v) / \partial v|_{v=\omega(k)/k}$ – линейный инкремент пучково-плазменной неустойчивости в отсутствии потерь энергии плазмонов, δ_D – декремент затухания колебаний в плазме в отсутствие пучка частиц.

Кстати, равенство коэффициентов $u_{mn} = w_{mn} = w_{nm}$, а также зависимость слагаемого, ответственного за индуцированные процессы от N_k , позволяет представить выражение (2.7) в более общем виде

$$dN_k / dt = \Sigma_m + \{\Sigma_m - \Sigma_n\} N_k = \Sigma_m + \frac{\partial \Sigma_m}{\partial(\hbar\omega)} E_k, \quad (2.8)$$

где Σ_m – изменение числа квантов N_k энергии излучения $E_k = \hbar\omega \cdot N_k$ за счет спонтанных процессов в единицу времени, причем переход $\Sigma_m \rightarrow \Sigma_n$ соответствует излучению кванта $\hbar\omega$, то есть

$$\Sigma_m - \Sigma_n = \Sigma(\varepsilon_m) - \Sigma(\varepsilon_n) = \frac{\partial \Sigma_m}{\partial \varepsilon} \hbar\omega = \frac{\partial \Sigma_m}{\partial(\hbar\omega)} \hbar\omega. \quad (2.9)$$

где $\Sigma_m = \Sigma(\varepsilon_m) = \Sigma(\varepsilon_n + \hbar\omega)$.

Детальнее случаи описания спонтанного и индуцированного излучения рассмотрены в обзоре [2-3]. Рассмотрим уровень шума, то есть

интенсивность плазменной турбулентности в бездиссипативной среде. В плазме без пучка интенсивность плазменной турбулентности (флуктуаций), определяется величиной $E_k \propto T_e$. При инжекции пучка, ниже порога неустойчивости (или в спектральных областях, где неустойчивость не развивается) уровень шума может существенно возрасти, например, особенно если температура пучка сравнима или больше температуры плазмы. Действительно, для максвелловской функции распределения электронов по скоростям $f_{0b} = [n_{b0} / \sqrt{\pi} v_{Tb}] \cdot \exp\{-(v - v_{0b})^2 / v_{Tb}^2\}$, в стационарных условиях получим, что интенсивность шума, обусловленная спонтанным излучением пучка в области больших фазовых скоростей $\omega(k) > kv_{0b}$ ($\gamma_L < 0$) даже в условиях пренебрежимо малых потерь энергии ($\delta_D \rightarrow 0$), может достигать значений порядка (см. приложение II)

$$E_k = \frac{\omega(k)}{\omega(k) - kv_{0b}} \cdot T_b, \quad (2.10)$$

а в области малых фазовых скоростей $\omega(k) < kv_{0b}$ (в этом случае $\gamma_L > 0$), рост флуктуаций может быть сдержан только диссипативными процессами ($\delta_D > \gamma_L$) в плазме

$$E_k = \gamma_L \cdot \omega(k) \cdot T_b / (kv_{0b} - \omega)(\delta_D - \gamma_L). \quad (2.11)$$

При приближении к порогу неустойчивости (определяемому из условия $\delta_D = \gamma_L$) уровень спектральной плотности колебаний быстро увеличивается взрывным образом. Это, в частности, улучшает стартовые условия для развития неустойчивости. Аномальный рост флуктуаций в этом случае подобен хорошо известному явлению критической опалесценции при приближении параметров системы к порогу неустойчивости – области фазового перехода.

Явление значительного роста шума в системе при инжекции пучка в широких спектральных интервалах, даже вне области неустойчивости было обнаружено еще в первых экспериментах по плазменно-пучковому взаимодействию [2-4 – 2-5].

Следует заметить, что возрастание числа квантов спонтанного поля в единицу времени в объеме взаимодействия в квантовом или рост энергии поля в классическом описаниях, имеют некоторые особенности, отличающие их от случая роста энергии индуцированного поля при развитии неустойчивости. Прежде всего, спонтанные поля отдельных осцилляторов или частиц пучка (при их однородном распределении и при отсутствии внешних механизмов синхронизации), отличаются фазой, которая вообще говоря, по крайней мере, в начальный момент, случайная, то есть

спонтанное излучение однородно распределенных и не сфазированных излучателей – некогерентное. Изменение энергии спонтанного излучения в единицу времени пропорционально числу излучателей. Поле спонтанного излучения растет линейно, но начиная с некоторого момента, группировка излучателей может оказаться такой, что инициативу способно перехватить индуцированное, то есть навязанное волной, излучение. Этот рост индуцированного излучения происходит экспоненциально и формируется та часть поля, в котором велика доля когерентности, то есть фазы многих отдельных излучателей слабо отличаются друг от друга. Изменение энергии поля в единицу времени в этом случае пропорционально квадрату числа синхронизованных осцилляторов. Причем подобная синхронизация происходит под действием излучаемой волны и управляется ею.

Некоторый и все время растущий уровень спонтанной составляющей излучения, который имеет характер нарастающего шума, также следует учитывать, особенно в режимах длительных импульсов корпускулярной и волновой накачки.

Если в отсутствии диссипативных процессов величина $\partial f_b(v) / \partial v|_{v=\omega(k)/k} > 0$, возможно развитие неустойчивости, которая представляет собой экспоненциальный рост с инкрементом $\gamma_L = \frac{2\pi^2 e^2 \omega}{mk^2} \partial f_b(v) / \partial v|_{v=\omega(k)/k}$ волны с частотой ω и волновым числом k , то есть поле волны $E(t) \cdot \exp\{-i\omega t + ikx\}$ представлено лишь одной модой в спектре. Реализация такого одномодового режима возможна при специальном подборе начальных условий. При этом все большая часть частиц пучка, скорости которых не равны фазовой скорости волны $v_F = \omega/k$, но достаточно близки (то есть, так называемых, нерезонансных частиц), оказывается захваченной волной в ее потенциальную яму. Уравнения, описывающие нелинейную динамику возбуждаемой пучком частиц (здесь электронов) волны, в отсутствие поглощения энергии в среде, имеют вид (см., Приложение II):

$$\partial A / \partial \tau = 8\pi \cdot \int_{-1/2}^{1/2} d\zeta_{p0} \int_{-\eta}^{\eta} d\eta_0 \eta_0 \exp\{-2\pi i \xi\}, \quad (2.12)$$

$$2\pi \cdot d^2 \xi / d\tau^2 = 2\pi \cdot d\eta / d\tau = -\text{Re}[A \cdot \exp\{2\pi i \xi\}], \quad (2.13)$$

где $\omega_{be} = (4\pi e^2 n_{e0}) / m_{e0})^{1/2}$ – плазменная частота электронного пучка, а $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_{e0}) / m_{e0})^{1/2}$ – ленгмюровская частота плазмы (здесь $e, m_{e0}, n_{b0}, n_{e0}$ – заряд, масса покоя электрона и невозмущенная плотность пучка и плазмы) $2\pi \xi_0 = kz_0 - \omega t$, и $\eta_0 = (kv - \omega_{pe}) / 2\pi\gamma$. Здесь положение каждой частицы пучка определяется значением ξ , а скорость – величиной η .

Интегрирование в (2.12) проводится по начальным значениям координаты и скорости частиц, то есть $\xi_0 = \xi(t=0)$ и $\eta_0 = \eta(t=0)$. Причем для упрощения описания будем считать, что производная функции распределения по скоростям в окрестности фазовой скорости волны $\partial f_b(v) / \partial v|_{v=\omega(k)/k}$ пропорциональна скорости [2-5].

Можно оценить среднюю частоту осцилляций Ω_{TR} захваченных частиц в потенциальной яме волны $\Omega_{TR} = \sqrt{ekE / m_{e0}}$. В результате такого осцилляторного движения захваченных частиц происходит изменение знака производной от функции распределения в окрестности фазовой скорости волны [2-7 – 2-8].

Такое изменение знака производной способно приводить к осцилляторной смене направления процесса, то есть к последовательной смене излучения квантов поля их поглощением и наоборот. Отметим, что изменение знака производной от функции распределения обусловлено динамикой частиц пучка в поле волны, которая представлена вторым уравнением системы уравнений (2.13). Этот процесс учитывает нелокальность процессов взаимодействия частиц пучка с волной. Полезно ввести в рассмотрение параметр Ω_{TR} / γ_L , который в процессе неустойчивости постепенно возрастает от начальных значений много меньших единицы. При достижении этим параметром величины порядка единицы неустойчивость насыщается [2-9]. В дальнейшем происходит обмен энергией между волной и захваченными частицами [2-6] с характерным временем $\Omega_{TR}^{-1} \approx \gamma_L^{-1}$. Из-за перемешивания частиц в потенциальной яме волны, осцилляции интенсивности волны быстро затухают.

Литература к разделу 2

- 2-1. Андронов А. А. К вопросу о затухании и нарастании плазменных волн // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1961. – Т. 4. – № 5. – С. 861–866.
- 2-2. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
- 2-3. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Спонтанное и вынужденное излучение электрона, электронного сгустка и электронного пучка в плазме // УФН, 2008. – Т. 178. – № 10. – С. 1025–1055.
- 2-4. Взаимодействие электронного пучка с плазмой / И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнберг, Р. М. Николаев, Е.А. Корнилов, Е. А. Луценко, Н. С. Педенко. // ЖЭТФ, 1960. – Т. 38. В. 3. – С. 685–692.

2-5. Демирханов Р. А., Геворков А. К., Попов А. Ф. Взаимодействие пучка заряженных частиц с плазмой // ЖТФ, 1960. – Т. 30. – В. 3. – С. 315–319.

2-6. К нелинейной теории возбуждения монохроматической плазменной волны электронным пучком / И. Н. Онищенко А. Р. Линецкий, Н. Г. Мациборко, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко // Письма в ЖЭТФ, 1970. – Т. 12. – В. 8. – С. 407–410.

2-7. Мазитов Р. К. О затухании плазменных волн // Журн. прикл. матем. и теорет. физ. 1965. – № 1. – С. 27–31.

2-8. O’Neil Th. Collisionless damping of non-linear plasma oscillation // Phys. Fluids. 1965. – Vol. 8. – N 12. – P. 2255–2264.

2-9. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Взаимодействие волна-частица в неравновесных средах // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1976. – Т. 19. – № 5–6. – С. 787–791.

РАЗДЕЛ 3. СПОНТАННЫЕ И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ЭФФЕКТЫ В РАМКАХ ТРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Индукцированные процессы в случае многоволнового взаимодействия отличаются большим разнообразием в отличие от систем «волна-частица», одна из которых обсуждалась в предыдущем разделе. Рассмотрим для определенности взаимодействие в неизотермической плазме трех звуковых волн, частоты и волновые числа которых сравнимы (впервые подобный «распадный» процесс был рассмотрен в работе [3-1]). При этом отвлечемся от представлений о компактных пакетах волн и случайном изменении их фаз [3-2 – 3-3]. Пусть две распространяющиеся в нелинейной среде волны с частотами ω_2 и ω_3 возбуждают нелинейный ток \tilde{j}_{23} , способный при выполнении условий пространственно-временного синхронизма²

$$\omega_1 \approx \omega_2 + \omega_3 \quad \text{и} \quad \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3, \quad (3.1)$$

излучать кванты поля собственной волны среды на частоте ω_1 .

Если учесть действие волн с частотами ω_2, ω_3 и пренебречь воздействием поля первой волны с частотой ω_1 на этот нелинейный ток \tilde{j}_{23} , то такой процесс излучения квантов поля $\hbar\omega_1$ можно было бы считать спонтанным. Однако, если поле первой волны, к примеру, будет накапливаться в пространстве взаимодействия и его амплитуда станет достаточно значи-

² Здесь обсуждается случай синтеза двух волн, то есть процесс, обратный распаду.

тельной, воздействием этого поля на нелинейный ток \tilde{j}_{23} пренебрегать будет уже нельзя. В этом случае можно говорить о взаимодействии трех волн, причем синхронизация фаз мод и формирование когерентного поля проходит при самосогласованном участии всех взаимодействующих волн.

На частоте первой волны характер обмена энергией с точностью до четвертого порядка малости по амплитудам взаимодействующих волн определяется соотношением

$$(\tilde{j}_{23} + \tilde{j}_1^{(3)})(\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_{23}^*) \approx \tilde{j}_{23} \cdot \tilde{E}_{23}^* + \tilde{j}_{23} \cdot \tilde{E}_1^* + \tilde{j}_1^{(3)} \tilde{E}_1^*, \quad (3.2)$$

где для напряженности поля на частоте ω_1 удержаны величины первого $\tilde{E}_1^{(1)}$ и второго \tilde{E}_{23}^* порядка, а для токов удержаны величины второго \tilde{j}_{23} и третьего $\tilde{j}_1^{(3)}$ порядка по амплитудам волн. Первое слагаемое правой части (3.2) отвечает за процессы взаимодействия тока \tilde{j}_{23} и сформированного этим током поля $\tilde{E}_{23} = \tilde{E}_{23}(\tilde{j}_{23})$ на комбинационных частотах. Происхождением ток \tilde{j}_{23} обязан нелинейному взаимодействию колебаний на частотах ω_2 и ω_3 . Эти процессы при условиях пространственно-временного синхронизма (3.1) могут приводить к генерации излучения на частоте первой волны, причем эта генерация по отношению к этой волне, как показано ниже, обладает характерными чертами спонтанного процесса. Второе слагаемое (3.2) можно считать ответственными за процессы взаимодействия сразу трех волн. Последнее слагаемое определяет индуцированные процессы излучения и поглощения квантов поля на частоте первой волны ω_1 . Если действительная часть этого выражения отлична от нуля, то возможно индуцированное излучение или поглощение квантов поля на частоте ω_1 . Доминирующим в хорошо изученных процессах трехволнового взаимодействия является второе слагаемое (3.2), а роль третьего слагаемого сводится лишь к поправкам к медленным фазам и отчасти амплитудам волн (см, например, [3-4 – 3-5]).

В случае многоволнового взаимодействия нарушения когерентности излучения и также эффективности взаимодействия возможны, ибо эти явления определяются дисперсией, порождающей фазовые расстройки пространственно-временного синхронизма.

Не редко при многоволновом взаимодействии имеет место фазовая расстройка Δ между частотами волн, участвующих во взаимодействии. При этом первое из соотношений (3.1) принимает вид

$$\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = \Delta_{-1,2,3} = \Delta. \quad (3.3)$$

Уравнение для числа квантов на частоте ω_1 без учета самовоздействия (слагаемое, пропорциональное $\propto N_1^2$) можно формально записать

(см. приложение III) в виде (на возможность такого представления было указано ранее в докладе [3-6])

$$dN_1 / dt = \Sigma + \frac{1}{\hbar\omega} \{j_{23} E^*_{1} + j^*_{23} E_1\} + \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega)} W_1, \quad (3.4)$$

где

$$\Sigma = \alpha \frac{8}{3\hbar} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \frac{W_2 W_3}{\omega_2 \omega_3}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega_1)} W_1 = \frac{8}{3\hbar^2} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \alpha \frac{W_1}{\omega_1} \left(\frac{W_2}{\omega_2} + \frac{W_3}{\omega_3} \right), \quad (3.5)$$

причем определим

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial(\hbar\omega_1)} = \alpha \frac{8}{3\hbar} \frac{e^2 [(W_2 + \hbar\omega_2)(W_3 + \hbar\omega_3) - W_2 W_3] / \hbar\omega_1}{(m_i v_s)^2} \frac{1}{\omega_2 \omega_3} = \alpha \frac{8}{3\hbar} \frac{e^2}{(m_i v_s)^2} \left(\frac{W_2}{\omega_2} + \frac{W_3}{\omega_3} \right) \frac{1}{\hbar\omega_1}. \quad (3.6)$$

Наличие достаточно широких спектров может привести к следующим уравнениям.

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \alpha \cdot w \sum_{k'} N_{k'} N_{k-k'} + w \left\{ \frac{\alpha'}{2} N_k^2 + \alpha N_k \sum_{k'} [N_{k'} + N_{k-k'}] \right\}, \quad (3.7)$$

$$N_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t} = \frac{w}{2} \sum_{k'} N_{k'} N_{k-k'} + \frac{w}{2} \left\{ \frac{1}{2} N_k^2 + N_k \sum_{k'} [N_{k'} + N_{k-k'}] \right\}. \quad (3.8)$$

Здесь исключены слагаемые, отвечающие трехволновому взаимодействию. Из-за усреднения по турбулентным пульсациям. Без учета самовоздействия (об этом см. приложение III), уравнение (3.7) принимает вид

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \Sigma_k + \hbar\omega_k N_k \frac{\partial}{\partial(\hbar\omega_k)} \Sigma_k, \quad (3.9)$$

где

$$\Sigma_k = w \cdot \alpha \sum_{k'} N_{k'} N_{k-k'}, \quad w = 8e^2 \hbar / 3(m_i v_s)^2, \quad (3.10)$$

$$\hbar\omega_k N_k \frac{\partial}{\partial(\hbar\omega_k)} \Sigma_k = \alpha \cdot w \cdot N_k \sum_{k'} [N_{k'} + N_{k-k'}].$$

Важно отметить, что в уравнении (3.4), соотношение между выражением для спонтанного излучения (первое слагаемое правой части) и выражением для индуированных процессов излучения и поглощения (третье слагаемое правой части) совпадает по виду и по смыслу с соответствующими выражениями в уравнениях (1.7) и (2.8).

Следует отметить, что первые слагаемые (3.7) и (3.8) того же порядка, что и последние слагаемые этих уравнений. Это дает порой основание считать физические механизмы, за которые они ответствен-

ные, однотипными, что далеко не так. Кроме того, генерация колебаний на частоте ω_1 , определяемая первыми слагаемыми правой части уравнений (3.7) и (3.8), может быть значительной и не имеет явных признаков шума, и можно усмотреть определенное подобие обсуждаемого явления с излучением пучка, модулированного на определенной частоте.

Описание процессов излучения в случае волновых пакетов в представлении (3.9) подобно описанию спонтанного и индуцированного излучения в случае активных сред (1.7) и в случае взаимодействий «частица – волна» (2.8).

Важно отметить, что рассматриваемая система (см., например, уравнение (3.9)) находится вблизи и несколько выше порога генерации индуцированного излучения, обсуждаемого в следующей главе. Это обещает, при корректном учете обратного влияния излучения на турбулентность, появление новых эффектов и явлений.

В согласии с развитыми в обзорах В. Л. Гинзбурга представлениями [1-3] – [1-5], при обсуждении природы спонтанного излучения в описании классических систем выше не привлекались квантовые эффекты, что, тем не менее, не повлияло [3-3] на общность рассмотрения.

Литература к разделу 3

3-1. Сагдеев Р. З., Ораевский В. Н. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы // ЖТФ, 1962, том 32, в. 7, – С. 1291–1299.

3-2. Kirichok A. V, Kuklin V. M. Theory of Some Nonlinear Processes in Plasma in Terms of Spontaneous and Stimulated Radiation // Phys. Scripta, 2010, v. 82. – N 11. – p. 35–41.

3-3. Загородний А. Г., Куклин В. М. Особенности излучения в неравновесных средах / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц., А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – 532 с. с. 13–81 (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги).

3-4. Oraevskii V. N., Wilhelmsson H., Kogan E. Ya., Pavlenko V. P. On the stabilization of explosive instabilities by nonlinear frequency shift // Physica Scripta, 1973. V. 7. – P. 217–221.

3-5. Weiland J. Influence of nonlinear frequency Shifts and effective nonlinear dissipation on explosive Instabilities // Physica Scripta, 1973. V. 9. – P. 343–349.

3-6. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G. A Theory of Some Nonlinear Processes in Plasma in Terms of the Spontaneous and Induced Radiation // Modern Problem of Theoretical and Mathematical Physics: Proc. Bogolubov Kyiv Conference, Kyiv, Ukraine, 15–18 Sept. 2009.

РАЗДЕЛ 4. ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В рамках полуклассической модели (см. приложение V) покажем, что характер процесса возбуждения электромагнитных волн в резонаторе или в волноводе, заполненном средой, представляющей собой двухуровневую систему диполей, зависит от соотношения между значениями частоты и ширины линии волнового пакета. При значительной инверсии населенностей или в сильных полях шириной линии можно пренебречь. При этом плотность энергии поля велика. В этом режиме наблюдаются заметные нутации инверсии населенностей с разной частотой по длине волновода, отвечающих локальным частотам Раби, интерференция которых определяет осцилляторное поведение амплитуды поля волны. При низких уровнях интенсивности электрического поля или небольших значениях инверсии населенностей, поведение двухуровневой системы, описывается балансными уравнениями и становится монотонным, инверсия населенностей стремится к нулю, а характерное время изменения поля увеличивается.

В известной работе [4-1] Р. Дике рассматривал взаимодействие осцилляторов или излучателей, которые находятся вблизи друг друга и полагал, что они фактически объединены в одну квазичастицу, которая содержит несколько осцилляторов или излучателей. Обратим внимание на то, что в квантовом случае речь идет не о синхронизации фаз осцилляторов, как при классическом рассмотрении, а об увеличении вероятности излучения, что фактически приводит к одному и тому же результату. В этом случае происходит перекрытие их волновых функций и вероятность спонтанного излучения этой квазичастицы возрастает в сравнении с вероятностью излучения отдельных осцилляторов или излучателей³ [4-2]. Однако если осцилляторы или излучатели разнесены в пространстве, перекрытие их волновых функций становится или слабым, или вообще неощутимым. В большинстве существующих лазеров плотность активных частиц такая, что расстояния между ними весьма значительны и заведомо ожидать перекрытия волновых функций не следует⁴.

³ Хотя когерентность излучения сгустка частиц, размеры которого заметно меньше длины волны, можно легко обнаружить как в квантовом описании этого явления, так и в классическом.

⁴ Показательным в этом смысле является распределение свободных электронов по скоростям в полупроводниках [4-3], если, конечно, плотности этих электронов достаточно малы, например, при низких температурах. В этом случае их распределение фактически является максвелловским и температура их примерно равна температуре атомной системы, что отвечает классическому описанию. И дело все в том, что распределение Ферми, то есть квантовое представление, возможно лишь, если происходит перекрытие волновых функций электронов, что можно наблюдать в металлах, где число свободных электронов сравнимо с числом атомов.

Как же взаимодействуют электроны активных атомов в лазерах? Их взаимодействие обусловлено электромагнитными полями излучения. В квантовом случае, когда фазы осциллятора и поля не определены, а указано лишь взаимная ориентация излучающего диполя и электрического поля, то есть известны лишь проекции дипольного момента на направление электрического поля, определяющей может стать роль частоты Раби. Многие авторы отмечают, что частота Раби определяет осцилляторный характер изменения инверсии заселенностей системы излучающих диполей (нутаии), имеющих основной и возбужденный уровни энергии и, вообще говоря, пропорциональна вероятности индуцированного излучения и поглощения квантов поля [4-4, 4-5].

В этом случае среду излучателей можно рассматривать квантово-механически, а поле в классическом представлении. Система одномерных уравнений полуклассической теории (см. приложение V) для амплитуд возмущений электрического поля E , поляризации P , описывающих возбуждение электромагнитных колебаний в двухуровневой активной среде, может быть представлена в таком виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \gamma_{12} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega^2 \cdot P = -\frac{2\omega |d_{ab}|^2}{\hbar} \mu E, \quad (4.2)$$

к которым нужно добавить уравнение для медленно меняющейся со временем инверсии населенностей

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{2}{\hbar \omega} \langle E \frac{\partial P}{\partial t} \rangle, \quad (4.3)$$

где частота ω перехода между уровнями отвечает частоте поля, релаксацией инверсии за счет внешних причин пренебрежем, δ – декремент поглощения поля в среде, d_{ab} – матричный элемент дипольного момента (точнее его проекция на направление электрического поля), разность населенностей $\mu = n \cdot (\rho_a - \rho_b)$ в единице объема, ρ_a и ρ_b относительные населенности уровней в отсутствие поля, γ_{12} – ширина спектральной линии, n – плотность диполей активной среды. Здесь ширина линии обратно пропорциональна времени жизни состояний, что обусловлено релаксационными процессами.

Укороченные уравнения. Пусть поля представлены в виде

$$E = [E(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} + E^*(t) \cdot \exp\{i\omega t\}] \quad (4.4)$$

$$P = [P(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} + P^*(t) \cdot \exp\{i\omega t\}] \quad (4.5)$$

Число квантов поля тогда равно

$$\langle E^2 \rangle / 4\pi\hbar\omega = 2 | E |^2 / 4\pi\hbar\omega = N . \quad (4.6)$$

Также для медленных меняющихся амплитуд справедливы уравнения

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} + \delta \cdot E(t) = 2i\pi\omega P(t) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} + \gamma_{12} P(t) = \frac{|d_{ab}|^2}{i\hbar} \mu E \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{2i}{\hbar} [E(t)P^*(t) - E^*(t)P(t)] . \quad (4.9)$$

Из уравнений (4.7) и (4.9) следует закон сохранения энергии

$$\frac{\partial N}{\partial t} + 2\delta N + \frac{\partial \mu}{2\partial t} = 0 \quad (4.10)$$

Балансные уравнения. Если же выполнены условия $\gamma_{12} \gg \partial P / P \partial t$ (как станет понятным из дальнейшего рассмотрения) осцилляторным характером (нutationами) инверсии населенностей можно пренебречь и систему уравнений (4.7) – (4.10) можно записать в виде, подобном полученном ранее в работе [4-6]. Это упрощенный вариант балансных (скоростных) уравнений двухуровневой системы в присутствии электрического поля без учета спонтанного излучения.

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{8\pi\omega |d_{ab}|^2}{\hbar\gamma_{12}} \mu N, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + 2\delta N = \frac{4\pi\omega |d_{ab}|^2}{\hbar\gamma_{12}} \mu N, \quad (4.12)$$

где $\Omega_N = 4\sqrt{\pi\omega |d_{ab}|^2 N / \hbar}$ – частота Раби, отвечающая плотности числа квантов поля N , а τ_N характерное время процесса, определяемое из соотношения. $\tau_N^{-1} = \Omega_N^2 / \gamma_{12}$.

Заметим, что переход к уравнениям (4.11), (4.12) подобен переходу к случаю заметной спектральной ширины поля, когда ширина спектральной линии оказывается больше обратного характерного времени изменения амплитуды возмущений [4-7, 4-8].

Используем обозначения $\mu / \mu_0 = M$, причем сразу же отметим, что изменения инверсии населенностей будут определяться выбором μ_0 и начальными условиям $\Omega_0 = |d_{ab}| \cdot |E_0| / \hbar = |d_{ab}| \cdot [4\pi\omega \cdot \mu_0 / \hbar]^{1/2}$ – частота Раби,

отвечающая значению амплитуды электрического поля $|E_0| = [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$,
 $E = E(t) / [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $P = 4\pi\omega P(t) / \Omega_0 [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $\tau = \Omega_0 t$, $\Gamma_{12} = \gamma_{12} / \Omega_0$,
 $\Theta = \delta / \Omega_0$.

Возбуждение резонатора с активной средой. Для решения задачи взаимодействия поля в ограниченной системе (резонаторе, волноводе) следует использовать локальный характер инверсии населенностей и соответственно поляризации, определяя эти величины в отдельных пространственных секторах. Электромагнитное поле при этом в волноводе может быть представлено в виде стоячей волны, что обусловлено эффектами отражения поля от границ системы. В случае излучения из волновода, когда $\delta \neq 0$, следует выбрать зависимость поля в каждом из пространственных секторов $1 < j < S$ в форме относительного числа квантов

$$|E_j(\tau = 0)|^2 = 2 \frac{1}{S} \cdot |E(\tau = 0)|^2 \cdot \text{Sin}^2 \left\{ 2\pi \frac{j}{S} + \alpha \right\} \quad (4.13)$$

где α – это практически постоянная фаза, связанная с δ . Очевидно $\sum_j 2 \frac{1}{S} \text{Sin}^2 \left\{ 2\pi \frac{j}{S} + \alpha \right\} = m$ в рассматриваемом ниже случае, когда на длине волновода или резонатора $b = m\lambda$ укладывается счетное число волн m . Полное (относительное) число квантов поля можно записать в виде

$$N(\tau) = \sum_{j=1}^S \langle E_j(\tau) \rangle^2 \quad (4.14)$$

Вообще говоря, $\delta \approx \frac{c}{4\pi} \langle E \rangle^2 (x=0) / \left(\frac{\langle |E|^2 \rangle}{4\pi} b \right)$, где $b = m\lambda$ – длина волновода. Легко видеть, что $\langle E \rangle^2 (x=0) = 2 \langle E^2 \rangle^2 \text{Sin}^2 \alpha$ и $\delta \approx 2c(\text{Sin}^2 \alpha) / b$, где c – групповая скорость волны вне волновода.

Система уравнений (4.7) – (4.10) в этом случае преобразуется следующим образом. Для локальных переменных E_j , P_j и M_j справедливы уравнения

$$\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \Gamma_{12} P_j = -i M_j E_j, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial \tau} = \frac{i}{2} [E_j P_j^* - E_j^* P_j], \quad (4.16)$$

где $E_j(\tau) = \left(\sqrt{\frac{2}{S}} \right) \cdot |E(\tau)| \cdot \text{Sin} \left\{ 2\pi \frac{j}{S} + \alpha \right\}$, $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^S (M_j + M_j^*) = M$.

Для числа квантов поля можно записать уравнение (закон сохранения, следствие уравнений (4.7) и (4.9))

$$\frac{\partial M}{2\partial\tau} + \frac{\partial N(\tau)}{\partial\tau} + 2\Theta N(\tau) = 0. \quad (4.17)$$

Следует обратить внимание, что случай $\gamma_{12} \gg \Omega = |d_{ab}| \|E(t)\| / \hbar$ или $\gamma_{12} \gg [4\pi\omega]^{1/2} |d_{ab}| \mu / \hbar^{1/2}$ отвечает низким уровням интенсивности электрического поля или небольшим значениям инверсии населенностей. Напротив, при обратных сильных неравенствах, шириной линии можно пренебречь и в этом случае интенсивности излучения и инверсии населенности весьма значительны.

Эти замечания можно проиллюстрировать, рассматривая возбуждение поля в резонаторе без поглощений.

Рассмотрим решения системы (4.15), (4.16), (4.17) используя следующие обозначения

$$N(\tau) = \frac{1}{S} \sum N_j(\tau), \quad M(\tau) = \frac{1}{S} \sum M_j(\tau), \quad E_j(\tau) = \sqrt{2N(\tau)} \cdot \text{Sin}\left(2\pi \frac{j}{S}\right) \quad (4.18)$$

При условиях $N(0)=0.001$, $M(0)=1$, $S=100$, $\Gamma_{12} = 0$, $\Theta = 0$, результаты расчетов идентичны [4-9, 4-10] в условиях $\Gamma_{12} = 0$ в соответствующих масштабах, указанных выше (см. рис. 4.1 и рис. 4.2). Увеличение значения ширины линии из системы $\Gamma_{12} > 0$ в отсутствие вывода энергии приводит к сглаживанию осцилляций поля и средней инверсии населенностей в объеме волновода (см. рис. 4.1 и рис. 4.2.)

Рис. 4.1. Поведение интенсивности поля $N(\tau)$ от времени для значений
 1 - $\Gamma_{12}=0$; 2 - $\Gamma_{12}=0.1$; 3 - $\Gamma_{12}=0.5$;
 4 - $\Gamma_{12}=0.9$; 5 - $\Gamma_{12}=1.9$ при отсутствии вывода энергии ($\Theta = 0$)

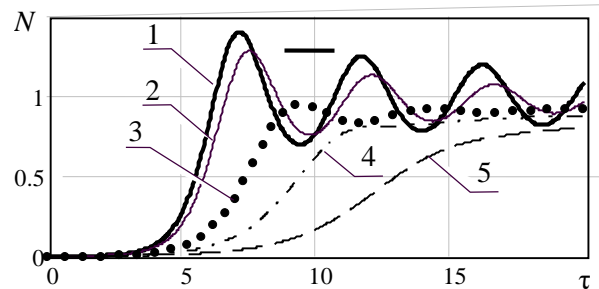
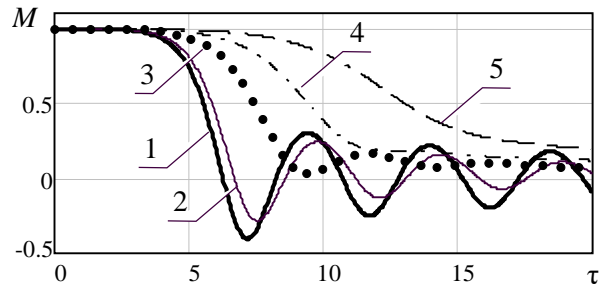


Рис. 4.2. Поведение средней инверсии населенностей $M(\tau)$ от времени для значений 1 - $\Gamma_{12}=0$; 2 - $\Gamma_{12}=0.1$; 3 - $\Gamma_{12}=0.5$; 4 - $\Gamma_{12}=0.9$; 5 - $\Gamma_{12}=1.9$ при отсутствии вывода энергии ($\Theta=0$)



Во всех случаях инверсия со временем осцилляторным образом или монотонно (при большой ширине линии) стремится к нулю. Распределение M по длине волновода (по секторам j) в моменты наступления первого максимума N , первого минимума в отсутствии вывода энергии имеет вид (см. рис. 4.3 – рис. 4.5)

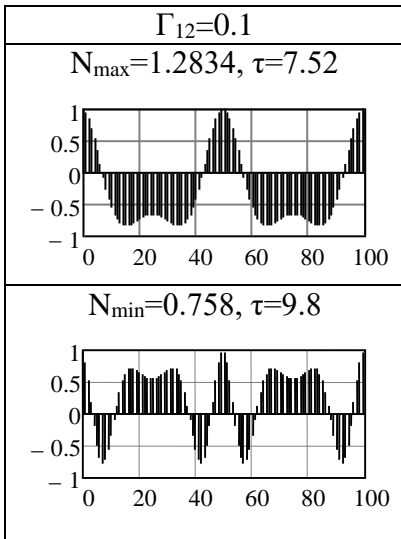


Рис. 4.3. Распределение M по секторам в моменты появления первого максимума и первого минимума N при разной ширине линии $\Gamma_{12}=0.1$ и в отсутствии вывода энергии ($\Theta=0$)

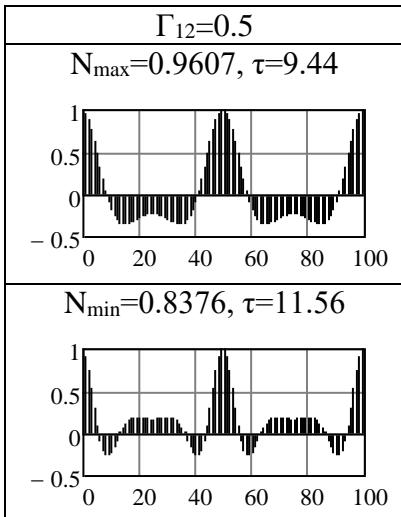


Рис. 4.4. Распределение M по секторам в моменты появления первого максимума и первого минимума N при ширине линии $\Gamma_{12}=0.5$ и в отсутствии вывода энергии ($\Theta=0$)

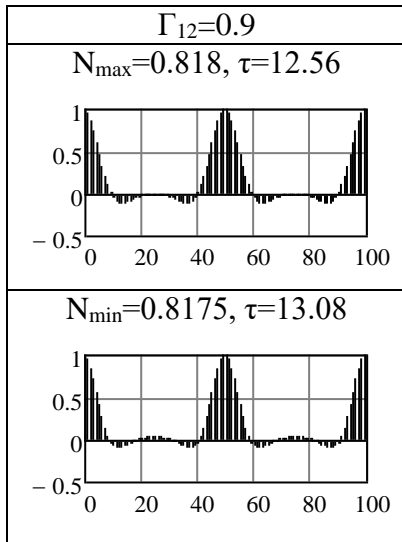


Рис. 4.5. Распределение M по секторам в моменты появления первого максимума и первого минимума N при ширине линии $\Gamma_{12}=0.9$ и в отсутствии вывода энергии ($\Theta = 0$)

Литература к разделу 4

4-1. Dicke R. H. Coherence in spontaneous radiation processes // Phys. Rev. 1954. – V. 93. – P. 99.

4-2. Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. «Коллективное спонтанное излучение (сверхизлучение Дике)» УФН – 1980. – 131. – 653-694.

4-3. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда – Наука, М. 1975.– 400с.

4-4. Давыдов А.С. Квантовая механика Физматгиз. 1963. – 748 с.

4-5. Allen L., Eberly J. Optical rfsonance and two-level atoms. Witey-Interscicitce Publication John Witty and Sons. New York – London – Sydney – Toronto. 1975. – 222 p.

4-6. Einstein A. Quantentheorie der Strahlung // Mitteilungen d. Phys. Ges. Zurich, Nr. 18, (1916); Phys. Zs. Nr. 18, p. 121, (1917); К квантовой теории излучения // УФН. – 1965. – Т. 86, вып. 3. – С.371–381.

4-7. Valeo E. J. and Olerman C. R. Model of Parametric Excitation by an Imperfect Pump. Phys. Rev. Lett. V. 30, N 21, 1973, pp.1035-1038.

4-8. Thomson J. J. and Karush J. I. Effect of finite-bandwidth Driver on the Parametrical Instability. The Physics of Fluids, V. 17. – N 8. – 1974, pp, 1608-1613.

4.9. Kuklin V. M. Energy exchange between the field and the active medium of the waveguide / V. M. Kuklin, E. V. Poklonskiy. // East European Journal of Physics 2019. – V.6. – N 3 – P.46–53.

4.10. Kostenko V. V. On generation of awave package in a waveguide, illed active medium/ V. V. Kostenko, V. M. Kuklin, E. V. Poklonskiy// VANT, 2020. – N 3 (127). – P. 105–109.

ГЛАВА 2. Спонтанное vs индуцированное излучение

Показано, что вблизи обнаруженного нового порога индуцированного излучения, конкуренция между спонтанными и вынужденными процессами приводит к появлению импульсов индуцированного излучения, интенсивность которых может быть сравнима или больше интенсивности спонтанного излучения системы. При этом инверсия населенности может быть на много порядков меньше общего числа состояний. Показаны условия, когда возможны режимы периодического изменения светимости таких источников с разными периодом и амплитудой. Рассмотрено воздействие внешней низкочастотной волны на систему в условиях конкуренции между спонтанными и вынужденными процессами излучения, что приводит к развитию так называемой турбулентно-волновой неустойчивости.

Существуют физические процессы, когда пренебрегать спонтанным излучением не следует. Ибо спонтанные процессы способны уменьшать инверсию и исполнять роль поглощения по отношению к генерации индуцированного излучения.

РАЗДЕЛ 5. НОВЫЙ ПОРОГ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Если, опираясь на результаты исследований корреляции флуктуаций в лазерном излучении [5-1], полагать, что в индуцированном излучении велика доля когерентной составляющей, то можно обнаружить порог возникновения такого излучения, обусловленного существованием спонтанных процессов, при некотором критическом значении инверсии населенностей [5-2]. Особенность этого порога индуцированного излучения в том, что в случае отсутствия механизмов поглощения энергии поля он отвечает значению начальной инверсии населенностей, равной корню квадратному из полного числа состояний⁵.

С другой стороны, при значениях начальной инверсии в окрестности этого порога не трудно увидеть изменение характера процесса. При превышении этого порога число излучаемых квантов начинает расти экспонен-

⁵ Интенсивность спонтанного излучения, не синхронизованного (случайно распределенного) по фазам осцилляторов, как известно, пропорциональна их числу. Интенсивность же когерентного вынужденного излучения пропорциональна квадрату числа осцилляторов.

циально со временем. Причем ниже порога такого экспоненциального роста не наблюдается. То есть, превышение начальной инверсией обнаруженного порога, приводит к экспоненциальному росту числа квантов.

Можно, на качественном уровне предположить, что слагаемые в правых частях уравнений (1.1) – (1.3) пропорциональные N_k , отвечают индуцированным процессам, также, как и число квантов N_k , записанное там же. Рационально представить $N_k = N_k^{(incoh)} + N_k^{(coh)}$, где $N_k^{(incoh)}$ и $N_k^{(coh)}$ – соответственно числа квантов спонтанного и индуцированного излучения. Тогда качественная (упрощенная) модель описания может быть записана в виде [5-2]

$$\partial n_2 / \partial t = +w_{12} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_1 - (g \cdot w_{21} + w_{21} \cdot N_k^{(coh)}) \cdot n_2, \quad (5.1)$$

$$\partial n_1 / \partial t = -w_{12} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_1 + (g \cdot w_{21} + w_{21} \cdot N_k^{(coh)}) \cdot n_2, \quad (5.2)$$

$$\partial N_k^{(incoh)} / \partial t = u_{21} \cdot n_2, \quad (5.3)$$

$$\partial N_k^{(coh)} / \partial t = w_{21} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_2 - w_{12} \cdot N_k^{(coh)} \cdot n_1. \quad (5.4)$$

То есть, вообще говоря, можно рассмотреть две модели описания – традиционную и качественную – модифицированную⁶:

Традиционная система уравнений

$$\partial M_1 / \partial T = -N_0 - 2M_1 \cdot N_1 \quad (5.5)$$

$$\partial N_1 / \partial T = (N_0 / 2) + M_1 \cdot N_1 - \theta \cdot N_1$$

Качественная система уравнений

с разделением квантов по их происхождению

$$\partial M / \partial T = -N_0 - 2M \cdot N_c$$

$$\partial N_{inc} / \partial T = (N_0 / 2) - \theta \cdot N_{inc}; \quad (5.6)$$

$$\partial N_c / \partial T = M \cdot N_c - \theta \cdot N_c,$$

где $N_{inc} = N_k^{(incoh)} / \mu_0$, $N_c = N_k^{(coh)} / \mu_0$, $M = \mu / \mu_0$, $M = M_1 = \mu / \mu_0$, $T = w_{21} \cdot \mu_0 \cdot t = \mu_0 \cdot \tau$, $N_1 = N_k / \mu_0$ единственным удобным для анализа свободным параметром является $N_0 = g \cdot N / \mu_0^2$. Для корректности сравнения будем считать, что общее число реальных состояний $N = n_1 + n_2 = 10^{12}$, а пороговая инверсия $\mu_{0th} = \sqrt{N} = 10^6$. Переход к единой шкале времени

⁶ Еще А. Пуанкаре отмечал, что «главным образом уравнения нас должны учить тому, что можно и что следует в них изменить».

будем оценивать согласно соотношению $T = \tau \cdot \mu_0$, где T – время в каждом отдельном случае. Начальные значения определим следующим образом $M(T=0) = M_1(T=0) = 1$, а также $N_{inc}(T=0) = N_{inc} / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$, $N_c(T=0) = N_c / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$, $N_1(T=0) = N_k / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$.

Поглощение энергии поля учитывается значением $\theta = 2\delta_D / w_{21}\mu_0$. Изменение характера процесса для традиционной системы (5.5) представлено на рис. 5.1, где показана динамика развития процесса для случаев изменения параметра $N_0 \in (30 \div 0.01)$.

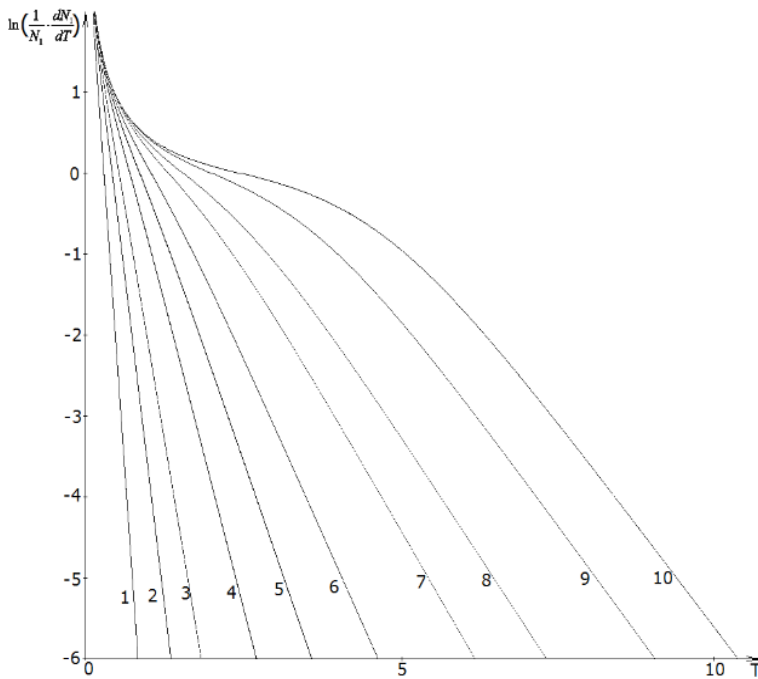


Рис. 5.1. Поведение величины $\ln\{dN_1 / N_1 dT\}$ от времени для значения параметров $N_0 = (n_1 + n_2) / (n_2 - n_1)^2$:
 1. – $N_0 = 30$; 2. – $N_0 = 10$;
 3. – $N_0 = 5$; 4. – $N_0 = 2$; 5. – $N_0 = 1$;
 6. – $N_0 = 0.5$; 7. – $N_0 = 0.2$;
 8. – $N_0 = 0.1$; 9. – $N_0 = 0.03$;
 10. – $N_0 = 0.01$

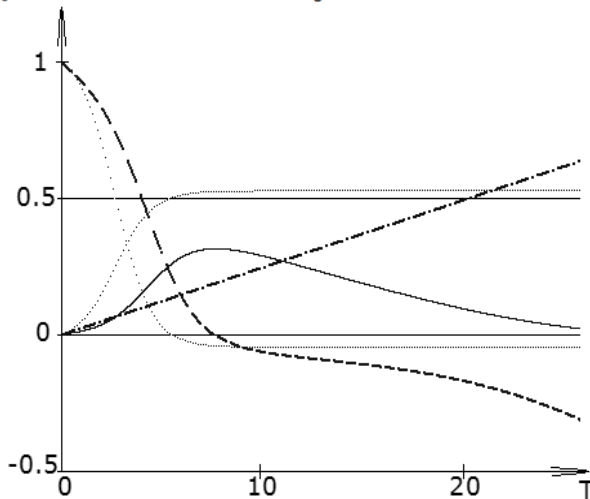


Рис. 5.2. Поведение величин M_1 и N_1 (точки), M (пунктир), отвечающих традиционной системе N_c и N_{inc} (сплошная и штрихпунктирная линии, соответственно) при отсутствии поглощения ($\theta = 0$) и при $N_0 = N / \mu_0^2 = 0.05$

Традиционное представление о пороге неустойчивости отвечает требованию положительности правой части третьего уравнения системы (5.6) $M > \theta$ или, что, то же самое

$$\mu > \mu_{TH1} = \delta_D / w_{21} \tag{5.7}$$

Следует также (см рис 5.1) обратить внимание на изменения числа квантов при переходе через порог [5-2]

$$n_2 - n_1 = \mu_{TH2} \approx (2N)^{1/2} = [2(n_2 + n_1)]^{1/2} \quad (5.8)$$

Действительно, при превышении порога (5.8) видно, что величина $\ln(dN / NdT)$ (ось ординат рис. 5.1) становится все более пологой, то есть растет число квантов, причем рост этот приобретает с удалением от порога (5.8) явный экспоненциальный характер.

Обсудим условия, при которых имеет смысл вблизи порога индуцированного излучения (5.8), использовать качественную систему уравнений (5.6). В рамках классического описания, интенсивности спонтанного излучения частиц-осцилляторов, фазы которых распределены случайно, складываются, потому что интенсивность спонтанного излучения равна сумме интенсивностей излучения отдельных частиц-осцилляторов, находящихся в возбужденном состоянии или на более высоком энергетическом уровне. В случае индуцированного, фактически когерентного излучения, напряженность поля настолько значительна, что синхронизирует фазы как излучающих, так и поглощающих частиц-осцилляторов, потому что от знака инверсии заселенностей $\mu = n_2 - n_1$ зависит, будет это индуцированное поле возрастать или убывать, причем характерное время этого процесса обратно пропорционально μ . Однако, если такого индуцированного когерентного поля нет, то частицы-осцилляторы в возбужденном состоянии будут излучать спонтанно, ибо фазы их не синхронизованы.

В традиционной модели (5.5) присутствует слагаемое $\mu \cdot N_k$, которое ответственно за индуцированные процессы возбуждения и поглощения. Но которое не имеет физического смысла ниже порога (5.8), ибо в этом случае в системе нет интенсивного индуцированного поля, которое способно синхронизировать излучение многих частиц. В стационарном состоянии интенсивность излучения источника будет определяться только спонтанным излучением $\delta \cdot N_k^{(incoh)} \propto g \cdot N / 2$, которое приводит к уменьшению инверсии.

Но при превышении порога (5.8) слагаемое $\mu \cdot N_k$ в правых частях уравнений играет важную роль, обеспечивая описание индуцированных процессов при $\mu > \mu_{TH2}$. Вблизи порога (5.8) рационально пользоваться именно качественной системой уравнений, тогда интенсивность спонтанного излучения в единице объема определяется величиной $\delta \cdot N_k^{(incoh)} \propto g \cdot N / 2$, а вот плотность потока энергии индуцированного излучения равна $\delta \cdot N_k^{(coh)}$.

На рис. 5.2 показана динамика процесса излучения как в случае описания с помощью традиционной модели, так и в случае качественного описания вблизи порога (5.8). При больших значениях начальной инверсии начинает проявлять себя индуцированное излучение, причем все более четко

выделяется режим экспоненциального роста числа квантов. В отсутствие поглощения энергии квантов согласно качественному описанию (5.6) после уменьшения амплитуды импульса индуцированного излучения число квантов спонтанного излучения продолжает расти. В традиционной модели (5.5) процессы поглощения ограничивают рост полного числа квантов и уровень излучения выходит на свое стационарное значение.

Однако сравнивая динамику процессов можно понять, что после уменьшения амплитуды импульса индуцированного излучения основной вклад в полное число квантов дает только спонтанное излучение. То есть, на временах, превышающих длительность импульса индуцированного излучения, доминирует спонтанное некогерентное излучение.

Следует обратить внимание на тот факт, что в случае фиксированного конечного уровня потерь или поглощения энергии квантов, размер импульса индуцированного излучения практически не меняется даже при значительном увеличении уровня инверсии заселенностей (рис.5.3б). Таким образом, если формирование переднего фронта импульса индуцированного излучения определяется начальным уровнем инверсии, то длительность его заднего фронта обусловлена в большей степени уровнями потерь энергии квантов в системе [5-3].

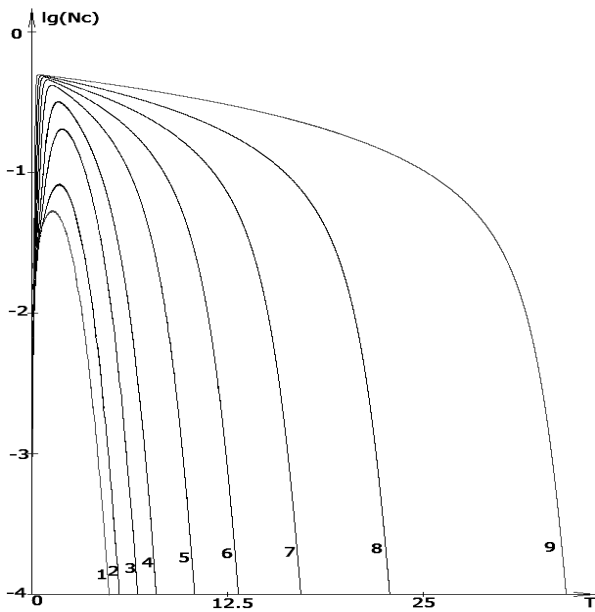


Рис. 5.3а. Вид когерентного импульса в реальном времени в отсутствие поглощения ($\theta=0$) для значений инверсии $\mu_0 = \sqrt{2} \cdot 10^6; 2 \cdot 10^6; \sqrt{10} \cdot 10^6; \sqrt{20} \cdot 10^6; \sqrt{50} \cdot 10^6; 10^7; \sqrt{2} \cdot 10^7; 2 \cdot 10^7; \sqrt{10} \cdot 10^7$

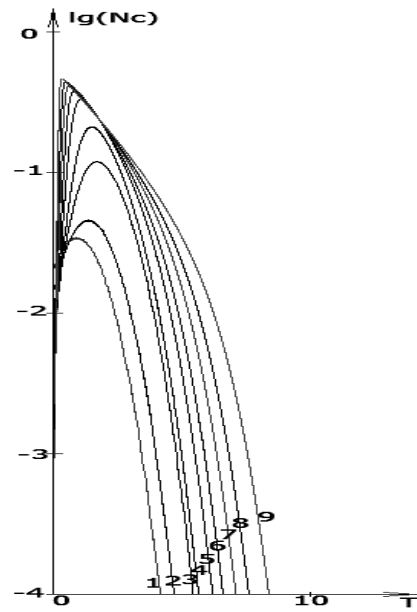


Рис. 5.3б. Вид когерентного импульса в реальном времени в поглощающей среде ($\delta = 4 \cdot 10^5$) для значений инверсии $\mu_0 = \sqrt{2} \cdot 10^6; 2 \cdot 10^6; \sqrt{10} \cdot 10^6; \sqrt{20} \cdot 10^6; \sqrt{50} \cdot 10^6; 10^7; \sqrt{2} \cdot 10^7; 2 \cdot 10^7; \sqrt{10} \cdot 10^7$.

Обсуждаемый в данной работе порог индуцированного излучения отвечает случаю, когда случайно распределенное по фазам спонтанное

излучение сравнимо с излучением индуцированным. Превышение порога, который чрезвычайно низкий (например, при $N = n_1 + n_2 = 10^{12}$, пороговая инверсия $n_2 - n_1 = \mu_{0th} = \sqrt{N} = 10^6$, относительная инверсия $(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1) \approx 10^{-6}$), приводит к появлению импульсов индуцированного излучения, которое в значительной степени является когерентным. Причем интенсивность импульсов сравнима с интенсивностью спонтанного излучения.

Именно результаты данного анализа позволяют ожидать, что данный механизм может быть одной из причин формирования в космических условиях в атмосферах звезд, где относительные уровни инверсии крайне невелики, когерентных импульсов примерно одной длительности. Ниже обсудим возможность подобных процессов.

Литература к разделу 5

5-1. Brown Hanbury R., Twiss R. Q. Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory: the correlation between photons in coherent beams of radiation"// Proc of the Royal Society of London. 1957. – V. A 242 (1230). – P. 300–324; Interferometry of the intensity fluctuations in light. II. An experimental test of the theory for partially coherent light // Ibid 1958. – V. A 243 (1234). – P. 291–319.

5-2. Zagorodny A. G., Kuklin V. M. To realization conditions of maser radiation // High-power pulsed electrophysics. International conference XIV Khariton's topical scientific readings. Digest of technical papers – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2013. – P. 38–43.

5-3. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Mischin A. V., Pryjmak A. V., Zagorodny A. G. On the formation of pulses of coherent radiation in weakly inverted media/ VANT, 2013, N. 4 (86). – series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration" issue 8. – P. 267–271.

РАЗДЕЛ 6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СВЕТИМОСТИ КВАНТОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим источник излучения и выделим в нем слой, где находится среда, способная формировать периодические импульсы излучения. Например, такой слой в звездах может быть локализован в области фотосферы. В некоторых случаях может оказаться несколько таких слоев. Можно моделировать активную зону этого слоя двухуровневой квантовой системой, причем населенности этих двух уровней будем считать примерно равными. При весьма незначительном превышении населенности верхнего

уровня (инверсия населенностей при этом положительна) кроме спонтанного излучения возможна генерация индуцированного излучения, порог возникновения которого был обнаружен в работах [6-1, 6-2]. При достаточной толщине вышележащих слоев за счет эффектов рассеяния в них излучения, исходящего из активной зоны двухуровневой системы, там вполне может формироваться спектр излучения абсолютно черного тела [6-3].

Кроме этого, будем предполагать существование сильных конвективных потоков, исходящих из более близких к горячей области источника слоев, которые способны вносить в активную зону некоторую долю возбужденных атомов этого активного вещества. То есть, такие конвективные потоки способны увеличивать инверсию населенностей в активной зоне. Можно убедиться в том, что интенсивность индуцированного излучения данной спектральной линии, описываемого двухуровневой системой, способна заметно превысить не только спонтанную интенсивность атомов данного вещества, но и в целом спонтанное излучение всего сферического источника.

Обсудим возможность генерации периодических импульсов индуцированного излучения в нагретом газе с долей активных частиц, находящихся в двух состояниях (двухуровневая система). Важно, что в некоторой активной зоне источника излучения число активных частиц на двух энергетических уровнях примерно равно, инверсия населенностей много меньше общего числа частиц. В этих условиях интенсивность индуцированного излучения оказывается сравнимой с интенсивностью спонтанного излучения. Предполагается, что в этой активной зоне, прозрачной для излучения на частоте энергетического перехода, за счет конвекции из нижележащих плотных слоев поступают активные частицы, находящиеся в возбужденном состоянии. То есть в активной зоне существует источник инвертированных (возбужденных) активных частиц.

Рассмотрение будем проводить для условий примерного равенства числа состояний на двух рабочих уровнях [6-4, 6-5], то есть в условиях превышения порога (5.8). Кроме того, будем считать, что система близка к порогу (5.7). Уравнения (5.1) и (5.2) можно записать в виде

$$\partial n_2 / \partial \tau = -g \cdot n_2 - \mu \cdot N_k + \frac{\nu}{w_{21}} n_1 \quad (6.1)$$

$$\partial n_1 / \partial \tau = +g \cdot n_2 + \mu \cdot N_k - \frac{\nu}{w_{21}} n_1, \quad (6.2)$$

или иначе

$$\partial \mu / \partial \tau = [(\nu - u_{21}) / w_{21}] \cdot n_1 - 2\mu \cdot N_k, \quad (6.3)$$

где ν – эффективная частота столкновений с быстрыми электронами среды, которая обеспечивает переход с нижнего энергетического уровня квантовой системы на верхний энергетический уровень. При этом $\nu \approx u_{21}$,

$T/t = X/x = w_{21} \cdot \mu_0$ и можно ввести в рассмотрение величину $[(v - u_{21}) / w_{21}] n_1 = \mu_0^2 I_0$.

Уравнения системы (5.6) при этом можно представить в виде

$$\partial M / \partial T = I_0 - 2M \cdot N_c, \quad (6.4)$$

$$\partial N_{inc} / \partial T = N_0 / 2 - \theta \cdot N_{inc}, \quad (6.5)$$

$$\partial N_c / \partial T = M \cdot N_c - \theta \cdot N_c. \quad (6.6)$$

Будет также считать, что пороги (5.7) и (5.8) $\mu_{TH2} \approx \mu_{TH1} = 2\delta / w_{21}$ близки. В этом случае затухающие релаксационные колебания приведут систему к стационарному состоянию $N_{cst} \approx -1 + I_0 / 2\theta$ и $M_{st} = \theta$. Плотность потока излучения при этом достигнет величины $\theta \cdot N_{cst} + \theta \cdot N_{incst} = (I_0 - 2\theta) / 2 + N_0 / 2 \geq N_0 / 2$.

Однако в присутствии внешнего источника инверсии, пропорционального K , ее величина будет больше стационарного значения. При выполнении условия равновесия процессов столкновительного возбуждения свободными электронами основного газа активных атомов и их излучательной релаксации ($I_0 = 0$)

$$\partial M / \partial T = K \cdot M - 2M \cdot N_c + I_0, \quad (6.7)$$

Одним из возможным механизмом поддержки инверсии в системе может оказаться перенос ее из других внутренних слоев источника излучения

$$-V \cdot \partial M / \partial X \approx V \frac{M}{L} = KM > 0, \quad (6.8)$$

где $-V \cdot \nabla M \approx V \cdot M \cdot L^{-1} = V \cdot M / (l \cdot w_{21} \cdot \mu_0)$ отвечает за конвективный перенос инверсии из более плотных нижележащих слоев источника. Уравнения (6.5) – (6.7) подобны Statz-DeMars уравнениям [6-6], которые и описывают релаксационные колебания с установлением стационарного состояния при отрицательном первом слагаемом правой части (6.7).

Именно поток инверсии в область активной среды способен привести к изменению характера колебаний: релаксационных на периодические. В этом случае можно наблюдать появление периодических импульсов индуцированного излучения (подобного изображенному на рис. 5.2) на фоне среднего потока излучения

$$\theta \cdot N_{cst} + \theta \cdot N_{incst} = (\Gamma \theta + N_0) / 2, \quad (6.9)$$

При $I_0 > 0$, когда столкновительное возбуждение велико, индуцированное излучение носит монотонный характер, в случае $I_0 < 0$ индуцированного излучения нет. То есть, генерация периодических импульсов обнаруживает себя только в условиях равновесия процессов столкновительного возбуждения свободными электронами основного газа активных атомов и их излучательной релаксации в основном за счет спонтанного излучения $I_0 = 0$. При этом интегральная интенсивность излучения во время появления импульса может увеличиваться в несколько раз. Следует отметить, что рассмотренное явление авторы [6-4, 6-5] заметили только при условии равновесия $I_0 = 0$ и также в случае близости порогов генерации (5.7) и (5.8) (см. Приложение VI).

Отметим, что систему балансных уравнений (6.6) и (6.7) при больших значениях ширины линии γ_{12} и условиях $K = I_0 = 0$ не трудно получить из системы уравнений (4.7)–(4.10) полуклассической модели (см. раздел 4), при этом справедливо соотношение $w_{21} = \Omega_0^2 / \mu_0 \cdot \gamma_{12}$, откуда следует $T = \Omega_0^2 t / \gamma_{12}$.

Можно систему (6.5)–(6.7) свести к однопараметрической:

$$\frac{\partial M_2}{\partial \tau_2} = K_2 \cdot M_2 - 2M_2 \cdot N_2, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \tau} = M_2 \cdot N_2 - 2N_2, \quad (6.11)$$

где $\tau = \delta \cdot t$, $M_2 = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\Omega_0^2}{\delta \cdot \gamma_{12}}$, $N_2 = \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi\hbar\omega} \frac{\Omega_0^2}{\delta \cdot \gamma_{12}}$, $\Omega_0 = |d_{ab}| \cdot [4\pi\omega \cdot \mu_0 / \hbar]^{1/2}$, γ_{12} –

ширина спектральной линии, $K_2 = K \cdot w_{21} \cdot \mu_0 / \delta = 2K \cdot (\Omega_0^2 / \delta\gamma_{12}) = 2K / \theta$.

Эти уравнения описывают генерацию индуцированного излучения, с числом квантов в единице объема $N_c = N_k^{(coh)}$, которое представляет собой периодические импульсы с некоторой постоянной составляющей.

Кроме того, есть спонтанная некогерентная составляющая этого же источника, относительное число квантов которой равно $N_{inc} = N_k^{(incoh)} / \mu_0$, описываемая, например, уравнением (5.5). Значительная часть излучения квантового источника – это индуцированное излучение, которое практически монохроматическое. Однако если квантовый источник окружен достаточно протяженной атмосферой, за счет многократного рассеяния, как отмечается в [5-3], характеристики излучения будут приближаться к характеристикам излучения абсолютного черного тела. Полное относи-

тельное число квантов излучения в единице объема равно $N = N_{inc} + N_c$, причем в спонтанном излучении следует учитывать уже все виды излучения подобной природы, а не только излучение квантового источника. Важно отметить, что несмотря на крайне небольшую инверсию населенностей, интенсивность индуцированного излучения вполне может превосходить интенсивность спонтанного.

Система (6.10) – (6.11) имеет особую точку $(2, K_2 / 2)$ и стационарное решение: $M_2 = 2, N_2 = K_2 / 2$. В случае малых отклонений M_2, N_2 от особой точки систему можно линеаризовать и получить уравнение для фазовой траектории: $K_2 (M_2 - 2)^2 + 8(N_2 - K_2 / 2)^2 = Const$. Фазовая траектория оказывается замкнутой линией, что свидетельствует о наличии устойчивых периодических решений.

На рис. 6.1–6.2 приведены зависимости от времени M_2, N_2 и фазовые траектории для разных случаев удаления от критической точки при $K_2 = 20$. Начальные значения для M_2 задавались постоянным $M_2(0) = 2$, выбор кривой регулировался удалением начального значения $N_2(0)$ от его критического значения, равного 10.

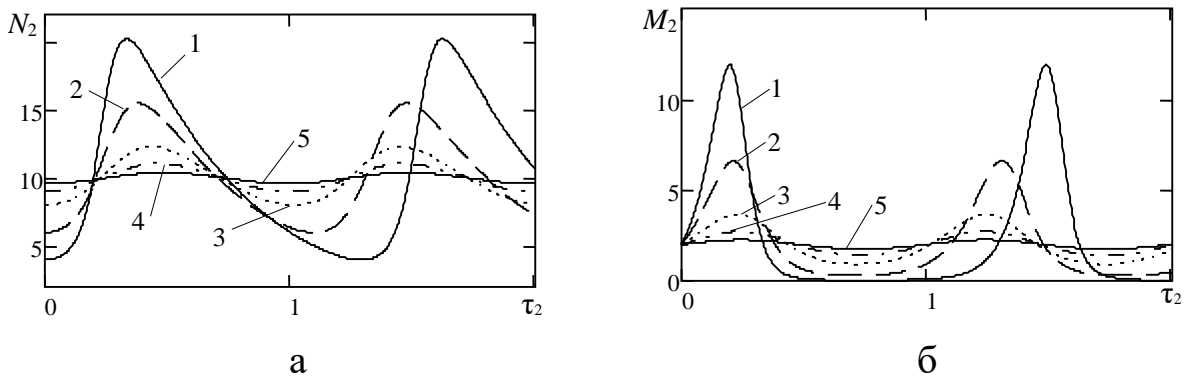


Рис. 6.1. а). Поведение относительной величины плотности квантов N_2 как функции времени τ_2 ; б) Поведение относительной плотности инверсии населенностей M_2 как функции времени τ_2 , при 1 - $N_2(0) = 4$, 2 - $N_2(0) = 6$, 3 - $N_2(0) = 8$, 4 - $N_2(0) = 9$, 5 - $N_2(0) = 9.6$

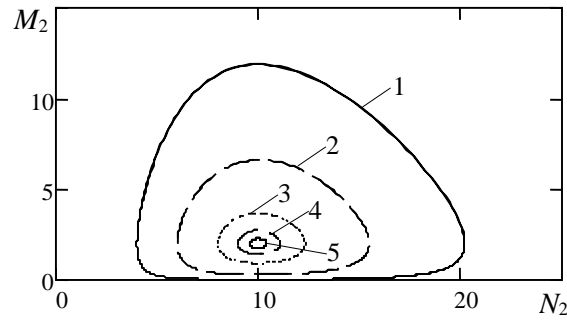


Рис. 6.2. Фазовые диаграммы (M_2, N_2) для системы уравнений (6.10) – (6.11) при выборе начальных условий в виде при 1 - $N_2(0) = 4$, 2 - $N_2(0) = 6$, 3 - $N_2(0) = 8$, 4 - $N_2(0) = 9$, 5 - $N_2(0) = 9.6$

Для наглядности в таблице 6.1. приведены минимальное число квантов N_{2min} (постоянная составляющая в индуцированном излучении), максимальное число квантов N_{2max} , среднее значение числа квантов N_{2av} , размах колебаний, $N_{2max} - N_{2min}$ и период колебаний T_2 . Следует отметить, что среднее значение относительного числа квантов N_{2av} зависит только от выбора положения центра диаграммы – его критического значения $K_2 / 2$.

Таблица 6.1

Расчет	N_{2min}	N_{2max}	N_{2av}	$N_{2max} - N_{2min}$	T_2
1	4	20,188	10	16,188	1,289
2	6	15,474	10	9,474	1,0964
3	8	12,308	10	4,308	1,0147
4	9	11,071	10	2,071	0,9984
5	9,635	10,374	10	0,739	0,9941

График изменения количества квантов N_2 имеет вид синусоиды для фазовых траекторий вблизи критической точки (расчеты 4 и 5). Для фазовых траекторий вдали от критической точки (расчеты 1, 2) график изменения N_2 принимает вид пилы: резкий рост и медленное убывание. Подобное поведение характерно для светимости звезд цефеид, где термоядерный синтез дошел до своего предельного элемента – железа: значительные пилообразные колебания светимости звезд, дельты Цефея и небольшие синусоидальные колебания Полярной звезды.

Можно представить решения (6.10) – (6.11) в принятых в астрофизике переменных, например связь видимой звездной величины m и светимости L (с использованием известной величины расстояния до звезды в парсеках d) $m = M_{lsun} + 5\lg(d / 10) - 2.5\lg(L)$; соотношение между абсолют-

ной звездной величиной M_1 (видимая звездная величина с расстояния в 10 парсек) и видимой звездной величины m , то есть $M_1 = m - 5 \lg(d/10)$.

Решения уравнений (6.10) – (6.11), представлены на рис. 6.3 и 6.4. Здесь изображено изменение звездной величины звезды дельты Цефея [6-8] и Полярной звезды [6-9] (Детальнее см. приложение VI). По оси ординат отложены значения видимой звездной величины, по оси абсцисс время в долях периода изменения яркости звезды.

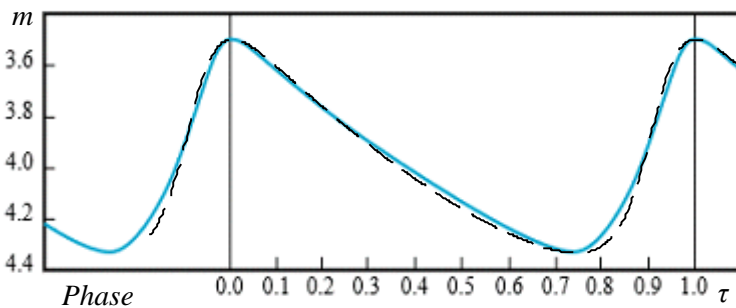


Рис.6.3. Изменение звездной величины звезды дельты Цефея со временем. (сплошная кривая – полученная в 1930-е гг. Н. Ф. Флорей при помощи визуального фотометра) см., например, [6-10] и решение уравнений системы (6.10) – (6.11) в тех же переменных, при подборе уровня спонтанного излучения и масштабов (пунктир)

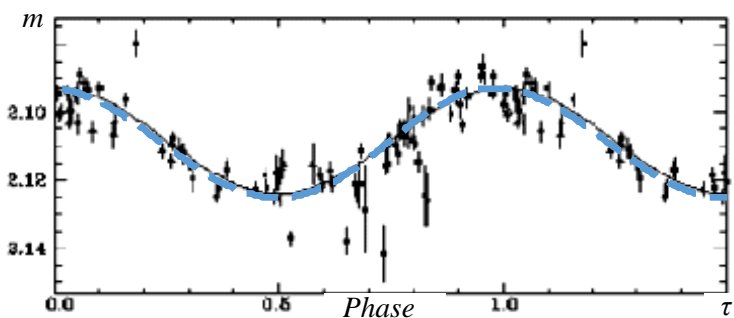


Рис. 6.4. Изменение звездной величины Полярной звезды со временем⁷ (сплошная кривая) и решение уравнений системы (6.10), (6.11) в тех же переменных, при подборе уровня спонтанного излучения и масштабов (пунктир)

Литература к разделу 6

6-1. Zagorodny A. G., Kuklin V. M. To realization conditions of maser radiation// High-power pulsed electrophysics. International conference XIV

⁷ Тривиальное решение системы (6.10)-(6.11) $M_2 = 2$, $N_2 = K_2/2$ является в то же время так называемым особым решением [6-11] (см. также [6-12]), в окрестности которого даже небольшие возмущения способны приводить к перескоку с одной фазовой траектории на другую. По-видимому, смены периода изменения светимости Полярной звезды обусловлены этим неустойчивым состоянием вблизи точки $M_2 = 2$, $N_2 = K_2/2$.

Khariton's topical scientific readings. Digest of technical papers – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2013. – P. 38–43.

6-2. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Mischin A. V., Pryjmak A. V., Zagorodny A. G. On the formation of pulses of coherent radiation in weakly inverted media / VANT, 2013, N. 4 (86). – series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration” issue 8. – P. 267–271.

6-3. С. Б. Пикельнер. Атмосферы звезд
<http://www.astronet.ru/db/msg/1179555>

6-4. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G. On the nature of sources of pulsating radiation in weakly inverted media / Problems of Atomic Science and Technology, 2015. – N 4 – P. 9–11.

6-5. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G. On the nature of periodically pulsating radiation sources // arXiv preprint arXiv / 1610.04628v1 [quant-ph] – 2016.

6-6. Statz C. L., DeMars G. Quantum Electronics. N.Y.: Columbia Univ. Press, 1960. – 530 p.

6-7. Kostenko V. V., Kuklin V. M., Poklonskiy E. V. On the periodic change of the luminosity of the cosmic sources with an active medium / East Eur. J. Phys. 2. 48-56 (2020) DOI:10.26565/2312-4334-2020-2-03.

6-8. Jim Kaler, Stars and stars of the week. University of Illinois.
<http://stars.astro.illinois.edu/sow/deltacep.html>

6-9. Jim Kaler, Stars and stars of the week. University of Illinois.
<http://stars.astro.illinois.edu/sow/polaris.html>

6.10. Samus, N. N. & Durlevich, O. V. (April 2011), GCVS – General Catalog of Variable Stars, Institute of Astronomy of Russian Academy of Sciences and Sternberg State Astronomical Institute of the Moscow State University.

6.11. Стеклов В. А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Гостехиздат, 1927. – С. 409.

6.12. Буц В. А. Регулярная и хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействиях волна-частица // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин. – X. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2 – 376 с.

РАЗДЕЛ 7.

ТУРБУЛЕНТНО-ВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Турбулентно-волновая неустойчивость представляет собой взаимодействие медленной (в сравнении с характерным временем турбулентных пульсаций) волны конечной амплитуды $\psi = A \exp[i(Kx - \Omega t)]$ с турбулентной

средой, пульсации которой поддерживаются постоянно действующим источником, и находящейся в отсутствии волны вблизи порога развития неустойчивости (то есть, процесса роста турбулентной энергии). Для описания подобного явления в различных физических реализациях существует представленная в работах [7-1, 7-2] универсальная система уравнений.

Исследования турбулентно-волнового взаимодействия в стратифицированной жидкости со сдвиговым течением, находящейся вблизи границы устойчивости (то есть, при $Ri_0 \geq Ri_{cr}$ где $Ri_{cr} \equiv N^2/U_0'^2$ – критическое число Ричардсона близкое к 1/4, $N^2 = g \cdot \rho_0^{-1} \rho_0'(z)$ – частота Вяйсэля-Брента, $\vec{U} = (U_0(z), 0, 0)$ – скорость потока жидкости) при наличии внутренней волны были предприняты в ряде работ [7-3, 7-4]. Как показано в этих работах, внутренняя волна способна изменить значения сдвига скорости и привести к развитию мелкомасштабной турбулентности, которая за счет положительной обратной связи с внутренней волной приводит к так, называемой, турбулентно-волновой неустойчивости. Особой проблемой при описании взаимодействия внешней волны и инициированной её турбулентности является вычисление коэффициентов этого взаимодействия.

Одним из основных методов описания турбулентности является метод статистических моментов, основанный на представлении гидродинамических величин в виде суммы осредненной и случайной компонент. После подстановки этих величин в гидродинамические уравнения и последующего осреднения по ансамблю реализаций получается бесконечная система уравнений для статистических моментов, где основной задачей является вопрос замыкания этой системы. Для развитой турбулентности, обычно используют схемы замыкания, согласно которой турбулентные потоки (статистические моменты второго порядка) полагаются пропорциональными градиентам соответствующих осредненных величин (например, скорости U_i), в частности, турбулентный поток импульса в однородной изотропной турбулентности принимается равным

$$-(u_i u_j) = \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} E, \quad (7.1)$$

где E – энергия турбулентности и u_i – скорость турбулентных пульсаций, ν_T – коэффициент турбулентной вязкости, для определения которого требуется привлечь дополнительные физические соображения. Ранее А. Н. Колмогоров предположил, что молекулярный перенос пренебрежимо мал по сравнению с турбулентным, и определил вид $\nu_T \sim L\sqrt{E}$, где масштаб турбулентности L в общем случае, является функционалом течения

(энергии турбулентности), то есть, v_T зависит только от кинетической энергии E и характерного масштаба турбулентности L . Для турбулентности, вблизи порога неустойчивости, эти предположения (или, по крайней мере, второе) могут оказаться не справедливыми. Система уравнений, связывающая амплитуду внутренней волны и энергию турбулентности, были получены в работах [7-3, 7-4], где коэффициенты связи рассчитывались на основе гипотезы Колмогорова, что привело к появлению решений, не во всех областях изменения исследуемых переменных имеющих физическую интерпретацию.

Поэтому, имело смысл сформулировать другую гипотезу (см. [7-2]), на основе которой могут быть найдены турбулентные потоки: *вблизи порога неустойчивости, между пульсациями отдельных величин (плотности, давления, скорости и т. д.) сохраняются те же соотношения, что и на начальной стадии процесса, который порождает и усиливает турбулентность.*

То есть корреляции между величинами навязаны процессами, породившими и усиливающими турбулентность. Заметим, что подобный подход является конструктивным и для других задач, в частности, для более корректного описания переноса в плазменноподобных средах и использовался в ряде работ. Использование предложенной модели замыкания при выделении в плотности энергии турбулентности E нулевой и первой гармоники её пространственно-временного распределения следующим образом $E = W_0 + W_1 \exp[i(K_0x - \Omega_0t)]$, позволило получить следующую систему нелинейных уравнений (см. приложение VII):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0}{\partial \tau} &= -\bar{\varepsilon}_0 W_0 + \alpha \operatorname{Im}(A W_1^*) - \lambda \operatorname{Re}(A W_1^*) + \bar{q} \\ \frac{\partial W_1}{\partial \tau} &= -\bar{\varepsilon}_0 W_1 + i\alpha A W_0 + \lambda A W_0, \\ \partial A / \partial \tau &= -\mu W_1, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где A, Ω, K – амплитуда, частота и волновое число внутренней волны, W_1 – переменная составляющая (имеющая пространственно-временную зависимость, пропорциональную $\exp\{i(Kx - \Omega t)\}$) и W_0 – среднее значение энергии мелкомасштабных пульсаций, $\bar{\varepsilon}_0 \propto (Ri_0 - Ri_{cr})$ – величина, характеризующая отклонение от порога роста турбулентности, \bar{q} определяет воздействие на систему внешних флуктуаций, α, λ, μ – параметры, определяющие связь между сдвиговым течением и амплитудой внутренней волны.

Можно найти аналогичный механизм взаимодействия волны с турбулентностью в случае неизотермической плазмы, в присутствии электронного пучка малой плотности. Система пусть находится вблизи порога неустой-

чивости, которая могла бы привести к росту ленгмюровских колебаний. Тем не менее, уровень турбулентных пульсаций, в отсутствие волны вблизи порога неустойчивости, достаточно значительный. Механизмом, который может привести к развитию такой неустойчивости и усилению ленгмюровской турбулентности может служить ионно-звуковая волна конечной амплитуды, при этом частота и волновое число ионно-звуковой волны много меньше соответствующих значений ленгмюровских колебаний. Оказывается, (см. [7-1]) и в этом случае система уравнений, описывающая взаимодействие ионно-звуковой волны и плотности энергии волновой турбулентности, в соответствующих пространственно-временных масштабах записывается в том же виде (7.2). Таким образом, можно предположить, что система уравнений (7.2) является универсальной, по крайней мере, для описания взаимодействия волны и турбулентности в среде, находящейся вблизи порога устойчивости (см. приложение VII).

Численный анализ уравнений показал, что существует область значений параметров α , и β , когда имеет место неэкспоненциальный рост амплитуды волны и энергии турбулентности одновременно, обусловленный их нелинейным взаимодействием за счет постоянно действующего источника энергии турбулентных пульсаций. Взаимное усиление волны и турбулентности имеет место на конечных временах порядка $\tau_{ampl} \sim 10|\bar{\epsilon}_0|^{-1}$. В результате развития неустойчивости волна провоцирует появление пространственно выделенных структур – областей роста турбулентных пульсаций. Начальное значение $W_0(\tau=0) = q/\epsilon_0$.

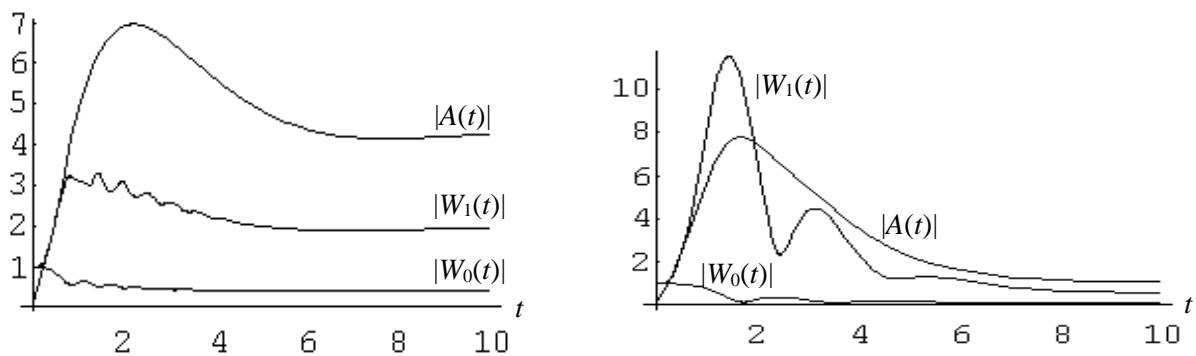


Рис. 7.1. Результаты решения системы уравнений (7.2)

для случая $\bar{\epsilon}_0 = \bar{q} = 1$, а) $\alpha = 5$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 1$;

б) $\alpha = 5$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.1$

С другой стороны, наличие турбулентной среды, находящейся вблизи порога неустойчивости, приводит к росту амплитуды волны, что позволит использовать это явление для диагностики критических зон, где велика вероятность катастрофических процессов. Так как

представленный в Приложении VII вывод турбулентно-волновой неустойчивости основан на уравнениях классической физики, то можно ожидать, что применение подобного (7.2) подхода позволит описать множество явлений⁸.

Важно отметить, что развитие процесса неустойчивости происходит в основном за счет запасенной в турбулентных пульсациях энергии, которая вблизи порога неустойчивости аномально велика (подобно тому, как это происходит при критической опалесценции). Турбулентность в свою очередь прямо связана с температурой. Возбуждение неустойчивости, которая представляет собой уже макроскопическое и масштабное возмущение за счет энергии микроскопического турбулентного состояния, (которое воспринимается как разогретая область с большим уровнем флуктуаций), может иной раз представляться как прямая передача флуктуационной (или тепловой) энергии в макроскопические движения.

Литература к разделу 7

7-1. Киричок А. В., Корсунский С. В., Куклин В. М. Пример турбулентно-волновой неустойчивости в плазме // Доклады АН Украины, 1994. – № 11. – С. 85–89.

7-2. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Panchenko I. P., Moiseev S. S. Wave-Turbulence Instability in Nonequilibrium Hydrodynamics Systems // Physics and Chemistry of the Earth. Part A. 1999. – № 6. – P. 539–541.

7-3. Chimonas G. The stability of a coupled wave-turbulence system in a parallel shear flow. – Bound.-Layer Meteor., 1972. – V. 2. – P. 444–452.

7-4. Fua D., Chimonas G., Einaudi F., Zeman O. An analysis of wave-turbulence interaction. – J. Atmos. Sci., 1982. – V. 39. – N. 11. – P. 2450–2463.

⁸ Энергия синхронного роста амплитуды волны и локального возмущения турбулентности черпается из общей энергии турбулентности. Поэтому после прохождения волны и локального роста турбулентных пульсаций уровень турбулентности снижается. Небольшие возмущения способны лишь диагностировать характер распределения турбулентной зоны. При превышении начальной амплитуды волны она из диагностирующей способна превратиться в иницирующую, провоцирующую заметный выброс турбулентной энергии. Этим явлением заинтересовались военные, которые в 80-годах вблизи сейсмически активных зон крайне неосторожно проводили испытания сейсмологического оружия – геофизических бомб.

ГЛАВА 3. Пространственно-временная динамика некоторых типов неустойчивостей

Рассмотрена пространственно-временная динамика развития некоторых видов взаимодействия волн и возмущений в пренебрежении их собственной нелинейностью. Это возможно, так как дисперсионные свойства собственных волн в среде в значительно большей степени определяют их поведение в сравнении с разными видами нелинейных механизмов, по крайней мере в подавляющем числе случаев. Показано, что переход в движущуюся относительно лабораторной систему отсчета облегчает описание процессов генерации и усиления колебаний, а также упрощает определение условий развития конвективной и абсолютной неустойчивости.

РАЗДЕЛ 8.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА РАСПАДНОЙ ТРЕХВОЛНОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Обсудим развитие в пространстве и времени распадной неустойчивости, о которой речь шла в разделе 3. Вообще говоря в одномерном случае при взаимодействии трех волн выполняются условия $\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$ и $k_0 \approx k_1 + k_2$, при этом развитие процесса можно понять, рассматривая закон сохранения энергии $\Delta E_0 \approx \Delta E_1 + \Delta E_2$, где ΔE_i – изменение энергии i -той волны. Представляя $\Delta E_i = \hbar \omega_i \cdot \Delta N_i$, где ΔN_i – изменение числа квантов i -той волны, придем⁹ снова к соотношению $\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$, при этом с необходимостью следует $\Delta N_0 = \Delta N_1 = \Delta N_2$. В отсутствии поглощения энергии распад волны ω_0 периодически сменяется синтезом волн $\omega_1 + \omega_2$, однако при учете поглощения энергии в системе, подобная периодичность обмена энергиями нарушается. Ниже рассмотрим процесс распада высокочастотной волны большой амплитуды с частотой ω_0 и волновым числом k_0 в условиях поглощения одной из возбуждаемых волн.

⁹ Впервые соотношения такого типа получены в работе [8-1].

Если волны с частотой ω_i и волновыми числами k_i являются собственными волнами среды, в определенных условиях возможен распад основной волны большой амплитуды, который подчиняется условиям пространственного синхронизма $k_0 = k_1 + k_2$, тогда для частот справедливо приближенное выражение $\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$. При выполнении условия временного синхронизма $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ то для волновых векторов можно также приближенно написать соотношение $k_0 \approx k_1 + k_2$. В первом случае говорят о генерации колебаний (ω_i, k_i) , во втором – об усилении. Действительно, в первом случае пространственного синхронизма расстройка $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ может иметь мнимую часть, что отвечает увеличению (или уменьшению) амплитуд связанных волн $\propto \exp\{\text{Im } \Delta\omega \cdot t\}$, где $\text{Im } \Delta\omega$ – (временной) инкремент (или декремент) неустойчивости. То есть это соответствует процессу генерации двух волн. Во втором случае частоты волн фиксированы, $k_0 - k_1 - k_2 = \Delta k$ растет лишь амплитуда вдоль координат $\propto \exp\{\text{Im } \Delta k \cdot x\}$, где $-\text{Im } \Delta k$ пространственный инкремент (или декремент) процесса.

Однако такое представление является упрощенным. В действительности, следует иначе рассматривать данные процессы в их пространственно-временной динамике. Неустойчивости волны (ω_0, k_0) , вообще говоря, представляют, как возбуждение спектра волн, которые подчиняются лишь приближенному пространственно-временному синхронизму

$$k_0 - k_1 - k_2 - \Delta k = 0, \quad \omega_0 - \omega_1 - \omega_2 - \Delta\omega = 0, \quad (8.1)$$

где $(\Delta\omega, \Delta k)$ отвечают медленно меняющейся во времени и в пространстве огибающей.

Другими словами, полезно для связанных условиями (8.1) двух волн использовать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \delta_1 A_1 &= \alpha_1 A_2 \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + \delta_2 A_2 &= \alpha_2 A_1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $A_i; v_i; \delta_i$ – соответственно амплитуда, групповая скорость и декремент поглощения i – той волны, $\alpha_i = \alpha_i(A_0)$ – коэффициенты связи между волнами, здесь пропорциональные амплитуде A_0 основной неустойчивой волны (ω_0, k_0) . Для упрощения расчетов ниже будем считать, что быстрая волна ($v_1 > v_2$) практически не затухает ($\delta_1 \ll \delta_2$). Такой процесс был изучен численными методами в работах Л. М. Горбунова в 1972–1977 г., где было наглядно показано изменение режима при учете

затухания одной из волн. Однако оказывается возможно конструктивное аналитическое представление характера подобной неустойчивости.

Дальнейшее рассмотрение удобно проводить в движущейся со скоростью V относительно лабораторной системе отсчета $(\xi = x - Vt, t)$, причем $v_2 < V < v_1$. Оказывается, в этом интервале скоростей для некоторого значения скорости системы отсчета V можно найти режим, когда волновой пакет – огибающая колебаний в этой системе отсчета, – не будет смещаться как целое в пространстве. Такая неустойчивость называется **абсолютной**. Отметим, если в данной системе отсчета волновой пакет движется (сносится) в пространстве – подобная неустойчивость в этой системе отсчета носит название **конвективной**.

Вопрос о характере неустойчивости активно исследовался многими авторами, обширная библиография работ которых приведена в книгах [8-2, 8-3]. Наиболее содержательным описанием характера неустойчивости является приведенное в книге [8-4]. К сожалению иногда подобные описания являются достаточно громоздкими, и авторы увлекаются частностями. Поэтому рационально перейти в движущуюся систему координат, скорость которой позволяет найти режим абсолютной неустойчивости, что было сделано в работе [8-5].

Понятно, что одна и та же неустойчивость в одной системе отсчета может оказаться абсолютной, а во всех других будет конвективной – сносовой. Для возмущений вида $\approx \exp\{-i\Omega t + iK\xi\}$ в движущейся системе отсчета можно представить дисперсионное уравнение

$$D(\Omega, K) = (\Omega - Kv_1 + KV)(\Omega + KV - Kv_2 + i\delta_2) + \alpha_1\alpha_2. \quad (8.3)$$

Для определения значения Ω , отвечающего развитию абсолютной неустойчивости необходимо совместно решить уравнения (см. приложение VIII)

$$D(\Omega, K) = 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial D(\Omega, K)}{\partial K} = 0, \quad (8.5)$$

то есть, это условие развития неустойчивости, при котором групповая скорость распространения пакета-огибающей колебаний, – равна нулю

$$V_g = -\left[\frac{\partial D(\Omega, K)}{\partial K}\right] / \left[\frac{\partial D(\Omega, K)}{\partial \Omega}\right] = 0. \quad (8.6)$$

Решая совместно уравнения (8.4), (8.5) получим

$$\Omega_{ab} = \frac{i\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{v_1 - v_2} \{2[(v_1 - V)(V - v_2)]^{1/2} - \theta(v_1 - V)\}, \quad (8.7)$$

$$K_{ab} = \frac{\Omega_{ab}(2V - v_1 - v_2) - i\delta_2(v_1 - V)}{2(v_1 - V)(V - v_2)}, \quad (8.8)$$

где $\theta = \delta_2 / (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2} = \delta_2 / \gamma_0$ – отношение декремента поглощения в отсутствии неустойчивости ($\gamma_0 = 0$) к максимально возможному инкременту бездиссипативной неустойчивости ($\delta_2 = 0$). Параметр θ , как будет видно из дальнейшего, является определяющим при описании характера, так называемых **диссипативных неустойчивостей** в средах с конечным уровнем потерь. Очевидно абсолютная неустойчивость будет развиваться только при скоростях больших критической V_{cr}

$$V > V_{cr} = (v_1 + 4\theta^{-2}v_2) / (1 + 4\theta^{-2}), \quad (8.9)$$

Наибольший временной инкремент как функцию скорости V не трудно определить из выражения (8.7)

$$(\text{Im}\Omega_{ab})_{\max} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \{(4 + \theta^2)^{1/2} - \theta\} / 2, \quad (8.10)$$

достигается он при сносовой скорости

$$V_T = \frac{v_1 + v_2}{2} + \theta \frac{v_1 - v_2}{2(4 + \theta^2)^{1/2}}. \quad (8.11)$$

Важно отметить, что при этом $\text{Im}K_{ab} = 0$. То есть форма движущегося со скоростью V_T пакета меняться не будет. При других значениях скорости системы отсчета $V_{cr} < V < v_1$, рост в фиксированной точке амплитуд волн будет подавляться сносом волнового пакета.

Другими словами, огибающая волнового пакета как целое не смещается в пространстве только в системе отсчета, которая движется со скоростью V_T . При меньшей или большей скорости V системы отсчета в интервале $v_1 < V_{cr} < V < v_2$ в области вблизи фиксированной точки ξ также можно наблюдать рост амплитуды пакета. Однако из-за сноса этого пакета как целого, этот рост будет не столь значительным.

Как показано в работе [8-5] максимум амплитуды пакета растет во времени с временным инкрементом (8.10) и быстро сносится со скоростью V_T к границам системы, после чего устанавливается значительно меньшая амплитуда поля. Тем не менее ее можно определить. Пространственный инкремент процесса как функция сносовой скорости будет равен

$$\text{Im}K(V) = \text{Im}\Omega_{ab}(V) / V, \quad (8.12)$$

и достигается в результате баланса процессов роста и выноса энергии. Наибольшее усиление отвечает скорости

$$V_L = \frac{4v_1v_2 + \theta^2v_1^2}{(v_1 + v_2)^2 + \theta^2v_1^2} \left[\frac{v_1 + v_2}{2} + \theta v_1 \frac{v_1 - v_2}{2} (4v_1v_2 + \theta^2v_1^2)^{-1/2} \right]. \quad (8.13)$$

В отсутствии потерь энергии ($\theta = 0$) для оптимальной сносовой скорости и наибольшего пространственного инкремента, получим известные выражения

$$V_L = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}, \quad \text{ImK} = \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{v_1v_2}}. \quad (8.14)$$

Если же неустойчивость диссипативная, и уровень поглощения достаточно велик $\theta^2 \frac{v_1}{v_2} \gg 1$, то для оптимальной сносовой скорости и наибольшего пространственного инкремента в таком диссипативном режиме справедливы оценки

$$V_L \approx \frac{v_1}{1 + \theta^{-2}}, \quad \text{ImK} \approx \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{v_1\theta}. \quad (8.15)$$

Таким образом, за время $\tau_T \approx L/V_T$, амплитуда поля увеличивается на границе системы в $\exp\{(\text{Im}\Omega_{ab})_{\max} \cdot \tau_T\}$ раз. После чего за времена $\tau_L \approx L/V_L > \tau_T$ устанавливается стационарное состояние с заметно меньшим значением амплитуды, пропорциональным $\exp\{\text{Im}\Omega_{ab}|_{V=V_L} \cdot \tau_L\}$.

Литература к разделу 8

- 8-1. Manley J. M., Rowe H. E., Some general properties of nonlinear elements, pt 1 – General energy relations, "Proc. IRE", 1956. – V. 44. – № 7. –Р. 904.
- 8-2. Электродинамика плазмы / А. И. Ахиезер и др. Под редакцией А. И. Ахиезера. – М. – 1974. – 719 с.
- 8-3. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
- 8-4. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. – М. : Наука, 1981. – 176 с.
- 8-5. Куклин В. М. О влиянии диссипативных процессов на пространственно-временную динамику неустойчивости в плазме. // Радиотехника и электроника. 1987. – Т. 32. – В. 2. – С. 432–434.

РАЗДЕЛ 9. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Развитие кинетической неустойчивости. Рассмотрим пространственно-временную динамику процессов, обсуждаемых в предыдущих главах. В разделе 2 частицы пучка электронов средняя и тепловая скорости которого равны соответственно v_{0b}, v_{Tb} , а невозмущенная плотность n_{b0} , возбуждали ленгмюровские колебания в плазме с частотой ω_{pe} и волновым числом $k \approx \omega_{pe} / v_{0b}$, то есть электрическое поле которых можно представить в виде $E(t, x) \cdot \exp\{-i\omega t + ikx\}$. Вдали от порога возбуждения такой (кинетической) пучковой неустойчивости ($\gamma_L > \delta_D$), которая реализуется при выполнении условия

$$v_{Tb} / v_{0b} > (n_{b0} / n_{p0})^{1/3}, \quad (9.1)$$

доминирует индуцированное излучение электронов пучка и уравнения для медленно меняющегося поля волны $E(t, x)$ можно представить в виде (см., например, [9-1,9-2])

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v_g \frac{\partial E}{\partial x} - \gamma_L E = 0, \quad (9.2)$$

где $v_g = \partial \omega / \partial k \approx 2v_{Tp}^2 / v_{0b}$ – групповая скорость ленгмюровских колебаний, $v_{Tp} = \sqrt{T_p / m}$ – тепловая скорость электронов плазмы,

$\gamma_L = \frac{2\pi^2 e^2 \omega}{mk^2} \partial f_b(v) / \partial v |_{v=\omega(k)/k}$ (см. раздел 2). Граничные и начальные условия выберем в наиболее простом виде $E(t=0, x) = E(t, x=0) = E_{in}$ тогда решением (9.2) будет

$$E(t, x) = E_{in} \cdot \{1 + \Theta(t - x / v_g) [\exp(\gamma_L \frac{x}{v_g} - \gamma_L t) - 1]\} \cdot \exp\{\gamma_L t\}. \quad (9.3)$$

Таким образом, при $t > x_0 / v_g$, для $x < x_0$, где x_0 – некоторая фиксированная точка в зоне неустойчивости, амплитуда поля $E(t, x)$ не меняется, то есть устанавливается стационарное состояние. Легко видеть, что в пространстве эта амплитуда увеличивается от границы системы по закону $\propto \exp\{\gamma_L x / v_g\}$. Поэтому можно определить величину $\gamma_L / v_g = -\text{Im} k > 0$ как пространственный инкремент. В области $x > x_0$ рост поля происходит только со временем, соответственно с временным инкрементом $\gamma_L = \text{Im} \omega > 0$.

Развитие гидродинамической неустойчивости. В случае нарушения условия (9.1), то есть при незначительном разбросе электронов пучка по скоростям, реализуется режим гидродинамической пучковой неустойчивости. В этом случае возмущения в пучке представляют собой возмущения плотности и усредненной – гидродинамической скорости частиц.

При взаимодействии волн или возмущений в пучке (потоке) заряженных частиц, чаще всего электронов, с волнами в покоящейся плазме следует иметь в виду, что такая двухволновая гидродинамическая неустойчивость реализуется для волн разного знака энергии. Действительно, медленные волны в пучке (фазовая скорость которых меньше средней скорости потока) являются волнами отрицательной энергии, то есть рост их амплитуды уменьшает общую энергию пучка частиц (см. (например, [9-3, 9-4] и ср. с (10.3)).

Можно показать [9-2], что неустойчивые возмущения в пучке будут возмущениями отрицательной энергии. Уравнение, описывающее огибающую поля колебаний в системе «пучок нерелятивистских электронов – плазма» в случае описания уравнениями квазигидродинамики с учетом эффектов поглощения энергии волны в плазме, имеет следующий вид

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} + \delta \right) - i\gamma_0^3 \right\} A_i = 0, \quad (9.4)$$

Соответствующее дисперсионное уравнение для возмущений вида $\propto \exp\{-i\Omega t + iK\xi\}$ в системе отсчета, которая движется со скоростью V относительно лабораторной может быть представлено в виде

$$D(\Omega, K) = (\Omega - Kv_0 + KV)^2 (\Omega + KV - Kv_g + i\delta) - \gamma_0^3 = 0, \quad (9.5)$$

где v_g и δ – групповая скорость и декремент затухания ленгмюровских колебаний плазмы в отсутствии пучка электронов $\gamma_0^3 = \omega_{be} \omega_{pe}^2 / 2$ – выражение, определяющее инкремент в отсутствие диссипации, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_{e0} / m_{e0}}$, $\omega_{be} = \sqrt{4\pi e^2 n_{b0} / m_{e0}}$ – ленгмюровские частоты плазмы и электронного пучка, n_{e0} и n_{b0} – невозмущенные плотности плазмы и пучка, e , m_{e0} – заряд и масса покоя электронов.

Для определения значения Ω , отвечающего развитию абсолютной неустойчивости в движущейся со скоростью V относительно лабораторной системе отсчета ($\xi = x - Vt, t$), причем, $v_g < V < v_0$ и необходимо совместно решить уравнения (9.4) и (9.5) (см. приложение IX). Перепишем (9.5) в виде

$$D_1 = (y - z)^2 (y + \alpha_1 z + i\Gamma) + 1 = 0, \quad (9.6)$$

где использованы обозначения $y = \frac{K}{\gamma_0} [(v_0 - V)^2 (V - v_g)]^{1/3}$, $z = \frac{\Omega}{\gamma_0} \alpha_1^{-1/3}$, $\alpha_1 = \frac{v_0 - V}{V - v_g}$, $\Gamma = \frac{\delta \cdot \alpha_1^{2/3}}{\gamma_0}$. Решая совместно уравнения $D_1 = 0$ и $\partial D_1 / \partial y = 0$, найдем, следуя [9-2], соответствующие неустойчивости значения $z = z_2$ и $y = y_2$:

$$z_2 = -(1 + \alpha)^{-1} \cdot \left\{ i\Gamma + \frac{3}{2^{5/2}} (1 - i\sqrt{3}) \right\}, \quad (9.7)$$

$$y_2 = (1 + \alpha)^{-1} \cdot \left\{ -i\Gamma - \frac{(1 - 2\alpha)(1 - i\sqrt{3})}{2^{5/2}} \right\}. \quad (9.8)$$

В отсутствии поглощения ($\Gamma = 0$) огибающая в фиксированной точке движущейся системы отсчета нарастает с инкрементом

$$\text{Im} \Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_0 \cdot f(\alpha), \quad (9.9)$$

где $f(\alpha) = 3\alpha^{1/3} / 2^{2/3} (1 + \alpha)$, причем наибольшее значение этой функции $f(1/2) = 1$.

В лабораторной системе координат огибающая, обладающая максимальным инкрементом $(\text{Im} \Omega)_{MAX} = \gamma_0 \sqrt{3} / 2$, движется со скоростью $V_T = \frac{2}{3} v_0 + v_g$. Кроме того, важно отметить, что при этом $\text{Im} z_2 = 0$, что следует из выражения (9.6). То есть, в системе отсчета, которая движется со скоростью V_T относительно лабораторной, волновой пакет как целое не смещается.

В отсутствии поглощения энергии в плазме, усиление колебаний наиболее эффективно для огибающей, сносовая скорость которой в лабораторной системе отсчета равна $V = V_L = (3v_0 v_g) / (2v_g + v_0)$. Максимальный пространственный инкремент при этом

$$(\text{Im} K)_{MAX} = (\sqrt{3} / 2) \gamma_0 (v_0^2 v_g)^{-1/3} \quad (9.10)$$

При учете поглощения, абсолютная неустойчивость развивается в движущейся системе отсчета, скорость которой V находится интервале

$$v_g < V_{cr} < V < v_0 \quad (9.11)$$

где $V_{cr} = (2^{5/2} \theta \cdot v_0 + 3^{9/4} v_g) / (2^{5/2} \theta + 3^{9/4})$. При увеличении уровня поглощения $\theta = \delta / \gamma_0$, интервал скоростей (9.11) сдвигается к его верхней границе. То есть в режимах диссипативной неустойчивости огибающая колебаний движется со скоростью несколько меньшей скорости частиц пучка.

Максимумы временного $(\text{Im}\Omega)_{\text{MAX}}$ и пространственного $(\text{Im}K)_{\text{MAX}}$ определяются соответственно с помощью уравнений

$$2\alpha + \frac{2^{5/3}}{3^{1/2}} \theta \alpha^{2/3} - 1 = 0, \quad 2\alpha \frac{v_g}{v_0} + \frac{2^{5/3}}{3^{1/2}} \theta \alpha^{2/3} - 1 = 0. \quad (9.12)$$

Максимально достижимое усиление колебаний на длине L в пренебрежении эффектами отражения порядка $\exp\{(\text{Im}K)_{\text{MAX}} L\}$, причем время переходного процесса до установления стационарного распределения амплитуды поля в системе L/V_L .

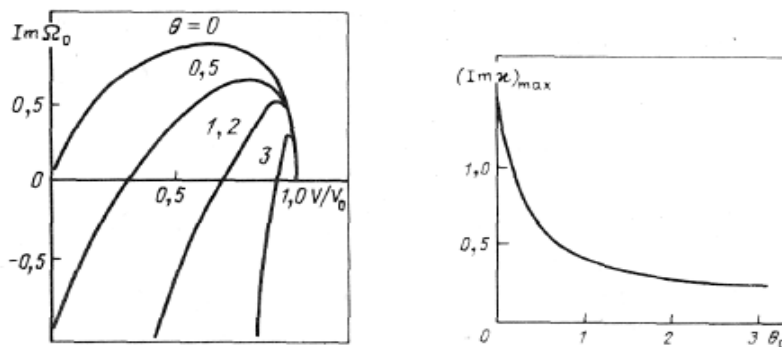


Рис. 9.1. Временной инкремент как функция сносной скорости v (справа).
Зависимость пространственного инкремента усиления колебаний
как функция уровня поглощения θ (слева) [9-2].

Литература к разделу 9

9-1. Куклин В. М. О влиянии диссипативных процессов на пространственно-временную динамику неустойчивости в плазме. // Радиотехника и электроника. 1987. – Т. 32. – В. 2. – С. 432–434.

9-2. Основы плазменной электроники / А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.

9-3. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. Волны отрицательной энергии в диспергирующих средах. ЖЭТФ 1964. – Т. 47. – В. 6. – С. 2266–2268.

9-4. Briggs R. Two-beam instability. Advances in Plasma Physics. V. 3–4 / A. Simon, W.B.Thompson NY 1969–1971.

ГЛАВА 4. Диссипативные неустойчивости

Рассмотрен характер развития диссипативных неустойчивостей пучков заряженных частиц в среде. При этом декремент затухания колебаний в отсутствие пучка частиц превышает максимальный инкремент пучковой неустойчивости, который реализуется в среде без диссипации или иных потерь ВЧ энергии. В условиях развития диссипативных неустойчивостей можно найти режимы наиболее эффективного отбора энергии у частиц пучка и соответственно наибольшего потока энергии из системы в каналы потерь. Показано, что этот эффект аномального отбора энергии у пучка достигается за счет синхронизма между захваченными полем частицами и замедляющейся в условиях подобной неустойчивости волной. В нерелятивистском случае этот эффект наблюдается и в многомодовых режимах неустойчивости. Отмечается, что учет нелинейности в механизмах потерь энергии в среде обычно уменьшает декременты поглощения в отсутствие пучка. Такой процесс способен привести к изменению характера неустойчивости, переводя ее в реактивный режим. Рассмотрен также случай учета диссипативных процессов непосредственно в пучке заряженных частиц, что отвечает случаю отрицательной диссипации, в котором рост поля может оказаться значительным.

РАЗДЕЛ 10.

ДИССИПАТИВНЫЕ ПУЧКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Аномальные потери энергии пучка. В реальных системах существует несколько каналов потерь энергии колебаний, резонансно возбуждаемых моноэнергетическим пучком заряженных частиц (при этом скорость пучка близка к фазовой скорости собственной волны системы). Использование в традиционной и плазменной электронике [10-1] таких моноэнергетических пучков чрезвычайно эффективно. Нелинейная теория взаимодействия таких пучков с плазменно-подобной средой в условиях сравнительно небольшого уровня диссипации и незначительных потерь энергии достаточно хорошо изучена [10-1 – 10-6]. Ниже рассмотрим системы с большим уровнем поглощения энергии. Параметр Θ здесь отвечает отношению $\delta_D(\omega, k)$ – декремента затухания колебаний в отсутствие неравновесного элемента (пучка), к $\gamma(\omega, k)|_{\delta=0}$ – здесь максимальному инкременту бездиссипа-

тивной неустойчивости (т. е. в отсутствие потерь), который в данном случае равен $(\sqrt{3/2})(\omega_b / \omega_0)^{2/3} \omega_0$, причем, ω_0 – собственная частота волновода, а $\omega_b = (4\pi e^2 n_{b0} / m_{e0})^{1/2}$ – плазменная частота электронного пучка (здесь – e, m_{e0}, n_{e0} , – заряд, масса электрона и невозмущенная плотность пучка), $\omega_b \ll \omega_0$

$$\Theta = \delta_D |_{n_{b0}=0} / \gamma(\omega, k) |_{\delta=0}. \quad (10.1)$$

Интерес в данном случае представляют режимы с $\Theta > 1$ при которых достигается наибольший поток энергии из системы в канал потерь. Именно при анализе таких диссипативных режимов неустойчивости было обнаружено явление аномально больших потерь энергии частиц пучка [10-7]. Для Θ справедливо выражение $\Theta = (\delta_D / \omega_0)(\omega_0 / \omega_b)^{2/3}$. Инкремент диссипативной неустойчивости при $\Theta > 1$ оказывается равным

$$\text{Im } \omega = \omega_b (\omega_0 / \delta_D)^{1/2} / \sqrt{2}. \quad (10.2)$$

Можно убедиться в том, что энергия возмущений в системе отрицательна, то есть наличие возмущений приводит к уменьшению полной энергии системы «среда–пучок заряженных частиц». Рассмотрим возмущения в среде и возмущения в пучке (то есть возмущения его плотности и скорости). Можно убедиться в том, что при значениях $\Theta > 1$ энергия возмущений в пучке превосходит энергию возмущений в среде, сквозь которую распространяются его частицы. Полная плотность энергии системы может быть записана в виде

$$W = W_0 + \delta W \approx \frac{1}{2} n_{b0} m_{e0} v_0^2 - \frac{1}{16} |E|^2 \Theta^{3/2}, \quad (10.3)$$

то есть, плотность энергии оказывается меньше плотности энергии невозмущенной системы и продолжает уменьшаться с ростом амплитуды электрического поля возмущения $|E|$. Можно показать, что при больших значениях Θ инкремент уменьшается в $\sqrt{\Theta}$ раз, а достижимая амплитуда поля меньше в Θ раз по сравнению с бездиссипативным случаем.

Важно отметить, что этом случае гидродинамической пучковой неустойчивости (в отличие от неустойчивости кинетической) диссипативные процессы не приводят к появлению порога неустойчивости.

Однопараметрическая система нелинейных уравнений, описывающая релаксацию моноэнергетического пучка заряженных частиц в диссипативной среде может быть представлена в виде

$$\partial A / \partial \tau = -\Theta A + \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_0 \cdot \exp\{-2\pi i \xi\} \quad (10.4)$$

$$2\pi \cdot d^2 \xi / d\tau^2 = -\text{Re}[A \cdot \exp\{2\pi i \xi\}] \quad (10.5)$$

где $\tau = t(2\gamma / 3^{1/2})$, $A = eEk / m_e(2\gamma / 3^{1/2})^2$, $2\pi\xi = kz - \omega \cdot t$, $\Theta = \delta|_{\gamma=0} / \gamma|_{\delta=0}$.

При этом выполняется закон сохранения энергии в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{|A|^2}{2} + 2\pi \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_0 \frac{d\xi}{d\tau} \right) = -\Theta \cdot |A|^2. \quad (10.6)$$

Ограничение роста амплитуды поля, как и в случае реактивной неустойчивости (см. [10-5]), обусловлено захватом части частиц пучка волной. Колебания захваченных частиц пучка (частота которых растет с ростом амплитуды поля) приводят к фазовому рассогласованию волны и пучка и рост амплитуды волны сменяется режимом обмена энергией между пучком и волной. Зависимость амплитуды $|A|$ от времени τ и рост потерь пучка для значений $\Theta = 0; 3$ представлены на рис. 10.1.

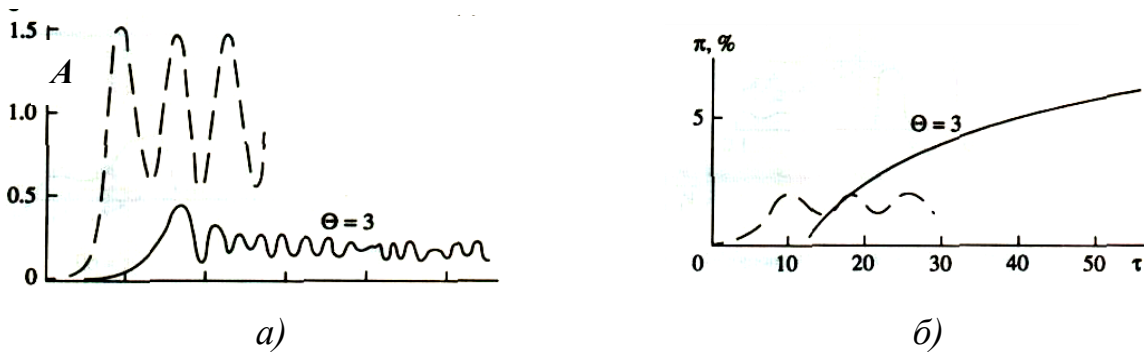
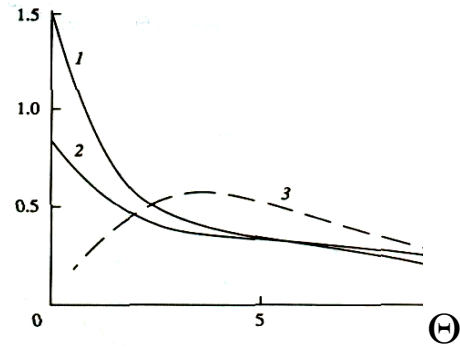


Рис. 10.1. Зависимость амплитуды колебаний (а),
потерь энергии пучка $\pi(\%)$ (б) от времени.

Пунктирные кривые соответствуют случаю $\Theta = 0$.

Потери энергии пучка в диссипативном режиме оказываются в несколько раз больше по сравнению со случаем бездиссипативной (реактивной) неустойчивости. Изменяя единственный параметр задачи Θ , можно получить [10-7, 10-8] зависимости от этого параметра максимально достижимых амплитуд $|A|_{max}$, инкремента $\text{Im } \omega$ и относительной скорости вывода энергии $\pi(\%)$, представленные на рис. 10.2.

Рис. 10.2. Максимальная амплитуда колебаний $|A|_{\max}$ – (1), инкремент $\partial \ln\{|A|/|A_0|\}/\partial t$ – (2) и относительная скорость потерь энергии пучка – скорость вывода энергии из системы $\propto \Theta|A|^2$ – (3) как функции параметра Θ



Фазовая скорость волны при больших значениях Θ в такой системе уменьшается со временем и синхронно с ней убывает и средняя скорость захваченных волной частиц пучка. Рассматривая поведение частиц пучка [10-7, 10-9], убеждаемся, что волна с захваченными частицами представляет собой долгоживущее образование, что и объясняет эффект аномально большого отбора энергии у пучка (см. рис. 10.3).

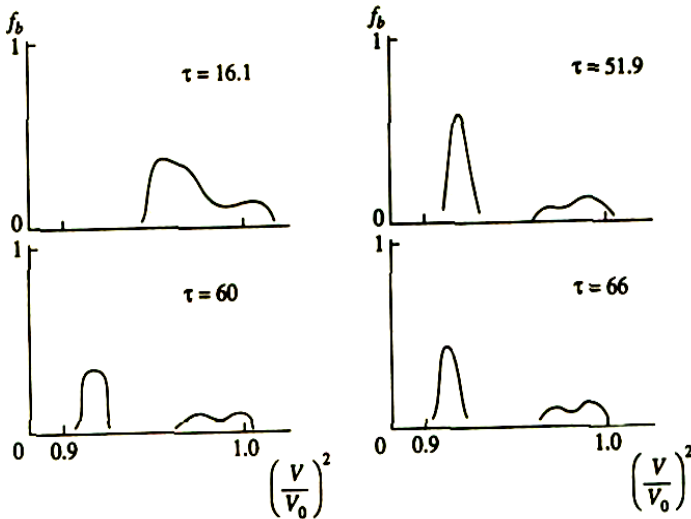


Рис. 10.3. Эволюция функции распределения частиц пучка по скоростям $f_b(V)$

Полученные результаты справедливы при сравнительно узкой спектральной ширине начального возмущения, когда реализуется близкий к одномодовому режим неустойчивости.

Многомодовые режимы. В многомодовом режиме эффективный захват частиц в потенциальную яму колебаний возможен лишь при достаточной синхронизации спектра возбуждаемых колебаний с замедляющимся пучком. С ростом поглощения или вывода энергии из системы средняя скорость частиц

пучка и групповая скорость возбуждаемого волнового пакета синхронизируются как на линейной стадии неустойчивости (см. раздел 9), так и в нелинейном режиме [10-10], что позволяет по крайней мере в нерелятивистском случае добиться заметного отбора энергии у пучка.

Уравнения для действительной амплитуды и фазы моды спектра можно записать в виде

$$\frac{1}{p} \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} + \Theta \frac{A_{0p}}{p} = -R_{0p} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{b0}) \text{Sin}\{2\pi p \zeta - \varphi_{0p}\} \cdot d\zeta_0, \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial \varphi_{0p}}{\partial \tau} + \Delta_p = R_{0p} \frac{p}{A_{0p}} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V / V_0) \text{Cos}\{2\pi p \zeta - \varphi_{0p}\} \cdot d\zeta_0. \quad (10.8)$$

Уравнения движения частиц, моделирующих пучок, можно представить в виде

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = V_b, \quad (10.9)$$

$$\frac{dV_b}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma_b^3}\right) \sum_{p>0} \frac{|A_{op}|}{p} \text{Sin}\{2\pi p\zeta - \varphi_{op}\}, \quad (10.10)$$

причем $V_b(0) = V_b|_{\tau=0} = 0$, $\gamma_b = \gamma_b(\tau) = [1 - V_{0b}^2(1 + \frac{V_b}{V_{0b}})^2 / c^2]^{-1/2}$, $C = \frac{1}{2\pi p_0} \left(\frac{\omega_{pe}}{\delta}\right) \frac{1}{\beta_{b0}}$,

$$\beta_{b0} = (1 - \gamma_{b0}^{-2})^{1/2}.$$

Интеграл системы уравнений (10.7) – (10.10)

$$\sum_{p>0} \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \left\{ \frac{|A_{0p}|^2}{p^2} - 2\Theta \cdot \int_0^\tau \frac{|A_{0p}(\tau')|^2}{p^2} d\tau' \right\} + 2\pi C^2 \gamma_{b0}^3 \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}}\right) \cdot G \int_{-1/2}^{1/2} (\gamma_b - \gamma_{b0}) d\zeta_0 = Const. \quad (10.11)$$

Нетрудно видеть, что интеграл (10.11) – это закон сохранения энергии в системе «релятивистский электронный пучок – плазма».

Можно показать (см. рис. 10.4), что при $\theta \approx 0.5$ скорость отбора энергии у нерелятивистского пучка наибольшая, хотя это не так явно выражено, как в случае одномодового режима [10-10].

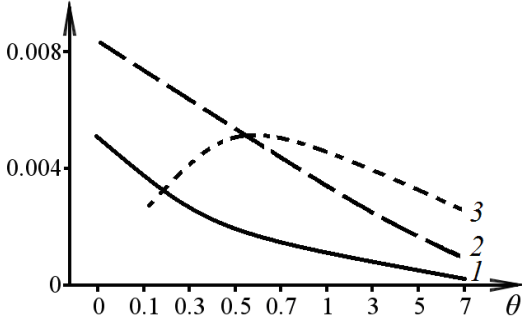


Рис. 10.4. Значения как функция поглощения Θ для

слаборелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$

(1 – $a_{0\max}$, 2 – деленная на 4 величина

$$\delta(\Theta) / \omega_{pe} \approx \frac{\delta}{\omega_{pe}} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \Theta \right\}^{-1},$$

3 – умноженная на 30 величина

$$\sum_{p>0} \left(\frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \cdot 2\Theta \cdot \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} d\tau \right)$$

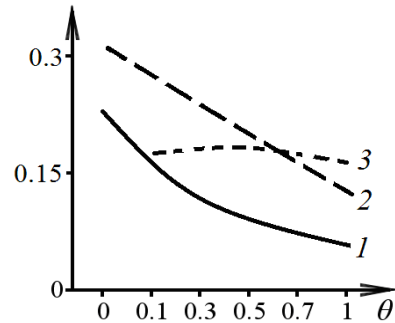


Рис. 10.5. Значения как функция поглощения Θ для

сильнорелятивистского пучка

$\gamma_{b0} = 10$ (1 – $a_{0\max}$, 2 – умноженная на

$$10 \text{ величина } \delta(\Theta) / \omega_{pe} \approx \frac{\delta}{\omega_{pe}} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \Theta \right\}^{-1},$$

3 – деленная на 3 величина

$$\sum_{p>0} \left(\frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \cdot 2\Theta \cdot \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} d\tau \right)$$

Характеристики спектра. Можно определить характеристики спектра на интервале от τ_{MIN} (когда достигнут первый максимум плотности энергии

колебаний спектра пучка) до $\tau_{MAX} = 50-60$. На рис. 10.6 и рис. 10.7 представлены среднее изменение частоты по отношению в частоте основной волны

$$\langle \Delta \omega_{pe} \rangle = \left\langle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{MAX} - \tau_{MIN}} \int_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} d\tau \cdot \left\{ \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\} \quad (10.12)$$

и относительное среднеквадратичное отклонение значения частоты от среднего ее значения (ширина спектра)

$$[\langle (\Delta \omega_{pe} - \langle \Delta \omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2} = \left[\frac{1}{\tau_{MAX} - \tau_{MIN}} \int_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} d\tau \cdot \left\{ \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right) - \left\langle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\rangle \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (10.13)$$

для разных значений уровня поглощения в случаях слаборелятивистского и сильно релятивистского пучка электронов

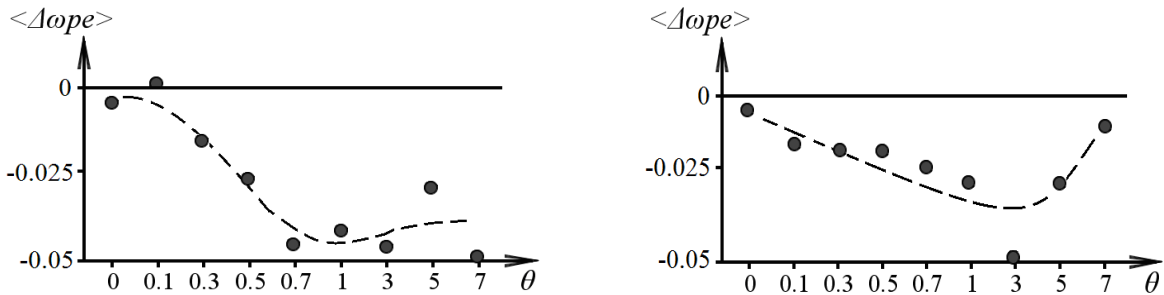


Рис. 10.6. Среднее значение $\langle \Delta \omega_{pe} \rangle$ как функция поглощения Θ для слаборелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и сильно релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

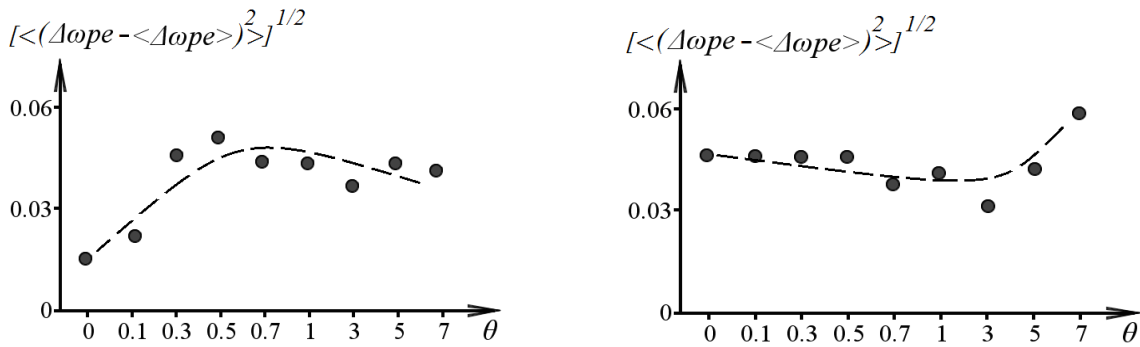


Рис. 10.7. Среднеквадратичное отклонение $[\langle (\Delta \omega_{pe} - \langle \Delta \omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$ как функция поглощения Θ для слаборелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и сильно релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

Знание сдвига частоты и ширины спектра позволяет прогнозировать характер процессов в системе. В частности, при достаточно большой ширине спектра некоторые неустойчивости, инкремент которых меньше ширины спектра, не развиваются.

Литература к разделу 10

- 10-1. Файнберг Я. Б. Плазменная электроника. Укр. физ. журн. 1978, т. 23. – № 11. – С. 1885–1901; Некоторые вопросы плазменной электроники. Физика плазмы. 1985. – Т. 11. – В. 11. – С. 1398–1410.
- 10-2. Рабинович М. С., Рухадзе А. А. Принципы релятивистской плазменной электроники // Физика плазмы. 1976. – т. 2. – Вып. 5. – С. 715–722.
- 10-3. O’Neil T. M., Winfrey J. H., Malmberg J. H. Nonlinear interaction of a small cold beam and a plasma // Phys. Fluids. 1971. – V. 14. – N 6. – P. 1204–1212.
- 10-4. O’Neil T. M., Winfrey J. H. Nonlinear interaction of a small cold beam and a plasma. Part II // Phys. Fluids. 1972. – V. 15. – N 8. – P. 1514–1522.
- 10-5. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Взаимодействие волна–частица в неравновесных средах. Изв. ВУЗов Радиофизика, 1976. – Т. 19. – № 5–6. – С. 787–791.
- 10-6. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. – 336с.
- 10-7. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
- 10-8. Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Ткаченко В. И. Нелинейная теория пучковой неустойчивости в столкновительной плазме // Изв. вузов. Радиофизика, 1978. – Т. 21. – № 10. – С. 1535–1537.
- 10-9. Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Ткаченко В. И. Об аномальном уровне потерь энергии пучка при развитии диссипативной пучковой неустойчивости. // Украинский физический журнал 1979. – Т. 24. – № 4. – С. 559–561,
- 10-10. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М., Приймак А. В. Модуляция интегрального поля многомодовых пучковых неустойчивостей в плазме // East Eur. J. Phys. 2014. – V. 1. – № 2. – С. 53–66.

РАЗДЕЛ 11.

ПУЧКОВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ДИССИПАЦИИ

Развитие пучковой неустойчивости в горячей плазме. В плазме с Максвелловским распределением электронов по скоростям энергия возбуждаемой пучком ленгмюровской волны поглощается электронами плазмы, причем линейный декремент этого поглощения (поглощения Ландау) равен

$$\delta_k = \sqrt{\pi/8}(\omega_{pe}\omega^3/k^3v_{Te}^3)\exp\{-\omega^2/k^2v_{Te}^2\}, \quad (11.1)$$

где v_{Te} – тепловая скорость электронов плазмы. Уравнения, описывающие нелинейную динамику возбуждаемой пучком волны (ср. с (2.12), (2.13)) имеют вид [11-1]:

$$\partial A / \partial \tau = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_{b0} \cdot \exp\{-2\pi i \xi_b\} - 8\pi \cdot \Theta \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_{p0} \int_{-\eta}^{\eta} d\eta_0 \eta_0 \exp\{-2\pi i \xi_p\}, \quad (11.2)$$

$$2\pi \cdot d^2 \xi_{b,p} / d\tau^2 = -\text{Re}[A \cdot \exp\{2\pi i \xi_{b,p}\}], \quad (11.3)$$

где $\Theta = \delta_k / \gamma$, δ_k – декремент затухания Ландау для ленгмюровских колебаний, $\gamma = \gamma|_{\Theta=0} = \sqrt{3}(\omega_{e0}\omega_{b0}^2/2)^{1/3}/2$ – здесь инкремент гидродинамической пучковой неустойчивости в отсутствие поглощения ($\Theta = 0$), $\omega_b = (4\pi e^2 n_{b0} / m_{e0})^{1/2}$ – ленгмюровская частота электронного пучка, а $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_{e0} / m_{e0})^{1/2}$ – ленгмюровская частота плазмы ($e, m_{e0}, n_{b0}, n_{e0}$ – заряд, масса покоя электрона и невозмущенная плотность пучка и плазмы), $2\pi \xi_{b,p0} = kx_{b,p0} - \omega t$, $\eta_{b,p0} = (kv_{b,p0} - \omega_{pe}) / 2\pi\gamma$, причем индекс b соответствует частицам пучка, а индекс e – частицам плазмы.

В нелинейном режиме развития пучковой неустойчивости амплитуда поля возбуждаемой волны испытывает модуляцию, причем крупномасштабная модуляция обусловлена осцилляциями в потенциальной яме волны квазичастицы, представляющей собой захваченные частицы пучка. Реализуется режим обмена энергией между захваченными частицами пучка и волной. Так как пучок предполагается в начальный момент моноэнергетическим, данная квазичастица достаточно компактная, соответственно, и глубина модуляции велика.

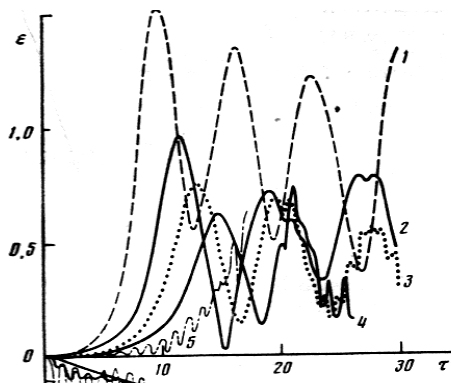


Рис. 11.1. Структура поля огибающей колебаний при
1. $\Theta = 0$; 2. $\Theta = 3$; 3. $\Theta = 5$;
4. $\Theta = 7$; 5. $\Theta = 10$

Электроны плазмы вблизи резонанса $v = \omega / k$ также оказываются захваченными полем волны. При значениях параметра Θ заметно превышающим единицу, захваченные полем волны электроны плазмы также формируют более размытую и более плотную квазичастицу, движение которой в поле волны приводит к мелкомасштабной и сравнительно неглубокой модуляции волны. Причем эта модуляция накладывается на более глубокие и сравнительно более медленные изменения амплитуды волны,

обусловленные движением захваченных частиц пучка в потенциальной яме

волны. В этом режиме также происходит обмен энергией между сформированной квазичастицей и волной, при этом среднее поглощение энергии волны частицами плазмы за период этих колебаний уменьшается. Таким образом, можно считать, что Θ_{eff} (эффективное значение параметра Θ) несколько уменьшается. Пучковая неустойчивость переходит из диссипативного режима в более реактивный режим, который соответствует меньшим значениям Θ_{eff} .

Изменение характера пучковой неустойчивости с возбуждением поверхностных волн в плазме с размытой границей. При возбуждении посторонним источником поверхностной волны её амплитуда поля нарастает, а доля поглощенной её энергии в области плазменного резонанса, которая расположена на размытой границе плазмы, уменьшается [11-2, 11-3].

Предположим, сначала реализовался режим диссипативной неустойчивости с большими значениями параметра Θ , который здесь также отвечает отношению δ_L – декремента затухания колебаний в отсутствие неравновесного элемента (т. е. пучка) к $\gamma(\omega, k)|_{\delta=0}$ – максимальному инкременту бездиссипативной неустойчивости. В процессе развития неустойчивости происходит уменьшение Θ и, соответственно, изменение режима неустойчивости [11-2]. Детальнее см. Приложение XII

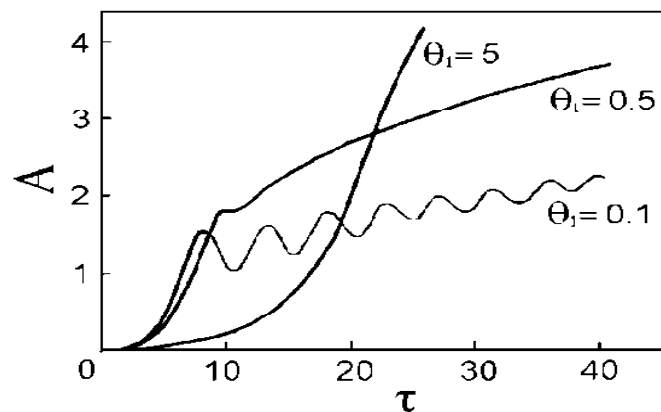


Рис. 11.2. Зависимость амплитуды волны A от времени τ при различных значениях параметра Θ_1

Структура «волна – захваченные частицы» в слабоионизованном потоке газа. В потоках также возможна реализация режима “отрицательного трения”, когда поток представляет собой слабоионизованную среду,

скорость частиц которой достаточно высока. Электронный компонент этого потока способен возбуждать колебания в волноводной системе, сквозь которую происходит его транспортировка. Значительное трение замедляющихся волной электронов о нейтральный (его плотность существенно выше) и ионный компоненты потока приводит к восстановлению скорости электронного компонента. Таким образом, достигается длительный синхронизм между электронами потока и волной. Кроме того, такое “отрицательное трение” приводит к их пространственной группировке. Уравнения, описывающие процесс возбуждения электронами слабоионизованного потока собственных колебаний среды, могут быть представлены в виде [10-4]:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_0 \cdot \exp\{-2\pi i \xi\}, \quad (11.4)$$

$$2\pi(d^2\xi/d\tau^2 + \Theta_1 d\xi/d\tau) = -\text{Re}[A \cdot \exp\{2\pi i \xi\}], \quad (11.5)$$

где $\alpha^{1/3} = (2\gamma|_{v=0}/\sqrt{3})/\omega_{pe}$, $2\pi\xi = kz - \omega_{pe}t$, $\eta = (kv - \omega_{pe})/\alpha^{1/3}\omega_{pe}$, $A = kE\alpha^{1/3}/4\pi en_{b0}$, $\Theta_1 = v/\alpha^{1/3}\omega_{pe}$ – с точностью до числового множителя отношение частоты столкновений электронов потока с нейтральным (или с ионным) компонентом потока к инкременту пучковой неустойчивости в отсутствии трения между компонентами потока. Решение однопараметрической системы уравнений в этом случае иллюстрируется рис. 11.2. Осцилляторный рост амплитуды поля сменяется монотонным ростом уже при значениях параметра $\Theta_1 > 0,5$.

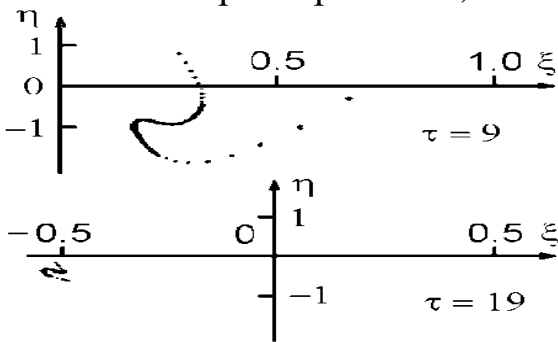


Рис. 11.3. Поведение электронов пучка на фазовой плоскости для разных моментов времени при значении параметра $\Theta_1 = 0,5$

Поведение электронов пучка на фазовой плоскости представлено на рис. 11.3. Быстрый рост амплитуды поля приводит к группировке захваченных полей электронов пучка в плотные сгустки, объем которых в обычном пространстве уменьшается. Формируется квазичастица, которая располагается в фазе поля, способствующей отбору энергии у электронов волной. С другой стороны, трение о тяжелые частицы потока приводит к восстановлению скорости

электронов. Так как трение пропорционально разности скоростей компонентов потока, то электроны немного отстают от основного потока (то есть, реализуется, так называемый, режим проскальзывания).

Процесс реализации режима с «отрицательным трением» резко увеличивает эффективность возбуждения колебаний, амплитуда которых во много раз может превосходить значения, полученные из условия захвата частиц волной. Подобное явление способно привести к дополнительной ионизации потока, что представляет, например, интерес для приборов МГД преобразования энергии.

Литература к разделу 11

11-1. Куклин В. М., Панченко И. П., Севидов С. М. К нелинейной теории гидродинамической пучковой неустойчивости в высокотемпературной плазме // Радиотехника и электроника. 1986. – Т. 31. – № 3. – С. 611–614.

11-2. Неустойчивость системы релятивистский электронный пучок – полуограниченная плазма. // Авт: Пенева Й. Х., Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Ткаченко В. И. // Болг. Физ. Журн. 1977. – Т. 4. – № 3. – С. 308–317.

11-3. Kondratenko A., N. Kuklin V. M., Tkachenko V. I., Peneva I. Ch. On the change of beam instability nature in the plasma waveguide with diffuse boundaries. Conf. on Surface waves in plasma. Blagoevgrad Bulg., Sept. 28 – Oct. 3 1981. Inv. talk and contr. papers. Sofia, 1983. – p. 325–327.

11-4. Excitation of plasma waves by means of weakly ionized monoenergetic particle beam. // Auth.: Kondratenko A. N., Kruscha J., Kuklin V. M., Tkachenko V. I., Vorobjov V. M. // Beitr, Plasmaphysics, 1983. – V. 23. – N 6. – P. 615–620.

ГЛАВА 5. Режимы сверхизлучения

Рассмотрена самосогласованная модель взаимодействия моноэнергетического сгустка – короткого пучка заряженных частиц, распространяющегося в плазме. Показано, что в объеме пучка макроскопическая диэлектрическая проницаемость отрицательна, то есть частицы пучка вместо расталкивания – притягиваются. Однако развивающийся процесс неустойчивости, который отвечает режиму сверхизлучения, приводит к интенсивной пространственной модуляции плотности пучка и формированию кильватерного поля за пучком. Для коротких сгустков, размер которых меньше длины волны кильватерного поля возможен режим самопрофилирования, когда в отдельной области среды формируются поля, интенсивность которых отвечает излучению всех частиц сгустка, собранных в одной точке пространства. Показано подобие процессов диссипативной неустойчивости и режимов сверхизлучения для частиц движущегося сгустка и системы осцилляторов, центры которых покоятся.

РАЗДЕЛ 12.

ФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ, ИНЖЕКТИРУЕМЫХ В ПЛАЗМУ

Ниже рассмотрим движущиеся со скоростью V_0 практически моноэнергетические сгустки заряженных частиц, продольный размер которых a не превосходит $(V_0 / \omega_0)(\omega_b / \omega_0)^{-2/3}$ (где $\omega_0 = \omega_{pe} = (4\pi e^2 n_{p0} / m_{e0})^{1/2}$ – ленгмюровская частота плазмы, n_{p0} – невозмущенная плотность плазмы), чтобы в их объеме не накапливалась энергия плазменных колебаний. Возбуждаемые коротким сгустком заряженных частиц плазменные колебания отстают от него, формируя так называемый кильватерный след.

Пример отрицательной макроскопической диэлектрической проницаемости [12-1]. Эффект обращения кулоновских сил в объеме одиночного моноэнергетического сгустка обусловлен тем, что при интегрировании по волновым числам полей в системе покоя сгустка ($\xi = z - v_0 t, t$), создаваемых отдельными частицами сгустка изависящих от диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, k) \equiv \varepsilon(0, k) = 1 - (\omega_{pe} / kv)^2$, вклад крупномасштабных возмущений плотности (малые значения волнового числа k) превышает вклад мелкомасштабных. Например, в

одномерном случае выбирая функцию распределения частиц немодулированного сгустка в виде $f(\xi, v) = (N/a\sqrt{\pi})\exp(-\xi^2/a^2) \cdot \delta(v - v_0)$, для напряженности сопровождающего сгусток поля получим выражение

$$E(\xi) = 2i |e| N \int dk \cdot \exp\{ik\xi - k^2 a^2 / 4\} [k \cdot \varepsilon(0, kv_0)]^{-1} \approx \approx 4\sqrt{\pi} \cdot |e| \cdot N \cdot \xi \exp\{-\xi^2 / a^2\} / a \cdot \varepsilon_{eff}, \quad (12.1)$$

где $\varepsilon_{eff} = -\omega_{pe}^2 a^2 / 2v_0^2 < 0$ – значение эффективной диэлектрической проницаемости. Можно убедиться [12-1], что в и трехмерном случае для сгустка таких размеров макроскопическая диэлектрическая проницаемость в его объеме также отрицательна. То есть в случае движущегося моноэнергетического электронного сгустка его частицы испытывают не отталкивание, а притяжение. В отличие от случая генерации электромагнитного излучения, когда на являющийся источником генерации, движущийся сгусток действовали как фокусирующие, так и дефокусирующие силы, возбуждение продольных волн в плазме приводило одновременно к радиальной [12-2] – [12-4] и продольной [12-1], [12-5] – [12-9] фокусировке. Однако возникающий в этих условиях процесс сверхизлучения, подобный пучковой диссипативной неустойчивости (об этом подобии см. ниже) генерирует внутри сгустка поля, которые в $k^2 a^2$ раз превосходят фокусирующее воздействие сопровождающего пучок обращенного кулоновского поля и приводят к интенсивной модуляции его плотности. Тем не менее обращенное кулоновское поле не позволяет сгустку расширяться в продольном и поперечном направлениях.

Действительно, на первый взгляд собственные поля сгустка, продольные размеры которого превышают длину излучаемой ленгмюровской волны должны приводить к сжатию сгустка как целого. Однако в объеме сгустка развивается неустойчивость, которая за счет пространственной группировки его частиц резко усиливает кильватерное излучение как вне сгустка так и внутри него. Поэтому динамика моноэнергетического сгустка электронов определяется именно развитием обсуждаемой неустойчивости.

Первые попытки самосогласованно описать взаимодействие частиц короткого сгустка с полем их собственного излучения, по-видимому, были представлены в работах [12-7, 12-8]. Этот канал потерь энергии (то есть кильватерное излучение) оказывает заметное влияние на развитие возмущений в объеме сгустка и, в целом, на формирование его тонкой структуры. Уравнения, описывающие нелинейную динамику электронного сгустка в одномерном случае, распространяющегося сквозь плотную плазму, можно записать в виде (см. Приложение XV)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = E(\xi), \quad (12.2)$$

$$E(\xi) = -\frac{2}{N} \sum_{\alpha}^N f_{\alpha} \cos [2\pi g_{\alpha} (\xi - \xi_{\alpha})] \Theta(\xi_{\alpha} - \xi), \quad (12.3)$$

где $2\pi\xi = K_0(z - V_0t)$, $v = K_0(V - V_0)/2\pi\gamma_L$, $\gamma_L^2 = e^2K_0M/m_e$, $g = (1 + \Delta v)^{-1}$, $\Delta = 2\pi\gamma_L/K_0V_0$, $\tau = \gamma_L t$ и M – общее число частиц в сгустке $E = eK_0E/2\pi m_e\gamma_L^2$, E – напряженность электрического поля. f_α – статистический вес крупной частицы, моделирующей пучок.

Амплитуда поля излучения сгустка, размер которого мал по сравнению с длиной кильватерной (плазменной) волны $2\pi(V_0/\omega_{pe})$ монотонно убывает со временем. Если начальный продольный размер сгустка a заметно превышает $2\pi(V_0/\omega_{pe})$, то начальная амплитуда излучения невелика, макроскопическая диэлектрическая проницаемость плазмы для такого сгустка отрицательна и можно ожидать, что он будет сжиматься как целое. Однако в процессе быстро развивающейся неустойчивости диссипативного типа (так как эффективный декремент затухания колебаний δ_D в сгустке можно определить как отношение потока энергии колебаний, покидающих сгусток, к полной энергии колебаний в его объеме, при этом $\delta_D = V_0/a$, а параметр $\Theta = \delta_D/\gamma|_{\delta=0} = (V_0/a \cdot \omega_0)(\omega_b/\omega_0)^{-2/3} > 1$) в объеме сгустка формируется структура, с характерным пространственным периодом $2\pi(V_0/\omega_{pe})$. Появление такой тонкой структуры сгустка сопровождается ростом амплитуды кильватерного следа. На нелинейной стадии процесса частицы захватываются полем нарастающих колебаний, происходит фазовое перемешивание, тонкая структура сгустка разрушается, и амплитуда его кильватерного следа уменьшается.

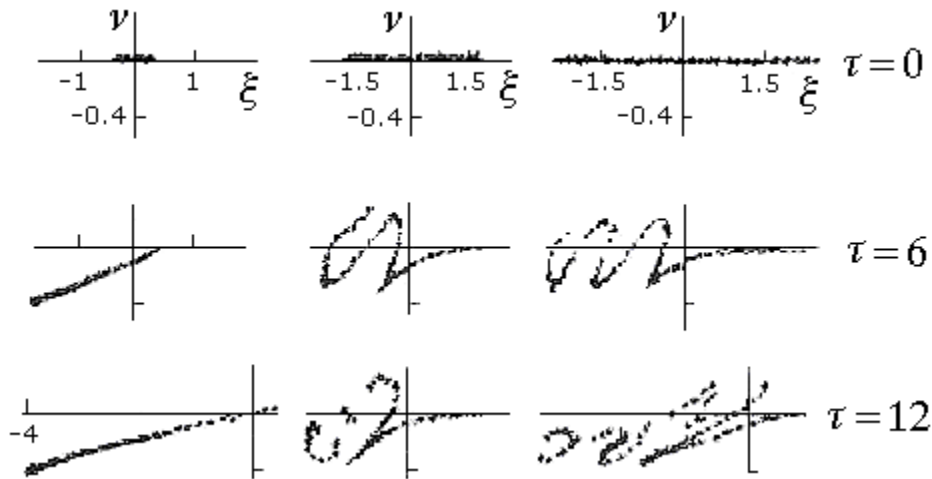


Рис. 12.1. Поведение частиц коротких пучков разной длины ($K_0a = 0.6\pi$, (2) 6π , (3) 10π) с одним и тем же числом частиц на фазовой плоскости (ξ, v)

Отметим, что в случае протяженных сгустков с одним и тем же

фиксированным числом частиц $(a\omega_{pe}/2\pi V_0) > 1$, наибольшая амплитуда излучения, достигаемая в процессе неустойчивости, слабо зависит от начального продольного размера сгустка, что позволяет считать ее (амплитуду) максимально возможной и примерно равной единице в выбранных масштабах задачи. Отметим, что если собрать все частицы в точку, то амплитуда кильватерного поля была бы равна двум, что легко видеть из соотношения (12.3). То есть степень когерентности излучения равна 25 %.

Поэтому использование для целей ускорения заряженных частиц в поле кильватерного следа отдельных электронных сгустков в определенной степени не критично по отношению к их продольному размеру [12-9, 12-10]. Некогерентное излучение спустя некоторое время после разрушения структуры оказывается одинаковым.

Как показали экспериментальные исследования и численные эксперименты, проведенные в ННЦ «ХФТИ», не слишком большая последовательность сгустков способна также синхронизировать свою динамику, что увеличивает ее устойчивость и длину когерентности. Затем частицы сгустка захватываются полем, периодичность структуры, а, следовательно, и когерентность излучения нарушаются.

Можно показать, что для движущихся в плазме трехмерных сгустков заряженных частиц одного знака, продольные размеры $a_{||}$ которых

$$2\pi(V_0/\omega_0) < a_{||} \ll 2\pi(V_0/\omega_0)(\omega_b/\omega_0)^{-2/3}, \quad (12.4)$$

в их объемах возникают фокусирующие силы, сжимающие сгустки как целое в поперечном направлении (диэлектрическая проницаемость среды для них оказывается отрицательной [12-11, 12-12]) Излучение таких сгустков также усиливается в процессе развития неустойчивости, формирующей тонкую структуру сгустков [12-13] – [12-16].

Кластеры. Обычно возникновение пространственной структуры увеличивает поток энергии в каналы потерь, который достигает своего максимума в момент наибольшей амплитуды этой структуры. Однако возможны случаи, когда структура – кластер всего из нескольких заряженных частиц сохраняет устойчивость [12-17, 12-18] и формирует минимальный поток энергии в процессе релаксации системы. Построим кластер из движущихся заряженных частиц, причем первую из них – лидера, поместим в начало координат. Расположим частицу, имеющую такую же скорость в точке, где электрическое поле лидера равно нулю или минимален потенциал. Помещая затем каждую следующую частицу в минимум потенциала поля, созданного расположенными впереди частицами, можем построить кластер, устойчивость которого весьма высока, причем начальные скорости в системе покоя кластера равны нулю.

$$\xi = 0, \quad K_0 \xi_n = - \sum_{m=2}^n a \sin(1/\sqrt{m}). \quad (12.5)$$

Силы, действующие со стороны поля излучения на каждую частицу такого кластера, одинаковы и равны силе торможения отдельной частицы. Отметим, что подобную структуру – кластер можно построить и в трехмерном случае. Амплитуда электрического поля излучения позади кластера, число частиц которого равно M , в \sqrt{M} раз превышает амплитуду поля излучения одиночной частицы. Таким образом, интенсивность излучения такого кластера из M частиц минимальна и пропорциональна M . В ранее обсуждаемых случаях излучение когерентных структур было пропорционально M^2 с некоторым численным множителем, меньшим единицы, определяющим степень когерентности структуры [12-18]. Размер кластера определяется устойчивостью частиц, находящихся в его хвосте, причем энергия связи частиц для достаточно больших m пропорциональна $1/\sqrt{m}$, то есть быстро уменьшается с номером m частицы, отсчитываемого от лидера кластера, что делает кластеры большого размера нестабильными.

Самопрофилирование короткого сгустка электронов, движущегося в плазме. Задачи получения наибольшей амплитуды кильватерного поля за электронным сгустком возникли в связи с анализом возможности применения высокоэнергетических и сильноточных коротких электронных пучков – сгустков, движущихся в плазме для ускорения ионов [12-19, 12-20]. Несмотря на то, что сгустки, начальный размер которых много меньше длины волны излучения, в одномерном и трехмерном случаях неустойчивы (см., например, [12-8, 12-21]) при определенном предварительном профилировании плотности и скорости частиц, можно было надеяться на значительные величины кильватерного поля, сравнимые с полем сгустка, частицы которого собраны в очень малую область пространства [12-21 – 12-24]. Если же целью было обеспечить устойчивость сгустка, то предпочтительно было использовать более протяженные сгустки, которые позволяли получать значительные значения поля как внутри такого короткого пучка, так и в их кильватерном излучении [12-13 – 12-16, 12-25, 12-26.].

Кильватерное поле за излучающей частицей в системе ее покоя, движущейся со скоростью v представляет собой $\text{Cos}[k\zeta] = \text{Cos}[k(x - vt)]$. В холодной плазме групповая скорость ленгмюровских колебаний с частотой ω_{pe} , равна нулю, поэтому если перейти в лабораторную систему отсчета амплитуда поля в каждой точке будет изменяться как $\text{Cos}[\omega_{pe}t] = \text{Cos}[kvt]$. Важно отметить, что это одно и то же поле, только в разных системах отсчета. Если скорости каждой частицы различны, то косинусоиды эти будут иметь различные значения волнового числа $k = \omega_{pe}/v$. При этом, если конфигурация частиц сгустка в пространстве не изменяется,

общее поле его кильватерного поля будет представлять собой интерференцию отдельных полей излучаемых частиц уже имеющих разброс по скоростям. Причем в лабораторной системе отсчета это поле представляет собой интерференцию колебаний с разной фазой. Существуют конфигурации и соответствующий разброс по скоростям частиц сгустка излучателей, которые позволяют в отдельных, вообще говоря, достаточно протяженных областях лабораторной системы отсчета добиться малого разброса фаз полей, излучаемых отдельными частицами сгустка. Такое профилирование сгустка по скоростям и плотности предлагалось специально создавать для достижения максимального значения кильватерного поля [12-25], по крайней мере, в отдельных областях плазменного пространства. Понятно, что и системе покоя сгустка как целого существовала, вообще говоря, движущаяся в обратную сторону примерно с той же скоростью область максимума поля [12-10].

Ниже покажем, что такое профилирование происходит в объеме пучка самопроизвольно, причем действительно в системе покоя пучка как целого возникает область максимума поля, которая отстает от пучка с той же скоростью. То есть, в лабораторной системе отсчета эта область остается локализованной. Наибольший интерес представляют режимы возбуждения наибольших значений кильватерного поля, которые достигаются в случае коротких сгустков, размер которых меньше длины кильватерной волны.

Из результатов расчетов¹⁰ следует, что для сгустков, продольный размер которых меньше, но все же сравним с длиной волны, обнаруживается явление самопрофилирования сгустка, эффективность излучения которого в некоторой области за сгустком достигает для данного числа частиц значение E , которое уже заметно превышает чаще всего наблюдаемое, то есть равное единице.

Действительно, для сгустков, длина которых превышает несколько длин излучаемых волн, значение амплитуды поля в данной нормировке всегда меньше или порядка единицы [12-10]. В случае сгустка, все частицы которого собраны в точку, амплитуда кильватерного поля в выбранном представлении (12.2) – (12.3) оказывается в два раза больше и достигает своего абсолютного максимума – значения равного 2 [12-27].

Сначала рассмотрим, что происходит со сгустком. Оказывается, он в целом тормозится, формируя характерные треугольные распределения частиц в конфигурационном и фазовом пространствах (см. рис. 12.2 и рис. 12.3).

¹⁰ Программа, реализующая математическую модель задачи, создана с использованием технологии JCUDA. JCUDA обеспечивает взаимодействие с технологией CUDA из Java-программы. Созданная JCUDA-программа обеспечивает выполнение из Java-программы программного кода на графическом процессоре (graphics processing unit (GPU)), написанного на языке программирования C со вставками кода, характерными для технологии CUDA [12-28].

Именно формирование таких треугольных распределений, подобных начальному профилированию сгустка [12-25, 12-27] приводит к интерференции полей изучаемых частиц в определенной области пространства, которая удаляется от пучка в системе его покоя как целого со скоростью в выбранных нами единицах измерения

$$\left\langle \frac{d\xi}{d\tau} \right\rangle = \frac{K_0 V_0 t}{2\pi\gamma_L t} = \frac{1}{\Delta}, \quad (12.6)$$

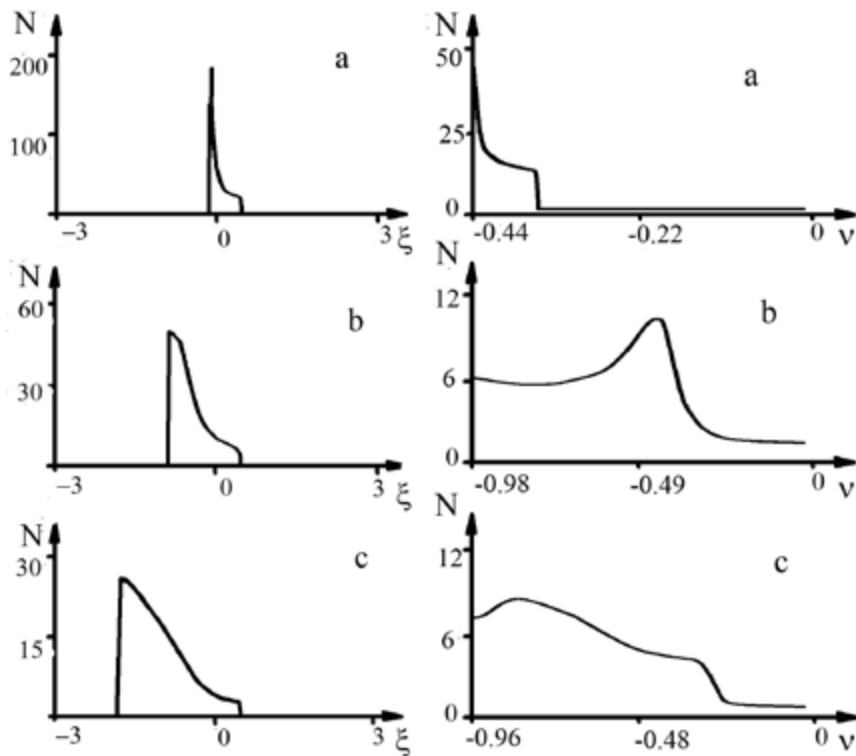


Рис. 12.2. Распределение частиц в пространстве \$\xi\$ (слева),
распределение частиц по скоростям \$v\$ (справа),
a). \$\tau = 1\$; b). \$\tau = 2\$; c). \$\tau = ?\$

Можно видеть (см. рис. 12.3), что область абсолютного максимума поля $E(\xi) \approx 2$ сдвигается со скоростью сгустка в обратном от него направлении. Причем пучок находится в правой части рисунка в окрестности точки $\xi = 0$. При этом в лабораторной системе отсчета эта область максимума поля не перемещается.

Некоторые искажения области поля связаны с небольшим изменением профиля пучка в этом интервале времени. Данная модель качественно описывает процесс динамики сгустка и его излучения, однако позволяет легко обнаружить эффект самопрофилирования пучка. И достижения в результате такого самопрофилирования в области, которая более чем на порядок превышает начальные размеры сгустка, значительной амплитуды кильватерного поля практически равной максимально возможному значению поля излучения сгустка, частицы которого собраны в весьма малую область.

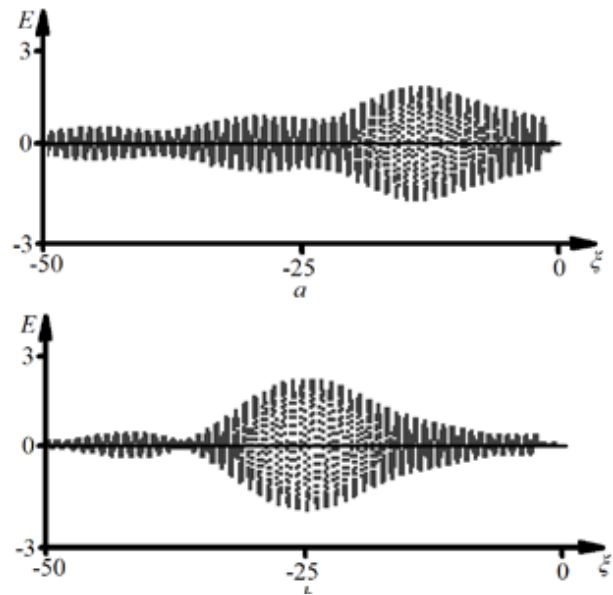


Рис. 12.3. Вид поля излучения E в системе отсчета пучка как целого в моменты времени, а) $\tau = 2$, и б) $\tau = 3$

Литература к разделу 12

12-1. Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Репалов Н. С. Эволюция сгустка заряженных частиц в поле собственного излучения. Укр. Физ. Журнал 1982. – Т. 27. – № 8. – С. 1159–1164

12.2. Красовицкий В. Б. Нелинейная радиальная самофокусировка электронного пучка в плазме // Письма в ЖЭТФ, 1969. – № 9. – С. 679–684.

12.3. Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б. Самофокусировка модулированного электронного пучка в плазме. // Укр. Физ. Журнал, 1984. – Т. 29. – № 3. – С. 395–405.

XI-4. Krasovitsky V. B. Self-focusing of relativistic electron bunches in a plasma. – Kharkov, Folio, 2000. – 196 p.

12-5. Гришин В. К., Шапошникова Е. Н. Устойчивость заряженного пучка малой длительности в плазменном волноводе. // Физика плазмы. 1982. – Т. 8. – В. 2. – С. 287–292.

12-6. Гладкий А. М., Коваленко В. П., Юсманов П. Н. Свойства плазменных волн, возбуждаемых электронными сгустками // Письма ЖЭТФ, 1976. – № 24. – С. 533–542.

12-7. Куклин В. М., Панченко И. П., Севидов С. М. Эволюция короткого пучка заряженных частиц и обращение кулоновских сил в плазме. Сб. «Проблемы ядерной физики и космических лучей», Изд. ХГУ, 1983. – вып. 19. – С. 97–100;

12-8. Куклин В. М., Одномерные движущиеся сгустки заряженных частиц в плазме. Укр. Физ. Журнал 1986. – Т. 31. – № 6. – С. 853–857.

12-9. Куклин В. М., Моисеев С. С., Панченко И. П. К вопросу транспортировки и излучении коротких одномерных сгустков заряженных частиц в плазме // Препринт № 1314, Институт космических исследований. Москва, 1987. – 15 с.

12-10. Киричок А. В., Куклин В. М., Мишин А. В., Приймак А. В. 1D модель движущегося в плазме сгустка заряженных частиц // Физические основы приборостроения. 2013. – Т. 2. – № 3. – С. 80–93.

12-11. Альтеркоп Б. А., Жексембин С. Р., Рухлин В. Г. Тараканов В. П. Двумерная динамика компенсированного электронного сгустка в плотной плазме // Препринт ин-та Высоких температур АН СССР, 1986. – N 6–193. – с. 35–45.

12-12. Kuklin V. M., Moiseev S. S., Panchenko. I. P. 3-D short Beam Dynamics // Moscow. Reprint of Institute of Space Research, N 1619, 1989. – 11 p.

12-13. Batishchev O. V., Karas' V. I., Sigov Yu. S. and Fainberg Ya. V. 2.5 Dimensional computer simulation of relativistic bunch propagation in tenuous and dence plasmas // Plasma Physics Reports, 1994. – V. 20. – P. 583–586.

12-14. Балакирев В. А., Сотников Г. В., Файнберг Я. Б. Модуляция релятивистских электронных сгустков в плазме // Физика плазмы, 1996. – Т. 22. – № 2. – С. 165–169.

12-15. Balakirev V. A., Karas' I. V., Karas' V. I., Levchenko V. D., Vornatici M. Charged particle (CP) acceleration by an intense wake-field (WF) excited in plasma by either laser pulse (LP) or relativistic electron bunch (REB) // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (3), 2003. – № 4. – С. 29–32.

12-16. Onishenko N. I., Sotnikov G. V. Theoretical studies of the resonator concept of dielectric wakefield accelerator // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (3), 2006. – № 5. – С. 203–207.

12-17. Evidence for an alignment effect in the motion of surface ion clusters through solids// Auth.: Gemmell D.S., Remillieux J. et al. Phys. Rev. Letter. 1975. – V. 34. – N. 22. – P. 1420–1424.

12-18. К теории кластерных систем в плазменноподобных средах. // Авт.: Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Панченко И. П., Севидов С. М. Изв. ВУЗов, Физика, 1987. – № 5. – С. 83–87.

12-19. P. Chen, J. M. Dawson, R. W. Huff and T. Katsouleas Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with plasma. // Phys Rev. Lett., 1985. – V. 54. – P. 693–696.

12-20. T. Katsouleas Physical Mechanisms in the plasma wake-field accelerator. // Phys. Rev. A., 1986. – V. 33. – P. 2056–2064.

12-21. Куклин В. М., Панченко И. П., Хакимов Ф.Х. Многоволновые процессы в плазме. – Душанбе, Дониш, 1999. – 175 с.

12-21. Bane, K. L. F., P. Chen and P. B. Wilson, "On Collinear wakefield acceleration", IEEE Transactions on Nuclear Science 1985. –V.32.– № 5. – P. 3524.

12-22. Chen, P. et al., "Energy Transfer in the Plasma Wake-Field Accelerator", Physical Review Letters 1986. – V. 56. – N. 12. – P. 1252.

11-23. Laziev, E., V. Tsakanov and S. Vahanyan, "Electromagnetic wave generation with high transformation ratio by intense charged particle bunches", in EPAC (IEEE, 1988), pp. 523. С.С. 11–24. Ваганян, О. М. Лазиев, В. М. Цаканов. ВАНТ. Серия Ядерно-физические исследования. 1990. – В. 7(15). – С. 32.

12-25. Лоусон Дж. Д. Механизмы ускорения частиц: возможности и ограничения // УФН. 1989, Т. 158. – В. 2. – С. 303–313.

12-26. Балакирев, Н. И. Карбушев, А. О. Островский, Ю. В. Ткач. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. – Киев: Наукова думка, 1993. – 208 с. 12-27. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Mischin A. V., Pryimak A. V. Modelling of superradiation processes driven by an ultra-short bunch of charged particles moving through a plasma // Problems of Atomic Science and Technology,

2015. – N 4. – series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration”– p. 255–257.

12-28. Гущин І. В., Куклін В. М., Мішин О. В., Приймак О. В.. Моделювання фізичних процесів із використанням технології CUDA.– Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2017. – 116 с.

РАЗДЕЛ 13. ДИССИПАТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И РЕЖИМЫ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Пучок электронов в продольно ограниченной системе. В плазме динамика пучка электронов, продольный размер которого b , а невозмущенная скорость V_0 , в наиболее простом одномерном случае может быть описана следующей системой уравнений:

$$\partial E / \partial \tau = -\theta \cdot E + N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N \text{Cos}\{2\pi\xi_i + \varphi\}, \quad (13.1)$$

$$\partial \varphi / \partial \tau = -N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N \text{Sin}\{2\pi\xi_i + \varphi\}, \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned}
 2\pi \cdot d^2 \xi_j / d\tau^2 = & \\
 & E \cdot \text{Cos}\{2\pi \xi_j + \varphi\}, \\
 = -\{ & (N \cdot \theta)^{-1} \sum_{i=1}^N \text{cos}[2\pi g_i (\xi_j - \xi_i)] \cdot U(\xi_i - \xi_j),
 \end{aligned} \tag{13.3}$$

где $2\pi \xi = kz - \omega t$, $\tau = t \cdot \gamma$, $\omega_{pe,b}^2 = 4\pi e^2 n_{0e,b} / m_e$, e, m_e – заряд и масса электрона, $n_{0e,b}$ – плотности плазмы и пучка, эффективный декремент затухания колебаний δ_D можно определить как отношение потока энергии колебаний, покидающих объем пучка, к полной энергии колебаний в его объеме, при этом¹¹ $\delta_D = V_0 / a$, $\theta = \delta_D / \gamma|_{\delta=0} = (V_0 / b \cdot \omega_{pe}) (\omega_{be} / \omega_{pe})^{-2/3}$, $\gamma^3 = (n_{0b} / 2n_{0e}) \cdot \omega_{pe}^3$, $M = n_{pb} \cdot b$ – общее число частиц в пучке, $g_i = (1 + (v - v_0) / v_0)^{-1} = (1 + V \omega_{pe} / \gamma)^{-1}$, что несложно определить из уравнения $2\pi d\xi / d\tau = k(v - v_0) / \gamma = V$. Здесь $U(x) = 1; x \geq 0$ и $U(x) = 0; x < 0$. Параметр $\theta = \delta_D / \gamma$ отвечает отношению декремента затухания колебаний в отсутствие неравновесного элемента (здесь пучка) δ_D к γ – максимальному инкременту бездиссипативной неустойчивости (т. е. в отсутствие потерь). Для наглядности мы перешли от интегрирования по начальным состояниям частиц к обычному суммированию их вкладов в поле.

Верхнее слагаемое в правой части (13.3) следует использовать при описании протяженного пучка, интегральное поле $E \cdot \text{Cos}\{2\pi \xi_j + \varphi\}$ в котором способно накапливаться в его объеме. Нижнее слагаемое в правой части (13.3) описывает суммарное поле частиц достаточно короткого пучка, при больших значениях θ . Отметим, что нижнее слагаемое в правой части (13.3), вообще говоря, определяет суммарное спонтанное излучение ленгмюровской волны с частотой ω_{pe} всех частиц пучка.

Интегральное поле $E \cdot \exp\{2\pi i \xi_j + i\varphi\}$ может формироваться за счет начального возмущения или возникает при накоплении ВЧ энергии в достаточно протяженном пучке. При этом частицы пучка непосредственно не взаимодействуют между собой и связаны только с полем волны. Вообще говоря, такое поле обыкновенно рассматривается в задачах по генерации и усилению индуцированного излучения. При малых θ , то есть для протяженного пучка, это поле накапливается в его объеме и нижним слагаемым (13.3) во многих случаях можно пренебречь.

При больших значениях $\theta \gg 1$, если в системе первоначально не было интегрального поля, уравнения (13.1) и (13.2) вместе с уравнением (13.3) где

¹¹ См., представление такого поглощения, например, в Приложении I, выражение (I.6).

удерживается верхнее слагаемое в правой части, уже не применимы. При этом взаимодействие частиц между собой оказывается существенным (находящиеся впереди в направлении движения частицы воздействуют на следующие за ними, но не наоборот). При группировке частиц в пучке и возникающей при этом их фазовой синхронизации возможно формирование так называемого сверхизлучения, описываемого только уравнением (13.3), где в правой части следует удержать нижнее выражение.

Если пучок достаточно короткий, энергия поля за время $b/V_0 < \gamma^{-1}$ (то есть, $\theta > 1$) выносится из объема сгустка. При этом поле в объеме пучка определяется только вторым – нижним слагаемым уравнения (13.3). Рост поля обусловлен самостоятельной группировкой частиц и повышением когерентности их излучения, что и формирует поле сверхизлучения. В работах [13-2, 13-3] отмечалось, что при одних и тех же значениях $\theta > 1$ инкремент процесса сверхизлучения ограниченного в направлении движения пучка сравним с инкрементом диссипативной пучковой неустойчивости $\gamma_D \approx \omega_{pb}(\omega_{pe}/\delta_D)^{1/2} = \omega_{pb}(kb)^{1/2}$, потери энергии в которой определяются выносом энергии из объема пучка. То есть пространственная модуляция частиц, подобная в обоих случаях, приводила к синхронизации частиц по фазам и соответственно к усилению когерентности излучения. Ограничение амплитуды в обсуждаемых случаях было обусловлено захватом частиц в поле волны, что отвечало равенству частоты осцилляций захваченных частиц в потенциальной яме волны инкременту $\Omega = \sqrt{ekE/m} \approx \gamma_D$.

Максимальное значение амплитуды поля, возникающее при развитии неустойчивости для пучков, длина которых в несколько раз превышает длину ленгмюровской волны, равно $E_{\max} \approx 2\pi eM$ и зависит только от общего числа частиц [13-3].

Не трудно видеть, что максимальная интенсивность излучения в режиме сверхизлучения для пучков, длина которых в несколько раз превышает длину ленгмюровской волны, достигает значений $P_{\text{sup}} = v \cdot E_{\max}^2 / 4\pi = \frac{\pi e^2 v}{4} M^2 \propto M^2$, то есть пропорциональна квадрату числа всех частиц в пучке-сгустке $M = n_0 \cdot b$. Отметим, что интенсивность спонтанного излучения такого же (но еще однородного, не модулированного) пучка-сгустка частиц

$$P_{\text{spont}} = v \cdot E_{\text{spont}}^2 / 4\pi = \pi e^2 v M \propto M, \quad (13.4)$$

и пропорциональна общему числу частиц.

Таким образом, сверхизлучение является результатом процессов самосинхронизации излучателей, спонтанное поле которых в начальный

момент было некогерентным (из-за интерференции индивидуальных полей каждого осциллятора, в частности, из-за случайного разброса фаз).

Важно подчеркнуть, что интенсивность поля в случае развития диссипативной пучковой неустойчивости в резонаторе или волноводе при уровне диссипации определяемом $\theta = c / \gamma_0 b$, и интенсивность сверхизлучения пучка-сгустка частиц продольные размеры которого равны b с той же плотностью практически совпадают. Инкременты неустойчивости пучков практически равны $\gamma_D^2 \approx \gamma_0^3 / \delta_D = \gamma_0^2 / \theta$ (где $\gamma_0 = \gamma|_{\delta_D=0}$).

Система осцилляторов, центры которых неподвижны, в поле излучения. Вопросы излучения осцилляторов в приборах электроники активно обсуждались, начиная с работ [13-4, 13-5]. Важным обстоятельством являются условия синхронизации собственными полями излучения системы осцилляторов в режиме сверхизлучения. Оказывается, только при учете нелинейности осцилляторов, появляется возможность в этом случае обеспечить синхронизацию фаз поля и осциллятора [13-6] (см., также [13-7]).

Рассмотрим осциллятор, движение заряда которого (электрона) происходит вдоль оси ОХ, то есть $x(t) = i \cdot a \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\}$, при этом $\text{Re } x = a \cdot \sin(\omega t - \psi)$, где $\vec{r} = (x(t), 0, z_0)$. Скорость и ток при этом можно записать как $dx/dt = a \cdot \omega \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\}$ и $J_x = -e \cdot dx/dt = -e \cdot a \cdot \omega \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\}$. Уравнение, описывающее возбуждение поля током осциллятора примет вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial J_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot e \cdot a \cdot \omega^2 \cdot i \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\} \cdot \delta(z - z_0). \quad (13.5)$$

Диэлектрическую проницаемость среды в отсутствие осцилляторов положим равной единице $\epsilon_0 = 1$. Будем искать решение для амплитуды электрического поля в виде $\vec{E} = (E \cdot \exp\{-i\omega t + ikz\}, 0, 0)$, то есть $E_x = E \cdot \exp\{-i\omega t + ikz\}$ предполагая медленность изменения комплексной амплитуды $E_x(t, z)$:

$$\left| \frac{1}{E_x(t, z)} \frac{\partial}{\partial t} E_x(t, z) \right| \ll \omega, \quad \left| \frac{1}{E_x(t, z)} \frac{\partial}{\partial z} E_x(t, z) \right| \ll k. \quad (13.6)$$

Вообще говоря, поле, возбуждаемое в системе осцилляторов, состоит из общего поля резонатора и суммы всех полей отдельных осцилляторов.

Поле волновода или резонатора. Однако резонатор или волновод может формировать поле таким образом, что вид поля не будет зависеть от излучения отдельных осцилляторов. Заметим, что такое поле, вообще говоря, должно состоять из бегущих волн в двух направлениях ($k > 0$)

$$E_x = E_+ \cdot \exp\{-i\omega t + ikz\} + E_- \cdot \exp\{-i\omega t - ikz\}, \quad (13.7)$$

где медленно меняющаяся комплексная амплитуда волн имеет вид $E_{\pm} = |E_{\pm}| \cdot \exp\{i\varphi_{\pm}\}$.

Взаимодействие осцилляторов с этими полями можно описать уравнением

$$2i\omega_0 \left(\frac{\partial E_{\pm}}{\partial t} + \delta_D \right) = -e\omega^2 \frac{4\pi n_0}{N \cdot 2i} \int a_s dz \cdot \exp\{i\psi_s \mp ikz\} \cdot \delta(z - z_s), \quad (13.8)$$

где добавлен δ_D – декремент поглощения волны в отсутствие источников, $A_j = a_j \exp(i\psi_j)$.

Уравнения движения представим в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{|v_i|^2}{c^2}}} + \omega^2 x_i = -\frac{e}{m} E_x(z_i, t), \quad (13.9)$$

где $x_i(t) = i \cdot a_i \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\} = iA \cdot \exp\{-i\omega t\}$,

$$v_i = \omega \cdot a_i \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\} = \omega A \cdot \exp\{-i\omega t\} \cdot$$

Используя следующие обозначения

$$\frac{e |E(t)| \exp\{i\varphi\}}{m\gamma_0 \omega_0 a_0} = E(t), \quad \gamma_0 t = \tau_0, \quad \gamma_0^2 = \pi e^2 n_0 / m = \omega_{pe}^2 / 4, \quad A_j = a_j / a_0,$$

$$kz_j = 2\pi Z_j, \quad \theta = c / \gamma_0 b = \delta / \gamma_0, \quad \alpha = \frac{3\omega}{4\gamma_0} (k_0 a_0)^2 \quad \text{– учитывает слабую}$$

зависимость релятивистской массы частицы от скорости. Запишем (13.8) и (13.9) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} E_{\pm} + \theta \cdot E_{\pm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_j \cdot \exp i\{\mp 2\pi Z_j\}, \quad (13.10)$$

$$\frac{d}{d\tau_0} A_j - i\alpha (A_j | A_j|^2) = -\frac{1}{2} [E_+ \cdot \exp i\{2\pi Z_j\} + E_- \cdot \exp i\{-2\pi Z_j\}]. \quad (13.11)$$

Можно получить закон сохранения энергии в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + 2\theta\right)\{|E_+|^2 + |E_-|^2\} = 2\frac{\partial}{\partial \tau_0} \sum_{j=1}^N |A_j|^2, \quad (13.12)$$

Определим суммарное поле излучения осцилляторов в тех же переменных и в этом же объеме (см. Приложение XVI)

$$E_x(Z, \tau_0) = \frac{2}{N\theta} \sum_{s=1}^N A_s \left(e^{i2\pi(Z-Z_s)} \cdot \theta(Z-Z_s) + e^{-i2\pi(Z-Z_s)} \cdot \theta(Z_s-Z) \right). \quad (13.14)$$

С учетом резонаторного поля и суммарного поля отдельных осцилляторов (13-15) система (13-10) – (13-11) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} E_{\pm} + \theta \cdot E_{\pm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_j \cdot \exp i\{\mp 2\pi Z_j\}, \quad (13.15)$$

$$\frac{d}{d\tau_0} A_j - i\alpha A_j^3 = -\frac{1}{2}[E_+ \cdot \exp i\{2\pi Z_j\} + E_- \cdot \exp i\{-2\pi Z_j\}] - \frac{1}{2} E_x(Z, \tau_0). \quad (13.16)$$

Диссипативный режим неустойчивости. Рассмотрим ниже диссипативный режим неустойчивости. Если нет выделенного направления излучения, при достаточно большой величине потерь на излучение $\delta_D > \partial E / E \partial t$, декремент которого можно определить из условия

$$\delta_D = \left(\int_S c \langle E \rangle^2 / 4\pi \right) \cdot dS / \int_V (\langle E \rangle^2 / 4\pi) \cdot dV \approx c / b, \quad (13.17)$$

здесь $b = n\lambda = 2\pi c n / \omega$, при этом, не нарушая общности, в расчетах можно ограничиться одной длиной волны.

Уравнение (13.10) при этом примет вид

$$E_{\pm} = \frac{1}{N\theta} \sum_{j=1}^N A_j \cdot \exp i\{\mp 2\pi Z_j\}, \quad (13.18)$$

а уравнение движения (13.11) не измениться, но может быть представлено следующим образом

$$\frac{d}{d\tau} A_j - i\alpha(A_j | A_j|^2) = -\frac{1}{2} E(Z_j) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \text{Cos}\{2\pi(Z_j - Z_i)\} \quad (13.19)$$

где масштаб времени изменен $\tau \rightarrow \tau / \theta$ уравнение для поля можно записать в виде

$$E(Z_j) = E_+ \cdot \exp i\{2\pi Z_j\} + E_- \cdot \exp i\{-2\pi Z_j\} = \frac{2}{N\theta} \sum_{i=1}^N A_i \text{Cos}\{2\pi(Z_j - Z_i)\} \quad (13.20)$$

Закон сохранения энергии в этом случае принимает вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{d |A_j|^2}{d\tau} = -\operatorname{Re} \sum_{j=1}^N E(Z_j) A_j^* , \quad (13.21)$$

отметим, что в этом случае $\{|E_+|^2 + |E_-|^2\} = -\operatorname{Re} \sum_{j=1}^N E(Z_j) A_j^* .$

Поле $E(Z_j)$ здесь – это поле индуцированного излучения. Не трудно увидеть природу формирования когерентности излучения частиц под действием волноводного или резонаторного поля. Пренебрегая релятивистскими поправками, уравнение для фазы осциллятора ψ_s можно записать в виде

$$\partial \psi_s / \partial t = -(e |E| / m \omega a_0) \cdot \operatorname{Sin}(\varphi - \psi_s) = -(\Omega / n_h) \cdot \operatorname{Sin}(\varphi - \psi_s) , \quad (13.22)$$

где $ea_0 |E| \omega / m \omega^2 a_0^2 = 2d |E| / n_h \hbar = \Omega / n_h$, $n_h \gg 1$ – энергия осциллятора, выраженная числом квантов поля. Для осцилляторов в квантовом случае $n_h = 1$ и Ω – частота Раби. Очевидно, что время согласования – синхронизации фазы осциллятора с фазой поля в месте, где находится частица) порядка n_h / Ω практически одинаковое для всех осцилляторов в активной зоне. Напомним, что величина, обратная частоте Раби Ω^{-1} в квантовой механике пропорциональна вероятности индуцированного излучения [13-8, 13-9]. В этом проявляются отличия осцилляторов классической и квантовой системы, где в последнем случае интенсивности полей спонтанного излучения на много порядков меньше интенсивности индуцированного излучения.

Интенсивность флуктуаций спонтанного поля пропорциональна количеству частиц, а интенсивность индуцированного поля пропорциональна квадрату числа излучающих частиц. При большом количестве частиц разница в интенсивностях спонтанного и индуцированного излучения очень большая. Но при моделировании число частиц не может быть столь велико и интенсивность спонтанного излучения - флуктуации могут оказаться весьма значительны, что не отвечает физической реальности. Кроме того, классические осцилляторы способны излучать большое число квантов поля, ибо для них $n_h \gg 1$. Поэтому следует с осторожностью относиться к результатам моделирования спонтанного излучения, флуктуаций и режимов сверхизлучения классических систем.

Если перейти к масштабу времени $\tau = \gamma_0 t \rightarrow \gamma t = \gamma_0^2 b t / c = \gamma_0 t / \theta$, то переменные будут иметь вид $\frac{e |E(t)| \exp\{i\varphi\}}{m \gamma \omega a_0} = E(t)$, $\gamma t = \tau$,

$\gamma^2 = \pi e^2 M / mc$, $A_j = a_j / a_0$, $kz_j = 2\pi Z_j$, $\alpha = \frac{3\omega}{4\gamma} (k_0 a_0)^2$ и диссипативный режим возбуждения принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} A_j - i\alpha (A_j | A_j|^2) = -\frac{1}{2} E(Z_j) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \text{Cos}\{2\pi(Z_j - Z_i)\}, \quad (13.23)$$

а для поля справедливо выражение

$$E(Z) = [E_+ \cdot \exp i\{2\pi Z\} + E_- \cdot \exp i\{-2\pi Z\}] = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N A_i \text{Cos}\{2\pi(Z - Z_i)\}, \quad (13.24)$$

здесь, масштаб времени несколько иной $\tau_1 = \gamma t$; инкремент также изменился, n_0 – плотность частиц в единице объема, $M = b \cdot n_0$, b – длина рассматриваемого пространства в продольном направлении (здесь, вообще говоря, тоже $b = n\lambda = 2\pi c n / \omega$). Закон сохранения энергии принимает вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{d |A_j|^2}{d\tau} = -\text{Re} \sum_{j=1}^N E(Z_j) A_j^*, \quad (13.25)$$

где суммирование по j эквивалентно суммированию по пространству активной зоны.

Можно показать, что при $\theta \gg 1$ решения (13.10) – (13.11) при $[E_+ \cdot \exp i\{2\pi Z_j\} + E_- \cdot \exp i\{-2\pi Z_j\}] \rightarrow [E_+ \cdot \exp i\{2\pi Z_j\} + E_- \cdot \exp i\{-2\pi Z_j\}] / \theta$ и $\tau \rightarrow \tau / \theta$ совпадают с решениями системы (13-23) – (13-24).

Режим сверхизлучения. В отсутствии резонаторного поля, останется только уравнение (13.16) в виде

$$\frac{d}{d\tau_0} A_j - i\alpha A_j^3 = -\frac{1}{2} E_x(Z, \tau_0), \quad (13.26)$$

где для поля $E_x(Z, \tau_0)$ справедливо выражение (13.14). Однако, переходя к масштабу времени соответствующему диссипативному режиму (13.23) – (13.24) $\tau \rightarrow \tau / \theta$ уравнение (13-26) перепишем в виде

$$\frac{d}{d\tau} A_j - i\alpha A_j^3 = -\frac{1}{2} E_{Dx}(Z, \tau_0) \quad (13.27)$$

где

$$E_{Dx}(Z, \tau_0) = E_x(Z, \tau_0) / \theta = \frac{2}{N} \sum_{s=1}^N A_s \left(e^{i2\pi(Z-Z_s)} \cdot \theta(Z-Z_s) + e^{-i2\pi(Z-Z_s)} \cdot \theta(Z_s-Z) \right) \quad (13.28)$$

Рассмотрим возбуждение поля в резонаторе размер которого b , равный длине волны (без потери общности результаты обобщаются на случай нескольких длин волн) групповая скорость излучения c , а эффективный декремент затухания поля равен $\delta_d = c / b$. В диссипативном режиме, когда инкремент процесса равен $\gamma = \gamma_0^2 / \delta_d = \gamma_0 / \theta$, причем $\delta_d > \gamma_0 = \sqrt{\pi e^2 n_0 / m}$, уравнения (13.19) и (13.20) описывают процесс возбуждения осцилляторами $A_s(\tau = 0) = A_{s0} = 1$ такого резонаторного поля $E(Z_j)$ в диссипативном режиме (рис.13.1 а). Если волноводного поля нет, такие же осцилляторы, расположенные также на длине d способны генерировать поле E_{Dx} (13.28) в режиме сверхизлучения (рис. 13.1. б).

Инкременты этих двух видов генерации оказываются одинаковыми, кроме того максимальные амплитуды полей также подобны.

Представляет интерес сравнить возбуждаемое поле с полем другого типа, которое могли бы генерировать эти же самые частицы (показано на рис. 13.1. пунктиром). Любопытно, что во всех случаях поле сверхизлучения оказалось бы большим, чем поле резонаторное. Следует также обратить внимание на тот факт, что максимальное значение поля сверхизлучения в два раза меньше максимального, которое могли бы генерировать эти же частицы, если бы они находились в одной точке (рис. 13.1 б). То есть степень когерентности сверхизлучения, также как и в случаях, рассмотренных в разделе 12 и выше в данном разделе примерно равна 25 %.

Уменьшение степени нелинейности α приводит к уменьшению максимальной амплитуды поля сверхизлучения и снижению уровня когерентности излучения.

Рост поля в режиме сверхизлучения происходит с уровня флуктуаций (т. е. с уровня спонтанного излучения), интенсивность которого пропорциональна $1/\sqrt{N}$, где N - число частиц. В реальных условиях N велико и начальная интенсивность поля в режиме сверхизлучения весьма мала. В примере выше $N = 3600$ и только при слабом релятивизме $\alpha \ll 1$ нужно пользоваться внешним полем.

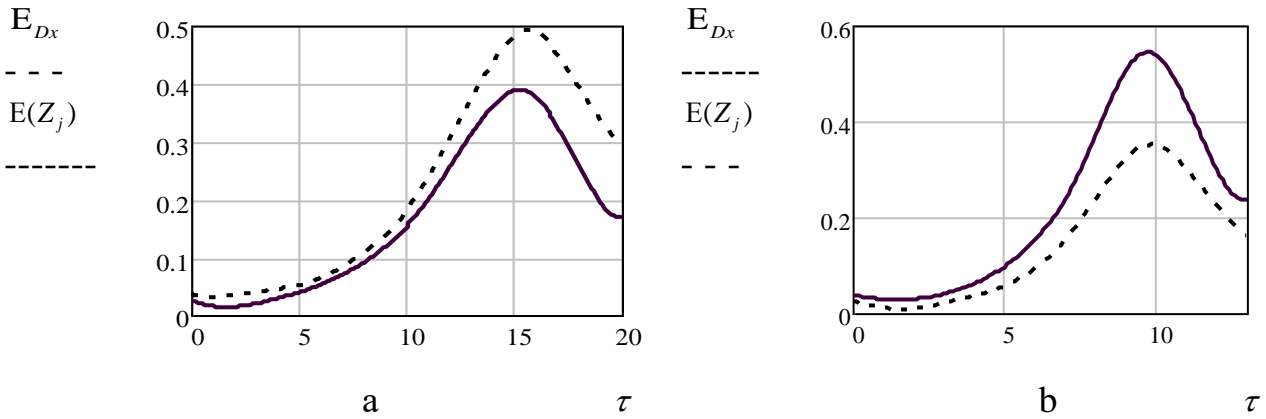


Рис. 13.1. а). Зависимость максимальной амплитуды резонаторного поля $E(Z_j)$ (13.20) в объеме от времени (сплошная линия) и оценка суммарного поля E_{Dx} (13.28), которое могли бы генерировать эти же астицы (пунктир); б). зависимость от времени максимальной амплитуды поля сверхизлучения E_{Dx} (13.28) в объеме сгустка (сплошная линия) и оценка резонаторного поля $E(Z_j)$ (13.20), которое могли бы генерировать эти же частицы (пунктир). Здесь $\alpha = 1$.

Диссипативный режим в квантовой системе. Нас будет интересовать случай большого уровня потерь на излучение ($\Theta > 1$). Из уравнений (4.7) – (4.10) раздела 4 при $\delta_D > \tilde{\gamma}_0 = \Omega_0 / \sqrt{2} = 2 |d_{ab}| \cdot |E_\mu| / \hbar$ получим

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} = -N, \quad (13.29)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = M \cdot N, \quad (13.30)$$

где $M = \mu / \mu_0$, $N = 4(\delta_D^2 / \tilde{\gamma}_0^2) \cdot (N / \mu_0)$, $N = \langle E \rangle^2 / 4\pi\hbar\omega$. Инкремент такой неустойчивости равен $\gamma = \tilde{\gamma}_0^2 / \delta_D \gg \gamma_{12}$, то есть значительно превышает естественную ширину линии, а роль бездиссипативного инкремента γ_0 берет на себя частота Раби $\Omega_0 = 2 |d_{ab}| E_\mu / \hbar$, где $\langle E^2 \rangle_\mu = 2 |E_\mu|^2 = [4\pi\hbar\omega\mu_0]$. По длине системы, также как в это сделано в разделе 4, расположим сектора

$$N_j(\tau = 0) = 2 \cdot N(\tau = 0) \cdot \text{Sin}^2 \left\{ 2\pi \frac{j}{S} + \alpha \right\}, \quad (13.31)$$

причем

$$N(\tau) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S N_j(\tau), \quad (13.32)$$

Уравнения (13.29)-(13.30) для секторов имеют вид:

$$\frac{\partial M_j}{\partial \tau} = -N_j, \quad (13.33)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial \tau} = M_j \cdot N_j, \quad (13.34)$$

причем

$$M(\tau) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S M_j(\tau), \quad (13.35)$$

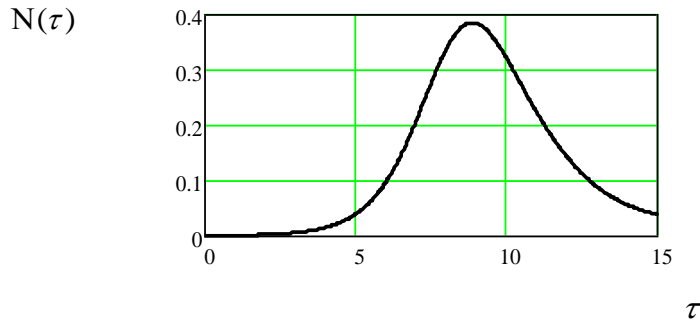


Рис. 13.2. Поведение числа квантов $N(\tau)$ в объеме резонатора со временем.

$$N(\tau = 0) = 1/3600, M(\tau = 0) = M_j(\tau = 0) = 1, S = 100, b = 2\pi c / \omega$$

Режим сверхизлучения в квантовом случае. Рассмотрим поведение N квантовых излучателей, размеры которых много меньше длины излучаемой волны, а волновые функции которых не перекрываются и взаимодействие их определяется только за счет электромагнитного поля. Так же как в разделе 4 представим инверсию и поляризацию для каждого излучателя $\bar{\mu} = (\rho_{aa} - \rho_{bb})$ и \bar{p} , а также напряженность электрического поля $E + E^* = A(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} + A^*(t) \cdot \exp\{i\omega t\}$. Уравнение подобное (4.1) для поля которое генерирует каждый излучатель принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 4\pi\omega^2 \cdot \bar{p} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \delta(z_0), \quad (13.36)$$

откуда определим

$$A(z, t) = \frac{i \cdot 2\pi \cdot \omega \cdot N}{c} \cdot \frac{1}{N} \sum_s \bar{p}(z_s, t) \cdot e^{ik|z-z_s|}. \quad (13.37)$$

Используя представления $P_j = P(z_j, \tau)$, $M_j = M(z_j, \tau)$, $\mu_{01} = \mu_j(\tau = 0)$,

$$t = \tau / \gamma, \quad |E|^2 = 4\pi\hbar\omega N, \quad |2A|^2 = 2 \cdot \frac{|d_{ba}|}{\gamma \cdot \hbar} |E|^2, \quad \gamma = \frac{2\pi \cdot \omega \cdot |d_{ba}|^2 \cdot \mu_{01} \cdot n_0 \cdot b}{\hbar c}$$

$$z = \frac{2\pi}{k} Z, \quad \mu = \mu_{01} \cdot N, \quad \bar{p} = |d_{ab}| \cdot \mu_0 \cdot P, \quad \Gamma_{12} = \frac{\gamma_{12}}{\gamma}, \quad n_0 \cdot b = N, \quad \text{запишем}$$

систему уравнений, описывающую режим генерации квантовой системы, подобный сверхизлучению (см. Приложение XXVIII)

$$\frac{d}{dt} M_j = -2 \cdot [P_j^* A_j + P_j A_j^*], \quad (13.38)$$

$$\frac{d}{dt} P_j = M_j \cdot A_j, \quad (13.39)$$

где

$$A(Z, \tau) = \frac{1}{N} \sum_s P(Z_s, \tau) \cdot e^{i2\pi|Z-Z_s|}. \quad (13.40)$$

Для 4000 излучателей, распределенных на длине волны, при $P_j(\tau = 0) = P_0 \exp(i\varphi)$, φ - случайная величина $\varphi \in (0 \div 2\pi)$, $P_0 = 0.1$, $M(\tau = 0) = 1$, $\Gamma_{12} = 0$, получим следующие результаты численного решения. На рис. 13.3, представлены зависимости от времени амплитуды поля слева, справа от системы и максимальной внутри излучателя и средней инверсии системы. Напряженность поля имеет два приблизительно равных максимума в моменты времени $\tau = 13.2$ ($E = 0.52$) и $\tau = 15.8$ ($E = 0.555$). Первый максимум – на правом краю системы ($Z = 1$), второй - на левом ($Z = 0$). Эти два значения максимумов напряженности поля в данной нормировке на рис. 13.3 отвечают величинам $|E|^2 = |2A|^2$, соответственно равным 0.27 и 0.31.

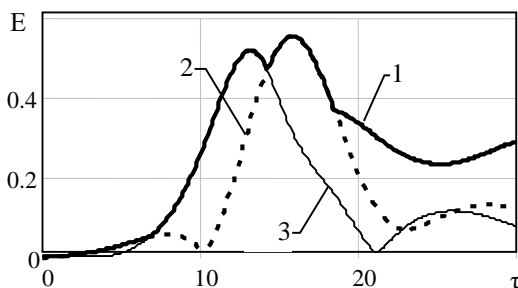


Рис. 13.3. Зависимость амплитуды поля от времени, 1 – $\max_z(E(Z, \tau))$, 2 – $E(Z = 0, \tau)$, 3 – $E(Z = 1, \tau)$.

Обратим внимание на тот факт, что инкремент процесса сверхизлучения γ равен инкременту рассмотренной выше диссипативной неустойчивости $\tilde{\gamma}_0^2 / \delta_D$ в квантовой модели при тех же значениях частоты Раби и декремента δ_D

$$\gamma = \frac{2\pi \cdot \omega \cdot |d_{ba}|^2 \cdot \mu_{01} \cdot n_0 \cdot b}{\hbar c} = \frac{\tilde{\gamma}_0^2}{\delta_D} = \frac{\Omega_0^2}{2\delta_D},$$

а величина напряженности электрического поля $E = 2|A|$ в принятой нормировке связана с использованным выше значением N (см. обозначения после формулы (13.30))

$$|E|^2 = |2A|^2 = 4 \frac{\delta_D^2 |d_{ba}|^2 |E_\mu|^2 |E|^2}{\Omega_0^4 \hbar^2 \cdot 2\pi \hbar \omega \mu_0} = 2 \frac{\delta_D^2 N}{\Omega_0^2 \mu_0} = 4 \frac{\delta_D^2}{\tilde{\gamma}_0^2 \mu_0} N = N,$$

что позволяет сравнить эффективность возбуждения колебаний в случае диссипативной неустойчивости и в режиме сверхизлучения.

Таким образом и в квантовой модели диссипативная неустойчивость и режим сверхизлучения характеризуются одинаковыми инкрементами процесса и величины достигаемой интенсивности генерации оказываются сравнимы.

В случае диссипативных неустойчивостей в волноводах начальная амплитуда интегрального поля задана, а при генерации в режиме сверхизлучения рост поля происходит от флуктуационного (спонтанного) уровня. При большом числе излучателей этот уровень очень мал и время развития процесса становится очень большим. Поэтому обычно используют некоторое внешнее иницирующее поле для ускорения процесса.

Литература к разделу 13

13-1. Куклин В. М. Роль поглинання та дисипації енергії у формуванні просторових нелінійних структур у нерівноважних середовищах / В. М. Куклин // УФЖ. Огляди. – 2004. – Т. 1. – № 1. – С. 49–81.

13-2. Загородний А. Г., Куклин В. М. Особенности излучения в неравновесных средах. в кн. Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц и др.; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ, 2014. – Вып. 1. – С. 13–82.

13-3. Kirichok A.V., Kuklin V.M., Mischin A.V., Pryimak A.V. Modelling of superradiation processes driven by an ultra-short bunch of charged particles moving

through a plasma/ Problems of Atomic Science and Technology, 2015 N 4 – series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration”. – P. 255–257.

13-4. Гапонов А. В. О неустойчивости системы возбужденных осцилляторов по отношению к электромагнитным возмущениям ЖЭТФ т.39. в.2. с. 326–321. 1960.

13.5. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике. Изв. Вузов. Радиофизика 1967. т. 10, № 9–10. с.1414–1433.

13-6. Il'inskii Yu. A., Maslova N. S. Classical analog of superradiance in a system of interacting nonlinear oscillators // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1988. – Vol. 91. – No. 1. – P. 171–174.

13-7. Kuklin V. M., Litvinov D.N., Sporov V.E. Superradiance of stationary oscillators // Problem of Atomic science and technology. Ser. Plasma Electronics and new methods of acceleration. Issue 10. – N. 4 (116). – 2018. – pp. 217–220.

13-8. Давыдов А.С. Квантовая механика Физматгиз. 1963. – 748 с.

13-9. Allen L., Eberly J. Optical resonance and two-level atoms. Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons. New York – London – Sydney – Toronto. 1975. – 222 p.

ГЛАВА 6. Циклотронные неустойчивости потоков частиц

Рассмотрено возбуждение ТЕ и ТМ электромагнитных волн в магнитоактивных волноводах. Проведен учет плазмы малой плотности в традиционных уравнениях гиротрона, показано изменение рабочей точки и уровня генерации в этом случае. Отмечается, что законы сохранения энергии, отвечающие элементарным процессам в условиях аномального и нормального Доплера, выполняются и для более сложных пучковых систем с вынужденным излучением рассмотренных волн разной поляризации. Проведен учет конечного ларморовского радиуса, сравнимого с характерной поперечной неоднородностью поля волны, в частности для случая аномального эффекта Доплера в плазменном волноводе.

РАЗДЕЛ 14. ВОЗБУЖДЕНИЕ ТЕ ВОЛНЫ ПУЧКОМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Вообще говоря, существует несколько подходов к теоретическому описанию нелинейных режимов возбуждения колебаний пучками электронов, движущимися во внешнем магнитном поле, или, так называемыми, пучками осцилляторов – вращающихся электронов.

Как правило, в большинстве работ ларморовский радиус вращения этих электронов мал, меньше характерного размера поперечной неоднородности поля и меньше или порядка толщины пучка (причем электроны пучка достаточно равномерно заполняют плоский или цилиндрический слой). Научной школой А. В. Гапонова в СССР были развиты методы описания возбуждения собственных колебаний волнопроводов в присутствии внешнего магнитного поля пучком электронов [14-1, 14-2], что помогло разработать множество (вакуумных) приборов и устройств.

Позднее появилась необходимость изучения процессов возбуждения пучками заряженных частиц (как правило, электронов) циклотронных колебаний плазмы, для дальнейшего её нагрева, в основном для целей управляемого термоядерного синтеза. Это привело в Харькове к целому циклу работ (см., например, [14-3 – 14-5]) по нелинейной теории возбуждения волн в магнитоактивной плазменной среде (и волноводах) пучками заряженных

частиц, в частности, и с конечными значениями ларморовского радиуса [14-6, 14-7]. В этих работах также было показано, что законы сохранения элементарных эффектов аномального и нормального Доплера выполняются и для более сложных пучковых систем с вынужденным излучением.

Подобные оригинальные описания нелинейных процессов возбуждения колебаний пучками заряженных частиц, где основное внимание было уделено учету уже релятивистских эффектов и ограниченности сложных резонансных систем были также рассмотрены авторами [14-8 – 14-12].

Поле электромагнитной волны в цилиндрическом волноводе не трудно получить из уравнений

$$[\nabla, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad [\nabla, \vec{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (14.1)$$

где \vec{J} – ток пучка электронов, которые находятся в постоянном магнитном поле $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$. Дисперсионное соотношение, определяющее связь волнового вектора $\vec{k} = (k_\perp, k_z)$ с частотой ω для возмущений вида $\exp\{-i(\omega t - k_z z - \vec{r}_\perp \vec{k}_\perp)\}$ можно записать как

$$D(\omega, \vec{k}) \equiv (k_z^2 + k_\perp^2 - \omega^2 / c^2) / (k_z^2 - \omega^2 / c^2) = 0. \quad (14.2)$$

В отсутствии пучка частиц для поля ТЕ волны, которая не имеет составляющей электрического вектора в направлении распространения в гладком цилиндрическом волноводе радиуса r_w , справедливы выражения

$$B_z = b(z, t) J_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta), \quad (14.3)$$

$$(B_\theta, E_r) = \left\{ -\frac{k_z m}{r k_\perp^2}, -\frac{\omega m}{c r k_\perp^2} \right\} b(z, t) J_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta), \quad (14.4)$$

$$(B_r, E_\theta) = \{ ik_z / k_\perp, -i\omega / c k_\perp \} b(z, t) J'_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + im\theta), \quad (14.5)$$

где использована цилиндрическая система координат (r, θ, z) , b – комплексная амплитуда волны, m – целое число, $J_m(x)$ и $J'_m(x) = d J_m(x) / dx$ – функция Бесселя и её производная. Обычно для описания поля в волноводе многие авторы используют вспомогательную мембранную функцию $\Psi_s = -i(c/\omega) J_m(k_\perp r)$, для которой выполнено соотношение $(\Delta_\perp + k_\perp^2) \Psi_s = 0$

и граничные условия $\left. \frac{\partial \Psi_s}{\partial n} \right|_s = \left. \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$. Или, что аналогично, можно потребовать обращения в нуль составляющей поля E_θ на границе волновода,

что и определяет значения поперечного волнового числа $k_\perp = k_{ms} = x_{ms} / r_w$,

причем $x_{ms} - S$ корень уравнения $dJ_m(x)/dx = 0$. Пучок электронов занимает цилиндрический слой в сечении волновода. Для определенности будем считать его достаточно тонким, полагая, что все центры ларморовского вращения электронов находятся на одном расстоянии от оси волновода.

Для перехода в систему координат, центр которой совпадает с центром вращения отдельного электрона пучка (см. приложение XVII), то есть (R, Φ, z) можно воспользоваться следующими соотношениями (см., например, [14-4,14-13]):

$$\begin{aligned} b_z &= B_z \\ b_\Phi &= B_\theta \sin(\Phi - \theta) + B_r \cos(\Phi - \theta) \\ b_R &= -B_\theta \cos(\Phi - \theta) + B_r \sin(\Phi - \theta) \\ e_R &= -E_\theta \cos(\Phi - \theta) + E_r \sin(\Phi - \theta) \\ e_\Phi &= E_\theta \cos(\Phi - \theta) + E_r \sin(\Phi - \theta) \end{aligned} \quad (14.6)$$

Воспользовавшись значениями величин (14.3) и (14.5), найдем значения компонент электромагнитного поля в системе координат с центром вращения отдельного электрона

$$\begin{aligned} (b_z, b_\Phi, e_R) &= b \sum_q J_q(k_{ms} r_c) J_{m+q}(k_{ms} r_B) \exp(-i\omega t + im\Phi + iq\Phi_c + i\pi m/2) \times \\ &\times \left(1, -\frac{k_z m}{r k_{ms}^2}, -\omega \frac{m+q}{k_{ms} c r} \right), \end{aligned} \quad (14.7)$$

$$\begin{aligned} (b_R, e_\Phi) &= b \sum_q J_q(k_{ms} r_c) J'_{m+q}(k_{ms} r_B) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\Phi + iq\Phi_c + i\pi m/2) \times \\ &\times \left[ik_z / k_{ms}, -\frac{i\omega}{k_{ms} c} \right]. \end{aligned} \quad (14.8)$$

В данном случае $\Phi_c = \Phi_{c0} + \omega_B \cdot t$, $\Phi = \Phi_0 + \omega_B \cdot t$, где Φ_{c0} , Φ_0 – медленно изменяющиеся фазы, вообще говоря, сохраняющие информацию о начальном положении частицы пучка (см. приложение XVII) $z = z_0 + v_z \cdot t$. В случае резонанса частиц пучка с волной $\omega - k_z v_z \approx n\omega_B$, где $\omega_B = eB_0/m_e c$ – электронная циклотронная частота, выполняется соотношение $m + q = n$ и в выражениях (14.7) и (14.8) можно удерживать только резонансные члены:

$$(b_z, b_\Phi, e_R) = b \cdot J_{n-m}(k_{ms} r_c) J_n(a) \exp(2i\pi\zeta) \left[1, -\frac{k_z m}{r k_{ms}^2}, -\omega \frac{m+q}{k_{ms} c r} \right], \quad (14.9)$$

$$(b_R, e_\Phi) = b J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a) \exp(2i\pi\zeta) \left[\frac{ik_z}{k_{ms}}, -\frac{i\omega}{k_{ms} c} \right], \quad (14.10)$$

где $\zeta = \frac{1}{2\pi} \left(-\omega t + n\omega_B t + m\Phi_0 + (n-m)\Phi_{c0} + \frac{\pi m}{2} \right)$, $a = k_{ms} r_B$, $r_B = v_\Phi / \omega_B$ – ларморовский радиус частицы пучка. Можно показать, что уравнение для поля волны принимает вид

$$\begin{aligned} & \omega D(\omega, \vec{k}) b + i \left[\frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial k} \frac{\partial b}{\partial z} \right] = \\ & = 4i \left[r_w^2 b^* J_m^2(x_{ms}) \left(1 - \frac{m^2}{x_{ms}^2} \right) \right]^{-1} \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \vec{J} \vec{E}^*, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где групповая скорость колебаний $v_g = \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial k} / \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}$, расстройка

$\Delta = \text{Re}\{D(\omega, \vec{k}) / \gamma_e \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}\}$ и декремент затухания волны в отсутствие пучка $\Theta = \text{Im}\{D(\omega, \vec{k}) / \gamma_e \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}\}$, нормированные на инкремент процесса γ_e .

В однородном протяженном волноводе уравнение (14.11) упрощается и может быть представлено в виде

$$\left[\frac{d}{d\tau} - i\Delta + \Theta \right] E_e \exp\{i\varphi_e\} = \frac{i}{N} \sum_{j=1}^N a_j \cdot J'_n(a_j) \cdot \exp(-2\pi i \zeta_j) \quad (14.12)$$

где $E_e \exp\{i\varphi_e\} = e \cdot b \cdot J_{n-m}(k_{ms} \cdot r_c) / m_e \cdot c \cdot \gamma_e$, N – число частиц, моделирующих пучок. Уравнения движения для частиц пучка можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} v_\Phi \frac{d\Phi_c}{dt} &= \frac{e}{m_e} \left[e_R - \frac{v_z}{c} b_\Phi + \frac{v_\Phi}{c} b_z \right] = v_\Phi \frac{eb}{m c \omega_B} J_{n-m}(k_{ms} r_c) J_n(a) \exp(2i\pi\zeta) \times \\ & \times \left[\left(\omega_B - \omega \frac{n}{a^2} \right) + \frac{n v_z k_z}{a^2} \right], \end{aligned} \quad (14.13)$$

$$\frac{dv_\Phi}{dt} = -\frac{e}{m_e} \left[e_\Phi + \frac{v_z}{c} b_R \right] = i \frac{e(\omega - k_z v_z) b}{m c k_{ms}} J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a) \exp(2i\pi\zeta), \quad (14.14)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m_e} \left[-\frac{v_\Phi}{c} b_R \right] = \frac{ie k_z v_\Phi b}{m c k_{ms}} = J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a) \exp(2i\pi\zeta). \quad (14.15)$$

Переходя к безразмерным величинам и используя значение интегральной фазы ζ , систему уравнений для действительных переменных можно записать в виде (см., например, [14-7])

$$\frac{dE_e}{d\tau} + \theta_e \cdot E_e = N^{-1} \cdot \sum_{j=1}^N a_j \cdot J'_n(a_j) \cdot \text{Sin}(2\pi\zeta_j + \varphi_e), \quad (14.16)$$

$$\frac{d\varphi_e}{d\tau} - \Delta_e = (E_e N)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^N a_j \cdot J'_n(a_j) \cdot \text{Cos}(2\pi\zeta_j + \varphi_e). \quad (14.17)$$

Уравнения движения электронов в поле этой волны в присутствии постоянного магнитного поля следующие

$$2\pi \frac{d\zeta_i}{d\tau} = \eta_i + nE_e \cdot J_n(a_i) \cdot \left\{1 - \frac{n^2}{a_i^2}\right\} \cdot \text{Cos}(2\pi\zeta_i + \varphi_e), \quad (14.18)$$

$$d\eta_i / d\tau = -R_e \cdot E_e \cdot a_i \cdot J'_n(a_i) \cdot \text{Sin}(2\pi\zeta_i + \varphi_e), \quad (14.19)$$

$$da_i / d\tau = -n \cdot E_e \cdot J'_n(a_i) \cdot \text{Sin}(2\pi\zeta_i + \varphi_e), \quad (14.20)$$

где $\tau = \gamma_e t$,

$$\gamma_e^2 = 4e^2 \cdot \omega_B \cdot N_{b0} \cdot [m_e \cdot c \cdot k_{ms}^2 \cdot r_w \cdot J_m^2(x_{ms}) \cdot (1 - m^2 / x_{ms}^2) \cdot D_\omega]^{-1} \cdot J_{m-n}^2(k_{ms} \cdot r_C),$$

$$D_\omega = \partial D / \partial \omega = \partial \{[\omega^2 - (k_z^2 + k_{ms}^2)c^2] / [\omega^2 - k_z^2 c^2]\} / \partial \omega |_{D=0},$$

$$R_e = k_z^2 \cdot \omega_B / k_{ms}^2 \cdot \gamma_e, \quad E_e = e \cdot b \cdot J_{m+n}(k_{ms} \cdot r_C) / m_e \cdot c \cdot \gamma_e,$$

$\eta = (k_z \cdot v_z - \omega + n \cdot \omega_B) / \gamma_e$, $a = k_{ms} r_B = k_{ms} v_\Phi / \omega_B$, $\omega_B = eB / m_e c$, N_{b0} – количество частиц невозмущенного пучка на единицу длины. Здесь b – амплитуда волны.

Однако, обсуждаемые режимы описывают взаимодействие интегрального, общего поля с частицами, а сами частицы между собой непосредственно не взаимодействуют. Ситуация изменяется, если нужно суммировать поля излучения каждой отдельной частицы, при этом частицы способны взаимодействовать между собой за счет воздействия друг на друга излучаемыми полями. Этот процесс относится к режиму сверхизлучения системы осцилляторов.

Режим сверхизлучения. Случай излучения отдельной частицы (из общего их количества, равного N) следует рассматривать несколько иначе. Уравнение для поля, которое излучает отдельная частица $B_j = e \cdot b_j \cdot J_{m+n}(k_{ms} \cdot r_C) / m_e \cdot c \cdot \gamma_e$, можно записать в виде

$$v_g \frac{\partial B_j}{\partial z} = i \frac{a_j}{N} J'_n(a_j) \exp\{-2\pi i \zeta_j\} \exp\{-ik_z z_j\} \cdot \delta(z - z_j), \quad (14.21)$$

или

$$\frac{\partial B_j}{\partial z} = \lambda \cdot \delta(z - z_j),$$

где $\lambda = i \frac{a_j}{Nv_g} J'_n(a_j) \exp\{-2\pi i \zeta_j\} \exp\{-ik_z z_j\}$, решение которого, вообще говоря $B_j = C + \lambda \cdot \theta(z - z_j)$, причем C – константа, которую следует определить. Так как для излучаемой осциллятором волны справедливо уравнение $D(\omega, k) = 0$, корни которого $k_{z1,2} = \pm \operatorname{Re} D(1 + i \operatorname{Im} D / \operatorname{Re} D) \approx \pm (\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2)^{1/2} (1 + i0)$, то для волны распространяющейся в направлении $z > z_j$, волновое число $k_z = k_{z1} > 0$ и значение постоянной C следует выбрать равной нулю, для того, чтобы избежать неограниченного роста поля на бесконечности.

Для волны, распространяющейся в направлении $\xi = \frac{k_z z}{2\pi} < \xi_j = \frac{k_z z_j}{2\pi}$, волновое число $k_z = k_{z2} < 0$ значение постоянной по тем же соображениям следует выбрать равной $-\lambda$. Амплитуда поля при этом

$$B_j(\xi) = i \frac{a_j}{Nv_g} J'_n(a_j) \exp\{-2\pi i \zeta_j\} [\exp\{2\pi i(\xi - \xi_j)\} \cdot U(\xi - \xi_j) + \exp\{-2\pi i(\xi - \xi_j)\} \cdot U(\xi_j - \xi)] \quad (14.22)$$

где $U(z) = 1$ при $z \geq 0$ и $U(z) = 0$ при $z < 0$, Обратим внимание на то обстоятельство, что направление вектора напряженности продольной составляющей магнитного поля в этом случае не зависит от направления распространения волны. Это обусловлено подавлением ими собственного магнитного поля вращающегося электрона при излучении волн в обоих направлениях. Очевидно, для системы N осцилляторов уравнение для поля можно записать в виде

$$B(\xi) = i \frac{1}{2N\mathcal{G}} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) \exp\{-2\pi i \zeta_j\} [\exp\{2\pi i(\xi - \xi_j)\} \cdot U(\xi - \xi_j) + \exp\{-2\pi i(\xi - \xi_j)\} \cdot U(\xi_j - \xi)] \quad (14.23)$$

где $\mathcal{G} = 2V_g N_{ob} / M = 2v_g / d \cdot \gamma_e$ – отношение максимального инкремента δ к декременту затухания вследствие излучения с торцов системы $2v_g / d$.

Важно отметить, что в таких обозначениях отношение энергии волны на длине системы $\xi_M = 2\pi k_z d$ к энергии частиц пропорционально $\int_0^{\xi_M} |B(\xi)|^2 d\xi / \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i^2$, а так как отношение энергии, излучаемой из системы к общей энергии поля за время $1/\delta$ в системе равно \mathcal{G} , то коэффициент полезного действия системы (если единицей времени вы-

брана величина $1/\delta$) пропорционален $\frac{\mathfrak{g}}{\xi_M} \int_0^{\xi_M} |B(\xi)|^2 d\xi / \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{i0}^2$.

Уравнения движения при этом преобразуются следующим образом

$$\left(\frac{n}{\gamma_e}\right) v_\Phi \frac{d\Phi_c}{dt} = \left(\frac{n}{\gamma_e}\right) \frac{e}{m_e} \operatorname{Re} \left[e_R - \frac{v_z}{c} b_\Phi + \frac{v_\Phi}{c} b_z \right] = \left(\frac{n}{\gamma_e}\right) \frac{v_\Phi e}{m c \omega_B} J_{n-m}(k_{ms} r_c) \left[\left(\omega_B - \omega \frac{n}{a^2} \right) + \frac{n v_z k_z}{a^2} \right] J_n(a) \times$$

$$\times \operatorname{Re} b \exp(2i\pi\zeta) = n v_\Phi \left(1 - \frac{n^2}{a^2} \right) J_n(a_i) \operatorname{Re} \exp(2i\pi\zeta_i) \cdot B(\xi_i);$$

$$\left(\frac{k_{ms}}{\omega_B \gamma_e}\right) \frac{dv_{\Phi i}}{dt} = \frac{da_i}{d\tau} = -\left(\frac{k_{ms}}{\omega_B \gamma_e}\right) \frac{e}{m_e} \left[e_\Phi + \frac{v_z}{c} b_R \right] = \left(\frac{k_{ms}}{\omega_B \gamma_e}\right) \frac{e(\omega - k_z v_z)}{m_e c k_{ms}} J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a_i) \operatorname{Re} i b \exp(2i\pi\zeta'_i) =$$

$$= n \cdot \left[\frac{e}{\gamma_e m_e c} J_{n-m}(k_{ms} r_c) \right] J'_n(a_i) \operatorname{Re} i \exp(2i\pi\zeta_i) b = n J'_n(a_i) \operatorname{Re} i \exp(2i\pi\zeta_i) \cdot B(\xi_i);$$

$$\frac{k_z}{\gamma_e^2} \frac{dv_{zi}}{dt} = -\frac{k_z}{\gamma_e^2} \frac{e}{m_e} \left[-\frac{v_\Phi}{c} b_R \right] = \frac{k_z}{\gamma_e^2} \frac{i e k_z v_{\Phi i}}{m_e c k_{ms}} J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a_i) \operatorname{Re} i b \exp(2i\pi\zeta_i) =$$

$$= a_i \left(\frac{k_z^2 \omega_B}{k_{ms}^2 \gamma_e} \right) \left[\frac{e}{m_e c \gamma_e} J_{n-m}(k_{ms} r_c) \right] J'_n(a_i) \operatorname{Re} i b \exp(2i\pi\zeta_i) = a_i R \cdot J'_n(a_i) \operatorname{Re} i \exp(2i\pi\zeta_i) \cdot B(\xi_i);$$

Используя представление $B(\xi_i)$, для изменения фазы $n \frac{d\Phi_{ci}}{d\tau}$ полу-

чим выражение

$$n \frac{d\Phi_{ci}}{d\tau} = -\frac{n}{\mathfrak{g}} \left(1 - \frac{n^2}{a^2} \right) J_n(a_i) \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) [\sin\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) +$$

$$+ 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi - \xi_j) + \sin\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) - 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_j - \xi)],$$

Аналогично можно записать уравнение для $2\pi\zeta_i$ и другие уравнения системы, описывающей процесс сверхизлучения

$$2\pi \frac{d\zeta_i}{d\tau} = \eta_i - n \cdot J_n(a_i) \cdot \left\{ 1 - \frac{n^2}{a_i^2} \right\} \frac{1}{2N\mathfrak{g}} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) [\operatorname{Sin}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) +$$

$$+ 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_i - \xi_j) + \operatorname{Sin}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) - 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_j - \xi_i)], \quad (14.24)$$

$$da_i / d\tau = -n \cdot J'_n(a_i) \cdot \frac{1}{2N\mathfrak{g}} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) [\operatorname{Cos}\{2\pi\zeta_i - \zeta_j\} +$$

$$+ 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_i - \xi_j) + \operatorname{Cos}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) - 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_j - \xi_i)], \quad (14.25)$$

$$d\eta_i / d\tau = -R_e \cdot a_i \cdot J'_n(a_i) \frac{1}{2N\vartheta} \sum_{j=1}^N a_j J'_n(a_j) [\text{Cos}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) + 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_i - \xi_j) + \text{Cos}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) - 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_j - \xi_i)]. \quad (14.26)$$

Уравнения (14.16) – (14.20) можно преобразовать (детальнее см. приложение XVII) в известные уравнения Гапонова, которые обыкновенно использовались для описания явлений в вакуумном волноводе. Отметим, что детальный анализ поведения частиц и поля в гиротроне был также выполнен авторами [14-11]. Интерес к гиротронному возбуждению также был проявлен авторами [14-12]. Однако при превышении определенной мощности гиротрона, выделение газа из элементов конструкции и его ионизация приводили к появлению плазмы сравнительно малой плотности, где ленгмюровская частота плазмы оставалась намного меньше рабочей частоты ($\omega > \omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_p / m_{e0}}$). Непосредственное включение плазмы в процедуру получения уравнений Гапонова было затруднительно, поэтому был использован аналог представленной выше системы уравнений (14.16) – (14.20), полученный с учетом влияния плазмы малой плотности. Трудность, связанная с невозможностью разделить волны разной поляризации в магнитоактивной плазме, удалось обойти, используя малый параметр их связи $g = (\omega^2 \varepsilon_{xy} / c^2 k_{\perp}^2) = \omega^2 \varepsilon_2 / c^2 k_{\perp}^2 \ll 1$, где $\varepsilon_{xy} \equiv \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_2 = i\omega_{pe}^2 \omega_B / \omega(\omega^2 - \omega_B^2)$ – поперечный компонент диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы. Кроме того, малым было отношение продольного и поперечного компонентов волнового вектора $(k_z / k_{\perp}) < 1$. Ниже рассмотрим проведенный в работе [14-15] учет влияния плазмы малой плотности в традиционной форме [14-1] уравнений гиротрона. А также обсудим эффективность генерации гиротрона при наличии в его объеме плазмы [14-16].

Система уравнений в этом случае принимает вид (см. приложение XVII)

$$\frac{d^2 F}{d\xi_G^2} + i \frac{\partial}{\partial \tau_P} + \gamma_G'^2 F = -I_P (1 + g) \langle \vec{A}^{*n} \rangle, \quad (14.27)$$

$$\frac{d\vec{A}}{d\xi_G} + i \left[\Delta + |\vec{A}|^2 - 1 \right] \vec{A} = -i(1 + g) F^* \vec{A}^{*n-1}, \quad (14.28)$$

$$\text{где } I_P = \frac{64eI_0n^3}{m_{e0}c^3} \frac{\beta_{z0}}{\beta_{\perp 0}^{2(4-n)}} \left(\frac{n^n}{2^n n!} \right)^2 \frac{J_{n-m}^2(k'_{ms}r_c)}{J_m'^2(x'_{ms})x_{ms}'^2 + J_m^2(x'_{ms})(x_{ms}'^2 - m^2)},$$

$I_0 = N_{b0}ev_{z0}$ начальный нормированный продольный ток пучка

$$\Delta = \frac{2(\omega - n\omega_{B0})}{n\omega_{B0}\beta_{\perp 0}^2}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{a}}{a_0}, \quad \vec{a} = a \exp\left\{ \frac{2\pi i \zeta}{n} \right\}, \quad \Omega_B = eB_0 / m_e c = \omega_B (1 - \beta_{\perp 0}^2 - \beta_{z0}^2)^{-1/2},$$

$$a_0 = a(\xi_G = 0), \quad \xi_G = \frac{\beta_{\perp}^2 \omega_{B0} z}{2v_z}, \quad \sigma = \frac{v_{z0}}{v_z}, \quad \gamma_G'^2 = 4v_z^2 \frac{\epsilon_1 \omega^2 / c^2 - k_{ms}^2}{(\beta_{\perp 0}^2 \omega_{B0})^2},$$

$$F = 4 \frac{n^2 a_0^{n-2} e b \exp(i\varphi) J_{n-m}(k'_{ms}r_c)}{cm_{e0}\beta_{\perp 0}^2 \omega_{B0}}, \quad \tau_P = \rho_P^2 c^2 / 2\omega G, \quad G = \frac{(\omega^2 - \Omega_B^2)^2 + \omega_{pe}^2 \Omega_B^2}{(\omega^2 - \Omega_B^2)^2},$$

а процедура усреднения имеет вид $\langle A^{*n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{a_j}{a_{j0}} \right)^n \exp(-2i\pi\zeta_j)$.

Можно показать, что учет наличия плазмы приводит к некоторому увеличению излучаемой мощности (см. рис. 14.1). Верхняя кривая соответствует наличию в объеме волновода плазмы малой плотности, нижняя отвечает случаю вакуумного волновода.

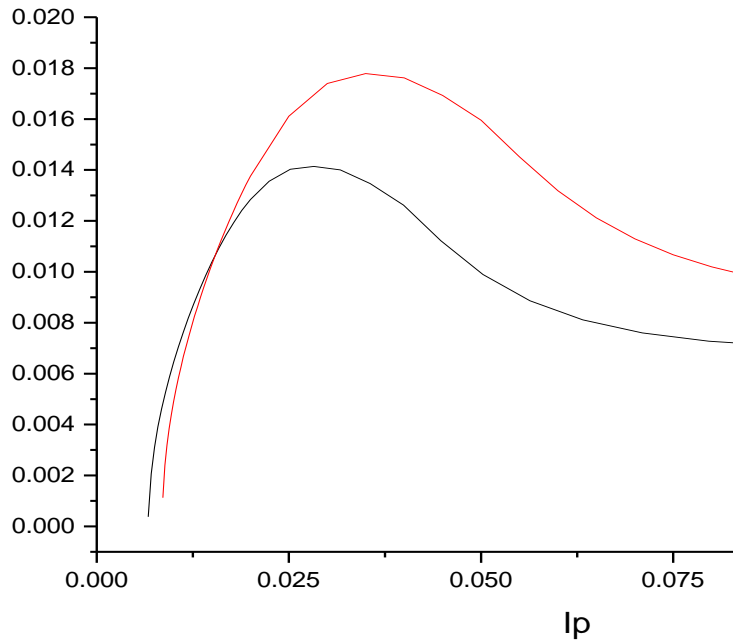


Рис. 14.1. Зависимость излучаемой из волновода мощности (в относительных единицах) от нормированного тока I_P при $\beta_z(\tau=0) = v_{z0}/c = 0,24$,

$$\beta_{\perp}(\tau=0) = v_{\phi}/c = 0,336, \quad \omega_B/\omega = 1.062, \quad z_{out} = 12, \quad \Delta = 0,6, \quad \omega_{pe}/\omega = 0,1 [14-16]$$

Аналогично можно записать уравнения, описывающие процесс сверхизлучения в системе гиротрона. Уравнения движения для пространственной задачи можно представить в виде

$$2\pi \frac{d\zeta_i}{dz} = \frac{(n\omega_{B0} - \omega)}{v_z} + \frac{n\omega_{B0}}{v_z} [\beta_{\perp 0}^2 - \beta_{\perp}^2] + \frac{ne}{mcv_z} \left(1 - \frac{n^2}{a_i^2}\right) J_{n-m}(k_{ms} r_c) J_n(a_i) \operatorname{Re} b \exp(2i\pi\zeta_i) =$$

$$= \frac{(n\omega_{B0} - \omega)}{v_z} + \frac{n\omega_{B0}}{v_z} [\beta_{\perp 0}^2 - \beta_{\perp}^2] + \frac{n\delta}{v_z} \left(1 - \frac{n^2}{a_i^2}\right) J_n(a_i) \operatorname{Re} \exp(2i\pi\zeta_i) \cdot B;$$

$$\frac{da}{dz} = \frac{en}{mcv_z} J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a) \operatorname{Re} i b \exp(2i\pi\zeta) = \frac{\delta n}{v_z} J'_n(a) \operatorname{Re} i \exp(2i\pi\zeta) \cdot B.$$

Здесь не будем учитывать изменение весьма медленной продольной скорости в фазовых соотношениях. Происхождение первых слагаемых легко понять, отметив, что $\omega_{B0} \approx \frac{eB}{m_e c} (1 - \beta_{\perp 0}^2 / 2)$, тогда $\omega_B \approx \omega_{B0} [1 + (\beta_{\perp 0}^2 - \beta_{\perp}^2) / 2]$.

Полагая аргументы функций Бесселя малыми $J_n(x) \approx (x/2)^n \frac{1}{n!}$;

$J'_n(x) = \frac{1}{x} (x/2)^n$ преобразуем предыдущие уравнения следующим образом

$$\frac{d(\zeta_i/n)}{d\xi_G} = i\Delta + i(|A|^2 - 1) - G \frac{(|A_i|/2)^{n-1}}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{|A_j|}{2}\right)^n \cdot \operatorname{Sin}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) +$$

$$+ 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_i - \xi_j), \quad (14.29)$$

$$\frac{d|A_i|}{d\xi_G} = -G \frac{(|A_i|/2)^{n-1}}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{|A_j|}{2}\right)^n \operatorname{Cos}\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) +$$

$$+ 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_i - \xi_j), \quad (14.30)$$

где использованы следующие величины $\omega_b^2 = 4\pi e^2 N_{0b} / S m_e$ – усредненная по объему ленгмюровская частота частиц пучка, $S = \pi r_w^2$ – сечение

волновода, $Z = \xi_G = \omega_B \delta^2 \beta_{\perp 0}^2 z / 2v_z$, $\Delta = \frac{2(\omega - n\omega_{B0})}{n\omega_{B0} \cdot \beta_{\perp 0}^2}$, $\beta_{\perp}^2 = (v_{\perp} / c)^2$,

$$G = \frac{\omega_b^2 n V \cdot J_{m-n}^2(k_{ms} r_c) a_0^{2n-1}}{4\pi \beta_{\perp 0}^2 \cdot c^2 \cdot J_m^2(x_{ms}) \cdot (x_{ms}^2 - m^2) \cdot D_k}, \quad A_i = a_i \cdot \exp\{i\zeta_{i+} / n\}.$$

Можно эти два уравнения записать в комплексной форме

$$\frac{dA_i}{d\xi_G} = i\Delta + i(|A|^2 - 1)A_i - GA_i \frac{(|A_i|/2)^{n-2}}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{|A_j|}{2}\right)^n \exp\{2\pi(\zeta_i - \zeta_j) + 2\pi(\xi_i - \xi_j)\} \cdot U(\xi_i - \xi_j). \quad (14.31)$$

Литература к разделу 14

14-1. Gaponov A. V., Petelin M. I. and Yulpatov V. K. The induced radiation of excited classical oscillators and its use in high-frequency electronics. "Radiophysics and Quantum Electronics", 1967. – Vol. 10. – P. 794–813.

14-2. Flyagin V. A., Gaponov A. V., Petelin M. I. and Yulpatov V. K. The Gyrotron. // IEEE Transactions on microwave theory and techniques, 1977. – Vol. MTT-25. – No. 6. – P. 514–521.

14-3. Панченко И. П., Сотников. В. И. Нелинейная теория возбуждения монохроматических волн электронным пучком в плазме, помещенной в магнитное поле // Физика плазмы 1976. – Т. 2. – В. 6. – С. 945–952;

14-4. Абурджания Х. Д., Киценко А. Б., Панкратов И. М. Нелинейная стадия взаимодействия потока заряженных частиц с плазмой в магнитном поле // Физика плазмы. 1978. – Т. 4, В. 1. – С. 227–234;

14-5. Balakirev V. A., Karbushev N. I., Ostrovsky A. O., Tkach Yu.V. Theory of Cherenkov's Amplifiers and Generators on Relativistic Beams. – 1993.

14-6. Кондратенко А. Н., Круша Й., Куклин В. М. Об особенностях развития пучково-плазменной неустойчивости в условиях аномального эффекта Доплера // Beitr. Plasmaphys. 1979. – Vol. 19. – N 4. – P. 201–209.

14-7. О. В. Куклина, В. М. Куклин О механизмах насыщения циклотронных неустойчивостей электронного пучка в волноводах // Электромагнитные явления. – 2001. – Т. 2. – № 4 (8). – С. 490–497.

14-8. Гинзбург Н. С. Нелинейная теория усиления и генерации на аномальном эффекте Доплера. Изв. вузов – Радиофизика, 1979. – Т. 22. – № 4. – С. 470–479.

14-9. Granatstein V. L. and Alexeff I. High-Power Microwave Source. Boston, Artech House. – 1987.

14-10. K. R. Chu, A. T. Lin. Gain and Bandwidth of the Gyro-TWT and CARM Amplifiers. IEEE Transactions on Plasma Science. 1988. – Vol. 16. – No 2. – P. 90–104.

14-11. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990. – 336 с.

14-12. Сверхизлучение электронов в магнитном поле и нерелятивистский гиротрон / А. Г. Загородний, П. И. Фомин, А. П. Фомина // Доп. НАН України. 2004, № 4, – с. 75–80; Fomin P. I., Fomina A. P. Dicke Superradiance on Landau Levels / Problems of Atomic Science and Technology, 2001. N 6. – P. 45–48.

14-13. Edcombe C. J., Gyrotron Oscillators: Their Principles and Practice. London, U.K.: Taylor & Francis. – 1993.

14-14. Ginzburg N. S., Zavolsky N. A., Nusinovich G. S. Gyrotron Dynamics with Nonfixed Longitudinal RF Field Structure. Radiotekhnika and Elektronika 1987. – V. 5. – P. 1031–1039.

14-15. Kuklin V. M. Report / PST EV N 978763, NATO Science Programm Cooperative Science & Technology Sub-Programme, Hamburg – 2002.

14-16. Influence of low-density Plasma on Gyrotron Operation / V. M. Kuklin, S. Yu. Puzyrkov, K. Schunemann, G. I. Zaginaylov // УФЖ. – 2006. – Т. 51, № 4. – С. 358–366.

РАЗДЕЛ 15.

УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ТМ ВОЛНЫ

Получим систему нелинейных уравнений, которая описывает возбуждение электронным пучком ТМ волны в цилиндрическом гладком металлическом волноводе радиуса r_W . Дисперсионное уравнение, описывающее зависимость частоты волны ω от продольного и поперечного волновых чисел k_z и k_\perp соответственно, имеет вид (14.2). Составляющие электромагнитного поля ТМ волны могут быть представлены в виде:

$$E_z = h(z, t) J_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta), \quad (15.1)$$

$$(E_\theta, B_r) = \left\{ \frac{m}{(1 - \omega^2 / c^2 k_z^2) k_z r}, -\frac{\omega m}{(1 - \omega^2 / c^2 k_z^2) c r k_z^2} \right\} \cdot$$

$$\cdot h(z, t) J_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta),$$

$$(E_r, B_\theta) = \left\{ -ik_{\perp z} / (1 - \omega^2 / c^2 k_z^2) k_z, -i\omega k_\perp / (1 - \omega^2 / c^2 k_z^2) c k_z^2 \right\} \cdot$$

$$\cdot h(z, t) J'_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta), \quad (15.3)$$

где h – комплексная амплитуда волны, остальные обозначения прежние. Поперечное волновое число $k_\perp = k_{ms} = x_{ms} / r_W$ определяется из требования обращения в нуль тангенциальных составляющих поля на границе волновода, причем x_{ms} — s — корень уравнения $J_m(x_{ms}) = 0$.

Пусть, также, как и в предыдущем случае, пучок электронов занимает цилиндрический слой в сечении волновода, причем все центры ларморовского вращения электронов находятся на одном расстоянии от оси волновода. При переходе в систему координат, центр которой совпадает с центром вращения отдельного электрона пучка воспользуемся

соотношениями (14.6), где b_z и B_z следует заменить на e_z и E_z соответственно. Значения компонент электромагнитного поля в системе координат вращения отдельного электрона имеют вид:

$$(e_z, e_\Phi, b_R) = h \sum_q J_q(k_{ms} r_c) J_{m+q}(k_{ms} r_B) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\Phi + iq\Phi_c + i\pi m/2) \times \\ \times (1, (m+q)/(1-\omega^2/c^2 k_z^2) r_B k_z, -\omega(m+q)/(1-\omega^2/c^2 k_z^2) k_z^2 c r_B), \quad (15.4)$$

$$(e_R, b_\Phi) = h \sum_q J_q(k_{ms} r_c) J'_{m+q}(k_{ms} r_B) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\Phi + iq\Phi_c + i\pi m/2) \times \\ \times [-ik_{ms}/(1-\omega^2/c^2 k_z^2) k_z, -ik_{ms} \omega/(1-\omega^2/c^2 k_z^2) k_z^2 c]. \quad (15.5)$$

Так как $\Phi_c = \Phi_{c0} + \omega_B \cdot t$, $\Phi = \Phi_0 + \omega_B \cdot t$, $z = z_0 + v_z \cdot t$, то в случае резонанса частиц пучка с волной $\omega - k_z v_z \approx n\omega_B$ выполняется соотношение $m + q = n$ и в выражениях (13.3) и (15.4), как и предыдущем случае, удерживаем только резонансные члены:

$$(e_z, e_\Phi, b_R) = h \cdot J_{n-m}(k_{ms} r_c) J_n(a) \exp(2i\pi\zeta) \left[1, \frac{n}{(1-\omega^2/c^2 k_z^2) r_B k_z}, -\frac{\omega \cdot n}{(1-\omega^2/c^2 k_z^2) k_z^2 c r_B} \right], \quad (15.6)$$

$$(e_R, b_\Phi) = J_{n-m}(k_{ms} r_c) J'_n(a) \exp(2i\pi\zeta) \left[-\frac{ik_{ms}}{(1-\omega^2/c^2 k_z^2) k_z}, -\frac{ik_{ms} \omega}{(1-\omega^2/c^2 k_z^2) k_z^2 c} b \right], \quad (15.7)$$

где использованы обозначения из предыдущего раздела. Можно показать, что уравнение для поля волны принимает вид

$$\omega D(\omega, \vec{k}) h + i \left[\frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial k} \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \\ = 4i \left[r_w^2 h^* J_m^2(x_{ms}) \right]^{-1} \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \vec{J} \vec{E}^*, \quad (15.8)$$

групповая скорость колебаний $v_g = \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial k} / \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}$, расстройка

$\Delta = \text{Re}\{D(\omega, \vec{k}) / \gamma_e \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}\}$ и декремент затухания волны в отсутствие

пучка $\Theta = \text{Im}\{D(\omega, \vec{k}) / \gamma_e \frac{\partial D(\omega, \vec{k})}{\partial \omega}\}$.

В однородном протяженном волноводе уравнение (15.8) упрощается и может быть представлено в виде

$$\left[\frac{d}{d\tau} - i\Delta + \Theta \right] E_h \exp\{i\varphi_h\} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N J_n(a_j) \cdot \exp(-2\pi i \zeta_j) \quad (15.9)$$

где N – число частиц, моделирующих пучок. Переходя к безразмерным величинам и используя значение интегральной фазы ζ , систему уравнений для действительных переменных можно записать в виде (см., например, [14-7, 15-2]):

$$\frac{dE_h}{d\tau} + \theta \cdot E_h = N^{-1} \cdot \sum_{j=1}^N a_j \cdot J_n(a_j) \cdot \text{Cos}(2\pi\zeta + \varphi_h), \quad (15.10)$$

$$\frac{d\varphi_h}{d\tau} - \Delta = -(E_h N)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^N J_n(a_j) \cdot \text{Sin}(2\pi\zeta_j + \varphi_h). \quad (15.11)$$

Уравнения движения электронов в поле этой волны в присутствии постоянного магнитного поля следующие

$$2\pi \frac{d\zeta_i}{d\tau} = \eta_i + nE_h \cdot J'_n(a_i) \cdot \text{Sin}(2\pi\zeta_i + \varphi_h) \quad (15.12)$$

$$d\eta_i / d\tau = -R_h \cdot E_h \cdot J_n(a_i) \cdot \text{Cos}(2\pi\zeta_i + \varphi_h), \quad (15.13)$$

$$da_i / d\tau = -(n/a) \cdot E_h \cdot J_n(a_i) \cdot \text{Cos}(2\pi\zeta_i + \varphi_h), \quad (15.14)$$

где

$$\tau = \gamma_h t,$$

$$\gamma_h^2 = 4e^2 \cdot \omega_B \cdot N_{b0} \cdot [m_e \cdot c^2 \cdot r_w \cdot J_m^2(x_{ms}) \cdot D_\omega]^{-1} \cdot (k_{ms}^2 / k_z^2 \omega_B) \cdot J_{m-n}^2(k_{ms} \cdot r_C),$$

$$D_\omega = \partial D / \partial \omega = \partial \{ [\omega^2 - (k_z^2 + k_{ms}^2) c^2] / [\omega^2 - k_z^2 c^2] \} / \partial \omega |_{D=0}, \quad R_h = k_z^2 \cdot \omega_B / k_{ms}^2 \cdot \gamma_h,$$

$$E_h = e \cdot h \cdot J_{m+n}(k_{ms} \cdot r_C) \cdot (k_{ms}^2 / k_z \omega_B) / m_e \cdot \gamma_h, \quad \eta = (k_z \cdot v_z - \omega + n \cdot \omega_B) / \gamma_h,$$

$a = k_{ms} r_B = k_{ms} v_\Phi / \omega_B$, $\omega_B = eB / m_e c$, N_{b0} – количество частиц невозмущенного пучка на единицу длины. Здесь h – амплитуда волны.

Оказывается, для линейных осцилляторов, которые не движутся в направлении распространения волны, при выполнении следующих условий: $n = 1$, $\theta = 0$, $\Delta = 0$, $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\psi \leftrightarrow 2\pi\zeta + \pi/2$, $R \rightarrow 0$ при малых a_i ($J_1(a_i)_{a_i \rightarrow 0} \rightarrow a_i/2$, $J_0(a_i)_{a_i \rightarrow 0} \rightarrow 1$, $J'_1(a_i)_{a_i \rightarrow 0} \rightarrow 1/2$) и при использовании известных соотношений $\text{Sin} \alpha = -\text{Cos}(\alpha + \pi/2)$, $\text{Cos} \alpha = +\text{Sin}(\alpha + \pi/2)$ системы уравнений для ТЕ и ТМ волны (14.16)-(14.20) и (15.10)-(15.14) практически совпадают (Интегралы систем уравнений: см. приложение XVIII).

Возбуждение продольной волны в магнитоактивном плазменном волноводе. Отметим, что при замене $\varphi_h \rightarrow \varphi_h + \pi/2$, уравнения (15.10) – (15.14) сводятся к рассмотренной в работах [15-1, 15-2] такой же системе уравнений, которая описывает возбуждение продольной волны в плазменном волноводе, где дисперсионное уравнение принимает вид

$$D(\omega, \vec{k}) = k_i k_j \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}), \quad (15.15)$$

где тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \text{ а его компоненты } \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_B^2},$$

$\varepsilon_{33} = \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = i\varepsilon_2 = i\omega_{pe}^2 \omega_B / \omega(\omega^2 - \omega_B^2)$. При этом выражения для безразмерных переменных и параметров несколько отличаются:

$$\gamma_h = \omega_{b0} \left[\frac{\omega_B k_z^2}{k_{ms}^2} \frac{\partial D}{\partial \omega} \Big|_{D=0} \right]^{1/2}, \quad E_h = \frac{ek_{ms}^2 \Phi}{m_{e0} \omega_B \gamma_h}, \quad \Phi - \text{амплитуда потенциала продольной волны.}$$

В работе [15-2], (см. также [15-3, 15-4]) для условий аномального эффекта Доплера, то есть при $n = -1$, найдены зависимости амплитуды и фазы поля, средней скорости пучка $\bar{\eta}$, среднего разброса Δa от времени для значений $R = 1, 0; 0, 05$. При малых $R = 0, 05$ происходит затягивание процесса при достижении максимума поля, когда поперечные скорости практически всех частиц пучка достигают значений $v_\Phi = \omega_B x_{-11} / k_{ms}$ где x_{-11} — первый корень уравнения $J_{-1}(x_{-11}) = 0$. То есть поперечная неоднородность поля, характерный размер которой сравним с величиной ларморовского радиуса, как оказалось, существенно влияет на динамику неустойчивости.

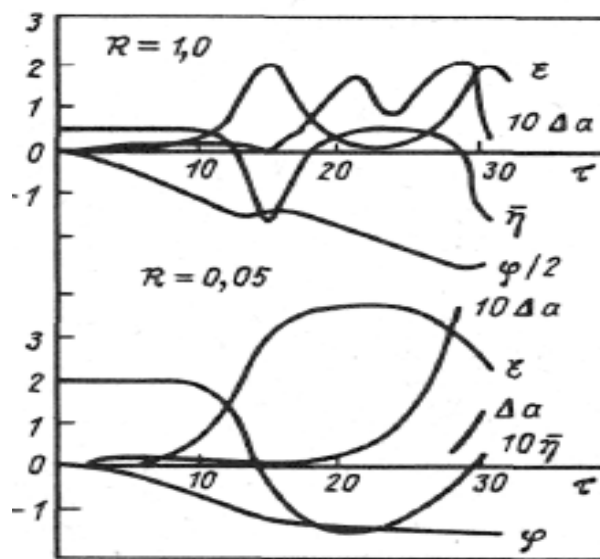


Рис. 15.1. Амплитуда и фаза поля, средняя скорость пучка $\bar{\eta}$, средний разброс Δa

от времени для значений $R = 1, 0; 0, 05$ [15-2]

Литература к разделу 15

15-1. Абурджания Х. Д., Киценко А. Б., Панкратов И. М. Нелинейная стадия взаимодействия потока заряженных частиц с плазмой в магнитном поле // Физика плазмы. 1978. – Т. 4. – В. 1. – С. 227–234;

15-2. Кондратенко А. Н., Круша Й., Куклин В. М. Об особенностях развития пучково-плазменной неустойчивости в условиях аномального эффекта Доплера // Beitr. Plasmaphys. 1979. – Vol. 19. – N 4. – p. 201–209.

15-3. Гинзбург Н. С. Нелинейная теория усиления и генерации на аномальном эффекте Доплера. Изв. вузов – Радиофизика, 1979. – Т. 22. – № 4. – С. 470–479.

15-4. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.

ГЛАВА 7. Модуляционная неустойчивость и самоподобные структуры

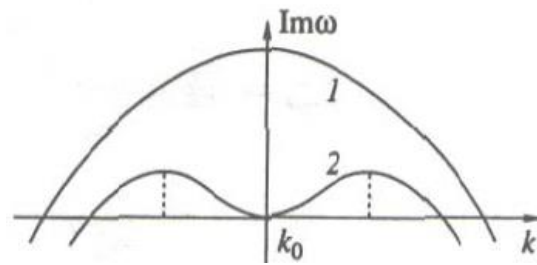
Рассмотрено развитие модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в условиях большого уровня поглощения волновой энергии в среде. Для описания этих режимов использована модифицированная S-теория, учитывающая резонансные взаимодействия возмущений с основной волной и взаимодействия этих возмущений между собой. Показано, что в этих режимах возможно возникновение долгоживущих состояний модулированной волны с линейчатыми спектрами, которые являются причиной развития следующих каскадов неустойчивости. В результате может сформироваться самоподобная пространственная волновая структура на разных масштабах, что и подтвердили результаты численного моделирования.

РАЗДЕЛ 16. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Авторами работ [16-1 – 16-4] было обнаружено, что периодические волны конечной амплитуды в средах с наиболее распространенным видом локальной кубической нелинейности являются неустойчивыми с возбуждением двух боковых спектров вынужденных возмущений, соответственно с большей и меньшей длиной волны. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны. Это впоследствии определило название этого типа неустойчивостей – модуляционные [16-5]. В неоднородных случаях кроме модуляционных неустойчивостей конечно возможны и процессы самофокусировки [16-6].

Замечательным свойством модуляционной неустойчивости вблизи порога оказалась ее способность создавать самоподобные структуры [16-7, 16-8]. Действительно, в условиях баланса механизмов генерации основной волны и уровней поглощения волновой энергии, развитие модуляционной неустойчивости приводит к формированию стационарных самоподобных структур, пространственные масштабы и интенсивность которых обусловлена нелинейным резонансным взаимодействием между основной волной и возбуждаемыми боковыми сателлитами.

Рис. 16.1. Инкремент основной волны (периодической структуры), 2 – инкремент модуляционной неустойчивости уже развитой основной волны (периодической структуры)



Взаимодействие возникающих в результате неустойчивости связанных резонансными условиями пар возмущений ($c k = k_0 \pm \Delta k$) между собой в этих условиях ослаблено, они в большей степени взаимодействуют с основной волной, причем их действие на основную волну носит интегральный характер. Именно поэтому можно считать, что такая система вблизи порога модуляционной неустойчивости может быть определена как квазилинейная [16-9].

В работах [16-8, 16-10] были отмечены две основные черты модуляционных неустойчивостей в средах и системах с большим уровнем поглощения энергии. Во-первых, в режиме насыщения модуляционной неустойчивости в результате обсуждаемых ниже механизмов конкуренции мод формируются узкие спектры боковых возмущений и в пределе больших времен развитая пространственная структура приобретает характерный линейчатый спектр. Во-вторых, теоретически было предсказано, что формирование линейчатого спектра облегчает выполнение условий для следующей, уже вторичной модуляционной неустойчивости, которая развивается в рамках подобного сценария [16-11]. Причем промодулированная в результате развития первичной модуляционной неустойчивости волна (или структура) должна подвергаться модуляции из-за вторичной неустойчивости уже на существенно большем масштабе [16-11, 16-12].

Результаты численных исследований такой многомодовой системы, качественно подтвердили сделанные авторами [16-11] предположения и их теоретические выводы о возникновении мультифрактальной структуры возмущений. Кроме этого, было обнаружено, что в режиме насыщения неустойчивости интегральная энергия спектра стабилизируется, что свидетельствует о формировании долгоживущего квазиустойчивого физического состояния [16-13], и остается заметно меньше энергии основной волны.

Эволюцию неустойчивости вблизи порога можно проследить, используя модифицированную S-теорию [16-10, 16-14], позволяющую детально рассмотреть эволюцию отдельных мод спектра¹².

¹² В ряде работ группы Захарова В. Е и Львова В. С. (см. обстоятельный обзор [16-15] и книгу [16-16]), опираясь на учет лишь двух диаграмм взаимодействия, а именно $2\omega_0 = \omega(k) + \omega(-k)$ и $\omega(k) + \omega(-k) = \omega(k') + \omega(-k')$, где ω_0 – частота основной волны, были сформулированы подходы к описанию нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, что в дальнейшем получило название S-теории.

Рассмотрим неустойчивость монохроматической волны

$$A(x, t) \cdot \exp\{i\omega t - ikx\} \quad (16.1)$$

в волновой среде со слабой дисперсией и локальной кубической нелинейностью, где $A(x, t)$ – медленно меняющаяся ее комплексная амплитуда. В общем случае, если известна дисперсия системы

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot \vec{k}^2 + \alpha \cdot |A|^2, \quad (16.2)$$

то уравнение для изменения комплексной амплитуды A можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} A = i\omega_0 A - i\beta \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} A + i\alpha A |A|^2, \quad (16.3)$$

или в одномерном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} A = i\omega_0 A - i\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} A + i\alpha A |A|^2. \quad (16.4)$$

Подобная дисперсия характерна для ленгмюровских волн в плазме и колебаний в плазменных волноводах в соответствующей нормировке

$$\omega = \omega_0 + \vec{k}^2 - |A|^2. \quad (16.5)$$

Критерий Лайтхилла [16-1]

$$(\partial^2 \omega / \partial k^2)^{-1} \cdot \partial \omega(|A|^2) / \partial |A|^2 < 0, \quad (16.6)$$

согласно которому волна (модуляционно) неустойчива в направлении своего распространения в этом случае оказывается выполнен¹³.

Ниже рассмотрим случай наличия сбалансированных источника и стока (распределенного вывода, поглощения или диссипации) энергии волны. Уравнение Лайтхилла, описывающее медленную эволюцию огибающей колебаний в этих условиях принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA |A|^2 + g, \quad (16.7)$$

где δ – декремент поглощения и g – внешний источник волновой энергии. Медленно меняющаяся со временем амплитуда колебаний $A(t, x)$ может быть представлена в виде

¹³ Вообще говоря, если $\partial \omega(|A|^2) / \partial |A|^2 < 0$, то возможны эффекты самофокусировки [16-17].

$$A = u_0(t) \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\} + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp\{i\phi_{k_n}(t) - ik_nx\} = \\ = \{u_0(t) + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp[i(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - i(k_n - k_0)x]\} \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\}. \quad (16.8)$$

То есть, неустойчивость понимают, как возбуждение спектра возмущений $\sum_{n \neq 0} u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\} \cdot \exp\{i\omega_0 t - ik_nx\}$, где $u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда n -ной моды спектра. Реальное поле представляет собой модулированную волну на частоте ω_0 . Поэтому для восстановления вида волнового поля следует выражение (15.8) умножить на $\exp\{i\omega_0 t\}$. Выделяя отвечающий основной волне «быстрый» фазовый множитель $\exp\{i\omega_0 t - ik_0x\}$, получим в этом случае поле колебаний, как произведение

$$A = \exp\{i\omega_0 t - ik_0x\} \cdot \{u_0 \exp[i\phi_{k_0}] + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i\phi_{k_n} - i(k_n - k_0)x]\}, \quad (16.9)$$

где $\exp\{i\omega_0 t - ik_0x\}$ – быстро меняющаяся фаза.

Часто, используют несколько иной вид представления поля, выделяя полную фазу основной волны $\exp\{i\omega_0 t - ik_0x + i\phi_{k_0}\}$

$$A = \exp\{i\omega_0 t - ik_0x + i\phi_{k_0}\} \cdot \{u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - i(k_n - k_0)x]\}. \quad (16.10)$$

В случае модуляционной неустойчивости монохроматической волны большой амплитуды, речь идет только об одной волне, которая характеризуется фазовой $v_f = \omega/k$ и групповой $v_g = \partial\omega/\partial k$ скоростями. В системе отсчета, движущейся с групповой скоростью волны, уравнение, описывающее поведение огибающей волнового поля, возникающего при модуляции волны с начальной комплексной амплитудой u_0 при малых амплитудах возмущений $|u_k| \ll |u_0|$ принимает вид

$$\frac{\partial u_{k_{1,2}}}{\partial \tau} + \delta u_{k_{1,2}} + i \frac{\partial^2 u_{k_{1,2}}}{\partial \zeta^2} + i \{ [u_{k_{1,2}} |u_0|^2 + u_{k_{2,1}}^* u_0^2] \} = 0, \quad (16.11)$$

где δ – декремент поглощения в выбранных масштабах времени τ и координаты ζ . Не трудно видеть, что взаимодействие двух возмущений u_{k_1} и $u_{k_2}^*$ происходит с потоком увлечения пропорциональным $|u_0|^2$ и второй гармоникой волны, пропорциональной u_0^2 . Последнее слагаемое правой части (16.11) в фигурной скобке показывает, что наиболее эффективно, по крайней мере на линейной по возмущениям ($|u_0| \gg |u_{k_{1,2}}|$) ста-

дии модуляционной неустойчивости, взаимодействуют пространственные моды¹⁴ с волновыми векторами, удовлетворяющие пространственно-временному синхронизму $2k_0 = k_1 + k_2$, где $k_1 = k_0 + K$, $k_2 = k_0 - K$, $k_0 \gg |K|$.

Запишем систему взаимодействующих мод, причем уравнение для $u_{k_2}^*$ получим, используя комплексно сопряженное уравнение (16.11), где заменим индексы.

$$\frac{\partial u_{k_1}}{\partial t} + \delta u_{k_1,2} + i \frac{\partial^2 u_{k_1}}{\partial \zeta^2} + i \{ [u_{k_1} |u_0|^2 + u_{k_2}^* u_0^2] \} = 0, \quad (16.12)$$

$$\frac{\partial u_{k_2}^*}{\partial t} + \delta u_{k_2}^* - i \frac{\partial^2 u_{k_2}^*}{\partial \zeta^2} - i \{ [u_{k_2}^* |u_0|^2 + u_{k_1} u_0^2] \} = 0. \quad (16.13)$$

Полагая зависимость от времени и координаты в виде $\exp\{-i\Omega \tau + iK \zeta\}$, представим дисперсионное уравнение процесса

$$D(\Omega, K) = (\Omega + i\delta + K^2 - |u_0|^2)(\Omega + i\delta - K^2 + |u_0|^2) + |A_0|^4 = 0, \quad (16.14)$$

откуда получим, что абсолютная неустойчивость в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью волны относительно лабораторной, обладает инкрементом, равным

$$\text{Im} \Omega = -\delta + \sqrt{K^4 - 2K^2 |u_0|^2}, \quad (16.15)$$

причем с максимальным инкрементом

$$(\text{Im} \Omega)_{\text{MAX}} = -\delta + |u_0|^2,$$

растут возмущения, волновое число которых $K^2 = K_0^2 = |u_0|^2$.

Ширина спектра определяет *локализацию этой модуляции*. Значение $(K_0 - \delta) = 2\pi / L$ отвечает области локализации модуляции L . Положение максимума инкремента определяет средний пространственный период модуляции T , то есть $K_0 = 2\pi / T$.

Порог неустойчивости не трудно определить

$$|u_0|_{\text{thr}} = \delta^{1/2}. \quad (16.16)$$

Можно записать огибающую (модуляцию) поля в виде

$$a = \{u_0 \exp[i\phi_0] + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i\phi_n - iK_n \xi]\}, \quad (16.17)$$

¹⁴ Важно отметить, что возмущения с волновыми числами k_1 и k_2 не являются собственными волнами системы, то есть не способны существовать в этой среде самостоятельно без поддержки волны с волновым числом k_0 .

где $\phi_{k_n} \equiv \phi_n(K_n)$, $u_k \equiv u_n(K_n)$, а для волнового вектора в области линейной неустойчивости справедливо выражение $K_n^2 = 1 + (\frac{2|n|-N}{N})\sqrt{1-\delta}$.

При учете нелинейных по амплитуде возмущений слагаемых, уравнения для основной моды и мод неустойчивых спектров можно представить в следующем виде

$$\frac{d\phi_0}{dt} = -u_0^2 - 2 \sum_{m>0}^N (u_m^2 + u_{-m}^2) - 2 \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos \Phi_m, \quad (16.18)$$

$$u_0 = -g \left\{ -\delta - 2 \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \sin \Phi_m \right\}^{-1}, \quad (16.19)$$

$$\frac{du_n}{dt} = \left\{ -\delta + u_0^2 \frac{u_{-n}}{u_n} \sin \Phi_n \right\} u_n, \quad (16.20)$$

$$\frac{d\phi_n}{dt} = K_n^2 - u_0^2 \frac{u_{-n}}{u_n} \cos \Phi_n - 2 \left[u_0^2 + \sum_{m>0}^N (u_m^2 + u_{-m}^2) - \frac{1}{2} u_n^2 \right]. \quad (16.21)$$

Как начинается неустойчивость. В начале развития процесса, когда все фазы начальных возмущений случайно распределены (и особенно вблизи порога неустойчивости) скорость изменения амплитуд мод оказывается намного меньше скорости изменения их фаз. Потому можно считать, что левая часть уравнения (16.21) всегда мала. Откуда можно найти значение установившейся или устойчивой фазы Φ_n^* для каждой пары возмущений, взаимодействующих с основной волной, которое определяется из выражения

$$\cos(\Phi_n^*) \approx (2K_m^2 - 2u_0^2) / u_0^2 \left[\frac{u_{-m}}{u_m} + \frac{u_m}{u_{-m}} \right].$$

Из уравнения (16.23) следует, что при $\delta = 0$ устойчивые фазы растущих мод находятся в интервале $0 < \Phi_n^* < \pi$, максимальный инкремент отвечает значению $\Phi_n^* = \pi / 2$. При $K_m > u_0$ получим $\Phi_n^* < \pi / 2$, а при $K_m < u_0$, напротив $\Phi_n^* > \pi / 2$. При увеличении уровня поглощения δ интервал Φ_n^* сужается. Собственно, при достижении этого устойчивого значения фазы $\Phi_n \rightarrow \Phi_n^*$ и начинается рост возмущений.

Учет наиболее эффективных взаимодействий, которые происходят только между симметричными по отношению к накачке модами спектра ($k_s + k_{-s} = k_n + k_{-n}$) согласно модифицированной S-теории приводит к следующим уравнениям

$$\frac{dv_s}{dt} = v_s \left\{ -\delta + u_0^2 \frac{v_{-s}}{v_s} \sin \Phi_s + 2 \frac{v_{-s}}{v_s} \sum_{n \neq s}^N u_n u_{-n} \sin \Psi_{sn} \right\}, \quad (16.22)$$

$$\frac{d\phi_s}{dt} = K_s^2 - 2 \left(u_0^2 + \frac{3}{2} v_s^2 + 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \right) - u_0^2 \frac{v_{-s}}{v_s} \cos \Phi_s - 2 \frac{v_{-s}}{v_s} \sum_{n \neq s}^N u_n u_{-n} \cos \Psi_{sn}, \quad (16.23)$$

к которым следует добавить первые два уравнения системы (16.18) – (16.21). Выше использовано обозначение $\Psi_{sn} = \Phi_s - \Phi_n$. Здесь для удобства анализа использовано обозначение $v_s \equiv u_s$ амплитуд мод спектра с волновыми числами k_s . В развитой стадии неустойчивости данная система уравнений способна описывать не только процессы обмена энергией между модами спектра, но и развитие каскада модуляционных неустойчивостей, результатом которой может быть формирование фрактального спектра возмущений.

Моделирование процесса при больших уровнях поглощения. Численное решение представленной выше системы дифференциальных уравнений (16.18) – (16.21) демонстрирует возбуждение спектра неустойчивости по обе стороны от основной волны [16-9]. По мере возбуждения спектра неустойчивости наблюдаются модулирование основной моды. Ниже приведены результаты численного моделирования, проведенного при разных уровнях надпороговости $1 - \delta$, понимаемой как степень отдаления от порога неустойчивости (16.16). Количество мод N взято равным 100. При уровне надпороговости $u_{00} - \delta = 0,2$, или, что то же самое, декременте поглощения $\delta = 0,8$ (т. к. $u_{00} = u_0(t=0) = 1$), результат эксперимента следующий.

При начальных значениях наблюдается одна основная мода и в результате нелинейного взаимодействия начинается медленный, но ускоряющийся рост спектра неустойчивости. Значения амплитуд мод неустойчивости на данном этапе мало, поэтому не оказывает существенного влияния на основную волну. При этом малы уровень спектральной дефектности структуры $D = \frac{2}{u_0^2} \sum_{m>0} u_m^2$ и уровень интенсивности спектра $I_s = 2 \sum_{m>0} u_m^2$, а интенсивность основной волны $I_0 = u_0^2$ близка к единице.

Потом производная амплитуд мод спектра неустойчивости по времени достигает своего максимума, быстро формируется спектр возбужденных мод, которые достигают значений, достаточных для эффективного воздействия на основную волну (рис. 16.2 – 16.3). На данном этапе спектр широкий, амплитуда возбужденных мод составляет 1–5 % от амплитуды основной, однако их взаимодействие приводит к отклонениям вида основной волны на 15–20 % от правильной синусоидальной формы. При данном процессе наблюдается рост уровня дефектности D .

Рис. 16.2. Возбуждение широкого спектра неустойчивости ($t \approx 50, \delta = 0,8$)

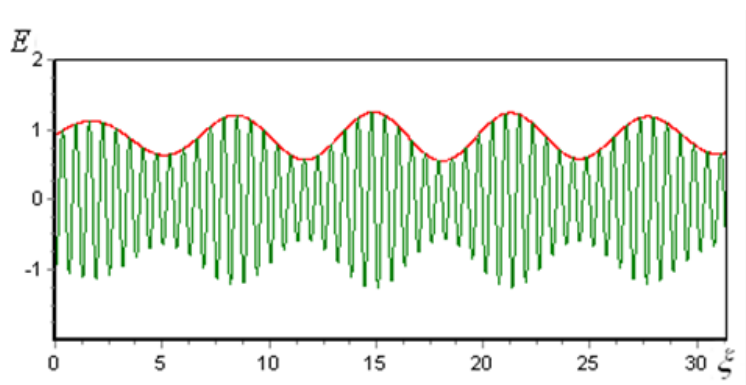
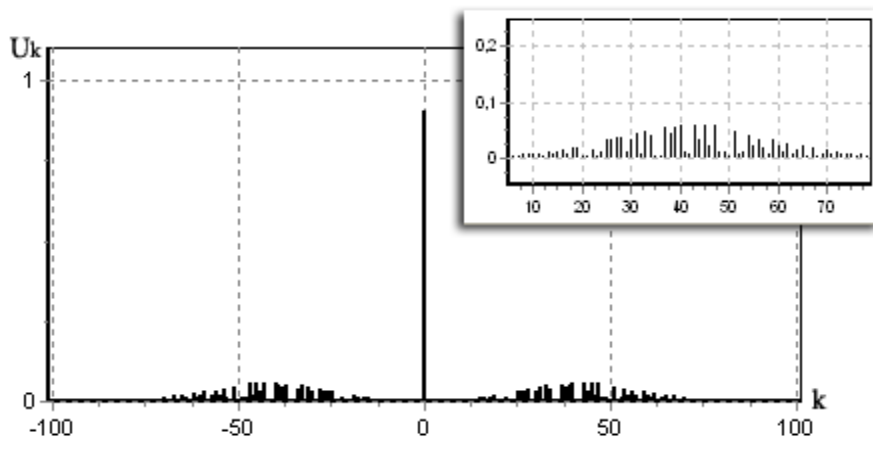


Рис. 16.3. Основная волна, промодулированная модами возбужденного спектра ($t \approx 50, \delta = 0,8$)

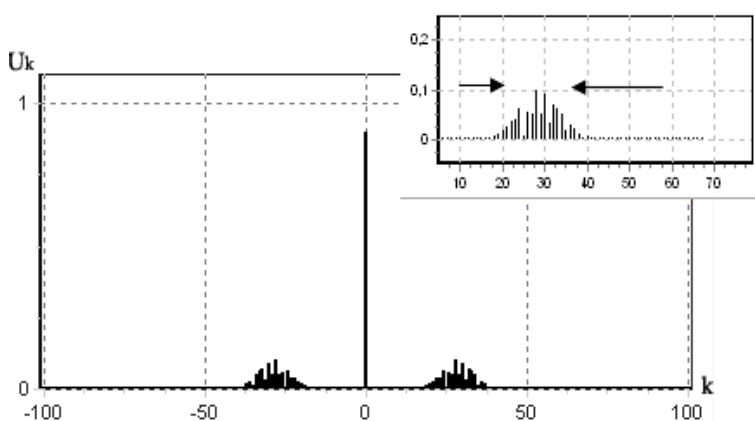


Рис. 16.4. Спектр неустойчивости на заключительной стадии развития ($t \approx 300, \delta = 0,8$)

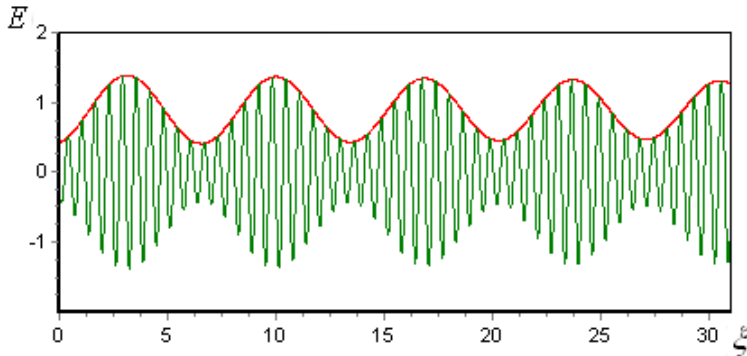


Рис. 16.5. Вид основной волны на заключительной стадии развития спектра неустойчивости ($t \approx 300, \delta = 0,8$)

На следующем этапе развития процесса ($t > 100$) наблюдается сужение спектра модуляционной неустойчивости с одновременным увеличением амплитуды возбужденных мод (рис. 16.4). Производная крайних мод спектра принимает отрицательное значение, максимум спектра смещается в сторону основной моды. Далее скорость изменения амплитуды

возбужденных мод уменьшается, и система выходит на квазиустойчивое состояние. Увеличение амплитуды возбужденных мод приводит к более заметному воздействию на основную волну (рис. 16.5).

Интегральные и локальные характеристики процесса неустойчивости. Рассмотрим детально процесс формирования спектра и выход системы на квазилинейную стадию в терминах интенсивности мод: Как видно из рис. 16.6, 16.7 интенсивность основной моды на начальных стадиях процесса заметно уменьшается и при значении $t \approx 100$ приближается к значению δ . Уровни надпороговости $(1 - \delta)$ ограничивают снизу интенсивность основной моды. Во время уменьшения интенсивности основной моды начинает расти интенсивность спектра возбуждаемых мод, приближаясь к верхней границе, значение которой зависит от параметра δ .

Рис. 16.6. Интенсивность основной моды $I_0 = u_0^2$ на линейной стадии процесса

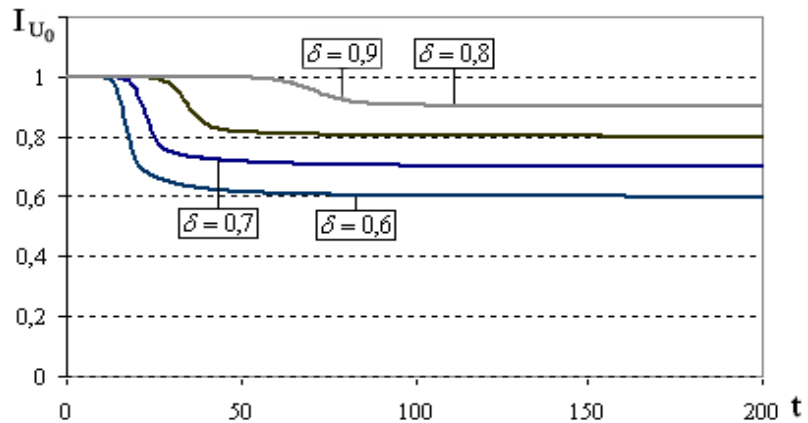
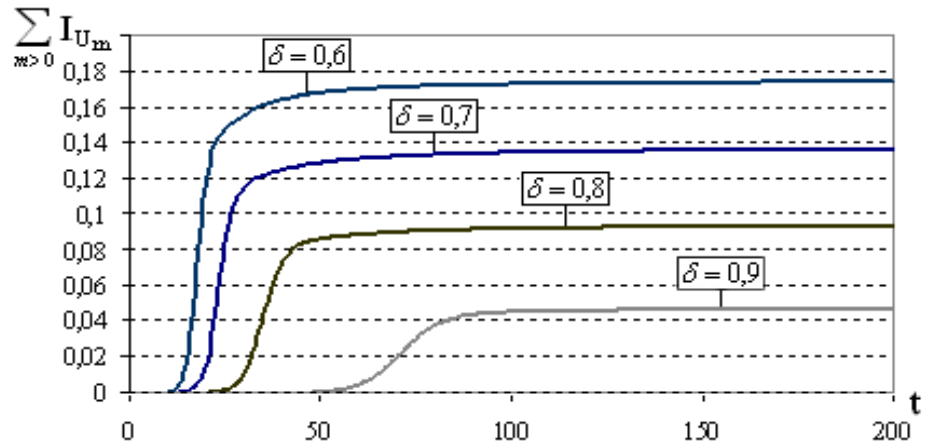


Рис. 16.7.
Суммарная
интенсивность
спектра возбуж-
даемых мод

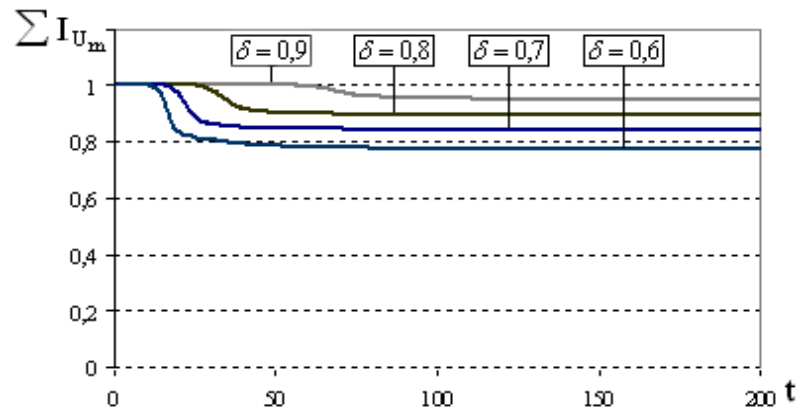
$$I_S = 2 \sum_{m>0} u_m^2$$

на линейной стадии
процесса



При этом суммарная интенсивность не превышает единицы (рис. 16.8), и с развитием неустойчивости уменьшается, ограничиваясь снизу значениями, зависящими от параметра δ .

Рис. 16.8.
Суммарная интенсивность
структуры



При рассмотрении системы на временах перехода в квазилинейную стадию, можно получить зависимость интенсивности мод от значения параметра δ .

Литература к разделу 16

16-1. Lighthill M. J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system // J. Inst. Math. Appl. 1965. – Vol. 1. – No.2. – P. 269–306.

16-2. Silin V. P. Parametric resonance in plasma // JETP. 1965. – Vol. 48. – No.6. – P. 1679–1691.

16-3. Zakharov V. E. Stability of nonlinear waves in dispersive media // J Teor. Prikl.Fiz., – 1966. – Vol. 51. – P. 668–671;

16-4. Benjamin T. B., Feir J. E. The disintegration of wave trains on deep water // J. Fluid Mech. 1967. – Vol. 27. – P. 417–430.

16-5. Zakharov V. E. The Instability of Waves in Nonlinear Dispersive Media // *Sov. Phys. JETP*. 1967. – Vol. 24. – P. 740.

16-6. Аскарьян Г. А. Эффект самофокусировки // *УФН*. 1973. – Вып. 10. – Т. 111. – С. 249–260.

16-7. Куклин В. М. Роль поглинання та дисипації енергії у формуванні просторових нелінійних структур у нерівноважних середовищах // *УФЖ. Огляди*. 2004. – Т. 1, № 1. – С. 49–81.

16-8. Kuklin V. M. The self-similar Structures Formation in Modulation unstable Media // *Electromagnetic Phenomena*. 2004. – V. 4. – N. 1.

16-9. Белкин Е. В., Киричок А. В., Куклин В. М., Приймак А. В. Аномальные волны в модуляционно неустойчивом волновом поле // *East Eur. J. Phys.* 2014. – V. 1 – no.2. – С. 4–39 (http://eejp.univer.kharkov.ua/Biblio/2014/EEJP_1_2/12p4-39.pdf)

16-10. Белкин Е. В., Киричок А. В., Куклин В. М. Об интерференции в многомодовых режимах модуляционных неустойчивостей // *Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения*. 2008. – No 4 (6). – С. 222–227

16-11. Куклина О. В., Киричок А. В., Куклин В. М. Динамика формирования самоподобных структур в нелинейных волновых диссипативных средах с нераспадным спектром // *The Journal of Kharkiv National University, physical series “Nuclei, Particles, Fields”*. 2001. – № 541. – Iss. 4 (16). – p. 73–76

16-12. Куклин В. М., Киричок А. В., Куклина О. В. О механизмах образования самоподобных структур в неравновесной сплошной среде // *Вопросы атомной науки и техники. (ВАНТ). Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения*. 2000. – № 1. – С. 222–224.

16-13. Белкин Е. В., Гущин И. В. Анализ численной модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде // *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2008. – № 809 (9). – С. 20–31.

16-14. Belkin E. V., Kirichok A. V., Kuklin V. M. Development of modulation instabilities in media with damping and forcing / *High-Power pulsed electrophysics. International conference XIV Khariton’s topical scientific readings. Digest of technical papers – Sarov, Russia: FGUP «RFYATS-VNIIEF»*. 2013. – P. 14–20.

16-15. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // *УФН*. 1974. – Т. 114. – No 4. – С. 609–654.

16-16. Львов В. С. Нелинейные спиновые волны. – М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. – 272 с.

16-17. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М. : Наука, 1973. – 175 с.

РАЗДЕЛ 17. ФОРМИРОВАНИЕ САМОПОДОБНОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ

Численный анализ модели показал, что вблизи порога неустойчивости (16.16), то есть при $\delta \leq 1$, интенсивность основной моды на начальных стадиях процесса заметно уменьшается и при значении $t \approx 100$ приближается к значению δ . Во время уменьшения интенсивности основной моды начинает расти интенсивность спектра возбуждаемых мод, так же приближаясь к верхней границе, значение которой зависит от параметра δ . Такая квазилинейная стадия неустойчивости проявляет себя в условиях, когда интегральные характеристики процесса практически не меняются. При этом скорости изменения амплитуд мод спектра резко уменьшаются. Неизменное значение общей интенсивности системы мод, при крайне медленном изменении внутренней её структуры на квазилинейной стадии процесса позволяет говорить о формировании квазиустойчивого долгоживущего физического состояния.

Важно отметить, что монотонное уменьшение количества мод спектра, которое наблюдается на квазилинейной стадии процесса эволюции такого

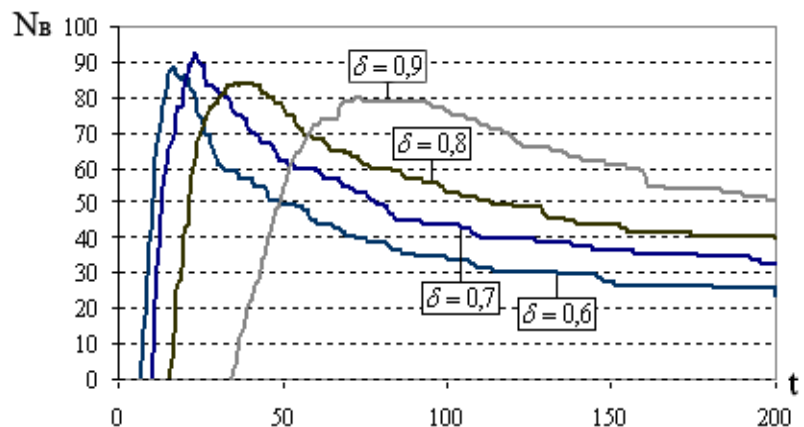


Рис. 17.1. Изменение количества возбужденных мод спектра неустойчивости N_B .

состояния фактически соответствует уменьшению возбужденных степеней свободы вплоть до нескольких (здесь числа мод спектра N_B , см. рис. 17.1).

Формирование долгоживущего квазиустойчивого состояния.

В режиме развитой неустойчивости дальнейшее изменение интегральной интенсивности не происходит. Можно считать, что нелинейная, а точнее квазилинейная стадия неустойчивости проявляет себя в условиях, когда интегральные характеристики процесса практически не меняются.

Из рис. 17.1 видно, что на начальной стадии возбуждается набор мод, состоящий более чем из 70 % мод начального спектра, причем максимальное количество мод возбуждается в области перехода в квазилинейную стадию. Мода считалась возбужденной, если ее амплитуда превышала 0,1 % от начального уровня основной моды. Скорость изменения амплитуды моды со временем уменьшается, но продолжает быть значимой. В результате конкуренции, амплитуда мод на периферии спектра уменьшается прак-

тически до нуля, а амплитуда части мод в центре спектра увеличивается. Таким образом, на квазилинейной стадии спектр в целом сужается, количество степеней свободы – возбужденных мод уменьшается, то есть можно говорить об уменьшении значений характерных величин, связанных с энтропией системы в целом. Производная амплитуд периферийных мод спектров от времени принимает отрицательное значение, спектры как целое смещаются в сторону волнового числа основной моды. Далее скорость изменения амплитуды возбужденных мод уменьшается, и система выходит на квазилинейный режим неустойчивости.

При слабом превышении порога неустойчивости интегральные показатели ведут себя аналогично соответствующим показателям простой модели, что подтверждает справедливость сделанных ранее допущений о возможности пренебрежения взаимодействием мод внутри спектра при слабом превышении порога неустойчивости, а также дает оценку границе применимости простой модели $\delta \approx 0,7$.

Появление самоподобных структур поля. Данное поведение спектра неустойчивости позволило построить теорию формирования фрактальной структуры. Обсудим на примере модуляционно неустойчивой волны природу формирования каскада неустойчивостей. Рассмотренная в предыдущем разделе модуляционная неустойчивость монохроматической волны формирует новое состояние – модулированную волну, которая, как это следует из приведенного ниже рассмотрения [17-1 – 17-3], в свою очередь является нестабильной. Отметим, что модуляционная неустойчивость волны большой амплитуды возможна при превышении максимального инкремента (относящегося к монохроматическому случаю) ширины спектральной линии. Кроме того, формирование узких спектральных линий неустойчивости приводит к расширению пространственной области локализации модуляции.

Покажем, что в результате вторичной модуляционной неустойчивости формируется ещё более крупномасштабная модуляция уже ранее промодулированной основной волны. Для описания вторичной модуляционной неустойчивости будем считать начальным состоянием системы, сформированный в результате первичной неустойчивости линейчатый спектр, состоящий из трех мод. Именно формирование линейчатого спектра модулированной волны при насыщении первичной модуляционной неустойчивости создает условия для превышения порога вторичной модуляционной неустойчивости. В результате вторичной неустойчивости в окрестности мод $k = \pm k_2^*$ возникают спектры неустойчивых возмущений с волновыми числами равными $\pm(k_2^* + \kappa)$. Как и прежде, можно убедиться в том, что моды $s \pm(k_2^* + \kappa)$ имеют одинаковые по абсолютной величине значения

амплитуды. Можно убедиться [17-5, 17-6] в том, что максимальный линейный инкремент вторичной неустойчивости равен

$$\gamma_{2eff} = -\delta + [u_1^4 + 4u_{k_2^*}^4]^{1/2} \approx 2u_{k_2^*}^4 / u_1^2 \approx (u_{10}^2 - \delta)^2 / 2u_1^2, \quad (17.1)$$

где $\text{Sin}\Phi_\kappa = -u_1^2 / [u_1^4 + 4u_{k_2^*}^4]^{1/2}$, а также,

$$\text{Sin}(\Phi_{k_2^*} - \Phi_\kappa) \approx -\text{Cos}\Phi_\kappa = 2u_{k_2^*}^2 / [u_1^4 + 4u_{k_2^*}^4]^{1/2} \text{ так как } \Phi_{k_2^*} \approx -\pi/2. \text{ Для наиболее}$$

быстро растущих мод на линейной стадии развития вторичной модуляционной неустойчивости $(k_2^* + \kappa)^2 = u_1^2 + 2u_{k_2^*}^2$ и сдвиг волнового

числа κ относительно волновых чисел мод первичной неустойчивости k_2^*

$$\kappa^* = k_2^* u_{k_2^*}^2 / u_1^2 = k_2^* (u_{10}^2 - \delta) / 2u_1^2. \quad (17.2)$$

Можно показать, что в результате развития вторичной неустойчивости происходит сужение её спектра. Фактически в спектре вторичной неустойчивости сохраняются моды с волновыми числами $\pm(k_2^* + \kappa^*)$. Отношение характерных времен развития первичной и вторичной модуляционных неустойчивостей

$$\tau_{1M} / \tau_{2M} = \gamma_{2eff} / \gamma_{1eff} = (u_{10}^2 - \delta) / 2u_1^2, \quad (17.3)$$

а также отношение пространственных масштабов модуляции основной волны из-за последствий развития первичной и вторичной неустойчивости

$$L_{1M} / L_{2M} = (\kappa^* / k_2^*) \approx (u_{10}^2 - \delta) / 2u_1^2, \quad (17.4)$$

совпадают. Таким образом, последующие каскады неустойчивости формируют все более крупномасштабные структуры – модуляции. Такие структуры являются масштабно-инвариантными [17-4 – 17-6].

Таким образом пояснено формирование каскада модуляционных околороговых неустойчивостей, формирующих самоподобные структуры за счет сужения спектров каждого такого отдельного процесса и создания

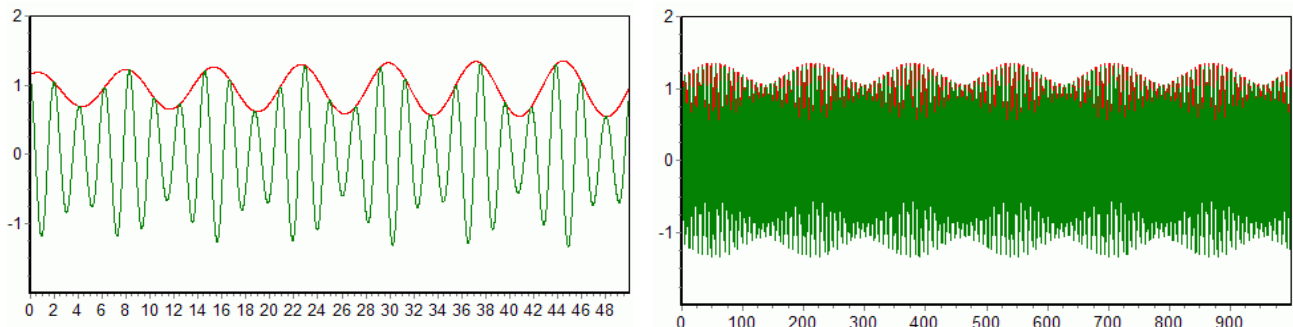


Рис. 17.2. Формирование самоподобных структур поля в численном эксперименте: $k_0 = 3$ – волновое число основной волны, $K_{ОРТ} = 0.8$ – волновое число огибающей первого порядка, $\Delta K = 0.05$ – волновое число огибающей второго порядка

условий для развития нового, более крупномасштабного. Кроме того, узкие спектры неустойчивости каскада формируют четко наблюдаемую на каждом масштабе самоподобную пространственную структуру.

Литература к разделу 17

17-1. Модуляционная неустойчивость волн, поддерживаемых внешним источником в среде с поглощением. / Белкин Е. В., Киричок А. В., Куклин В. М. // ВАНТ. Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2010. – № 4 (68)». – С. 291–295.

17-2. Belkin E. V. The mathematical models of the modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity – manuscript. / PhD–thesis by speciality 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. V. N. Karasin’s Kharkiv National University, Kharkiv, 2010.

17-3. Белкин Е. В., Киричок А. В., Куклин В. М., Приймак А. В. Аномальные волны в модуляционно неустойчивом волновом поле // East Eur. J. Phys. 2014. – V. 1. – no.2. – С. 4–39.

17-4. Куклин В. М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах // УФЖ, Обзоры. 2004. – т. 1. – № 1. – С. 49–81.

17-5. Куклина О. В., Киричок А. В., Куклин В. М. Динамика формирования самоподобных структур в нелинейных волновых диссипативных средах с нераспадным спектром // The Journal of Kharkiv National University, physical series “Nuclei, Particles, Fields”. 2001. – № 541. – Iss. 4 (16). – P. 73–76

17-6. Куклин В. М., Киричок А. В., Куклина О. В. О механизмах образования самоподобных структур в неравновесной сплошной среде // Вопросы атомной науки и техники. (ВАНТ). – Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2000. – № 1. – С. 222–224.

ГЛАВА 8. Модуляционные неустойчивости. Возникновение волн аномальной амплитуды

Обсуждается развитие модуляционной неустойчивости волнового движения вдали от ее порога. Показано, что результатом неустойчивости может быть формирования огибающей волнового движения аномальной амплитуды. При этом интенсивность поля в максимумах огибающей может на порядок превышать среднюю интенсивность волнового движения. Анализируется динамика модуляционной неустойчивости в модели практически не затухающего океанского волнения большой интенсивности, показан механизм образования волн аномальной амплитуды. Частота появления этих волн оказалась сравнима в численных экспериментах при формировании статистики как по ансамблю множества расчетов, так и по времени в одном эксперименте с интервалом рассмотрения, превышающим время жизни аномальных волн. Проведено сравнение результатов расчетов, использующих формализм S-теории и прямых расчетов уравнения Лайтхилла-НУШ, показано качественное согласие этих двух подходов.

РАЗДЕЛ 18. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВДАЛИ ОТ ПОРОГА

В случае существенного превышения порога неустойчивости $\delta \leq 0,7$ модель (16.21) – (16.22), (16.25), (16.26) учитывающая взаимодействия между симметричными по отношению к накачке модами спектра ($k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$), выявляет качественно новые эффекты в процессе развития спектра неустойчивости, Речь идет о немонотонном характере обмена энергией между основной волной и развивающейся структурой при модуляционной неустойчивости.

Рассмотрим модуляцию основной волны при заметном превышении порога неустойчивости. Учет взаимодействий между модами возбуждаемого спектра позволяет рассмотрение модели в области заметного превышения порога неустойчивости $\delta = 0,4$. Результаты расчетов изображены на рис. 18.1 – рис. 18.3. В данной области параметров интенсивность развитого спектра неустойчивости выше в сравнении с областью слабой надпороговости ($\delta \geq 0,7$). Т. к. более интенсивный спектр сильнее воздействует

на основную волну, то возможно появление более выраженных всплесков огибающей.

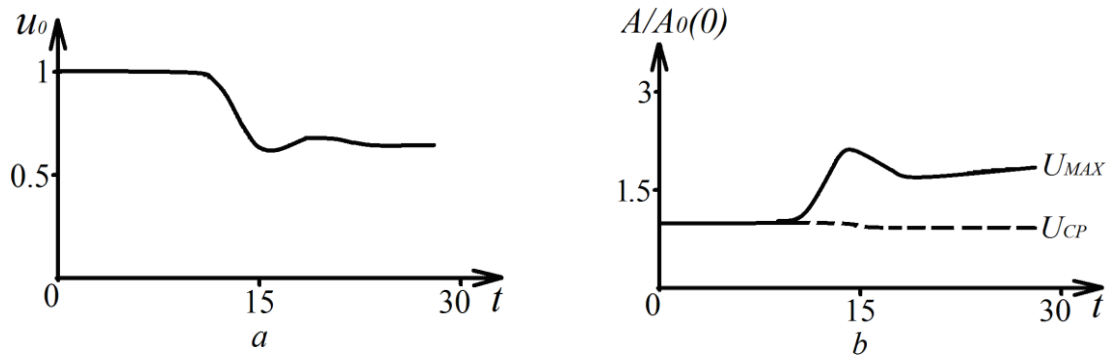


Рис. 18.1. Поведение амплитуды основной волны со временем (а), максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случая $\delta = 0,4$, число мод – $N = 200$ [18-1]

При многократном моделировании процесса было отмечено, что на начальной стадии развитой модуляционной неустойчивости возможно появление значительных всплесков амплитуды основной волны. При возбуждении спектров мод с неизбежностью возникают интерференционные эффекты, состоящие в реализации всплесков модуляции волнового движения и в появлении значительных амплитуд отдельных волн. Вопрос в том, являются ли эти эффекты проявлением случайного характера интерференции мод или они детерминированы (см. приложение XXI).

При данных условиях также можно наблюдать сужение спектра неустойчивости

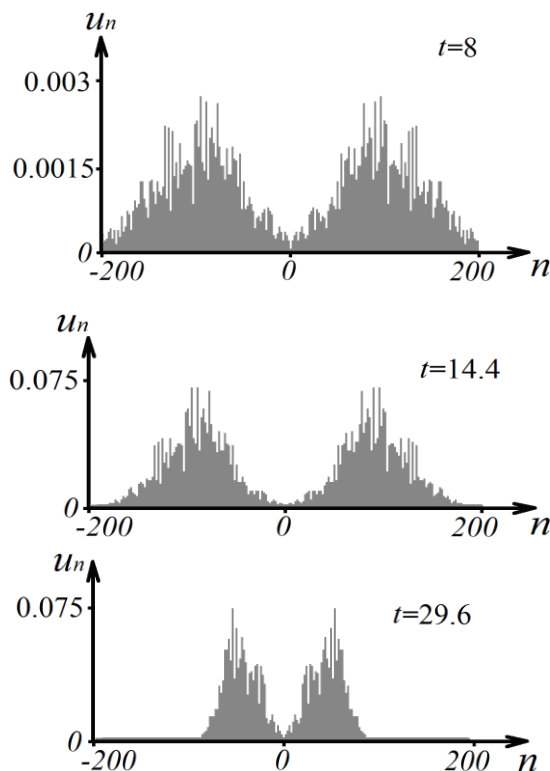
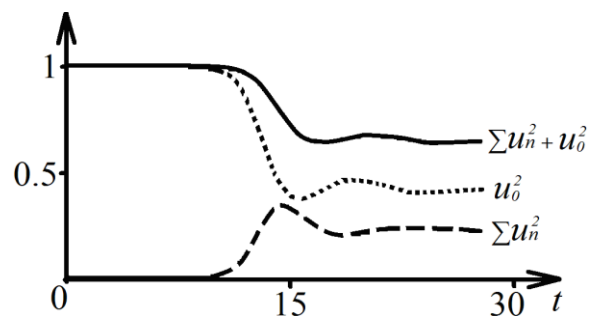


Рис. 18.2. Поведение спектра неустойчивости для трех моментов времени ($\delta = 0,4$ $N = 200$) [17-1]

Выше отмечалось, что поведение мод возбуждаемого спектра управляется накачкой, которой в данном случае является волна большой амплитуды. В большинстве случаев при реализации подобных многомодовых процессов, даже если взаимодействием неустойчивых мод можно пренебречь, влияние накачки на каждую отдельную моду спектра неустойчивости может оказаться велико. Поэтому интерференция в подобных случаях носит вынужденный характер, навязанный накачкой. Случайность проявляется лишь в той степени, насколько случайным было распределение фаз мод спектра неустойчивости в начальный момент.

Представляют также интерес зависимости изменения энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 от времени в процессе развития неустойчивости, представленные на рис. 18.3.

Рис. 18.3. Изменение энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 и их суммы от времени ($\delta = 0,4$, $N = 200$) [18-1]



Неустойчивости волны большой амплитуды в 2D модели Лайтхилла [18-2]. В приложении XIX обсуждается возбуждение спектров мод с волновым вектором, составляющим ненулевой угол с волновым вектором основной волны.

Процесс возбуждения двумерного спектра неустойчивости (изображен на рис. 18.4) формирует спектр неустойчивости на начальной стадии развития – широкий, с небольшими ($u_k < 0,05$) значениями амплитуд мод. В процессе развития, спектр сужается, при этом амплитуда возбужденных мод увеличивается (рис. 18.4b).

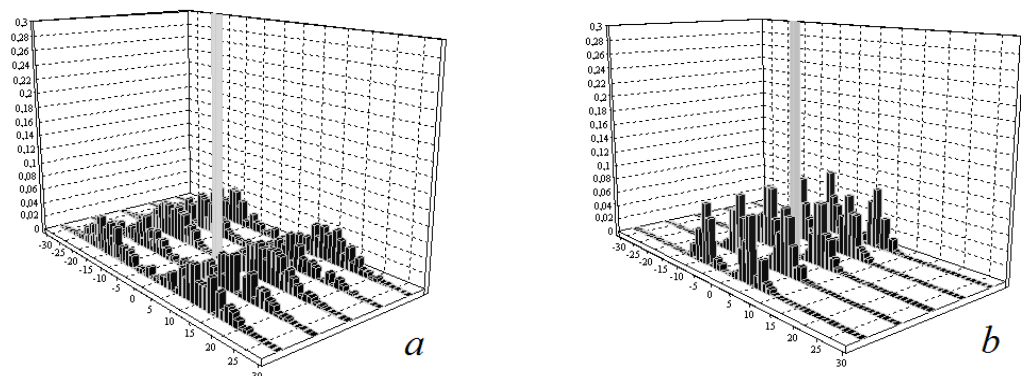


Рис. 18.4. Двумерный спектр неустойчивости квазимонохроматической волны

[18-1]

В результате численного моделирования получены трехмерные картины огибающей поля для значений параметров $N=100$ и $\delta=0,5$, при $\tau=15$. На рис. 18.5а показана мелкомасштабная картина огибающей основной волны, рис. 18.5б иллюстрирует всплески огибающей поля в более крупном масштабе. Трехмерная визуализация этого волнового поля представлена на рис. 18.6.

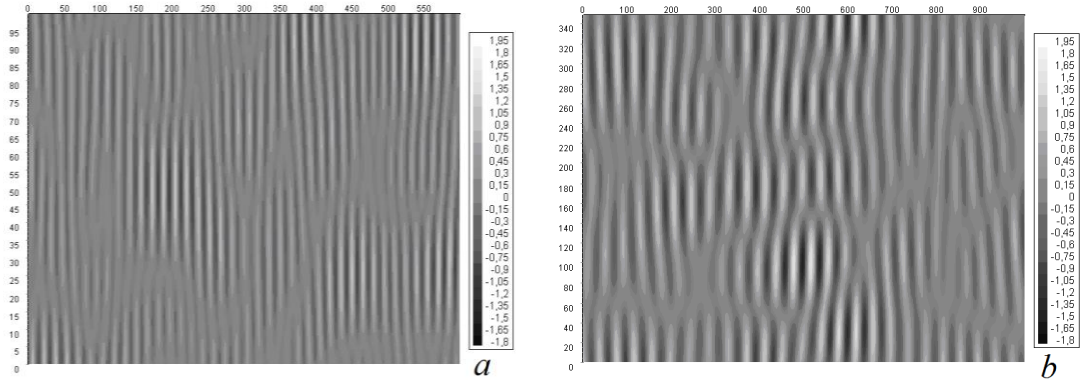


Рис. 18.5. Двумерная модуляция основной волны:
а) мелкомасштабное представление, б) фрагмент [18-1]

Можно убедиться в том, что учет даже малого угла между волновыми фронтами несколько увеличивает амплитуды больших волн, что было неоднократно отмечено ранее разными авторами.

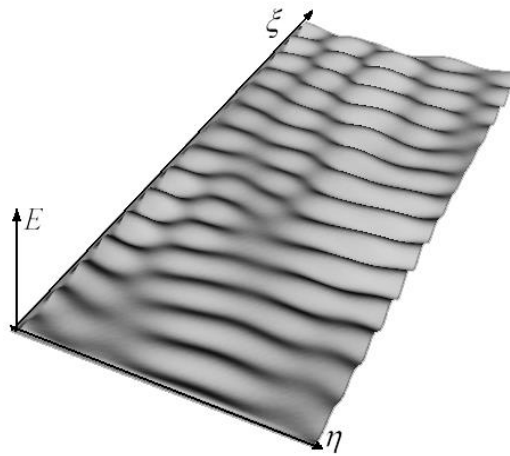


Рис. 18.6. Трехмерная визуализация поля огибающей,
построенная на основании карты высот (рис. 18.5) [18-1]

Сравнение 1D моделей Лайтхилла в случаях применения S-теории (16.21) – (16.22), (16.25), (16.26) **и прямого вычисления уравнения** (16.7). Вблизи порога неустойчивости характеристики процесса модуляции основной волны в двух случаях применения S-теории и НУШ практически не изменяются. На рис. 18.7 показаны зависимости изменения энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 от времени в процессе развития неустойчивости.

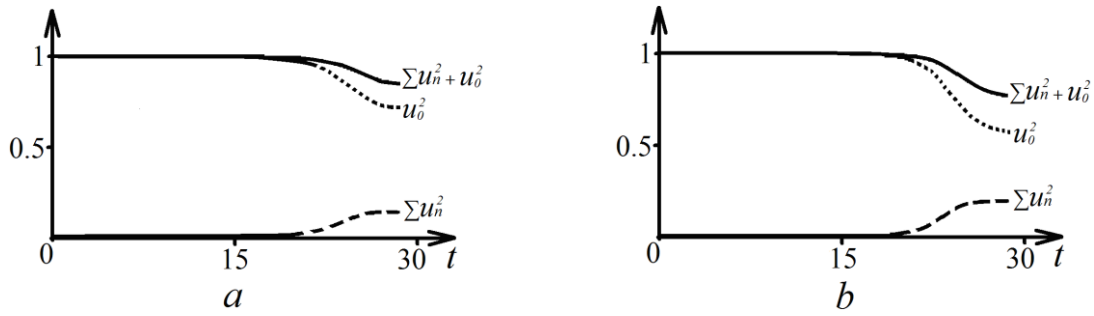


Рис. 18.7. Изменение энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$

и энергии основной волны u_0^2 и их суммы от времени для случаев применения S-теории (а) и НУШ (б) при $\delta = 0,7$, $N = 200$ [18-1]

В случае применения S-теории (а) средняя амплитуда волн и максимальная амплитуда огибающей волнения несколько меньше, чем при описании нелинейным уравнением Лайтхилла-Шредингера с данным типом дисперсионного слагаемого (б). Эта динамика представлена на рис. 18.8.

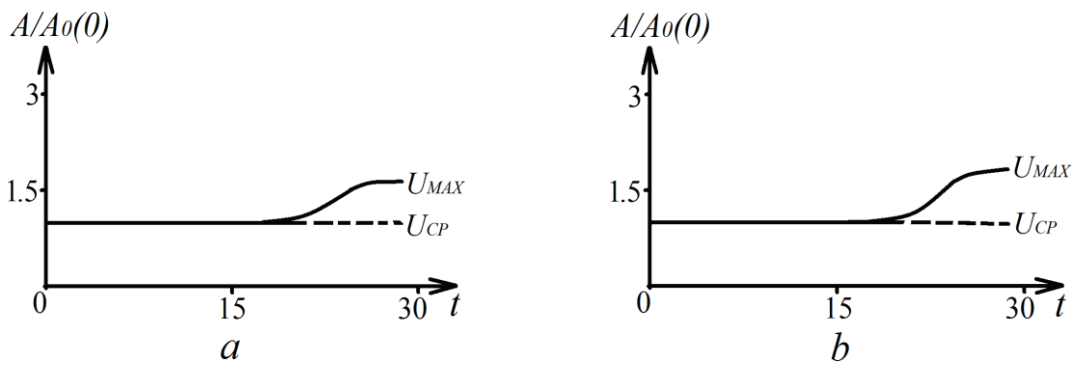


Рис. 18.8. Максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случаев применения S-теории (а) и НУШ (б) при $\delta = 0,7$, $N = 200$ [18-1]

Режим неустойчивости вдали от порога. Несколько больше отличий в развитии неустойчивости при малых уровнях поглощения, вдали от порога. Так, характерные времена модуляции амплитуды основной волны при уровне поглощения $\delta = 0,1$ при учете всех видов взаимодействия мод становятся менее регулярными. Зависимости энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 от времени в процессе развития неустойчивости, представлены на рис. 18.9. Уже явно заметен осцилляторный характер обмена энергией между основной волной и спектром неустойчивых мод.

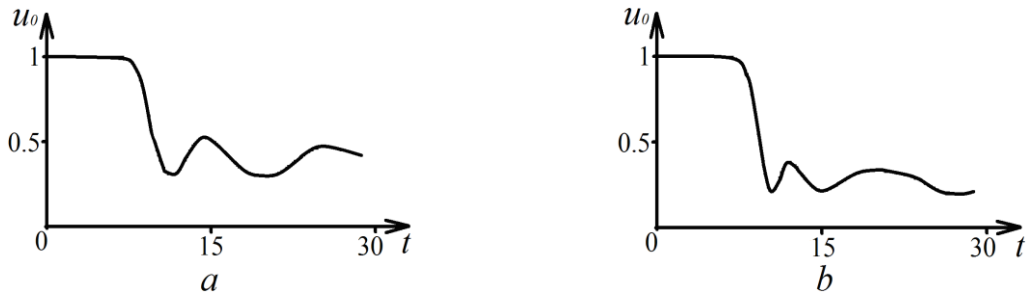


Рис.18.9. Поведение амплитуды основной волны со временем для случаев применения S-теории (a) и НУШ (b) при $\delta = 0,1$ и $N = 200$ [18-1]

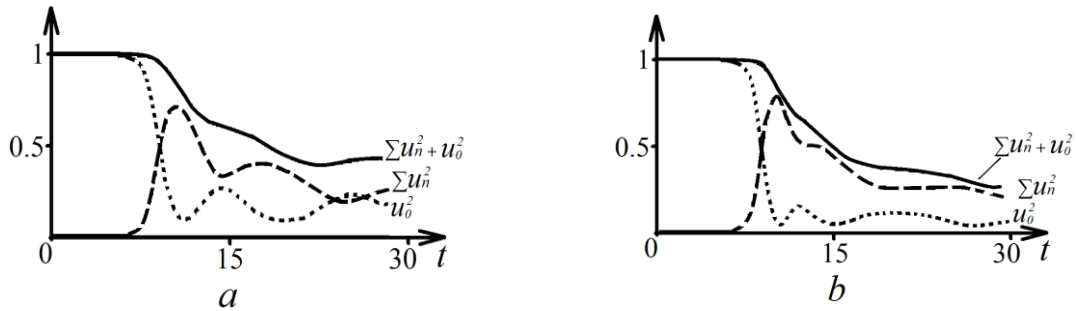


Рис. 18.10. Зависимости энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$, энергии основной волны u_0^2 и их суммы от времени для случаев применения S-теории (a) и НУШ (b) при $\delta = 0,1$ и $N = 200$ [18-1]

Максимумы амплитуд огибающей в обоих случаях достигаются практически в одно время и примерно равны друг другу, что можно увидеть на рис. 18.11. Важно отметить, что локальная плотность энергии в максимумах огибающей может на порядок превосходить среднюю плотность энергии модулированной волны.

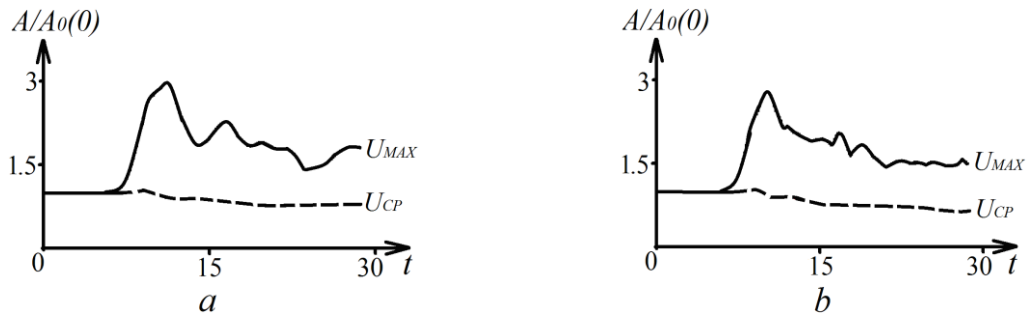


Рис. 18.11. Максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случаев применения S-теории (a) и НУШ (b) при $\delta = 0,1$ и $N = 200$ [18-1]

Изменяется и поведение спектра неустойчивости. Характерный для модуляционной неустойчивости двугорбый спектр в случае описания в рамках S-теории (a) сужается, а при более общем описании (b) наблю-

дается противоположная тенденция к расширению. Времена рассмотрения спектра выбраны на линейной по амплитудам возмущений стадии процесса, в момент достижения максимальной амплитуды огибающей волнового поля и в стадии развитой неустойчивости (рис. 18.12).

В условиях слабого поглощения, энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. Из рис. 18.11 видно, что на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой. В дальнейшем происходит снижение амплитуды основной волны (см. рис. 18.12) и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется и их (всплесков) амплитуда заметно уменьшается.

Характер модуляции основной волны в пространстве (фрагмент вблизи области с максимальной амплитудой огибающей) для тех же моментов времени для этих двух случаев описания неустойчивости, представленный на рис. 18.13. Таким образом, созданная авторами [18-3, 18-4] и модифицированная в работах [18-1, 18-5] S-теория позволяет с достаточной степенью точности описывать начальную стадию нелинейного режима процесса модуляционной неустойчивости в модели Лайтхилла-НУШ, позволяя количественно оценить максимальную амплитуду огибающей поля волн, время появления максимума огибающей и энергию, сосредоточенную в спектре возмущений.

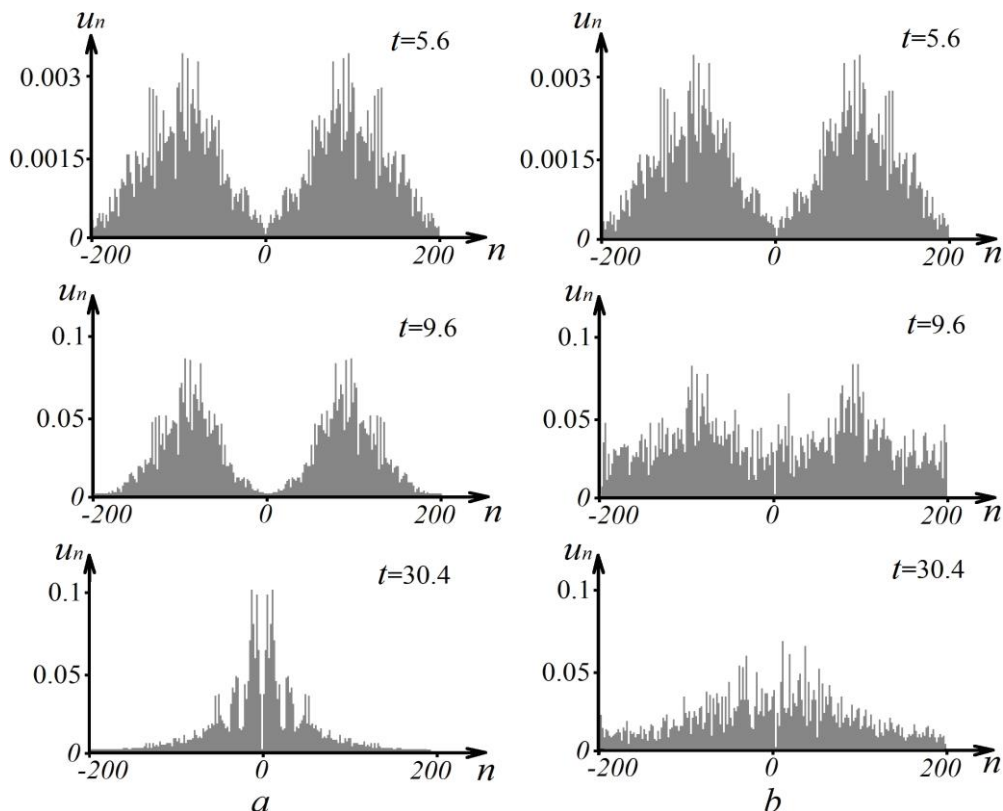


Рис. 18.12. Спектры неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и для описания

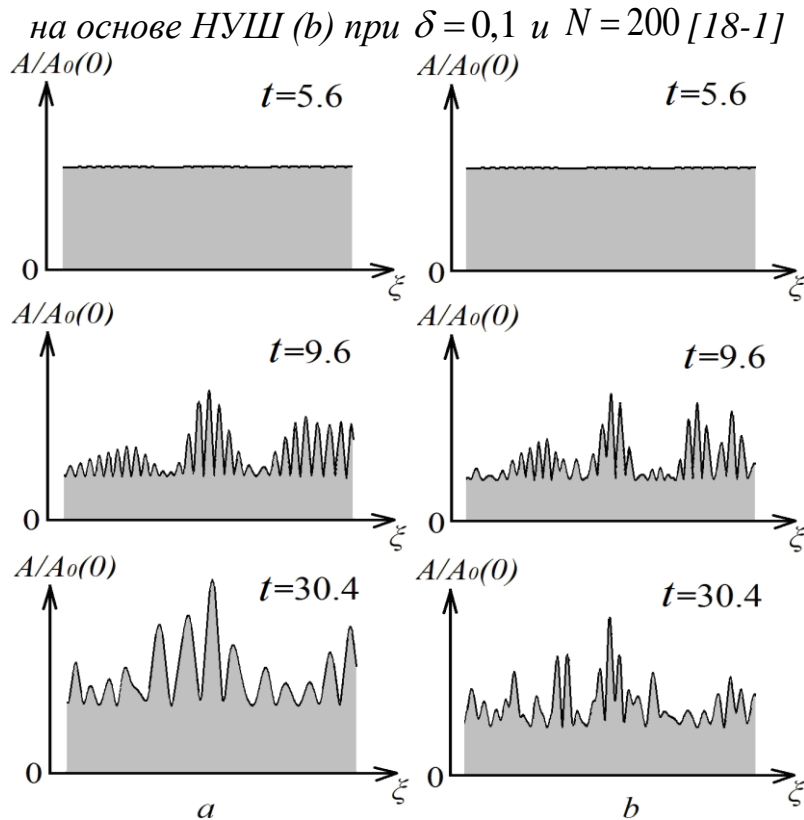


Рис. 18.13. Модуляция основной волны для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) и для описания на основе НУШ (b) при $\delta = 0,1$ и $N = 200$ [18-1]

Стоит обратить внимание на то, что в одномерном случае при малых уровнях поглощения максимальная амплитуда аномальной волны может примерно в три раза превышать среднюю амплитуду волн. В двумерном случае для сходящейся волны максимальная амплитуда огибающей способна оказаться заметно больше. Это можно понять, если рассматривать изменение ширины спектра неустойчивости в развитом режиме. Действительно, ширина спектра возрастает, что приводит к уменьшению характерного размера области локализации огибающей. Расширение спектра развитого возмущения приводит при сохранении энергии волнового пакета также к увеличению в соответствующее число раз максимальной амплитуды пространственного пакета огибающей.

Литература к разделу 18

18-1. Белкин Е. В., Киричок А. В., Куклин В. М., Приймак А. В. Аномальные волны в модуляционно неустойчивом волновом поле // East Eur. J. Phys. 2014. – V. 1 – no. 2. – С. 4–39 (http://eejp.univer.kharkov.ua/Biblio/2014/EEJP_1_2/12p4-39.pdf)

18-2. Belkin E. V. The mathematical models of modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity / Manuscript. PhD-thesis by speciality 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods. V. N. Karasin Kharkiv National University, Kharkiv, 2010. – 150 P.

18-3. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. 1974. – Т. 114. – No 4. – С. 609–654.

18-4. Львов В. С. Нелинейные спиновые волны. – М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1987. – 272 с.

18-5. Chernousenko V. M., Kuklin V.M.Panchenko I. P., Vorob'ev V. M. Spatial Dissipative Structures. // Nonlinear World (IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Proc. in Physics.). Singapore, World Scientific 1990, V. 2, p. 776–803

РАЗДЕЛ 19. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

Для гравитационных поверхностных волн на глубокой воде, представляющих интерес для судоходства в районах с высоким уровнем возбуждения океанского волнения, справедливо следующее выражение для частоты волн большой амплитуды [19-1]

$$\omega = \sqrt{g \cdot k} \cdot \{1 + |A|^2 k^2 / 2\} \quad (19.1)$$

что приближенно соответствует уравнению Лайтхилла-НУШ вида

$$\frac{\partial}{\partial t} A = i\omega \cdot \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right), \quad (19.1a)$$

где A – отклонение поверхности, W – скорость волны, g – ускорение свободного падения. Данные экспериментальных наблюдений и исследований [19-2] указывают на следующие характеристики таких волн: максимальная крутизна для устойчивых длинных (гравитационных) волн на глубокой воде до их обрушения $H/\lambda \approx 0.11 \div 0.13$, где $H = 2|A|$ – крутизна волны, то есть расстояние между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины волны, $\lambda = 2\pi/k_0$ – длина волны большой амплитуды. Откуда $(k_0 A)^2 < 0.12 \div 0.17$. Важно отметить, что волны с большей амплитудой не существуют из-за эффекта обрушения. В отсутствии модуляции $|A_0|$ – средняя амплитуда, $\bar{H} = 2|A_0|$ – средняя крутизна.

Для аномально больших волн их крутизна достигает $(2 \div 3) \cdot 2 |A_0|$, причем для наиболее высоких неразрушающихся волн должно быть выполнено условие $(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 < 0,11 - 0,13$.

Анализируя эти данные, легко видеть, что ширина пространственного спектра неустойчивости в этих условиях не столь мала в сравнении с волновым числом волны большой амплитуды, как в предыдущих моделях. Именно поэтому уравнение для комплексной медленной меняющейся (здесь исключена зависимость $\propto \exp\{-i\omega_0 t\} = \exp\{-igk_0 t\}$) амплитуды поля представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_K}{\partial t} &= -\delta A_K - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0})A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2 A\}_K = \\ &= -\delta A_K - i(\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0})A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \\ &\cdot \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K' \neq K, 0} A_{K'} \cdot A_{-K'}\}\}, \end{aligned} \quad (19.2)$$

В наиболее простом случае плоского фронта волны поле возмущений запишется в виде

$$A(\zeta, \tau) = (u_0 + \sum_{\substack{K \neq 0 \\ K > 0}} [u_K \cdot \exp\{+iK\zeta + i(\phi_K - \phi_0)\} + u_{-K} \cdot \exp\{-iK\zeta + i(\phi_{-K} - \phi_0)\}]),$$

где использованы следующие обозначения

$$A_K / A_0 = a_K = |a_K| \exp\{i\phi_K\} = u_K \exp\{i\phi_K\}, \quad k_0 \xi = \zeta, \quad \alpha = k_0^2 |A_0|^2,$$

$$\tau = t \cdot \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}, \quad K \rightarrow K / k_0, \quad 2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K} = \Phi_K. \text{ Моды спектра}$$

располагаем в интервалах $0 < K < 2K_{Max}$ и $-2K_{Max} < -K < 0$. $K = 0.3 \cdot \frac{i}{N}$,

$$i = \pm(1, 2, \dots, N), \quad \alpha = 0.05, \quad N = 100. \text{ Начальные амплитуды}$$

$u_K(\tau = 0) = 10^{-3}$, а их фазы $\phi_K(\tau = 0)$ случайно распределены в интервале от $(0 - 2\pi)$.

Используя это представление, запишем систему уравнений, описывающую модуляционную неустойчивость гравитационной поверхностной волны большой амплитуды в условиях сильной дисперсии глубокой воды.

$$\begin{aligned} \frac{\partial |A_K|}{\partial t} &= -\delta |A_K| + \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [|A_{-K}| |A_0|^2 \sin\Phi_K + \\ &+ |A_{-K}| \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}| \cdot |A_{-K'}| \sin(\Phi_K - \Phi_{K'})], \end{aligned} \quad (19.3)$$

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial t} = -[\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}] - \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K \neq K,0} |A_K|^2 + |A_K|^2] + \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} |A_0|^2 \cos(\Phi_K) + \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} \sum_{K \neq K,0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \cos(\Phi_K - \Phi_{-K}). \quad (19.4)$$

Для волны большой амплитуды

$$\frac{\partial |A_0|}{\partial t} + \delta |A_K| + \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2}{2} \cdot [|A_0| \sum_{K \neq K,0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \sin(\Phi_K)] = G, \quad (19.5)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} = -\sqrt{gk_0} \frac{k_0^2}{2} \cdot [(|A_0|^2 + 2 \sum_{K \neq 0} |A_K|^2) + \sum_{K \neq 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \cos(\Phi_K)]. \quad (19.6)$$

Интервал $0 < K < 2K_{Max}$ можно представить в виде суммы N мод обычным способом, как и ранее, вводя интервал в пространстве волновых чисел $\Delta K = 2K_{Max} / N$, и переходя к использованию безразмерных величин $K_i = i \cdot \Delta K / k_0$ $i = \pm(1, 2, \dots, N)$. Окончательно, система уравнений, описывающая модуляционную неустойчивость волны большой амплитуды, принимает вид

$$\frac{\partial u_K}{\partial \tau} = -\delta u_K + (1 + K)^{2.5} \cdot [u_{-K} \cdot u_0^2 \sin \Phi_K + 2u_{-K} \sum_{K > 0} u_K \cdot u_{-K} \sin(\Phi_K - \Phi_{-K})], \quad (19.7)$$

Здесь следует различать моды с волновыми числами K и K , соответственно и фазы Φ_K и Φ_{-K} , а также сделана замена $K \rightarrow K / k_0$

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial \tau} = -\frac{2[\sqrt{(1+K)} - 1]}{\alpha} - (1+K)^{2.5} \cdot \{2 \sum_{K \neq K} u_K^2 + u_K^2 + \frac{u_{-K}}{u_K} \sum_{K \neq K} u_K u_{-K} \cos(\Phi_K - \Phi_{-K})\}, \quad (19.8)$$

При расчетах следует не использовать разложение подкоренных выражений. Уравнения для основной волны можно записать как

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \delta u_0 + u_0 \sum_{K \neq K,0} u_K u_{-K} \sin \Phi_K = G, \quad (19.9)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = -u_0^2 - 2 \sum_{K \neq 0} u_K^2 - \sum_{K \neq 0} u_K u_{-K} \cos \Phi_K. \quad (19.10)$$

Для анализа размахов волн (то есть, расстояния между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины), выделим из них треть наибольших. Найдем для каждого момента времени в области рассмотрения ($\zeta \subset L = 2\pi / (\Delta K / k_0) = \pi N / K_m = \frac{\pi N}{\sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}}$, где $\zeta = k_0 x$) средний размах

всех волн $H = U_{CP}$ и средние значения размаха трети самых больших $H = U_{SWH}$, а также самый большой размах волны из ансамбля $H = U_{Max}$.

Численный анализ динамики и статистические показатели при использовании S-теории. Расчеты проводились для 600 мод спектра, отношение декремента поглощения к величине максимального инкремента выбиралось равным δ . При этом для нормировки амплитуды основной волн на единицу на начальной стадии процесса был выбран уровень внешней накачки $G = \delta$. Для модели (19.7) – (19.10), построенной на основе S-теории, с уменьшением поглощения величина u_0^2 , определяющая энергию основной волны, уменьшается, а величина $\sum_{m \neq 0} u_m^2$, определяющая энергию спектров неустойчивости, растет.

Поскольку затухание гравитационных волн на поверхности океана мало, рассматривать случаи близкие к порогу неустойчивости не имеет смысла. Основное внимание уделим случаю, когда поглощение энергии волн достаточно мало: пусть отношение декремента поглощения к величине максимального инкремента выбиралось на уровне 0,1 (то есть $\delta = 0,1$). Результаты расчета для одной реализации начальных условий приведены на рис. 19.1. Прежде всего, следует отметить, что критерий, по которому выделяют аномально большие волны, вида

$$U_{AG} > 2U_{SWH} , \quad (19.11)$$

или подобный этому неоднозначен, ибо наибольшие амплитуды наблюдаются именно в начальной стадии развития неустойчивости, особенно при конечном затухании. Тем не менее, волны заметно меньших амплитуд или размахов в режиме развитой неустойчивости также подпадают под этот критерий, так как со временем наблюдается снижение как средних, так и больших амплитуд волн.

На рис. 19.2 приведен волновой пакет, амплитуда наибольшей волны которого соответствует критерию (19.11).

С уменьшением уровня поглощения \leftarrow процессы обмена энергией между спектром и основной волной усиливаются. Вид спектра при этом несимметричный. Можно убедиться, что при уменьшении амплитуды основной волны на начальной стадии неустойчивости, происходит смещение максимума инкремента неустойчивости в сторону меньших значений

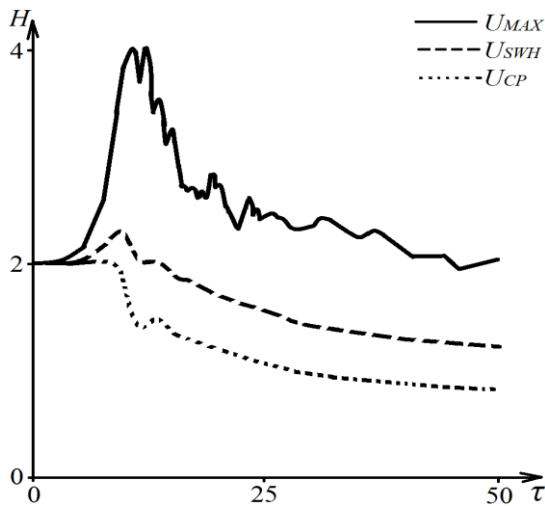


Рис. 19.1. Размах волн (расстояние между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины) как функция времени $\tau \propto 10$: средний для всех волн U_{CP} , средний для трети самых больших волн U_{SWH} , максимальный для каждого момента времени U_{Max} [19-3]

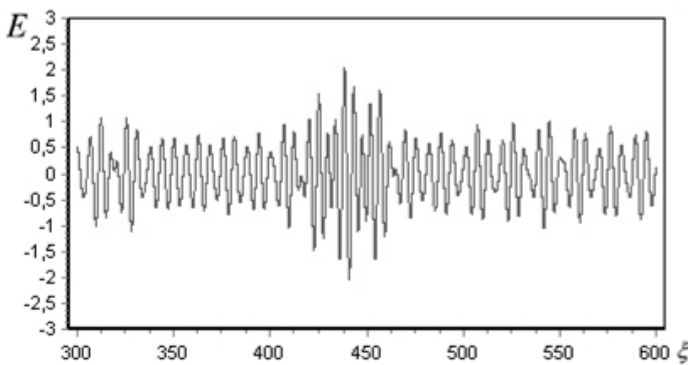


Рис.19.2. Локальный всплеск волнового поля E , превышающий средний размах трети самых больших волн более чем в 2 раза ($N = 300, t = 10.2$) [19-3]

На рис. 19.2 приведен волновой пакет, амплитуда наибольшей волны которого соответствует критерию (19.11).

С уменьшением уровня поглощения процессы обмена энергией между спектром и основной волной усиливаются. Вид спектра при этом несимметричный. Можно убедиться, что при уменьшении амплитуды основной волны на начальной стадии неустойчивости, происходит смещение максимума инкремента неустойчивости в сторону меньших значений K . При этом, так как максимуму инкремента соответствует значение суммарной фазы $2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K} = \Phi_K$, равное $\pi/2$, то происходит синхронизация этих фаз для большинства мод с различными значениями K . Тот факт, что интегральные фазы Φ_K спектра неустойчивости сосредотачиваются вблизи $\pi/2$ создает условия практически однотипного взаимодействия

многих пар мод

с основной волной. Это коллективное взаимодействие мод спектра с основной волной и поясняет природу интенсивных осцилляций интенсивности основной волны и спектра в начальной стадии неустойчивости.

Позднее разброс интегральных фаз увеличивается и обмен энергией между основной волной и спектром ослабляется. Вследствие того, что фазы отдельных мод ϕ_K сохраняют случайное распределение (в частности, не имеют место симметрии $\phi_K = \phi_{-K}$, и $\phi_K = -\phi_{-K}$), то в каждой реализации

синхронизованный с основной волной спектр неустойчивости формирует различную интерференционную структуру. Тем не менее, интенсивность интерференции мод спектра в начальной стадии оказывается наибольшей¹⁵. Рассматривая динамику спектра неустойчивости в проведенных в данной работе расчетах, можно обнаружить явление значительного его сдвига по отношению к спектральной области линейной неустойчивости. Этот сдвиг обусловлен снижением амплитуды основной волны. Кроме этого следует отметить, что амплитуды отдельных мод спектра остаются много меньше амплитуды основной волны. Отметим также несимметричность спектра относительно основной волны, что обусловлено сильной дисперсией и достаточно большой величиной инкремента модуляционной неустойчивости для волн большой амплитуды.

Из анализа спектров можно увидеть, что в режиме развитой неустойчивости в условиях конечного поглощения длина модуляции на больших временах увеличивается почти в 3,5 раза. Поведение относительной характерной длины модуляции представлено на рис. 19.3. Динамика двумерных волновых процессов оказывается подобной. Таким образом, количество волн на длине модуляции в начальной стадии развитой неустойчивости значительно меньше, чем на поздних стадиях процесса.

Отметим, что с уменьшением уровня поглощения в системе этот эффект ослабляется (см. ниже).

Анализируя частоту появления аномальных волн в разных реализациях процесса, найдем, что одна такая волна появляется среди 10^4 волн, что качественно соответствует известным наблюдениям (рис. 19.3). Из-за заметного поглощения в системе только на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой. При развитии процесса происходит снижение амплитуды основной волны и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется. Амплитуды больших волн, даже удовлетворяющих критерию (19.11), также заметно снижаются.

¹⁵ Кстати, фазовая синхронизация за счет выбора симметричных начальных фаз взаимодействующих мод спектра модуляционной неустойчивости интенсивной волны или симметризация самих уравнений, обычно приводили к режимам с обострением. Отсутствие же симметрии фаз в парах взаимодействующих волн способно ослабить интенсивность интерференционных всплесков и сократить время их существования.

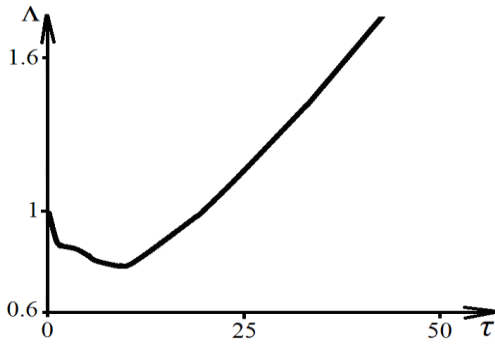


Рис. 19.3. Поведение относительной характерной длины модуляции $\Lambda \approx 2\pi / \Delta K$ в процессе неустойчивости [19-3]

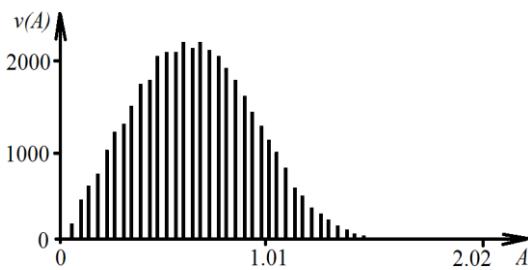


Рис. 19.4. Частота появления волн разной амплитуды $v(A)$ в численных экспериментах при разных реализациях процесса (в условиях усреднения по ансамблю) в один и тот же момент времени $\tau \propto 10$ [19-3]

Таким образом, в условиях заметного поглощения энергии колебаний появление аномальных волн весьма большой амплитуды характерно только для начальной стадии развитой модуляционной неустойчивости. С развитием неустойчивости средние и максимальные значения волн для данного уровня поглощения ($\delta = 0,1$) заметно убывают (рис. 19.1).

Однако, согласно принятому критерию (19.11), даже в этих условиях можно выделить аномально большие волны, хотя их амплитуда уже при $\tau \propto 30$ в полтора-два раза меньше, чем в наиболее интересном случае самых больших подобных волн при $\tau \propto 10$. На длине модуляции в начальной стадии процесса укладывается несколько волн, одна из которых может в отдельных реализациях

оказаться аномально большой. В режиме развитой неустойчивости количество волн на длине модуляции возрастает в три-четыре раза.

Сравнение 1D моделей в случаях применения S-теории и более общего описания. В реальных условиях поглощение энергии гравитационных волн большой амплитуды весьма мало. Поэтому рациональным будет сравнение двух моделей описания проводить для более реалистичного случая малого поглощения океанских волн $\delta = 0,01$ и значительной амплитуды волнения $\Delta = 0,566 / N$; $\alpha = 0,01$. Ниже приведем результаты расчетов, демонстрирующие развитие спектра неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (б).

Легко видеть формирование характерного двугорбого спектра (рис. 19.5) модуляционной неустойчивости. Если в случае описания в рамках S-теории такая форма спектра сохраняется, то в общем случае описания спектр с развитием неустойчивости сглаживается. На рис. 19.6 показан характер изменения амплитуды основной волны в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (б)

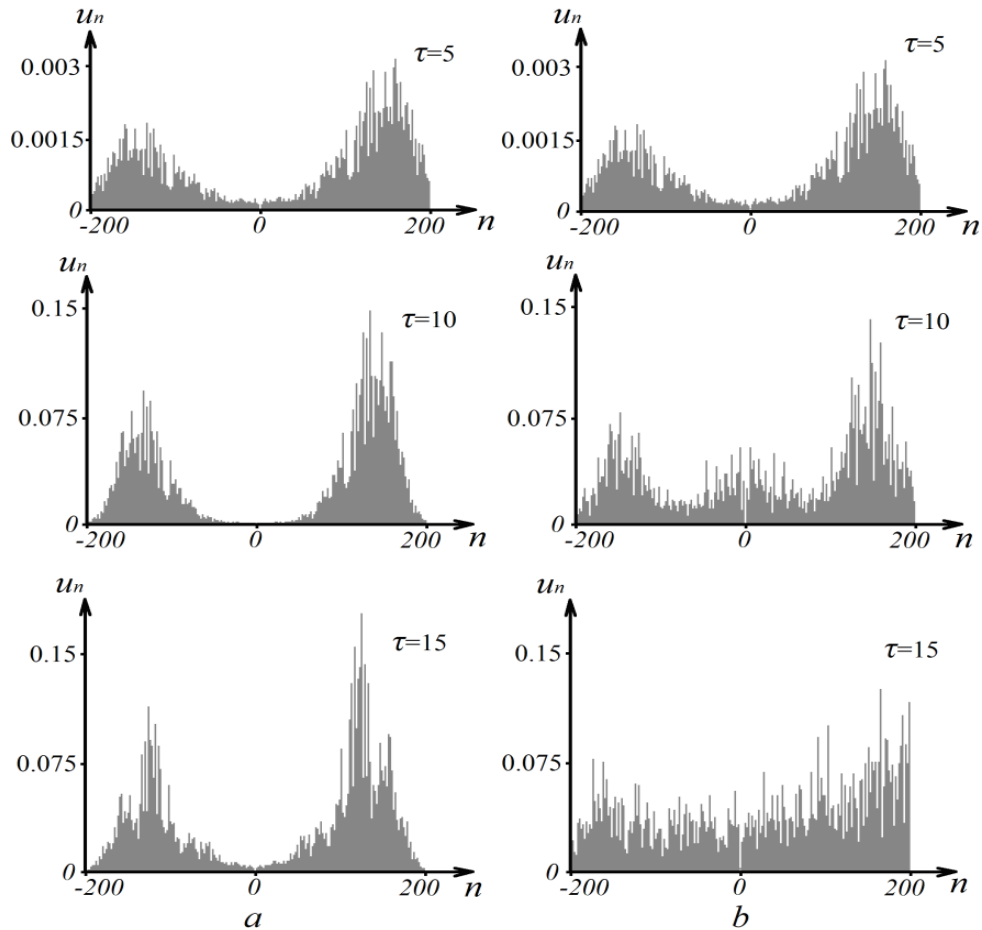


Рис. 19.5. Спектр неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (b) [19-3]

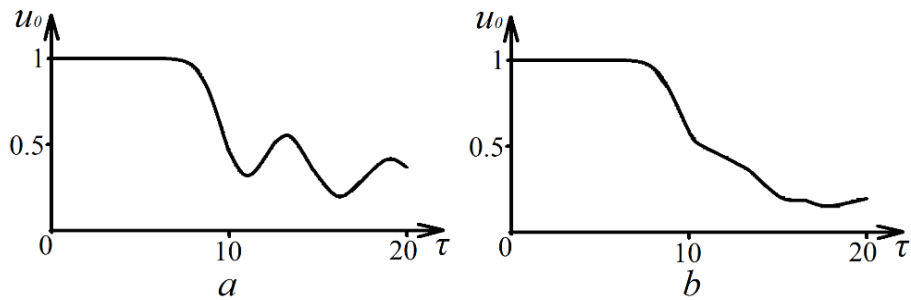


Рис. 19.6. Изменение амплитуды основной волны со временем. а). При описании в рамках S-теории и б). в общем случае, когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом вида $\{| A|^2 A\}$ [19-3]

Можно видеть, что нерезонансные взаимодействия, для которых не выполнены соотношения S-теории, приводят к срыву осцилляторного режима поведения амплитуды основной волны, характерного для режима резонансного взаимодействия, описываемого S-теорией [19-4, 19-5]. Динамика изменения средней амплитуды U_{CP} , средней амплитуды трети наибольших мод U_{SWH} и максимальных в текущий момент мод $U_{AG} = U_{MAX}$ представлена на рис. 19.7. Кружками отмечено появление волн

аномального размаха U_{AG} , которые удовлетворяют соотношению (19.11), то есть $U_{AG} > 2U_{SWH}$.

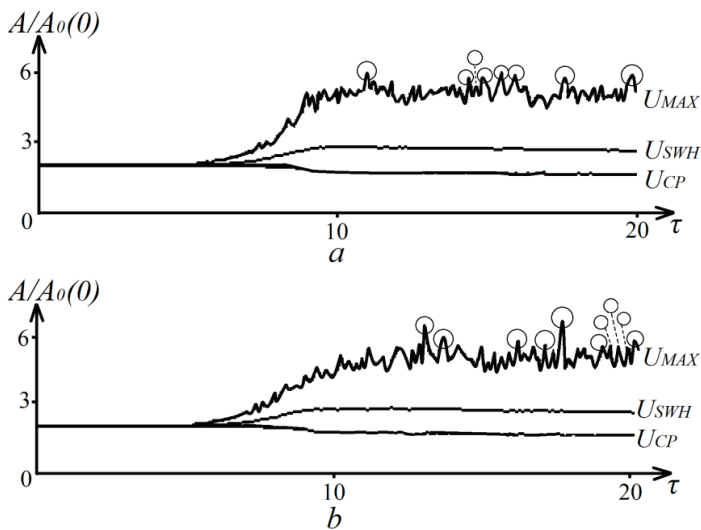


Рис. 19.7. Средняя амплитуда U_{CP} , средняя амплитуда трети наибольших мод U_{SWH} и самый большой размах волны из ансамбля U_{Max} , как функции времени.

Кружками отмечено появление волн аномальной амплитуды U_{AG} в рамках S-теории (a) и в общем случае (b) [19-3]

в отличие от случая, представленного на рис. 19.1, где волны с разными амплитудами подсчитывались в многочисленных расчетах (усреднение по ансамблю расчетов). Важно отметить, что в двух этих случаях частоты появления аномальных волн в статистике по ансамблям и по времени в обеих моделях описания океанского волнения практически не отличаются. Одна такая волна возникает среди 15-20 тысяч волн.

В численном эксперименте по сравнению двух подходов (S-теория и прямой расчет) характер распределения размахов подобен обсуждаемому в работах [19-4, 19-5], где их число подсчитывалось в разных реализациях, и величины усреднялись по ансамблю реализаций. Число и распределение размахов обнаруженных волн аномальной амплитуды в этих двух случаях представлены в Таблице 19.1. Следует обратить внимание на наличие выраженных «хвостов» распределений в обоих случаях.

Распределения амплитуд размахов H , то есть расстояний между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины, в режиме развитой неустойчивости в один момент и за все время расчетов представлены на рис. 19.8 и рис. 19.9 в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае (b). Подсчет волн происходил в одном и том же варианте расчета через моменты времени, равные времени жизни аномально большой волны¹⁶. Время жизни определили, рассматривая поведение волны аномальной амплитуды в данной области в течение некоторого необходимого времени наблюдения. То есть, усредняли по существу по времени,

¹⁶ Из-за слабого поглощения средние характеристики волнения практически не изменялись.

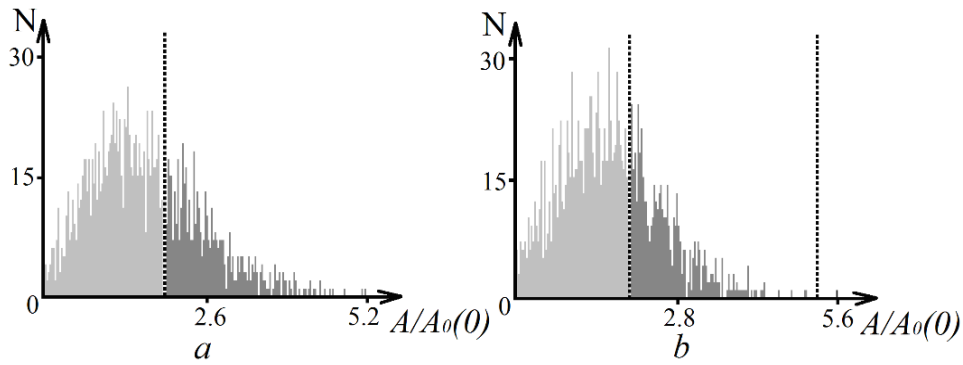


Рис. 19.8. Распределение амплитуд размахов в интервале наблюдения в момент времени $\tau = 20$ в случае описания в рамках S -теории (а) и в общем случае (б). Пунктирные линии определяют границу между модами малой амплитуды и третью самых больших мод и величиной, в два раза превышающей среднее значение от трети самых больших мод [19-3]

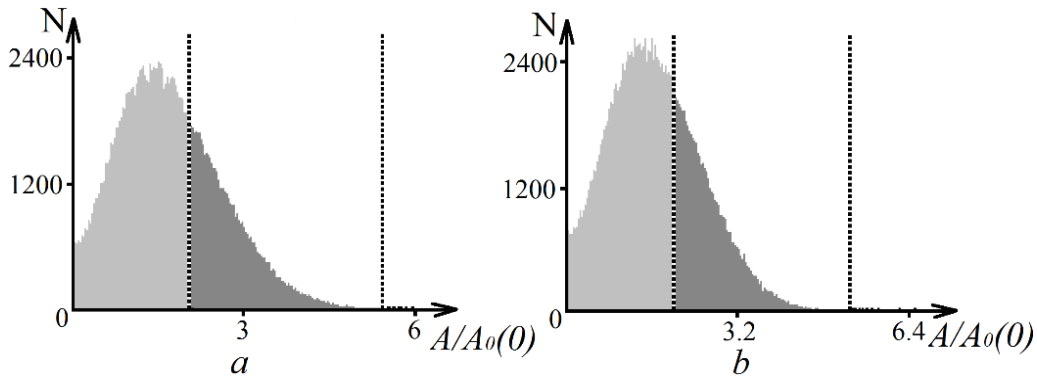


Рис. 19.9. Распределение амплитуд размахов за все время расчетов в области наблюдения в случае описания в рамках S -теории (а) и в общем случае (б). а) – всего размахов 173526, треть наибольших размахов 57842, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших размахов 8, б) – всего размахов 176386, треть наибольших размахов 58795, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших размахов 10 [19-3]

Таблица 19.1

Аномальные размахи

значение $U_{AG} / 2U_{SWH}$	S -теория	Общий случай
от 2 до 2,1	4	7
от 2,1 до 2,2	2	1
от 2,2 до 2,3	2	-
от 2,3 до 2,4	-	1
от 2,4 до 2,5	-	1
всего	8	10

Источник [19-3].

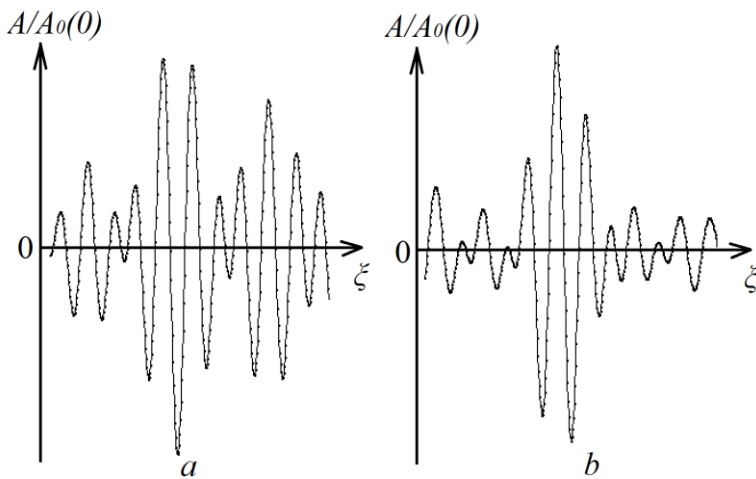


Рис. 19.10. Характерный вид аномальных волн в составе групп волн в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае (b) [19-3]

Анализ наблюдений и численных экспериментов показывает, что аномальные волны часто возникают в составе группы волн, имеющих форму солитоноподобных образований. И в данном случае такие волны появляются именно в составе групп достаточно больших волн, причем в общем случае характерная длина модуляции оказывается меньше, чем при описании в рамках S-теории (см. рис. 19.10).

Так как обсуждаемая система может считаться почти консервативной, ибо механизмы диссипации энергии волн весьма слабые¹⁷, то описания неравновесных процессов в условиях интенсивного волнения, развитые в работах [19-6 – 19-8], могут оказаться применимы и к рассматриваемому случаю. Однако следует отметить, что найденные авторами [19-6 – 19-8] нестационарные решения- автоволны, имеющие подобную солитонам природу, получают энергию из бесконечной среды, заполненной волновым движением. Поэтому обмен энергией между этими возмущениями и окружающей средой не рассматривался. Кроме того, периодические возмущения-бризеры (breathers), как показал эксперимент часто не реализуются. Однако одиночный короткоживущий бризер – солитон Перегринна [19-7], оказывается подобен рассмотренному на рис 19.10 решению, описывающему одиночную волну аномальной амплитуды.

Подобное возмущение возникает в поле волнового движения и затем исчезает, что соответствует рассмотренному выше появлению и исчезновению короткоживущей аномальной волны за счет интерференции пакета стоячих волн спектра модуляционной неустойчивости, движущихся с разной скоростью под действием основной волны (см. Приложение XXII). Важно отметить, что в обсуждаемом одномерном случае максимальная амплитуда аномальной волны (бризера) в три раза превышает среднюю амплитуду волнения.

¹⁷ Поэтому прежнее рассмотрение в 8 главе, где диссипативные эффекты существенны, было проведено без использования методов решений для консервативных сред, используемых авторами [19-6 – 19-8].

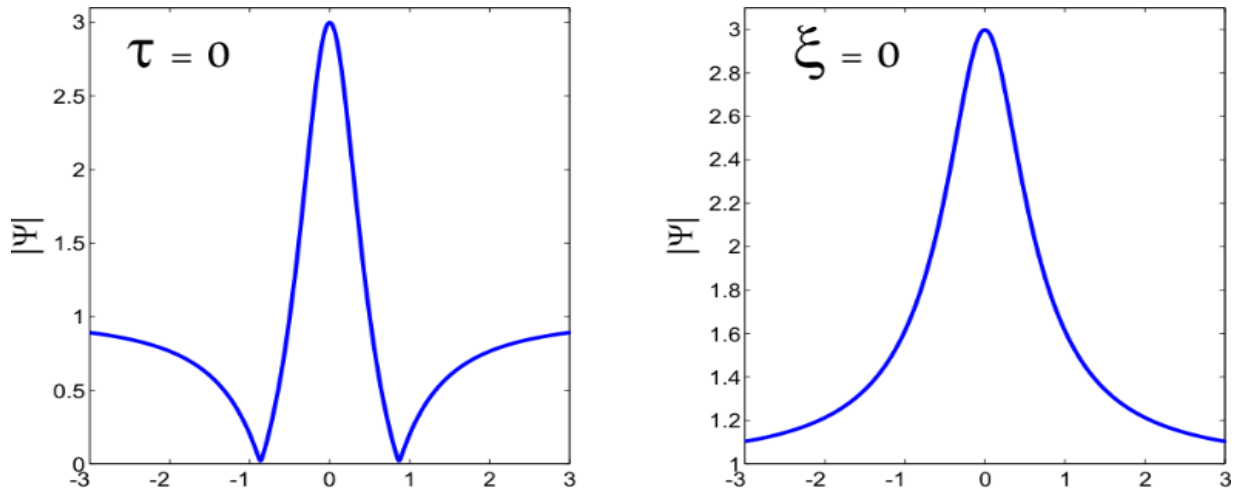


Рис. 19.11. Вид нестационарного возмущения в виде солитона Перегринна в пространстве (справа) и со временем (слева), где $\Psi = \{1 - 4(1 + 2i\tau)(1 + 4\xi^2 + 4\tau^2)^{-1}\} \exp\{i\tau\}$, а Ψ удовлетворяет уравнению $i\Psi_\tau + 0.5 \cdot \Psi_{\xi\xi} + |\Psi|^2 \Psi = 0$ [19.7].

В технологическом университете Гамбурга был проведен эксперимент в резервуаре с водой и размерами 15x1,5x1,6 метра для волнового движения с $k_0 A \approx 0.1$ и обнаружено соответствие возникшей волны аномальной амплитуды (сплошная кривая, ср. с рис. 19.10) с солитоном Перегринна (пунктирная кривая).

Таким образом, волны аномальной амплитуды в условиях развитого волнения, которые представляются, как перманентно существующие и непредсказуемо проявляющие себя в этих условиях автоволны – солитонобразные возмущения с переменной амплитудой [19-6 – 19-8], в действительности весьма определенно генерируются модуляционной неустойчивостью. Которая формирует волну (или огибающую) аномальной амплитуды за счет вынужденной интерференции мод спектра неустойчивости под действием волнового движения (см. Приложение XXI-XXII).

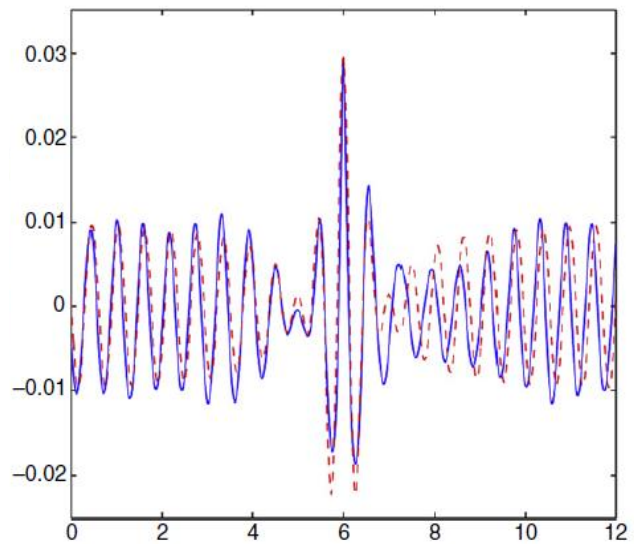


Рис. 19.12. Сравнение экспериментально наблюдаемой волны аномальной амплитуды (сплошная кривая) с наполнением огибающей, представляющей собой солитон Перегринна (пунктир) [19-9]. По оси ординат – амплитуда в метрах, по оси абсцисс – время в секундах.

Литература к разделу 19

19-1. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М. : Наука. – 1973. – 175 с.

19.2, Schwartz L. W., Fenton J. D. Strongly nonlinear waves // Ann. Rev. Fluid. Mech. 1982. – Vol. 14. – P. 39–60.

19-3. Белкин Е. В., Киричок А. В., Куклин В. М., Приймак А. В. Аномальные волны в модуляционно неустойчивом волновом поле // East Eur. J. Phys. 2014. – V. 1 – № .2. – С. 4–39 (http://eejp.univer.kharkov.ua/Biblio/2014/EEJP_1_2/12p4-39.pdf).

19-4. Белкин Е. В., Гуцин И. В. Анализ численной модели модуляционной неустойчивости волны конечной амплитуды в нелинейной среде // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. – Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. 2008 – № 809 (9). – С. 20–31.

19-5. Белкин Е. В., Киричок А. В. Модуляционная неустойчивость волн, поддерживаемых внешним источником в среде с поглощением // ВАНТ, Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2010. – No 4 (68). – С. 291–295.

19-6. E. Kuznetsov E. Solitons in a parametrically unstable plasma / Akademiia Nauk SSSR Doklady, 236, 1977, pp. 575–577.

19-7. Peregrine D. Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions/ Journal of the Australian Mathematical Society Series 25 (1) (1983) 16–43.

19-8. Akhmediev N., Korneev V. Modulation instability and periodic solutions of the nonlinear Schrodinger equation / Theoretical and Mathematical Physics 69 (2) (1986) 1089–1093.

19-9. Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. Rogue wave observation in a water wave tank / Physical Review Letters 106 (20) (2011) 204502.

ГЛАВА 9. Параметрическая и/или модуляционная неустойчивость интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме

Показано, что по крайней мере в одномерном случае, описание модуляционной неустойчивости ленгмюровских колебаний в неизотермической плазме с помощью уравнений В. Е. Захарова подобно описанию параметрической неустойчивости этих колебаний в холодной плазме обобщенными уравнениями В. П. Силина. При использовании уравнений квазигидродинамики для электронов и представления ионов частицами показано формирование Максвелловской функции распределения ионов в обеих моделях описания, то есть появляется возможность говорить об их температуре. Использование для расчетов одномерной модели $2 \div 5 \times 10^4$ модельных частиц-ионов, что в трехмерной модели соответствовало бы их числу $10^{13} \div 10^{14}$, позволяет достаточно корректно описать процесс нагрева ионов за счет рассеивания на неоднородностях поля и затухания Ландау. Кроме того, проведенные расчеты позволяют провести верификацию других методов описания таких процессов.

РАЗДЕЛ 20. МОДЕЛИ СИЛИНА И ЗАХАРОВА

Интенсивные длинноволновые ленгмюровские волны в плазме оказываются неустойчивыми. Эта неустойчивость ведет к возбуждению коротковолнового спектра ленгмюровских колебаний. Корректные модели описания неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний конечной амплитуды были созданы в основополагающих работах В. П. Силина [20-1] и В. Е. Захарова [20-2], соответственно для случаев холодной (т. н. модель Силина) и неизотермической плазмы (модель Захарова).

Наибольший интерес у научной общественности вызвал обнаруженный В. Е. Захаровым эффективный механизм диссипации волновой энергии – коллапс ленгмюровских волн в неизотермической плазме [20-3]. Предложенный в этой работе механизм такого затухания ВЧ энергии был обусловлен формированием коротковолнового спектра ленгмюровских возмущений и образования каверн плотности плазмы, который может быть описан с помощью уравнений Захарова [20-3], полученных с использова-

нием квазигидродинамических уравнений для электронной и ионной жидкостей при плотности энергии длинноволнового ленгмюровского поля меньшей плотности тепловой энергии электронов плазмы. При этом возникают области локализации коротковолновых ленгмюровских колебаний. Из этих областей (каверн) плазма выталкивается под действием ВЧ-давления, что способно привести к так называемому коллапсу – сужению и углублению каверны плотности (т. н. режим с обострением). В этом случае сужение каверны должно сопровождаться затуханием мод коротковолнового ленгмюровского спектра на электронах за счет затухания Ландау и «схлопыванием» каверны из-за выгорания ВЧ поля (так называемый, «физический коллапс»). В дальнейшем изучению этого крайне важного для физики плазмы феномена было посвящено множество работ (см. в частности [20-4] – [20-14]). Подобное явление было обнаружено и в модели Силина, то есть в более сильных полях в холодной плазме [20-15, 20-16], где, как показано ниже, механизм передачи энергии поля частицам плазмы оказался подобным, хотя роль затухания Ландау в нагреве ионов как показано ниже оказалась несколько преувеличенной.

Другим несколько интригующим моментом было различное определение неустойчивости в модели Захарова – модуляционная, и в модели Силина – параметрическая. Обыкновенно параметрическими неустойчивостями называются процессы, когда некоторый параметр системы испытывает высокочастотные осцилляции как в уравнении Матье (или так называемый мультипликативный шум, как в уравнении Хилла). При этом может существовать обратное воздействие возникающих возмущений на источник шума (самосогласованная система).

Подобная неустойчивость была рассмотрена в работах [16-15, 16-16] – это так называемая параллельная накачка спиновых волн. То есть переменное однородное в пространстве магнитное поле возбуждало спиновые волны в образцах, причем параметры уравнений для возмущений содержали мультипликативную составляющую.

Не трудно увидеть аналогию обсуждаемого выше случая с возбуждением однородным (именно так представлена физическая реализация длинноволновой волны накачки в моделях В. Е. Захарова и В. П. Силина) в пространстве интенсивным ленгмюровским полем спектра мелкомасштабных ленгмюровских волн и ионных возмущений в плазме в моделях В. Е. Захарова и В. П. Силина. То есть формально подобная неустойчивость является самосогласованной параметрической. Однако характер такой неустойчивости весьма подобен процессу неустойчивости модуляционной, тем более, что в результате действительно появляется мелкомасштабная модуляция плотности плазмы. Поэтому использование и такого названия можно считать приемлемым.

Проблемы описания. Известно, что в гидродинамической модели учет затухания Ландау невозможен. Поэтому обычно применяется феноменологический подход к представлению механизма этого затухания. Кроме того, квазигидродинамическое описание, как впрочем и кинетическое (с помощью уравнений для функций распределения частиц по скоростям), описывают движение сплошной среды и оперируют объектами, которые представляют собой не частицы, а малые фазовые объемы и в классическом пределе эти фазовые объемы сколь угодно малы¹⁸. Это приводит к меньшей инерционности вещества, чем при его описании частицами, формированию не только весьма мелкомасштабных и глубоких каверн плотности плазмы, но и к режимам с обострением (коллапсам), которые не всегда адекватны физической реальности.

Что касается методов описания с помощью крупных частиц в высокомерных моделях, то здесь другая крайность. Крупные частицы обладают излишне большой инерционностью, потому их часто заменяют локальными объектами областями-ячейками, где происходит осреднение внутреннего содержимого. Это приближает такой подход на малых масштабах к гидродинамическому описанию, сохраняя на больших масштабах особенности метода крупных частиц и их осредненную инерционность. Можно увеличивать число модельных частиц в описании, уменьшая удельную долю (заряд и массу) каждой, хотя приблизиться к реальным физическим параметрам в трехмерном пространстве вряд ли удастся.

В одномерных моделях некоторые черты реальных процессов сохраняются, по крайней мере на качественном уровне. И требования на число частиц в одномерных моделях описания значительно ослаблены, что позволяет достаточно корректно применять метод частиц. Например, ниже для одномерного моделирования использовано $2 \div 5 \times 10^4$ модельных частиц-ионов (что в трехмерной модели соответствовало бы $10^{13} \div 10^{14}$ таких объектов в объеме рассмотрения), и эти частицы уже по своим характеристикам отвечают отдельным ионам. Потому динамика такого числа моделирующих ионы частиц в значительной степени адекватна динамике ионов плазмы, более того механизмы обмена энергией между полем и частицами отвечают реальному взаимодействию ионов со спектром НЧ колебаний¹⁹.

Ниже обсудим развитие процессов неустойчивости в плазме интенсивных ленгмюровских колебаний в одномерных моделях Силина и Захарова, причем электроны будем описывать только квазигидродина-

¹⁸ Именно поэтому прямое моделирование явлений коллапса методом частиц, по мнению, высказанному В. Е. Захаровым и его коллегами (см. [20-17]), является «наиболее последовательным».

¹⁹ Это, кстати, позволяет провести верификацию гидродинамического описания, описания с помощью уравнений для функций распределения ионов и описания ионов методами «частиц в ячейках».

мическими уравнениями (с феноменологическим учетом затухания Ландау на электронах), а для ионов воспользуемся подобным описанием или описанием с помощью модельных частиц. В последнем случае гибридные модели (электроны представлены квазигидродинамическими уравнениями, а ионы – частицами) позволяют увидеть формирование максвелловского распределения ионов по скоростям и оценить эффективность их нагрева.

Уравнения гибридной модели Силина. Рассмотрим прежде случай параметрической неустойчивости внешнего длинноволнового ленгмюровского поля большой интенсивности для холодной плазмы, то есть в условиях превышения плотности энергии поля плотности тепловой энергии среды $W = |E_0|^2 / 4\pi \square n_0 T_e$. Частицы находятся в поле внешней волны, длину которой для упрощений расчетов положим равной бесконечности, осциллируя со скоростью $u_{0\alpha} = -(e_\alpha |E_0| / m_\alpha \omega_0) \cos \Phi$. Компоненты напряженности поля внешней волны определяются следующим образом

$$E_0 = -i(|E_0| \exp[i\omega_0 t + i\phi] - |E_0| \exp[-i\omega_0 t - i\phi]) / 2. \quad (20.1)$$

Для комплексных медленно меняющихся компонент E_n, \bar{E}_n и $n_{i,n} = v_{in} / e$ соответственно ВЧ электрического поля, НЧ электрического поля и плотности ионов возбуждаемого коротковолнового спектра можно записать следующую систему уравнений (см. Приложение XXIV)

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \left(\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} + \beta n^2 \right) E_n + \theta \frac{n^6}{n_M^6} E_n - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{k_0 n} J_1(a_n) \exp(i\phi) - \quad (20.2)$$

$$-i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,n-m} \left[E_{-m}^* J_2(a_{n-m}) \exp(2i\phi) + E_m J_0(a_{n-m}) \right] = 0,$$

$$\bar{E}_n = -\frac{4\pi i}{k_0 n} v_{i,n} \left[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \frac{1}{2} J_1(a_n) [E_n e^{-i\phi} - E_{-n}^* e^{i\phi}] - \quad (20.3)$$

$$-\frac{ink_0}{16\pi en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m} E_{-m}^* -$$

$$-\frac{ik_0}{16\pi en_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) [E_{n-m} E_m e^{-2i\phi} + E_{m-n}^* E_{-m}^* e^{2i\phi}]. \quad (20.4)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} \left[E_{-m}^* J_2(a_m) \exp(2i\phi) + E_m J_0(a_m) \right]. \quad (20.5)$$

где аргументы функций Бесселя $a_n = nek_0 E_0 / m_e \omega_0^2$, $\Phi = \omega_0 t + \phi$, и $v_{i,n} = en_{i,n}$, $v_{i,n} = en_0 \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(-ink_0 x_s(x_0, t)) dx_{s0}$ – компоненты плотности заряда ионов, ВЧ поле спектра $E = \exp\{-i\omega_0 t\} \cdot \sum_n E_n \cdot \exp\{ink_0 x\}$, слагаемое $\theta \cdot (n/n_M)^6 E_n$ моделирует затухание ВЧ мод спектра на электронах, причем $n_M = 20$, $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0$. Кроме того, в (19.2) добавлен дисперсионный член, пропорциональный $\beta = k_0^2 v_{Te}^2 / 2\omega_0$, $v_{Te}^2 = T_e / m_e$, x_s – координата s-той частицы, моделирующей ион. Выражения пропорциональные $J_0(a_n)$, отвечают медленным движениям в потоках увлечения, а выражения пропорциональные $J_{\pm 2}(a_n)$, определяются вкладом в нелинейность второй гармоники, n_0 – невозмущенная плотность плазмы, T – температура электронов, ионы в начальный момент полагаем холодными.

Уравнения гибридной модели Захарова. При $a_n \propto 1$ уравнения гибридной модели Силина с учетом представления $J_1(a_n) \approx a_n / 2$, $J_0(a_n) \approx 1$, $J_2(a_n) \approx a_n^2 / 8$ совпадают с уравнениями, полученными для неизотермической плазмы гибридной модели Захарова [20-18], соответственно, с точностью до величины расстройки и с учетом замен $E_0 \rightarrow -iE_0$ и $E_0^* \rightarrow iE_0^*$.

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \theta \frac{n^6}{n_M^6} E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \left[n_{in} E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{in-m} E_m \right] = 0, \quad (20.6)$$

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \tilde{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_{i,n} T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m\omega_p^2} \left[E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^* \right], \quad (20.7)$$

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \exp(ik_0 n x_s), \quad (20.8)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \sum_m n_{i,-m} E_m = 0, \quad (20.9)$$

где для компонент плотности ионов справедливо выражение

$$n_{in} = n_0 \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(-ink_0 x_s(x_0, t)) dx_{s0}.$$

Из уравнений Захарова (20.6) – (20.9) в линейном случае, используя представление $\partial E / E \partial t \Rightarrow i\Omega$ можно получить дисперсионное урав-

нение для неизотермического случая в сверхзвуковом пределе $\partial^2 n_{i,n} / n_{i,n} \partial t^2 \approx k_0^2 c_s^2 n^2$

$$-\Omega^2 (\Omega^2 - \Delta^2) + \Delta \cdot A = 0, \tag{20.10}$$

где расстройка равна $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$ и $A = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \omega_{pe}^3$.

С другой стороны, линеаризуя уравнения (20.2) – (20.5), получим точно такое же дисперсионное уравнение для случая холодной плазмы, где, однако $\Delta = \Delta_0 = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0$, а величина $A = J_1^2(a_n) \omega_{pe}^3 m / M$. Заметим, что дисперсионные уравнения (20.10) при $a_n \ll 1$ и с учетом замен $E_0 \rightarrow -iE_0$ и $E_0^* \rightarrow iE_0^*$ при соответствующем выборе расстройки в этих двух случаях совпадают. Положительная определенность расстройки $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$ в модели Захарова очевидна, а что касается расстройки $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0$ в модели Силина, то, в книге [20-19] показано, что она также положительно определена и порядка инкремента неустойчивости $\gamma = \text{Im } \omega$ по крайней мере, в случае возбуждения длинноволновых ленгмюровских колебаний сильноточным релятивистским пучком электронов. Для нормированных величин $\gamma' = \Omega / \omega_{pe}$ и $A' \rightarrow A / \omega_{pe}^3$ в Таблице 20-1 приведены значения, отвечающие двум моделям описания модуляционной неустойчивости ленгмюровских колебаний. В модели Захарова, нормированная на ленгмюровскую частоту поправка $\gamma' = \Omega / \omega_{pe}$, вообще говоря, должна быть записана в виде

Таблица 20-1

Параметры линейной теории для моделей Захарова и Силина

Значения	Модель Захарова	Модель Силина
Квадрат поправки к нормированной частоте	$(\gamma')_1^2 = \frac{(\Delta')^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta')^4}{4} + A'(\Delta')}$	
Расстройка	$(\Delta')_n = \frac{\omega_{pe}^2 + v_{Te}^2 k_0^2 n^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2} \approx \frac{v_{Te}^2 k_0^2 n^2}{2\omega_{pe}^2}$	$\Delta' = \Delta'_0 = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2}$
Коэффициент А	$A' = A'(n) = \frac{1}{2} \frac{m_e}{M} \frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{ E_0 ^2}{4\pi n_0 T_e}$	$A' = A'(n) = \frac{m_e}{M} J_1^2(a_n)$

$$(\gamma')^2 = \frac{(\Delta')^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta')^4}{4} + B(\Delta')^2}, \quad (20.11)$$

где $B = m_e |E_0|^2 / 8\pi n_0 T_e M$. Так как $[(\Delta')^4 + 4B(\Delta')^2]^{1/2} - (\Delta')^2$ с ростом Δ' монотонно растет, не имея выраженного максимума, то при малых $(\Delta')^2 \propto B$, и $\Omega^2 \approx -(\Delta')\sqrt{B}$. При этом $|\Omega^2| < B$, а инкремент неустойчивости равен

$$\text{Im}\Omega = |\Omega| \approx \left(\frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \frac{m_e}{M} \right)^{1/4} \omega_{pe}. \quad (20.12)$$

При больших $(\Delta')^2 \propto B$, и $\Omega^2 \approx -B$. При этом инкремент неустойчивости

$$\text{Im}\Omega = |\Omega| \approx \left(\frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e} \frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \omega_{pe}. \quad (20.13)$$

Отсюда видно, что инкремент увеличивается с ростом волнового числа возмущений, выходя при больших значениях волнового числа на свое наибольшее значение (20.13).

В модели Силина при значениях расстройки $(\Delta')^3 = A' / 2$ или, что то же самое $\Delta' = (m_e 2M)^{1/3} J_1^{2/3}(a_{n_m})$, относительный инкремент достигает значений

$$\gamma' = \pm \frac{i}{\sqrt[3]{2}} (A')^{1/3} = \pm \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/3} J_1^{2/3}(a_n). \quad (20.14)$$

Возмущения с волновым числом $k_m = k_0 n_m$, для которых $a_{n_m} = 1.84$, значение функции Бесселя максимально и величина относительного инкремента для таких возмущений достигает своего наибольшего значения

$$\delta'_{\max} = \pm 0.44i (m_e / M)^{1/3}. \quad (20.15)$$

Таким образом, в модели Силина наибольшим инкрементом обладают волновые вектора, для которых $a_{n_m} = 1.84$. При развитии неустойчивости амплитуда волны накачки падает и максимум инкремента перемещается в коротковолновую область.

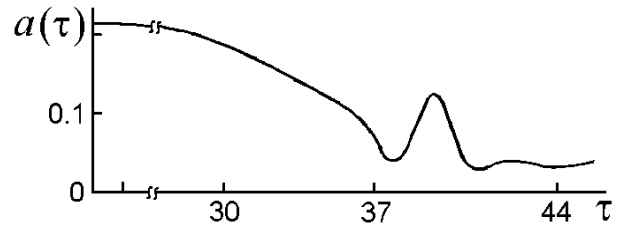


Рис. 20.1. Амплитуда поля накачки $a(\tau)$ как функция времени τ в гибридной модели в случае слабого поглощения энергии коротковолновых колебаний [19-20]

Важно отметить, что значения максимальных инкрементов параметрической неустойчивости в модели Захарова для сверхзвуковых возмущений подрастают при уменьшении их масштаба. Причем, если в модели Захарова уменьшение амплитуды поля накачки приводит снижению инкрементов во всей области неустойчивости, то в модели Силина подобный процесс сдвигает максимум инкремента в коротковолновую область, не уменьшая его значения (20.15). Таким образом, процесс движения энергии в коротковолновую часть спектра в двух моделях в значительной степени определяется линейными механизмами роста возмущений.

Кроме того, следует отметить ожидаемый взрывной рост амплитуд мод спектра неустойчивости в сверхзвуковом режиме процесса распада интенсивного ленгмюровского поля в неизотермической плазме в условиях $W = |E_0|^2 / 4\pi \propto n_0 T_e$, который обусловлен большими значениями инкремента практически во всей области неустойчивости. Именно этот взрывной рост амплитуд спектра на начальной стадии процесса наблюдали во многих численных экспериментах.

Нелинейные режимы неустойчивостей. Анализ динамики процесса показал [20-20], что на нелинейной стадии неустойчивости в модели Силина формировались каверны плотности, которые затем разрушались. Причем процесс разрушения уже не сопровождался срывом счета, как это было в случае квазигидродинамического описания из-за перехода к режиму обострения [20-21]. Причиной разрушения каверн было выгорание поля и инерция моделирующих ионы частиц, число которых в численном эксперименте не превышало 5×10^3 , число мод спектра $40 \div 100$.

При этом наиболее крупная ионная каверна быстро «схлопывалась», ионный компонент переходил в режим пересечения траекторий частиц [20-20, 20-22]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка $(m_e / M)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [20-20]. При малых уровнях поглощения и малых начальных флуктуациях поведение волны накачки представлено на Рис. 20.1. Большая часть энергии поля накачки в результате неустойчивости трансформировалась в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра, затем можно было наблюдать частичный обмен энергией между спектром и волной накачки и при $\tau > 40$ ионная каверна «схлопывалась», то есть, переходила в режим пересечения траекторий частиц.

Анализ гибридной модели Захарова был проведен в работе [20-23], где последнее уравнение для накачки было заменено простой динамикой слабого затухания накачки. Авторы [20-23] выбрали отношение масс $m_e / M = 1 / (16 \times 1836)$, плазма изотермическая, область рассмотрения $L = 1,8 \times 10^3 \lambda_{de}$, для квазигидродинамического описания было использовано 600 мод спектра, для гибридного – 3000 позиций, то есть коорди-

натная область разбита именно на такое количество участков. Был рассмотрен несамосогласованный случай постоянного или слабо меняющегося поля интенсивной ленгмюровской волны, влиянием на которую спектра возбуждаемых коротковолновых возмущений пренебрегалось. Прежде всего, авторы [20-23] отметили значительно более быстрый рост возмущений в гибридной модели, который они пояснили большими значениями возмущений ионной плотности в выбранной ими координатной сетке. Интегральные показатели – энергия ВЧ коротковолнового спектра на начальной стадии модуляционной неустойчивости для квазигидродинамического описания и описания гибридной моделью, оказались подобны (Рис. 20.2).

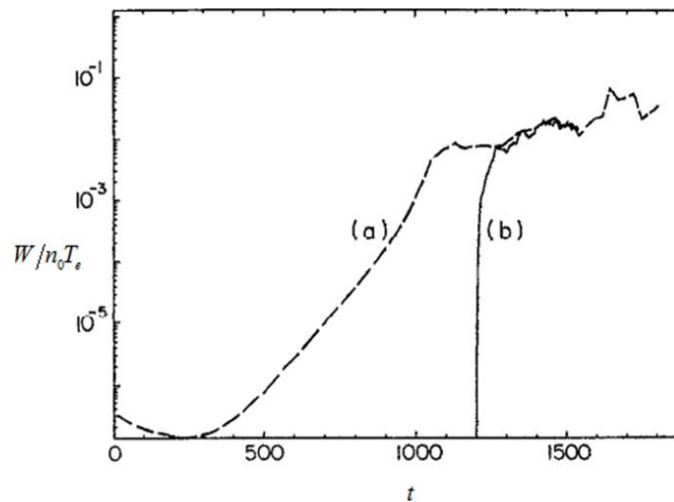


Рис. 20.2. Отношение плотности энергии поля к плотности тепловой энергии электронов для случаев гидродинамической (а) и гибридной (b) моделей Захарова [20-23] (по оси ординат) от времени t

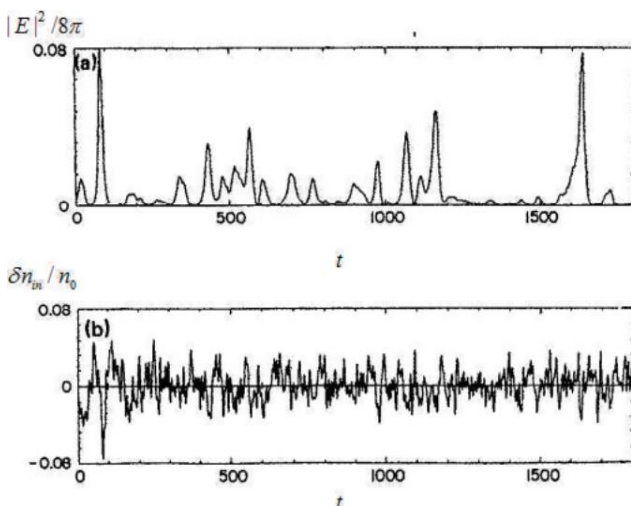


Рис. 20.3. Огибающая ВЧ поля $|E|^2 / 8\pi$ (а) и относительные отклонения плотности ионов $\delta n_{i,n} / n_0$ (b) в гибридной модели,

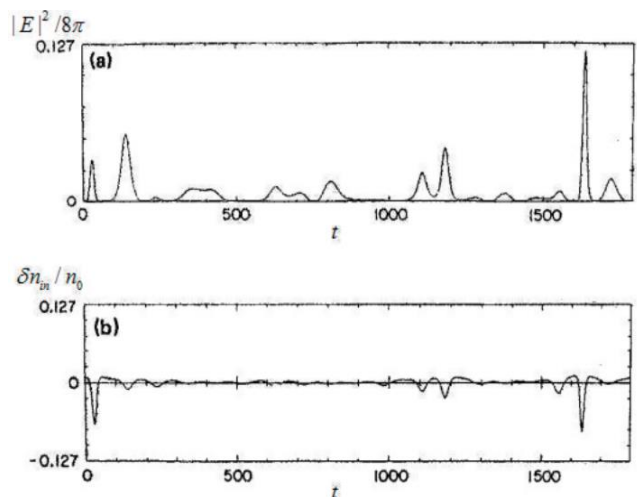


Рис. 20.4. Огибающая ВЧ поля (а) и относительные отклонения плотности ионов (b) в гибридинамической модели, в момент времени

в момент времени $340\omega_{pe}^{-1}$ [20-23]

$1363\omega_{pe}^{-1}$ [20-23]

Здесь для удобства сравнения были выбраны подобные режимы неустойчивости, которые характеризуются примерно равными максимальными амплитудами поля и возмущений плотности. Прежде всего, следует отметить заметно большее число каверн плотности плазмы, значительные флуктуации плотности ионов. Соответственно, количество солитообразных возмущений плотности коротковолнового поля также больше в гибридной модели. Максимальная глубина каверн в гибридной модели всегда меньше, характерные размеры вдоль системы подобны. Оценки нагрева ионов в условиях постоянной величины или медленного изменения поля накачки вряд ли представляют интерес, ибо влияние коротковолнового спектра на накачку авторы не учитывали.

На начальной стадии развитого режима процесса было обнаружено, что выполняется соотношение между относительными возмущениями плотности ионов $\delta n_{i,n} / n_0$ и интегральной плотностью энергии коротковолнового поля $\delta n_{in} / n_0 \propto |E|^2 / 8$.

Литература к разделу 20

20-1. Силин В. П. Параметрический резонанс в плазме // ЖЭТФ. 1965. – Т. 48. – С. 1679.

20-2. Захаров В. Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля // ЖЭТФ. 1966. – Т. 51. – № 6. – С. 688–696.

20-3. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. – Т. 62. – № 5. – С. 1745–1759.

20-4. Захаров В. Е., Львов В. С., Рубенчик А. М. О влиянии модуляционной неустойчивости на релаксацию релятивистского электронного пучков плазме // Письма в ЖЭТФ. 1977. – Т. 25. – № 1. – С. 11–14.

20-5. Бучельникова Н. С., Маточкин Е. П. Неустойчивость и затухание одномерных ленгмюровских волн // Препринты ИЯФ СО АН СССР. 1979. – № 79–115. – С. 20.

20-6. Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Ленгмюровская турбулентность и диссипация высокочастотной энергии // Физика плазмы. 1980. – Т. 6. – С. 377.

XIX-7. Дегтярев Л. М. и др. Ленгмюровский коллапс при наличии накачки и диссипации волновой энергии // ЖЭТФ. 1983. – Т. 85. – № 4. – С. 1221–1231.

20-8. Wong A., Cheung P., Waves L. Three-Dimensional Self-Collapse of Langmuir Waves // Phys. Rev. Lett. 1984. – Т. 52. – № 14. – С. 1222–1225.

20-9. Cheung P. Y., Wong A. Y. Nonlinear evolution of electron-beam-plasma interactions // Phys. Fluids. AIP Publishing, 1985. – Т. 28. – № 5. – С. 1538.

20-10. Popel S. I., Tsytovich V. N., Vladimirov S. V. Modulational Instability of Langmuir Wave-Packets // *Phys. Plasmas*. 1994. Т. 1. – № 7. – С. 2176–2188.

20-11. Захаров В. Е. и др. Кинетика трехмерного ленгмюровского коллапса // *ЖЭТФ*. 1989. – Т. 96. – № 4. – С. 591.

20-12. Карфидов Д. М. и др. Сильная ленгмюровская турбулентность, возбуждаемая в плазме электронным пучком // *ЖЭТФ*. 1990. – Т. 98. – № 5. – С. 1592.

20-13. Vyacheslavov L. N. и др. Spectra of developed Langmuir turbulence in a nonisothermal magnetized plasma // *Phys. Plasmas*. 1995. – Т. 2. – № 6. – С. 2224–2230.

20-14. McFarland M.D., Wong A.Y. Spectral content of strong Langmuir turbulence in the beam plasma interaction // *Phys. Plasmas*. 1997. – Т. 4. – № 4. – С. 945.

20-15. Андреев Н. Е., Силин В. П., Стенчиков Г. Л. О насыщении параметрической неустойчивости плазмы в сильном электрическом поле // *Физика плазмы*. 1977. – Т. 3. – № 5. – С. 1088–1096.

20-16. Коврижных Л.М. Модуляционная неустойчивость и нелинейные волны в холодной плазме // *Физика плазмы*. 1977. – Т. 3. – № 5. – С. 1097–1105.

20-17. Дьяченко А. И. и др. Двумерный ленгмюровский коллапс и двумерные ленгмюровские кавитоны // *Письма в ЖЭТФ*. Наука, 1986. – Т. 44. – С. 504.

20-18. Кузнецов Е. А. Об усредненном описании ленгмюровских волн в плазме // *Физика плазмы*. Наука. 1976. Т. 2. – № 2. – С. 327–333.

20-19. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. Наука. – 1973.

20-20. Chernousenko V. V., Kuklin V. M., Panchenko I. P. The structure in nonequilibrium media. In book: *The integrability and kinetic equations for solitons* // AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka. 1990. – С. 472.

20-21. Ку克林 В. М., Севидов С. М. К нелинейной теории устойчивости интенсивных колебаний холодной плазмы // *Физика плазмы*. 1988. – Т. 14. – № 10. – С. 1180–1185.

20-22. Ку克林 В. М., Панченко И. П., Севидов С. М. Неустойчивость интенсивной ленгмюровской волны в холодной плазме // *Радиотехника и электроника*. 1980. – Т. 33. – № 10. – С. 2135–2140.

20-23. Clark K. L., Payne G. L., Nicholson D. R. A hybrid Zakharov particle simulation of ionospheric heating // *Phys. Fluids B Plasma Phys*. 1992. – Т. 4. – № 3. – С. 708.

РАЗДЕЛ 21.

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СИЛИНА И ЗАХАРОВА, НАГРЕВ ИОНОВ

Ниже проведем сравнение динамики развития модуляционной неустойчивости интенсивной ленгмюровской волны, для двух представля-

ющих значительный интерес случаев [21-1]. В первом случае, описываемом моделью Силина, плотность энергии поля значительно превышает плотность тепловой энергии холодной плазмы. Во втором случае, описываемом моделью Захарова, плотность энергии поля заметно меньше тепловой энергии неизотермической плазмы, где температура ионов много меньше температуры электронов. Основное внимание обратим на эффективность передачи энергии ионам и ионным возмущениям в результате развития модуляционных неустойчивостей в случаях неизотермической и холодной плазмы в рамках гибридных моделей.

Для каждой модели рассмотрены два случая легких ($m_e / M = 0.5 \cdot 10^{-3}$) и тяжелых ($m_e / M = 8 \cdot 10^{-6}$) ионов. Также представляет интерес выяснить, как влияет затухание ВЧ спектра и соответственно выгорание поля в кавернах плотности на характер передачи энергии ионам плазмы.

Количество крупных частиц, моделирующих ионы, выбрано $0 < s \leq S = 20000$. Крупные частицы равномерно распределены на интервале $-1/2 < \xi < 1/2$, $\xi = k_0 x / 2\pi$, $v_s = d\xi / d\tau$, $\tau = \gamma t$, начальные условия для частиц $d\xi_s / d\tau |_{\tau=0} = v_s |_{\tau=0} = 0$, число мод спектра $-N < n < N$, $N = S / 100$. Начальная нормированная амплитуда интенсивных колебаний $a_0(0) = ek_0 E_0(0) / m_e \omega_{pe}^2 = 0.06$. Начальные амплитуды ВЧ мод задаются выражением $e_n |_{\tau=0} = e_{n0} = (2 + g)10^{-3}$ в модели Силина и $e_n |_{\tau=0} = e_{n0} = (0.5 + g)10^{-4}$ в модели Захарова, где $g \in [0;1]$ – случайное число, $ek_0 E_n / m_e \omega_{pe}^2 = e_n \exp(i\psi_n)$, $\psi_n |_{\tau=0}$ также случайным образом распределялись в интервале $0 \div 2\pi$. Для возмущений плотности ионов n_{ni} и медленно меняющегося электрического поля \bar{E}_n использованы также безразмерные представления

$$M_n = M_{nr} + iM_{ni} = n_{ni} \omega_{pe} / n_0 \gamma = \frac{\omega_{pe}}{\gamma} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(2\pi n \xi_s) d\xi_s$$

и $ek_0 \bar{E}_n / m_e \omega_{pe}^2 = E_{nr} + iE_{ni}$.

Оценка плотности передаваемой ионам энергии E_{kin} определялась выражением

$$\frac{E_{kin}}{W_0} \approx 0.27 \cdot I \cdot \left(\frac{M}{m_e} \right) \frac{\gamma^2}{\omega_{pe}^2}, \quad (21.1)$$

где W_0 – начальная плотность энергии интенсивной ленгмюровской волны, $I = \sum_s (d\xi_s / d\tau)^2$ – энергия ионов в соответствующей нормировке, γ – инкремент линейной неустойчивости. Доля энергии интенсивной ленгмюровской волны, передаваемая ионам в случае неизотермической

плазмы (модель Захарова) определялась отношением $W_0 / n_0 T_e$ а в случае холодной плазмы (модель Силина) отношением $(m / M)^{1/3}$.

Программа, реализующая математическую модель задачи, была создана с использованием технологии CUDA [21-2]. CUDA обеспечивает взаимодействие с технологией CUDA из Java-программы и дает возможность проводить вычисления с высокой скоростью параллельно на графическом процессоре.

Результаты численного моделирования. Для параметров, которые отвечают за характер поглощения энергии ВЧ спектра $n_M = 20$ и $\Theta = \theta / \gamma = 0.05$, энергия основной волны, энергия мелкомасштабного ленгмюровского спектра, энергия, переданная электронам и ионам плазмы, нормированные на начальную энергию основной волны, представлены на Рис. 21.1.

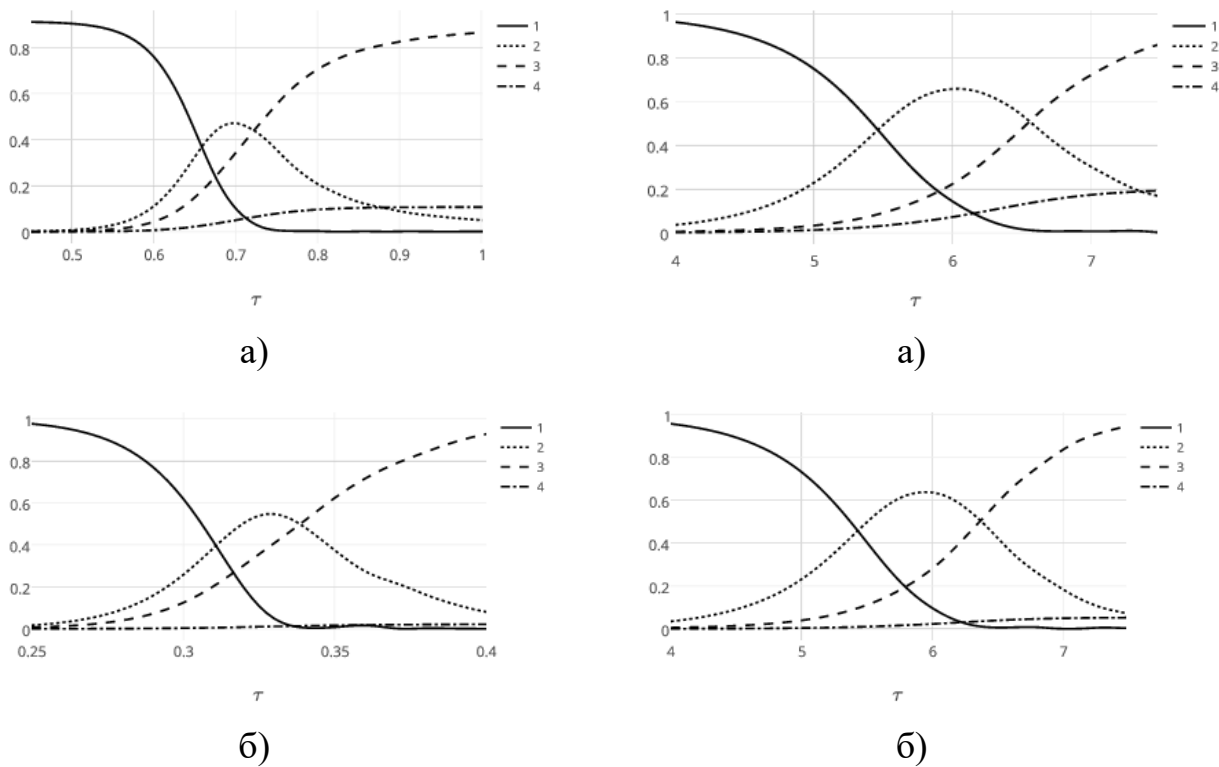


Рис. 21.1. Относительные значения энергии основной волны (1), энергии мелкомасштабного ленгмюровского спектра (2), энергии, переданной электронам (3) и ионам (4) плазмы, для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (а) и тяжелых ионов (б)

Энергия интенсивной длинноволновой ленгмюровской волны переходит сначала в энергию ВЧ ленгмюровского коротковолнового спектра. Именно на этой стадии формируются каверны плотности плазмы, заполненные ВЧ полем. Затем ВЧ поле вследствие затухания на электронах, учтенного в данных моделях феноменологически, выгорает (при этом

передавая свою энергию электронам плазмы). Каверны в этих условиях «схлопываются», возбуждаются НЧ волны, траектории ионов пересекаются и энергия «схлопнувшихся» каверн и НЧ спектра передается ионам. Интересно, что для обсуждаемого в [21-3] случая бунемановской неустойчивости в плазме, динамика уменьшения кинетической энергии электронов подобна динамике поля длинноволновой ленгмюровской волны (которая и вызывает такие интенсивные осцилляции электронной скорости в модели Силина).

Можно определить в конце численного моделирования среднеквадратическую скорость $\sigma(v_s) = \sqrt{\sum_s v_s^2 / S}$, при этом в модели Захарова для легких ионов получим $\sigma(v_s) = 0.015$, для тяжелых – $\sigma(v_s) = 0.006$. В модели Силина для легких ионов $\sigma(v_s) = 0.002$, а для тяжелых – $\sigma(v_s) = 0.0005$. Полная энергия частиц в выбранной нормировке $I = \sum_s (d\xi_s / d\tau)^2$ в модели Захарова для легких ионов равна 4.689, для тяжелых 0.808, в модели Силина для легких ионов 0.086, а для тяжелых 0.005.

Различия в величинах полной энергии в разных моделях определяются разными значениями линейного инкремента, а для случаев легких и тяжелых ионов, выбором массы иона. Можно построить на основе значений среднеквадратичной скорости нормальное распределение, тогда частицы, которые находятся вне его (в основном в так называемых «хвостах функции распределения») в модели Захарова для легких ионов обладают 13,8 % полной энергии, для тяжелых 9,2 %, а в модели Силина заметно больше, то есть для легких ионов 25,6 %, а для тяжелых 13 %, соответственно. То есть, в случае неустойчивости интенсивной волны в холодной плазме можно ожидать существенно большей доли быстрых частиц.

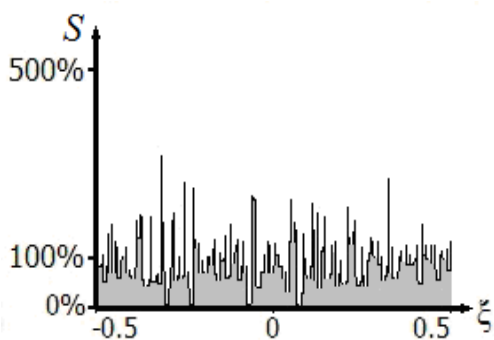


Рис. 21.2. Распределение ионов $S(\xi)$ в режиме развитой неустойчивости в модели Захарова

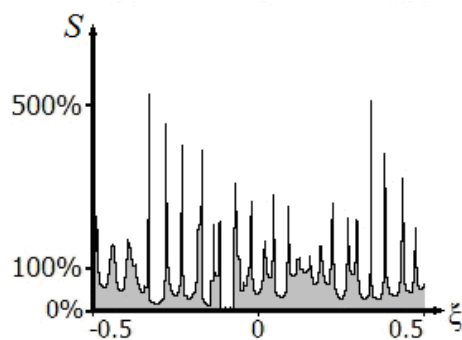


Рис. 21.3. Распределение ионов $S(\xi)$ в режиме развитой неустойчивости в модели Силина

Интенсивность НЧ спектра в случае неизотермической плазмы (модель Захарова) достаточно велика в широком интервале волновых чисел, что соответствует спектру ионного звука после разрушения каверн плотности, обнаруженному в численных экспериментах [21-4] – [21-7]. Напротив, в холодной плазме в спектре доминируют длинноволновые колебания. Стоит обратить внимание на тот факт, что энергия НЧ поля значительно меньше энергии ионов во всех рассмотренных случаях. Уменьшение энергии поля со временем происходит из-за передачи энергии ионам а также из-за разрушения каверн плотности плазмы, на что было указано в работе [21-6].

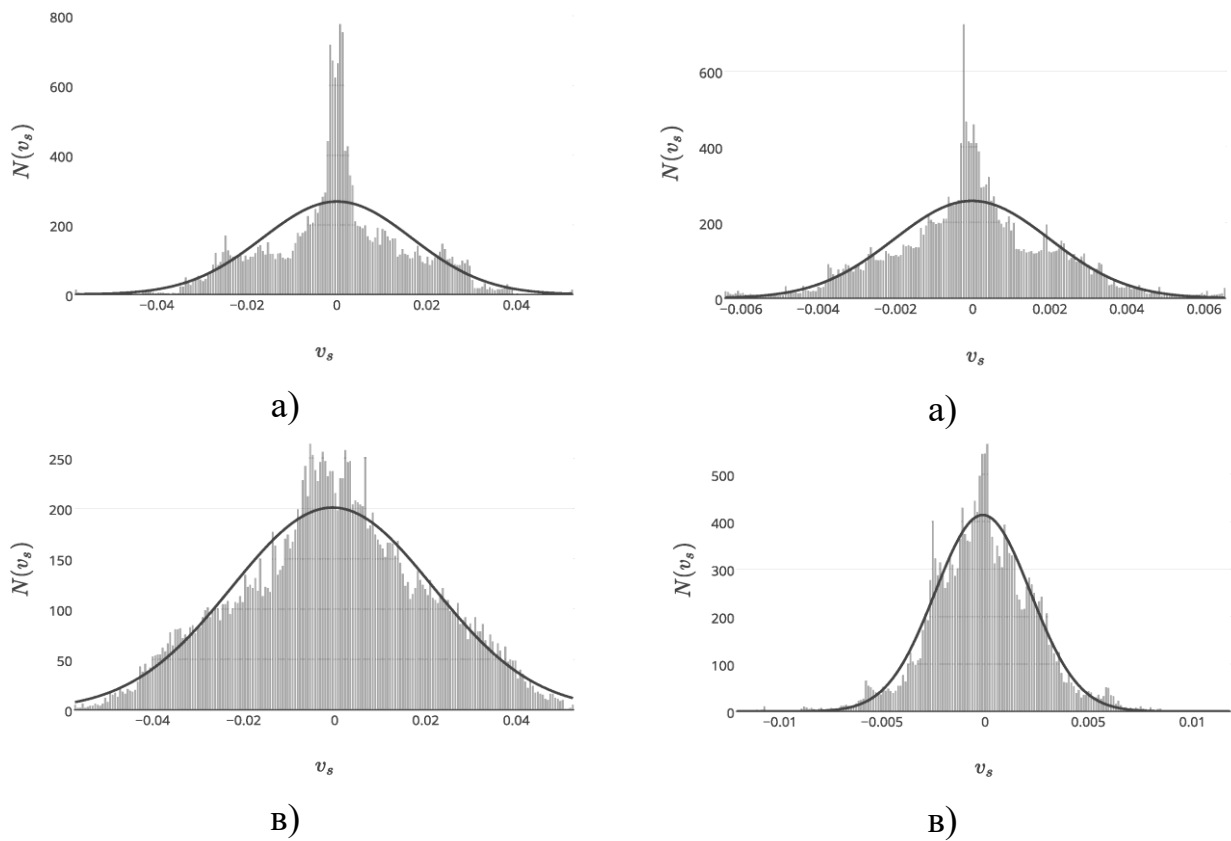


Рис. 21.4. Распределение ионов по скоростям для модели Захарова (слева) и модели Силина (справа) для легких ионов (а – $\Theta = 0.05$, в – $\Theta = 0.001$)

Для обеих моделей кинетическая энергия ионов в выбранной выше нормировке

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} d\xi_{s0} \left(\frac{d\xi_s}{d\tau} \right)^2, \quad (21.2)$$

Выбранный темп выгорания ВЧ поля в кавернах определяется величиной $\Theta = \theta / \gamma$. Представляет интерес выяснить, как зависят результаты расчетов от этого параметра. Очевидно, уменьшение этого параметра не

только замедляет выгорание ВЧ поля в кавернах, но и уширяет спектр ВЧ мод, то есть увеличивает долю мелкомасштабных его компонент, что приводит к углублению каверн плотности плазмы и к увеличению кинетической энергии выталкиваемых из каверн ионов. Отметим, что с уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов по скоростям в двух моделях по форме все ближе приближается к нормальному распределению, то есть к функции Максвелла, что изображено на Рис. 21.4. Если для достаточно сильного поглощения $\Theta = 0.05$ отличия от нормального распределения по скоростям достигают 19,9 % в модели Захарова и 13 % в модели Силина, то для сравнительно слабого поглощения $\Theta = 0.001$, отличия от нормального распределения составляют лишь 6,9 % для модели Захарова и 8,8 % для модели Силина.

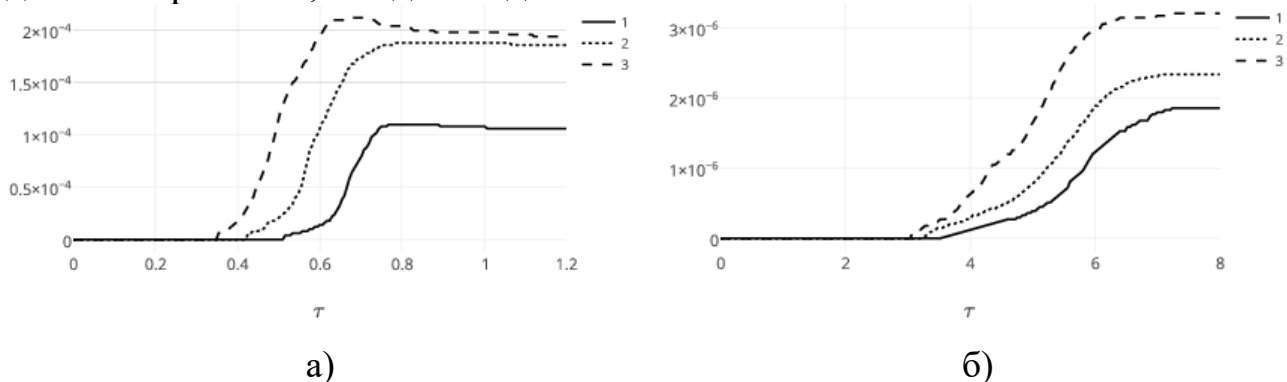


Рис. 21.5. Кинетическая энергия ионов в модели Захарова (слева) и в модели Силина (справа) для легких ионов (1 – $\Theta = 0.05$, 2 – $\Theta = 0.015$, 3 – $\Theta = 0.001$) как функции времени τ

То есть если замедление выгорания ВЧ поля в кавернах в модели Захарова заметно приближает распределения ионов по скоростям к Максвелловскому распределению, то в модели Силина этому мешают значительные «хвосты» – наличие быстрых частиц, энергия которых оказывается сравнимой с полной энергией ионов.

Как и следовало ожидать с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, растет практически в той же пропорции в неизотермической и в холодной плазме (см. Рис. 21.5). Для приведенных условий [21-1] доля энергии поля длинноволновых ленгмюровских колебаний, которая передана ионам в модели Захарова не превышает 6,3 %, а в модели Силина 5,4 %. То есть и здесь с ростом нелинейности относительная эффективность передачи энергии ионам падает.

Отметим в заключение, что масштабы возмущений ионной плотности меньшие дебаевского радиуса ионов $r_{Di} = v_{Ti} / \omega_{pi}$ не дают вклада в формирование низкочастотных электрических полей из-за эффекта экранировки. В терминах $r_{Di} k_0 / 2\pi$ – ионный дебаевский радиус можно оценить [21-1]:

$$r_{Di} k_0 / 2\pi = R_{Di} \propto < v_s > \left(\frac{\gamma}{\omega_{pe}} \right) \left(\frac{M}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (21.3)$$

В режиме развитой неустойчивости эта величина оказывается порядка $R_{Di} \leq 10^{-3}$, а число мод спектра ионной плотности не превышает величины $1/R_{Di}$, что не противоречит проведенному анализу.

Таким образом показано, что обнаруженный В. Е. Захаровым механизм нелинейного поглощения ленгмюровских колебаний при превышении плотности тепловой энергии плазмы плотности ВЧ поля, применим и для полей, плотность энергии которых значительно превышает тепловую энергию плазмы.

Однако, нелинейное затухание интенсивных ленгмюровских волн, которое приводит к нагреву плазмы традиционно поясняется затуханием Ландау в возникающих коллапсирующих кавернах плотности плазмы. Это по-видимому лишь в некоторой степени имеет место. Выше показано (см. также [21-1]), что определяющим механизмом передачи энергии поля ионам и их дальнейшей термализации является многократное рассеяние на многочисленных возникающих при неустойчивости неоднородностях поля.

Процессы, описываемые в двух моделях подобны, что не должно вызывать удивления, ибо уравнения модели Захарова, могут быть получены из уравнений модели Силина при уменьшении интенсивности поля ленгмюровской волны и при учете температуры электронов. С уменьшением затухания ВЧ мод функция распределения ионов все меньше отличается от Максвелловской, что позволяет говорить о температуре ионов, причем в гибридной модели Силина процесс неустойчивости характеризуется наличием большой доли быстрых частиц. Важно отметить, что с уменьшением поглощения ВЧ спектра энергия, в конечном итоге передаваемая ионам, возрастает.

Литература к разделу 21

21-1. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М. Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина // УФН. 2016. – Т. 186, № 7. – С. 743–762.

21-2. Гуцин И. В., Куклин В. М. Мишин А. В. Приймак, А. В. Применение технологии CUDA для моделирования физических процессов. / под ред. В. М. Куклина и А. В. Приймака – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина. – 2017.

21-3. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. – 336 с.

21-4. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Сигов Ю. С., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Нелинейная теория модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн // Физика плазмы. 1975. Т. 1. – № 1. – С. 10–20. 20–5. Сигов Ю. С., Ходырев Ю. В. Одномерный квази коллапс ленгмюровских волн при параметрическом воздействии на плазму // ДАН СССР. 1976. – Т. 229. – С. 833–836.

21-6. Sigov Yu. S., Zakharov V. E. Strong turbulence and its computer simulation. // J. de Physique. 1979. – V. 40. – #C7. – P. 63–79.

21-7. Robinson P. A., de Oliveira G. I., Effect of ambient density fluctuations on Langmuir wave collapse. Phys. Plasmas, 1999. – V. 6. – P. 3057–3065.

ГЛАВА 10. Структуры разного масштаба и топологии в тонком слое конвекции

Обсуждается процесс структурно-фазовых превращений в тонком слое конвективно неустойчивых жидкости или газа в рамках модели описания Проктора-Сивашинского, справедливой для низкого уровня теплообмена на границах слоя. Показано, что переходы сопровождаются скачком функции состояния, причем время перехода обратно пропорционально изменению этой функции и много меньше времени жизни метастабильных состояний. Обсуждается связь между спектральной и визуальной дефектностью конвективного поля при формировании устойчивого состояния. Показано, что учет вихрей другой природы в системе, в рамках обобщенной модели Проктора-Сивашинского-Письмена приводит к модуляционной неустойчивости развитой конвекции и формированию полоидальных вихрей большого масштаба, то есть к эффекту регулярного гидродинамического динамо, предсказанного С. С. Моисеевым.

РАЗДЕЛ 22.

СТРУКТУРНО-ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ТОНКОМ СЛОЕ КОНВЕКТИВНО НЕУСТОЙЧИВОЙ СРЕДЫ

В ряде приложений, таких как тонкая облачность, конвекция между близко расположенными поверхностями, большой интерес представляла модель Проктора-Сивашинского [22-1, 22-2], которая была использована для описания процесса развития конвекции в тонком слое жидкости с плохо проводящими тепло границами. Авторы работ [22-3] обнаружили стационарные решения и изучили их устойчивость.

Особенность модели в том, что она выделяет один пространственный масштаб взаимодействия, оставляя для эволюции системы возможность выбрать характер симметрии. Все пространственные возмущения одного размера, но разной ориентации взаимодействуют между собой. То есть нелинейность в системе векторная. Оказалось, что наличие минимумов потенциала взаимодействия мод, абсолютная величина векторов волновых чисел которых неизменна, и определяет выбор симметрии и соответственно характеристики пространственной структуры. Модифицируя в рамках подобной обобщенной модели Проктора-Сивашинского струк-

туру потенциала взаимодействия мод можно за счет изменения числа минимумов изменить симметрию устойчивых решений [22-3].

Перспективность модели Проктора-Сивашинского проявилась также в возможности, при учете полоидальных вихрей внутри тонкого слоя, сформировать обобщенную модель Проктора-Сивашинского-Письмена [22-4], которая как показали дальнейшие исследования была способна корректно описать процесс трансформации энергии периодической структуры тороидальных вихрей Проктора-Сивашинского в энергию крупномасштабного полоидального вихревого движения [22-5]. Это явление «гидродинамического динамо» ответственно за формирование крупных вихрей в конвективных слоях, в частности в атмосфере планет. Эти процессы являются следствием вторичной, уже модуляционной неустойчивости системы развитых конвективных ячеек, в результате которой не только появляется самоподобная структура – конвективные ячейки разного масштаба [22-7], но и формируется крупномасштабный полоидальный вихрь [22-5, 22-6]. Это явление, которое ранее исследовали только для нерегулярных моделей (см. подробный обзор [22-8]), как и предполагал С. С. Моисеев, может иметь место в результате процесса неустойчивости регулярной пространственной конвективной структуры конечной амплитуды.

Уравнение Проктора-Сивашинского. Полагая слой жидкости (или газа) тонким, можно проинтегрировать все возмущения, обусловленные конвекцией, по высоте слоя и перейти к двумерному описанию [22-1, 22-2] (см., также, [22-9]). В двумерной геометрии уравнение Проктора-Сивашинского для температурного поля конвекции принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} + \nabla^4 \phi + \nabla[(2 - \gamma_v \phi - |\nabla \phi|^2) \nabla \phi] + a\phi = 0. \quad (22.1)$$

где двумерный оператор $\nabla \phi = \vec{i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}$, причем \vec{i} , \vec{j} - единичные ортогональные к друг другу единичные вектора в плоскости (ζ, ϑ) раздела сред. Следует обратить внимание, на тот факт, что квадратичная нелокальная (то есть, наличие производных по времени или по координате) нелинейность в уравнении присутствует в виде слагаемого, пропорционального γ_v и обусловлена зависимостью вязкости от температуры по высоте слоя, а нелокальная кубическая учтена членом, пропорциональным ϕ^3 .

Будем полагать $k_0 \approx 1$, так как ограничимся случаем слабого превышения над порогом конвективной неустойчивости. Действительно, при любом отклонении волнового числа от единицы амплитуды возмущений быстро убывают. Здесь ϕ – относительная температура на

верхней границе слоя. Увеличение этой величины свидетельствует о росте теплопроводности слоя в целом.

Для описания подобной конвекции в тех же условиях часто используется упрощенное уравнение Свифта – Хоэнберга [22-10]

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = e\phi - (1 + \nabla^2)^2 \phi - 2\gamma\phi^2 + 3\phi^3, \quad (22.2)$$

где векторный характер нелинейных слагаемых заменен на скалярный. Здесь $e = (1 - a)$.

Рост амплитуд возмущений при неустойчивости $\phi \propto \exp\{\text{Im } \omega \cdot T\}$ происходит с инкрементом $\text{Im } \omega \approx e - (k^2 - 1)^2$, Для $\gamma > 0$ поток газа (это отвечает газовой конвекции) восходит к центру ячейки, при $\gamma < 0$ (что соответствует движению жидкости) – наоборот.

Уравнение Свифта – Хоэнберга, как отмечено в обзоре [22-11] описывает после формирования аморфного состояния беспорядочной конвекции систему четко выраженных шестигранных ячеек в результате мягкого (для жидкости) и жесткого (для газа) режима неустойчивости, наблюдавшуюся в частности в работах [22-12]. Причем, характер неустойчивости демонстрирует все особенности фазового перехода первого рода – формирование из аморфного состояния четкой пространственной структуры конвекции.

Ниже обсудим мягкий и жесткий режимы структурно-фазовых переходов в модели Проктора-Сивашинско. В отличие от традиционно применяемых уравнений Свифта-Хоэнберга (Swift-Hohenberg), воспользуемся более отвечающему реальным условиям 3D уравнению Проктора-Сивашинского. Данная задача очевидно трехмерная в пространстве и нестационарная, что на первый взгляд создает значительные проблемы. Однако модель Проктора-Сивашинского позволяет уменьшить размерность описания и основное внимание уделить топологическим аспектам, то есть виду, размерам и времени развития пространственных структур. В случае более реалистичной модели конвекции, описываемой уравнением Проктора-Сивашинского (22.1), можно наблюдать процессы как фазового перехода первого рода, так и процесс фазового перехода второго рода, причем удалось обнаружить функцию состояния, которая отвечает за топологию образовавшейся конвективной структуры [22-13].

Если не учитывать температурную зависимость вязкости $\gamma_v = 0$, в модели, которую принято называть моделью Проктора-Сивашинского, остается лишь нелокальная кубическая нелинейность $\nabla[|\nabla\phi|^2|\nabla\phi]$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} + \nabla^4 \phi + \nabla[(2 - |\nabla\phi|^2)|\nabla\phi] + a\phi = 0, \quad (22.3)$$

Именно это уравнение можно представить в виде $\partial\phi/\partial T = -\delta F[\phi]/\delta\phi$, где $\delta F[\phi]/\delta\phi$ – вариационная производная, а функционал

$$F[\phi] = -\int d\zeta \cdot d\vartheta \cdot \left\{ (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4}(\nabla\phi)^4 - \frac{1}{2}(\nabla^2\phi)^2 - \frac{a}{2}\phi^2 \right\}.$$

Особенность этой модели в том, что она описывает также конвекцию Марадони и конвекцию слоя с одной из свободных границ [22-2].

Наиболее интересным явлением в конвекции тонкого слоя жидкости являются процессы изменения топологии и интенсивности пространственных конвективных структур, которые как оказалось не сложно исследовать. Эти процессы, как будет показано ниже, являются аналогами фазовых превращений второго рода, когда в системе изменяется топология и отчасти интенсивность пространственной структуры конвекции.

Ограничимся случаем отсутствия зависимости вязкости от температуры ($\gamma_v = 0$). Уравнение, которое определяет динамику температурного поля этого процесса в горизонтальной плоскости (x, y) имеет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial T} = \varepsilon^2\Phi - (1 - \nabla^2)^2\Phi + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\Phi|\Phi|^2) + \varepsilon^2 f, \quad (22.4)$$

где Φ – нормированная температура, f – случайная функция, описывающая внешний шум, а величину $\varepsilon^2 = e$ определяющую превышение порога развития конвекции, полагаем, как и прежде достаточно малой ($0 < \varepsilon < 1$). Решение представим в форме ряда $\Phi = \varepsilon \sum_j A_j \exp(i\vec{k}_j \vec{r})$ с $|\vec{k}_j| = 1$.

При заменах $T \cdot \varepsilon^2 = t$, для медленных амплитуд A_j в отсутствии шума получим удобное представление модели Проктора-Сивашинского для описания конвекции:

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = A_j - \sum_{i=1}^N V_{ij} |A_i|^2 A_j + f \quad (22.5)$$

где коэффициенты взаимодействия определены соотношениями

$$V_{ij} = 1, \\ V_{ij} = (2/3) \left(1 - 2(\vec{k}_i \vec{k}_j) \right)^2 = (2/3) (1 + 2 \cos^2 \vartheta_{ij}), \quad (22.6)$$

а ϑ_{ij} – угол между векторами \vec{k}_i и \vec{k}_j . Выражения (21.5) – (21.6) нужно дополнить начальными значениями амплитуд спектра A_j . То есть $A_j|_{t=0} = A_{j0}$.

В отличие от уравнения Свифта-Хоэнберга (22.2), где кубическая нелинейность из качественных соображений представлена в изотропной форме, здесь нелинейность векторная, что и является причиной последовательных изменений в топологии конвективных структур.

Ширина интервала неустойчивости в k -пространстве представляет собой кольцо – средний радиус которого равен единице, а ширина порядка величины относительной надпороговости ε , т. е. много меньше единицы. Во время развития неустойчивости из-за роста нелинейных членов, эффективный инкремент мод, лежащих вне весьма малой окрестности вблизи единичной окружности будет убывать и может изменить знак, что приведет к сужению спектра к единичной окружности в k – пространстве. Так как целью дальнейших исследований будет изучение устойчивости пространственных структур с характерным размером порядка $2\pi/k \propto 2\pi$ и важной характеристикой для визуализации результатов моделирования будет четкость данных структур, то ниже ограничимся рассмотрением несколько идеализированной модели явления, полагая, что спектр колебаний уже располагается на единичной окружности в k – пространстве.

Из результатов предварительных исследований [22-3] стало ясно, что в системе возможно существование по крайней мере двух стационарных решений в виде валиковой структуры (валы) (см. рис. 22.1 а), и в виде поля квадратных ячеек (см. рис. 22.1 б).

Модель Проктора-Сивашинского в отсутствии зависимости вязкости от температуры ($\gamma = 0$) была детально исследована в работе [22-9].

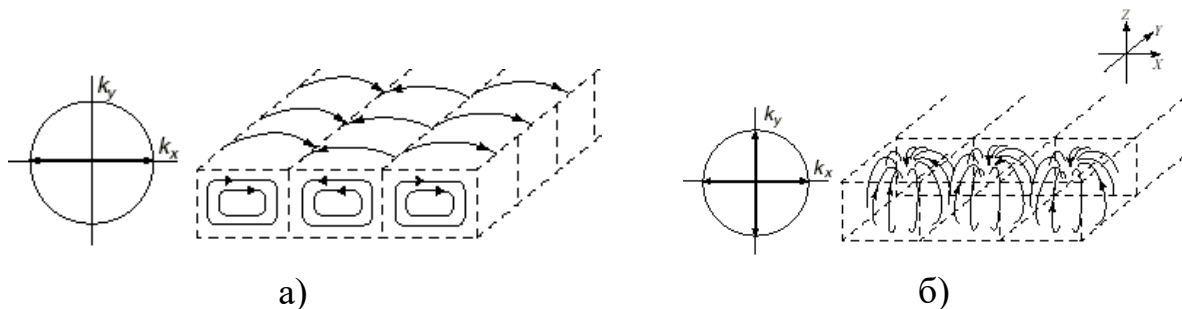


Рис. 22.1. Конвективные структуры:
валы (а) и квадратные ячейки (б)

Было показано, что после структурно-фазового перехода первого рода из аморфного беспорядочной конвекции состояния формируется квазистабильная система конвективных валов, которые в результате своей модуляции в рамках структурно-фазового перехода второго рода образуют устойчивое поле квадратных конвективных ячеек. Структурно-фазовый переход первого рода, отмеченный ранее в работе [22-11], отвечает переходу от аморфного состояния конвекции к состоянию, которое имеет вид четко выраженной пространственной структуры. Надо подчеркнуть, что

такая пространственная четкость структуры наблюдается только в условиях близости к порогу неустойчивости. Если в результате неустойчивости топология структуры изменяется, можно говорить о структурно-фазовом переходе второго рода.

Аморфное состояние. Механизм конкуренции мод. Из уравнений (22.5) – (22.6) при начальных условиях вида $A_j|_{t=0} = A_{j_0}$ видно, что в начальный момент развитие процесса будет определяться взрывным экспоненциальным ростом амплитуд спектра с одинаковым линейным инкрементом, равным единице в данном масштабе времени. Ограничение темпов роста происходит при необходимости учета второго слагаемого (22.5), что отвечает нелинейному инкременту, равному

$$(\text{Im } \omega)_{NL} = 1 - \left\langle \sum_{i=1}^N V_{ij} |A_i|^2 \right\rangle \propto 1 - \langle V \rangle \sum_{i=1}^N A_i^2, \quad (22.7)$$

причем среднее значение потенциала взаимодействия

$$\langle V \rangle \propto \frac{4}{3} \quad (22.8)$$

Откуда в начале процесса активной стадии взаимодействия мод, когда амплитуды мод спектра примерно одинаковы, получим для плотности возмущений такого «аморфного состояния»

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i^2 \approx I_{amor} = \frac{3}{4}. \quad (22.9)$$

Покажем, что аморфное состояние неустойчиво. Рассмотрим нелинейный инкремент нарастания (или декремент затухания, что зависит от знака выражения) j -той моды (очевидно $\text{Im } \omega_L = 1$)

$$(\text{Im } \omega)_{jNL} = 1 - \sum_{i=1}^N V_{ij} |A_i|^2. \quad (22.10)$$

В конце линейной стадии быстрого роста амплитуд возмущений и достижении так называемого «аморфного» состояния, когда нелинейные инкременты становятся значительно меньше единицы, процесс резко замедляется. В результате случайного выброса одной из мод (то есть если одна из мод оказывается больше других), то для нее второе слагаемое правой части становится меньше, чем у соседних мод. То есть для этой моды большей амплитуды величина (22-10) остается положительно определенной и наибольшей, а для соседних мод нелинейный инкремент

оказывается или меньше, или даже отрицательным, что отвечает их затуханию.

Окрестность растущих мод быстро уменьшается и в результате в спектре остается лишь две моды, сдвинутые на угол π , а полная энергия такой валиковой структуры равна $I = 1$.

Это состояние неустойчиво, что приводит к росту бокового спектра $\vartheta = \pi/2$ относительно моды-лидера, спектральная ширина которого обратно пропорциональна размеру областей, где произошла модуляция валов. Боковой спектр сужается и амплитуда его растет, что расширяет области с модуляцией валов, которые быстро сливаются.

Эти области представляют собой домены²⁰, ориентация которых различна (см. рис. 22.4.в).

А модуляция валов усиливается, пока не сформируется поле квадратных конвективных ячеек- тороидальных вихрей.

Этот процесс формирования новой структуры представляет собой фазовый переход второго рода. Энергия такого состояния оказывается несколько больше и равна $I = 1,2$. Каждое из этих двух состояний характеризуется различными значениями энергии I и имеет различную топологию.

Пусть $\vartheta_s(t = 0)$ для каждой моды заданы равномерно от нуля до 2π и разбить следует интервал на N равных частей (количество которых равно числу базовых мод). Тогда, если потребовать нулевых значений на границах, пространственная зависимость каждой n -ой моды будет представлять собой

$$A_{n,m} \text{Sin}(2\pi nx) \text{Sin}(2\pi my), \quad (22.11)$$

где n, m (их можно представить как $n = N \cdot \text{Cos } \vartheta_s, m = N \cdot \text{Sin } \vartheta_s$) – целые числа, причем $N^2 = n^2 + m^2$. При расчетах, вообще говоря, достаточно суммировать по n , так как m определяется из соотношения $m^2 = N^2 - n^2$. Очевидно

²⁰ Именно границы доменов образуют начальные дефекты формирующейся конвективной структуры из тороидальных вихрей - квадратных ячеек. Затем число дефектных ячеек быстро уменьшается (см. Приложение XXVI).

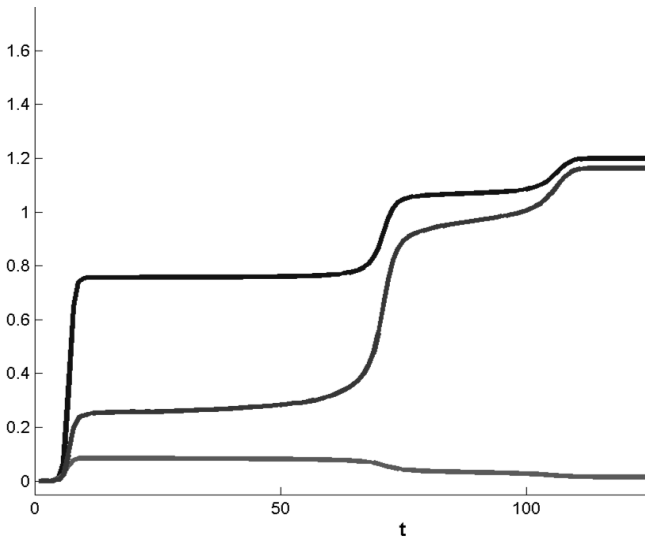


Рис. 22.2. Поведение со временем интегральных характеристик процесса.

Верхняя кривая $\frac{1}{N} \sum_i A_i^2$, средняя кривая

$$\frac{1}{N} \sqrt{\sum_i (A_i - \bar{A})^2} = \sigma, \text{ нижняя кривая -}$$

$$\text{средняя амплитуда } \frac{1}{N} \sum_i A_i = A_{cp}$$

(22.5) нулю, при этом получим значение близкое к 0,75. В случае большого числа мод при высокой точности расчетов система задерживается в своем развитии, оставаясь в динамическом равновесии. Для дальнейшего развития – «кристаллизации», одна из мод должна получить порцию энергии, превышающую некоторый порог. То есть, в этих условиях необходимо наличие определенного уровня шума – флуктуаций. Это достигается при конечном значении шума $f \neq 0$, или при уменьшении точности расчетов, что, как отмечается в [22-10] эквивалентно. Подобные случаи, когда шум способен спровоцировать или ускорить процесс неустойчивости собраны в книге [22-11]. Исследования процесса обнаружили следующую динамику изменения интегральных характеристик процесса со временем (см. рис. 22.2).

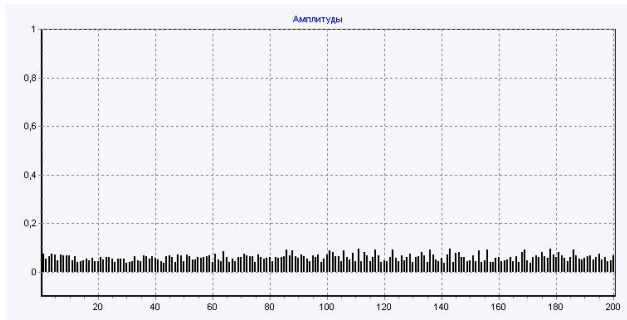
Именно после первого всплеска производной $\partial I / \partial t$ формируется аморфная структура – система конвективных валов, причем вплоть до второго всплеска величина $I \approx 0.75$ мало изменяется. Следующий всплеск $\partial I / \partial t$ сигнализирует о появлении нестабильной структуры (валы и модули-

$$n \leq N, \quad m = \sqrt{N^2 - n^2} \geq 0. \quad (22.12)$$

То есть в этом случае (22.11) можно записать как

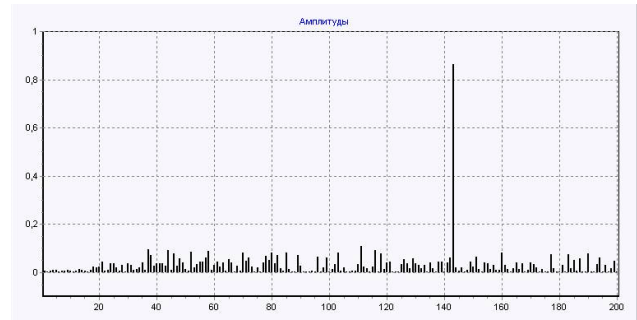
$$A_{n, \sqrt{N^2 - n^2}} \text{Sin}(2\pi nx) \text{Sin}(2\pi y \sqrt{N^2 - n^2}), \quad (22.13)$$

Структурно-фазовые переходы. Развитие возмущений в системе, как показывает численный анализ уравнения (22.5), происходит следующим образом. Из начальных флуктуаций быстро возбуждается широкий спектр по θ . Значение квадратичной формы этого спектра $I = \frac{1}{N} \sum_j A_j^2$ можно оценить, приравняв правую часть



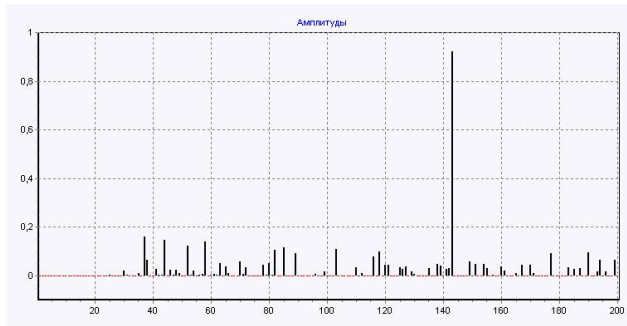
$t=10.57 \quad I=0.75 \quad \sigma = 0.47$

а)



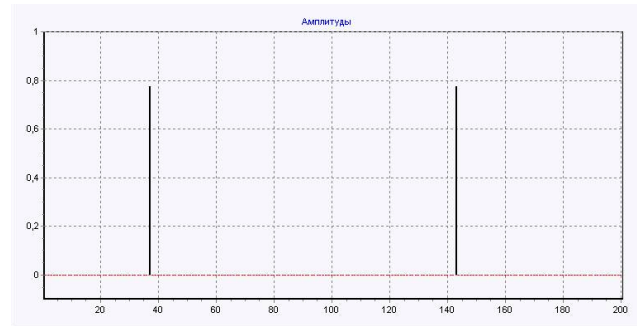
$t=126 \quad I=1.006 \quad \sigma = 0.248$

б)



$t=146.58 \quad I= 1.07 \quad \sigma = 0.146$

в)



$t=200.15 \quad I=1.199 \quad \sigma = 0.07$

г)

Рис. 22.3. Этапы развития неустойчивости: спектры аморфного состояния (а), короткоживущего относительно нестабильного состояния (б) – конвективные валы, промежуточного короткоживущего нестабильного состояния (в) – формирование доменов, границы которых определяют начальное число дефектов в структуре поля ячеек и стабильного состояния (г) - поля конвективных ячеек) [22-9].

рованные в продольном направлении валы) с новым значением $1 < I \leq 1.07$, после этого всплеска производной $\partial I / \partial t$ валы испытывают продольную модуляцию, период которой уменьшается, и следующий третий всплеск производной $\partial I / \partial t$ приводит к появлению стабильной структуры конвективных ячеек с $I = 1.2$. Подобное поведение системы убеждает в существовании структурно-фазовых переходов в данной системе.

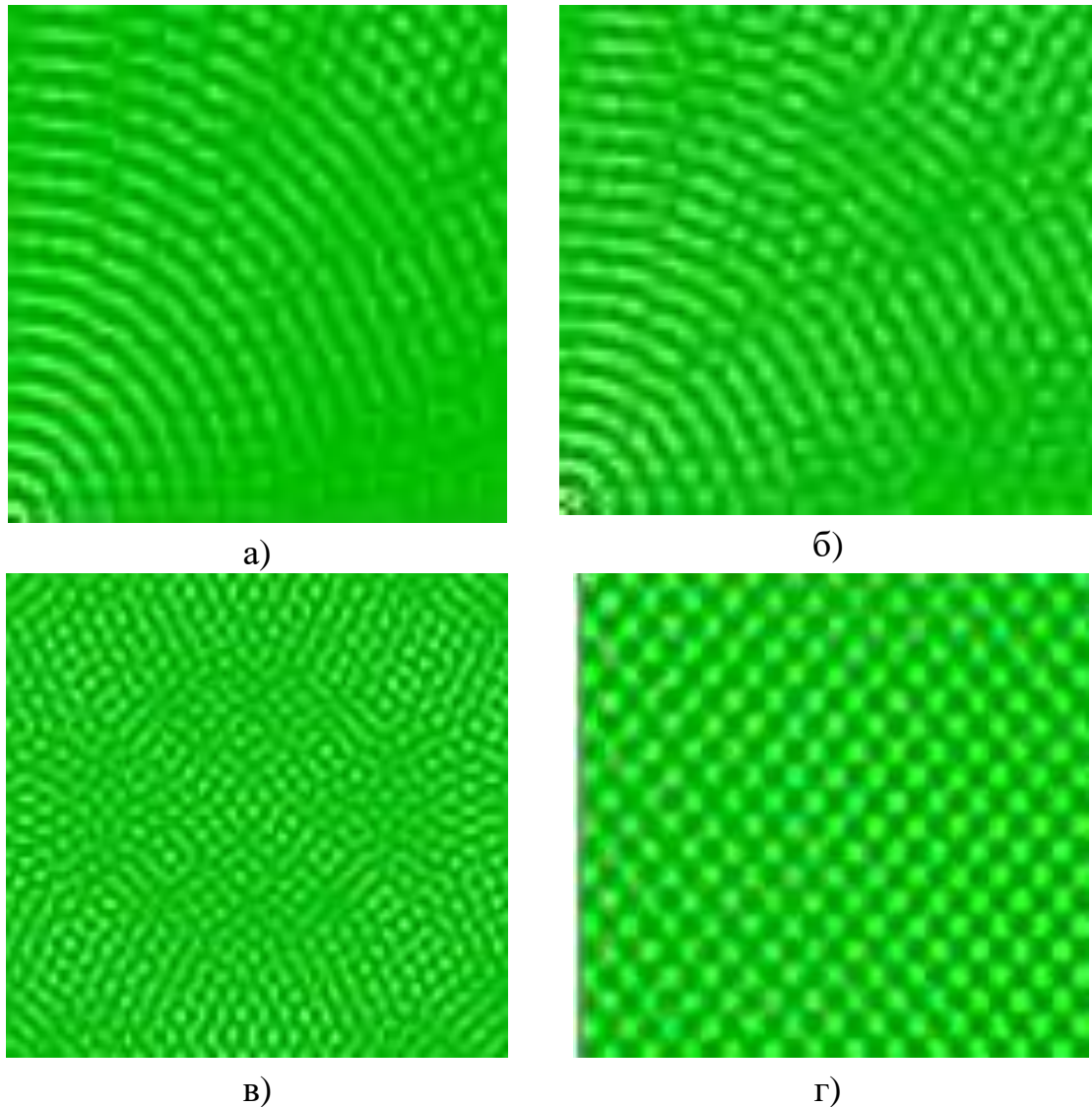


Рис. 22.4. Вид фрагментов пространственной структуры распределения температурного поля на поверхности слоя а) после структурно-фазового перехода первого рода с образованием конвективных валов и б) при поперечной модуляции валов, в) при образовании доменов – метастабильной пространственной структуры, после разрушения системы валов, г) при формировании устойчивой конвективной структуры – квадратных конвективных ячеек

Функцией состояния, как легко увидеть, является величина I . Выше было показано, что структуры, которые возникают при переходах, описываемых всплеском производной этой функции имеют отличимые топологии и характеризуются ее фиксированными значениями. Для каждой структуры имеется определенное равновесное значение функции состояния. Тем не менее несмотря на продолжительное время существования каждой квазистационарной структуры, существует механизм ее разрушения и формирования структуры с иной топологией. Вообще говоря, времена развития релаксационных процессов при движении системы к более равновесному состоянию обычно определяются разностью значений функции состояния

после перехода и до него. Чем больше эта разность, тем быстрее происходит процесс перехода из одного состояния в другое. Важно отметить и другое: последовательность смены состояний определяется временами развития неустойчивостей (выполняющих роль релаксационных процессов) обеспечивающих переход ко все более приближающемуся к равновесному состоянию системы. Причем ранее проявляют себя более быстрые релаксационные процессы, обусловленные большими перепадами равновесных значений функции состояния. Убедимся, что и в этом случае все явления происходят в подобной последовательности и в рамках подобного сценария [21.16].

Именно численный анализ модели позволил подтвердить наличие структурно-фазовых переходов.

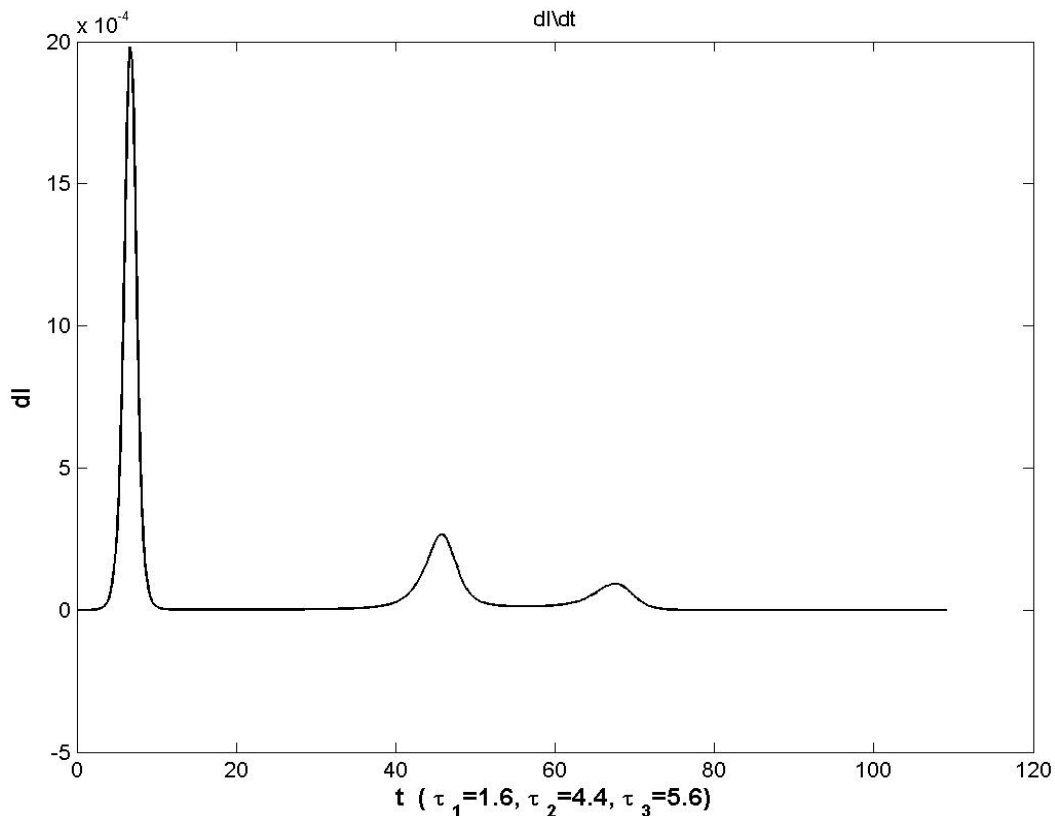


Рис. 22.5. Поведение производной функции состояния. Характерные времена переходных процессов $\tau_1 = 1.6$ – время возникновения «аморфного» состояния
 $\tau_2 = 4.4$ – время формирования выраженных валлообразных структур
 $\tau_3 \approx 5.6$ – время формирования системы ячеек для одной из реализаций процесса установления конвективного движения

Можно убедиться в том, что времена формирования состояний τ_n обратно пропорциональны разности между значениями $I = \sum_i A_i^2$ после структурно-фазового перехода $I_n^{(+)} = (\sum_i A_i^2)_n^{(+)}$ и до этого перехода $I_n^{(-)} = (\sum_i A_i^2)_n^{(-)}$. То есть,

$$\tau_n \propto \left\{ \left(\sum A_i^2 \right)_n^{(+)} - \left(\sum A_i^2 \right)_n^{(-)} \right\}^{-1} = \Delta I_n^{-1} \quad (22.14)$$

Легко видеть, что

$$\tau_3 / \tau_2 \approx \Delta I_2 / \Delta I_3, \quad (22.15)$$

Таким образом, на основе численного исследования модели Проктора-Сивашинского было доказано, что функцией состояния, обладающего определенной топологией, является сумма квадратов амплитуд мод I . Каждое состояние, имеющее определенную топологию, характеризуется определенным равновесным значением функции состояния. Квазиустойчивые состояния разрушаются из-за неустойчивостей, время развития которых можно оценить по величине импульса во времени производной функции состояния. Показано, что характерные времена неустойчивостей, разрушающих прежнее и формирующих новое состояние обратно пропорциональны разности между значениями функции состояния после и до структурно-фазового перехода. Также показано, что более быстрые релаксационные процессы, то есть структурно-фазовые переходы предшествуют более медленным, что видно из рис. 22.2 и рис. 22.5.

Отметим, что в природе тонкая облачность также часто формирует испытывающую продольную модуляцию систему валов, что отмечено на рис. 22.6.



Рис. 22.6. Фрагмент тонкой облачности в форме конвективных валов.
Окружная дорога Харькова 12.09.2012

Величина I при этом достигает значений близких к единице ($I \rightarrow 1$). Однако это состояние не является устойчивым: конвективные валы испытывают модуляцию вдоль оси вращения газа (или жидкости), характерный размер которой сокращается. В этом переходном состоянии система находится достаточно большое время (которое незначительно растет в определенных пределах при увеличении числа мод), причем при этом сохраняется значение $I \approx 1.07$.

Спустя достаточно большое время, в десятки раз превосходящее обратный инкремент начальной линейной неустойчивости, из вновь образованного "бокового" спектра "выживает" лишь одна мода, амплитуда которой сравнивается с амплитудой первоначальной лидирующей моды. В конечном итоге формируются устойчивая конвективная струк-

тура – квадратные ячейки, при которой квадратичная форма системы достигает значения $I = 1.2$. Так на рис. 22.6 показана пространственная структура конвекции тонкого облачного слоя.

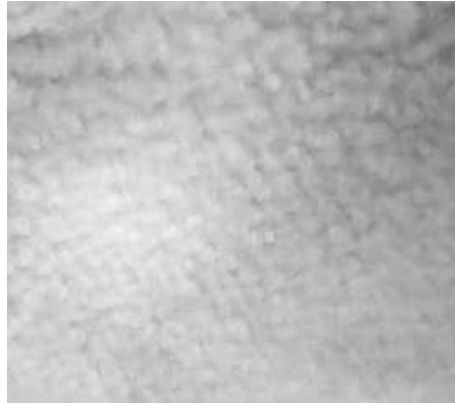


Рис. 22.7. Фрагмент пространственной структуры конвекции тонкого облачного слоя. Белое озеро (около Змиева) 6.10.2012

Таким образом, особенностью модели Проктора-Сивашинского для описания конвекции является наличие трех состояний. Времена структурных переходов между метастабильными состояниями много меньше времени их существования. Характерный размер конвективных образований в режиме развитой неустойчивости и принятых единицах измерения порядка $2\pi/k \propto 2\pi$ а длина волновых векторов порядка единицы. Потенциал взаимодействия пространственных мод $V_{ij} = (2/3)(1 + 2\cos^2 \vartheta_{ij})$ имеет глубокий минимум для углов $\vartheta_{ij} = \vartheta_i - \vartheta_j$ между векторами \vec{k}_i и \vec{k}_j двух пространственных мод $\vartheta_{ij} = \pm\pi/2$. Именно эти минимумы, как показано еще в работах [22.17], порождают неустойчивость структуры валов. Ибо существование минимума V_{ij} для мод с относительно небольшими амплитудами позволяет им продолжать свой рост, подавляя при этом возникшие прежде возмущения. При приближении к стабильному состоянию пространственная структура избавляется от множества дефектов (возникающих большей частью на границах однородных областей – доменов, см рис. 22.4 с.), причем наблюдается корреляция между относительной долей наблюдаемых визуально (геометрически) дефектов структуры и величиной дефектности, определяемой как отношение квадратов амплитуд мод спектра, не отвечающего системе квадратных ячеек к полной сумме квадратов мод (см. Приложение XXVI).

Именно в случае более реалистичной модели конвекции, описываемой уравнением Проктора-Сивашинского (22.1), удастся пронаблюдать процесс как фазового перехода первого рода, так и процесс фазового перехода второго рода и обнаружить вид функции состояния, которая отвечает за топологию образовавшихся конвективных структур.

Заметим, что подобное описание фазовых переходов не использовало феноменологические подходы и различные спекулятивные соображения, что позволяет на примере этой модели более пристально рассмотреть характер переходных процессов, вызывающий наибольший интерес исследователей.

Физическая природа фазового перехода второго рода.

Возникновение продольной модуляции конвективных валов приводит к появлению конвективного движения в плоскости, параллельной направлению валов, которое добавляется к сильной конвекции поперек валов. Уменьшение пространственного периода модуляции валов приводит к усилению конвекции в целом и выравниванию ее в двух перпендикулярных плоскостях, увеличивает температуру на верхней поверхности слоя и, соответственно, значение энергии, то есть функции состояния I , что свидетельствует об изменении структуры и о фазовом переходе второго рода.

Если считать, что области с доминирующей структурой-домены возникают и распространяются в конвективной зоне, то придется признать, что скорость корреляций пространственных возмущений в этом случае является чрезвычайно большой. Этот парадокс поясняется тем, что процесс фазового перехода второго рода описывается, по крайней мере здесь, уравнениями (22.5) – (22.6)²¹, решениями которых является набор собственных функций (22.4) с различными волновыми векторами $\Phi = \varepsilon \sum_j A_j \exp(i\vec{k}_j \vec{r})$. Процесс фазовых превращений охватывает не отдельные локальные области, а сразу всю зону конвекции, где выполнены условия для фазового перехода. При этом формирование локальных областей-доменов с однородной пространственной структурой в различных местах конвективного слоя является результатом интерференции этих собственных функций.

Литература к разделу 22

22-1. Chapman, J. and Proctor, M.R.E., Nonlinear Rayleigh-Benard convection between poorly conducting boundaries // *J. Fluid Mech.* 1980. – No 101. – P. 759–765.

22-2. Gertsberg, V. and Sivashinsky G. E., Large cells in nonlinear Rayleigh-Benard convection // *Prog. Theor. Phys.*, 1981. – No 66. – P. 1219–1229.

²¹ Возможно столь высокая скорость пространственных корреляций между областями-доменами новой фазы для явлений фазовых переходов может ориентировать исследователей на поиск подобного описания. Визуально наблюдаемая практически бесконечная скорость этих корреляций обусловлена изменениями фазы и не связана с переносом энергии-импульса.

22-3. Маломед Б. А., Непомнящий А.А., Трибельский М.П. Двумерные квазипериодические структуры в неравновесных системах. ЖЭТФ. 1989. – Т. 96. – С. 684–699.

22-4. Pismen, L., Inertial effects in long-scale thermal convection, Phys. Lett. A. 1986. – V. 116. – P. 241–243.

22-5. Киричок А. В., Куклин В. М., Панченко И. П., Моисеев С. С., Письмен Л. М. Динамика образования крупномасштабных вихрей в режиме конвективной неустойчивости // Inter. Conf. “Physics in Ukraine”, Kiev, 22–27 June 1993. Proc. Contr. Pap. ITP, 1993. – p. 76–80.

22-6. Киричок А. В., Куклин В. М., Панченко И. П. О возможности динамо-механизма в неравновесной конвективной среде. Доклады НАНУ/ 1997. – № 4. – С. 87–92.

22-7. Kirichok A. V. and Kuklin V. M. Allocated Imperfections of Developed Convective Structures. Physics and Chemistry of the Earth Part A 1999. – № 6. – P. 533–538.

22-8. Вихревое динамо в спиральной турбулентности. // Авт.: Моисеев С. С., Оганесян К. Р., Руткевич П. Б., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В. в кн.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Под ред. В. Г. Барьяхтара, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко. Сб. науч. тр. Киев, Наукова Думка, 1990. – 472 с.

22-9. I. V. Gushchin, A. V. Kirichok, V. M. Kuklin. Pattern formation in convective media/ «Journal of Kharkiv National University», physical series «Nuclei, Particles, Fields» 2013. issue 1/57. – V. 1040. – С. 4–27.

22-10. Swift J. B. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability/ J. B. Swift and P. C. Hohenberg // Phys. Rev. A 1977. – V.15, – P. 319.

22-11. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л., Цимринг Л.Ш. Конечномерный пространственный беспорядок. / М. И. Рабинович А. Л. Фабрикант Л. Ш. Цимринг / УФН. – Т. 162. – № 8. – С. 1–42.

22-12. Bodenschatz E. Experiments on three systems with non-variational aspects/ E. Bodenschatz E., J. R. de Bruyn, G. Ahlers, D. Cennell/ Preprint. – Santa Barbara, 1991.

22-13. I. V. Gushchin, A. V. Kirichok, V. M. Kuklin. Structural-phase transitions and state function in unstable convective medium/ Problems of Atomic Science and Technology, 2015. – N 4 – series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration” – P. 252–254.

22-14. Белкин Е. В., Гуцин И. В. Математическая модель конвекции слоя жидкости с градиентом температуры // Харьков, ХНУ, КМНТ, 2010. – Т. 1. – С. 39–40.

22-15. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Пер с англ. – М.: Мир, 1987. – 400 с.

22-16. Gushchin I. V., Kirichok A. V., Kuklin V. M. State function in unstable convective medium. // East Eur. J. Phys. 2015. – V. 2. – no.1. – P. 32–35.

22-17. Структурные переходы в модели Проктора-Сивашинского/ Белкин Е. В., Гущин И. В., Киричок А. В., Куклин В. М. // ВАНТ, Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения, 2010.– № 4 (68). – С. 296–298.

РАЗДЕЛ 23. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ КОНВЕКТИВНЫХ ЯЧЕЕК В ТОНКОМ СЛОЕ. ЭФФЕКТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДИНАМО

Модель Сивашинского–Проктора–Письмена. Впервые о возможности возникновения модуляционной неустойчивости системы конвективных ячеек в чрезвычайно продуктивной модели Проктора-Сивашинского-Письмена [23-1] было заявлено в докладе [23-2]. Эта модуляция системы развитых конвективных ячеек в тонком слое жидкости между плохо проводящими тепло горизонтальными поверхностями (формирование которой обсуждалось выше) обусловлена генерацией вихрей иной природы, нежели те, которые формируют конвективную структуру. В результате развития модуляционной неустойчивости в системе развитой регулярной структуры конвективных ячеек возникают также плоские вихри большого размера. Другими словами, это эффект гидродинамического (вихревого) динамо [23-2–23-4], которое в отличие от рассмотренных хорошо известных физических моделей в среде со спиральной гидродинамической турбулентностью (подробнее см. обзор [23-5]) является регулярным процессом и не обязательно обусловлен наличием нескомпенсированной спиральности в системе.

Модель Проктора – Сивашинского, в результате модификации автором работы [23-1], описывает конвекцию, подобную рассмотренной выше, однако с учетом полоидального вихревого движения $\vec{U}_{\text{tor}} = \text{rot}(\vec{e}_z \Psi)$,

$$\dot{\Phi} = \varepsilon^2 \Phi - (1 - \nabla^2)^2 \Phi + \frac{1}{3} \nabla \left(\nabla \Phi |\Phi|^2 \right) + \gamma_{\text{Pr}} \nabla \Phi \times \nabla \Psi, \quad (23.1)$$

$$\nabla^2 \Psi = \nabla \nabla^2 \Phi \times \nabla \Phi, \quad (23.2)$$

где γ_{Pr} – величина обратная числу Прандтля $\text{Pr} = \nu/\kappa$, характеризующему неравновесное состояние жидкости, ν – кинематическая вязкость, здесь κ – удельная температуропроводность, при этом $\varepsilon \ll 1$.

Модуляционная неустойчивости системы конвективных ячеек. Порог вторичной неустойчивости определяется обращением в нуль $\varepsilon_2 = 27b^2\Gamma^2/20 - 1$, где $\Gamma = \varepsilon \cdot \gamma_{\text{Pr}}$, $b = \sqrt{5/3}A$ – перенормированная амплитуда возмущений в первичной неустойчивости, рассмотренной выше. При превышении порога ($\varepsilon_2 > 0$) возникают условия для существования вторичной неустойчивости, причем максимумы инкремента

$$\text{Im } \omega_{\text{max}} = 1 - 6b^2/5 + 27\Gamma^2 b^4/200 + 2/27\Gamma^2 \quad (23.3)$$

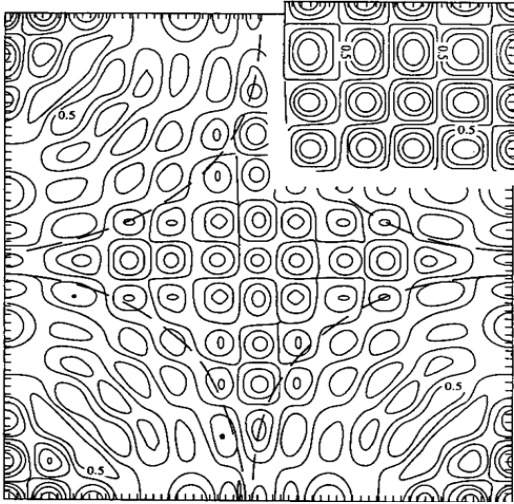


Рис. 23.1. Регулярный дефект в конвективной структуре. В правом верхнем углу фрагмент первичной невозмущенной структуры. Пунктиром показаны характерные линии тока крупномасштабных вихрей [22-3, 22-4]

находятся вблизи основных мод первичной структуры ($k_x = \pm 1, k_y = 0$ и $k_x = 0, k_y = \pm 1$) на взаимно перпендикулярных направлениях на расстояниях от этих точек, равных $\Delta = (\sqrt{2}/b\Gamma) |\varepsilon_2| \ll 1$. При приближении в пространстве волновых чисел к модам первичной структуры инкремент модуляционной неустойчивости стремится к нулю. Появление в результате модуляционной неустойчивости крупномасштабных вихревых возмущений приводит к возникновению сдвиговых течений и деформирует конвективную структуру на больших масштабах.

Уравнение, описывающее эволюцию спектров неустойчивости имеет следующий вид:

$$\dot{b}_j = b_j - \sum_j^N V_{ij} |b_i|^2 b_j + \sum_{i,n,m}^N W_{jinm} b_i b_n b_m, \quad (23.4)$$

где коэффициенты взаимодействия определены соотношениями $V_{ij} = 1 - \mathcal{G}_{ij}$, \mathcal{G} – угол между векторами \vec{k}_i и \vec{k}_j [22-4],

$$V_{ij} = (2/3) \left(1 - 2(\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j)^2 \right) = (2/3) (1 + 2 \cos^2 \mathcal{G}),$$

$$W_{jinm} = (\vec{k}_i \times \vec{k}_n) (\vec{k}_m \times \vec{k}_j) \left[\frac{k_i^2 - k_n^2}{(\vec{k}_i + \vec{k}_n)^2} + \frac{k_i^2 - k_m^2}{(\vec{k}_i + \vec{k}_m)^2} \right] \delta_{\vec{k}_j, \vec{k}_i + \vec{k}_n + \vec{k}_m}.$$

Можно показать, что в условиях симметрии возникающих возмущений, уравнения для основных мод конвективных ячеек (каждая из которых имеет амплитуду равную b) и для наиболее быстро растущих мод спектра b_d (в режиме, когда в результате рассмотренных выше механизмов конкуренции остальной спектр подавлен) модуляционной неустойчивости имеют вид

$$\dot{b} = b(1 - b^2 - 4b_d^2), \quad (23.5)$$

$$\dot{b}_d = b_d(1 - b^2 - b_d^2) + \frac{2}{27\Gamma^2} b^2 b_d \theta(\varepsilon_2), \quad (23.6)$$

где появление порога модуляционной неустойчивости качественно описано с помощью тета-функции $\theta(\varepsilon_2)$. При превышении порога модуляционной неустойчивости, в результате её развития амплитуды мод первичной структуры уменьшаются от величин, сравнимых с единицей до значений $b_\infty^2 = 20/27\Gamma^2$, в то время как амплитуды основных растущих мод спектров достигают значений $b_{d\infty} = 1/2(1 - b_\infty^2)^{1/2}$. Интенсивность (то есть, величина $I = \sum |b_{k_i}|^2$) первичной структуры без возникновения модуляционной неустойчивости (при $\Gamma^2 < 20/27$ первичная структура устойчива) и интенсивность дефектной структуры, которая является результатом развития данной неустойчивости оказываются равны. Дефектность развитой структуры оказывается равной ε_2 .

Эффект регулярного гидродинамического динамо. Взаимодействие между модами, определяющими модуляцию (моды распределенного дефекта) и модами основной структуры обусловлено существованием крупномасштабных вихрей, линии тока которых в конфигурационном пространстве могут быть представлены в виде

$$\Psi \approx \varepsilon \varepsilon_2 b^2 [\cos(l_0 \xi) - \cos(l_0 \eta)], \quad (23.7)$$

где, и отношение характерного линейного размера крупномасштабных вихрей L_V и линейного размера конвективной ячейки L_C равно $L_V/L_C \approx (b\varepsilon\varepsilon_2)^{-1}$. Возникновение таких крупномасштабных вихрей и представляет собой одну из возможных реализаций эффекта гидродинамического динамо [23-2, 23-3].

Таким образом при модуляционной неустойчивости системы развитых конвективных ячеек не только появляется самоподобная структура – конвективные ячейки разного масштаба [23-6], но и формируется крупномасштабный полоидальный вихрь [23-2 – 23.4].

Литература к разделу 23

23-1. Pismen, L., Inertial effects in long-scale thermal convection, Phys. Lett. A. 1986. – V. 116. – P. 241–243.

23-2. Киричок А. В., Куклин В. М., Панченко И. П., Моисеев С. С., Письмен Л. М. Динамика образования крупномасштабных вихрей в режиме конвективной неустойчивости. // Inter. Conf. “Physics in Ukraine”, Kiev, 22–27 June 1993. Proc. Contr. Pap. ITP, 1993. – P. 76–80.

23-3. Киричок А. В., Куклин В. М., Панченко И. П. О возможности динамо-механизма в неравновесной конвективной среде. Доклады НАНУ. 1997. – № 4. – С. 87–92.

23-4. Kirichok A. V. and Kuklin V. M. Allocated Imperfections of Developed Convective Structures. Physics and Chemistry of the Earth Part A. 1999. – № 6. – P. 533–538.

23-5. Вихревое динамо в спиральной турбулентности // Авт.: Моисеев С. С., Оганесян К. Р., Руткевич П. Б., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В. в кн.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Под ред. В. Г. Барьяхтара, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко. Сб. науч. тр. Киев, Наукова Думка, 1990. – 472 с.

23-6. Куклин В. М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах. Украинский физический журнал, Обзоры, 2004. – Т. 1. – № 1. – С. 49–81.

ЧАСТЬ II

Приложения

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ТРАДИЦИОННЫЙ ПОРОГ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим систему уравнений (1.1) – (1.3). Определим понятие инверсии $\mu = (n_2 - n_1)$ и найдем интегралы системы

$$N_k + n_2 = Const \quad (1.1)$$

$$n_1 + n_2 = Const \quad (1.2)$$

откуда получим

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = u_{21} \cdot \mu \cdot N_k = u_{21} (2N_k(0) + n_2(0) - n_1(0) - 2N_k) \cdot N_k. \quad (1.3)$$

При малых уровнях интенсивности поля N_k

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = u_{21} \cdot \mu_0 \cdot N_k = u_{21} [n_2(0) - n_1(0)] \cdot N_k = \gamma \cdot N_k \quad (1.4)$$

При инверсии заселенностей уровней ($\mu_0 > 0$) обнаруживаем рост количества квантов поля N_k на начальной стадии $\propto \exp\{\gamma \cdot t\}$ с инкрементом равным γ . Затем рост интенсивности замедляется, вследствие снижения уровня инверсии. В режиме насыщения неустойчивости $N_{kMAX} = N_k(0) + \mu(0)/2$.

В случае конечного поглощения энергии квантов в системе

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = -\delta \cdot N_k + u_{21} \cdot \mu \cdot N_k, \quad (1.5)$$

здесь δ – декремент поглощения энергии колебаний. Обычно потери в активных средах обусловлены выносом излучения из объема резонатора.

Корректно задать эти потери можно, определив граничные условия для поля. Однако можно их описать в достаточно общем виде следующим образом:

$$\delta = \delta_D = \iint_S \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \cdot \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} / \iiint_V \frac{\partial[\omega \varepsilon(\omega, \vec{k})]}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) d\vec{v}, \quad (1.6)$$

то есть, в рассматриваемом случае поток электромагнитной энергии через зеркала следует разделить на энергию поля, заключенную в резонаторе. Важно, чтобы величина, равная произведению характерного времени изменения поля $\{\partial |\vec{E}|^2 / |\vec{E}|^2 \partial t\}^{-1}$ в резонаторе на групповую скорость колебаний $|\partial \omega / \partial \vec{k}|$, была значительно больше размеров резонатора L . В этих условиях в теоретических расчетах и оценках вполне можно заменить потери через зеркала распределенными потерями. Традиционный порог неустойчивости определяется условием

$$\mu > \mu_{TH1} = \delta / u_{21}. \quad (1.7)$$

При приближении к порогу неустойчивости уровень шума растет, и при превышении порога процесс роста числа квантов способен приобрести экспоненциальный характер.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

СПОНТАННОЕ И ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ. ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ. УРАВНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГОРЯЧЕГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ

Пусть частицы пучка излучают и поглощают плазмоны с энергией $\hbar \omega(k)$. Число квантов, излученных в единицу времени в интервале волновых чисел dk (тем самым переходя из состояния m в состояние n), в случае спонтанного процесса равно $N_m A_m^n dk$, а вынужденного $N_n B_n^m E_k dk$ $N_m B_m^n E_k dk$. А число поглощенных квантов при тех же условиях равно $N_n B_n^m E_k dk$. Тогда для числа частиц в состоянии m , то есть N_m и числа частиц в состоянии n соответственно N_n запишем уравнения

$$\frac{\partial N_m}{\partial t} dk = -N_m A_m^n dk - N_m B_m^n E_k dk + N_n B_n^m E_k dk, \quad (II.1)$$

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} dk = +N_m A_m^n dk + N_m B_m^n E_k dk - N_n B_n^m E_k dk, \quad (II.2)$$

где E_k и $N(k) = \frac{2\pi}{h\omega(k)} E_k$ – плотность энергии и число квантов в этом интервале волновых чисел соответственно. Здесь в одномерном случае $A_m^n = \frac{1}{2\pi} \cdot \hbar\omega(k) \cdot B_m^n$, $B_m^n = B_n^m$.

Для плотности заряда электрона $\rho = -e \cdot \delta(v \cdot t - z + s)$, из уравнения Пуассона получим значение Фурье-образа напряженности электрического поля

$$E(\omega, k) = 8\pi^2 i e \frac{\delta(\omega - kv)}{k\varepsilon(\omega, k)} \exp\{-iks\}, \quad (II.3)$$

где $\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega(\omega + i\nu_{ei})$, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$, ν_{ei} – частота столкновений электронов с ионами, которую будем полагать незначительной. Выполняя обратное преобразование

$$E(z, t) = (2\pi)^{-2} \int d\omega \cdot \exp\{-i\omega \cdot t\} \int dk \cdot E(\omega, k) \cdot \exp\{ikz\},$$

найдем значение напряженности электрического поля

$$E(z, t) = 2ie \int \frac{dk}{k\varepsilon(kv, k)} \exp\{-ikv(t - \frac{z-s}{v})\}. \quad (II.4)$$

Сила торможения частицы полем излучения равна

$$F = \frac{1}{2\pi} \int F(k) \cdot dk, \quad (II.5)$$

где $F(k) = 4\pi \cdot ie^2 / [k\varepsilon(kv, k)]$. Отсюда получим спектральную интенсивность спонтанного излучения одной частицы

$$\begin{aligned} w_1(k) &= \text{Re}\{4\pi \cdot ie^2 \cdot v / [k\varepsilon(kv, k)]\} = \text{Re}\{2\pi \cdot ie^2 \cdot v^2 [\frac{1}{kv - \omega_{pe}} + \frac{1}{kv + \omega_{pe}}]\} = \\ &= 2\pi^2 e^2 \omega_{pe}^2 \cdot \delta(kv - \omega_{pe}) / k^2, \end{aligned} \quad (II.6)$$

то есть для спонтанного процесса справедливо соотношение $N_m A_m^n \cdot \hbar\omega(k) = 4\pi^2 e^2 [\omega^2(k) / k^3] \cdot f_b[\omega(k) / k]$. Для $N(k)$ определяемого из соотношения $E = \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot E_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot N(k) \cdot h\omega(k)$ и также можно записать уравнение

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = \{N_m A_m^n + N_m B_m^n E_k - N_n B_n^m E_k\} \quad (II.7)$$

Тогда для однородного пучка с функцией распределения $f(v_m)$ по скоростям получим соотношение

$$(N_m - N_n) / N_m = (\hbar k / m) \cdot df(v) / f(v_m) dv |_{v_m} \ll 1, \quad (II.8)$$

где $v_m = \omega(k) / k$.

Если функция распределения пучка по скоростям $f(v_b)$ имеет вид

$$f_b = [n_{b0} / \sqrt{\pi} v_{Tb}] \cdot \exp\{-(v - v_{0b})^2 / v_{Tb}^2\}, \quad (II.9)$$

где $v_0; v_{Tb}; n_{b0}$ – соответственно средняя скорость, тепловая скорость и плотность частиц пучка, то уравнение (II.7) принимает вид (2.7)

$$\begin{aligned} dE_k / dt &= 2\pi^2 e^2 [\omega^2(k) / k^3] \cdot f_b[\omega(k) / k] \cdot \\ &\cdot \{1 + N_k (\hbar k / m) \partial f_b(v) / f_b(\omega(k) / k) \partial v |_{v=\omega(k)/k}\} - 2\delta_D \cdot E_k = \quad (II.10) \\ &= 2\gamma_L \cdot \{E_k + \omega(k) T_b / [k v_{0b} - \omega(k)]\} - 2\delta_D \cdot E_k, \end{aligned}$$

где $\gamma_L = (\sqrt{\pi} / 2) \frac{\omega_b^2 \omega(k)}{k^3 v_{Tb}^3} \exp\{-\frac{[k v_{0b} - \omega(k)]^2}{k^2 v_{Tb}^2}\} [k v_{0b} - \omega(k)]$ – линейный инкремент пучково-плазменной неустойчивости в отсутствие потерь энергии

($\delta = 0$) плазмонов $\omega(k) \approx \omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$. Связь между плотностью энергии E_k и напряженностью электрического поля плазмонов E_k определяется

$$\text{соотношением } E_k = \frac{\partial \omega \varepsilon(\omega, k)}{8\pi \cdot \partial \omega} |E_k|^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi \omega^2(k)} |E_k|^2.$$

Не трудно получить значение для Максвелловской плазмы декремента затухания Ландау [II-1] (см. также о полученном А. А. Власовым несколько ранее декремента затухания на электронах немаксвелловской плазмы [II-2]) для плазмонов, фазовая скорость которых заметно превышает тепловую скорость плазмы. Роль пучка частиц в этом случае может играть высоко-энергетическая часть – «хвост» Максвелловского распределения электронов плазмы, а дисперсионные характеристики определяются основной массой плазменных электронов.

Уравнение для спектральной интенсивности плазмонов в пренебрежении спонтанными процессами принимает вид:

$$dE_k / dt = -2\delta_L \cdot E_k, \quad (II.11)$$

где значение декремента затухания Ландау равно

$$\delta_L = -\sqrt{\pi} \cdot \frac{\omega^4(k)}{2k^3 v_{Te}^3} \exp\{-\frac{\omega^2(k)}{k^2 v_{Te}^2}\}, \quad (II.12)$$

$v_{Te} = \sqrt{T_e / m_e}$ а T_e – температура плазменных электронов.

В связи с интенсивным развитием нелинейной физики в распределенных системах и средах основное внимание традиционно уделяется

индуцированным самосогласованным процессам.

Система уравнений, которая описывает поведение поля плазменной волны, возбуждаемой пучком, например, (II.7), может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \operatorname{Re}[\omega \cdot \varepsilon(\omega)]}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial t} + \operatorname{Im}[\omega \cdot \varepsilon(\omega)] \Big|_{\omega_0} \cdot E_k = \\ & = \frac{4\pi e \omega_0}{k_0} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} \Big|_{v=\omega_0/k_0} \cdot \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} d\xi_0 \cdot \int_{-\Delta v_m}^{\Delta v_m} d\Delta v_0 \cdot \Delta v \cdot \operatorname{Cos}\{k_0 \xi + \varphi\}, \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \operatorname{Re}[\omega \cdot \varepsilon(\omega)]}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot E_k - \operatorname{Re}[\omega \cdot \varepsilon(\omega)] \Big|_{\omega_0} \cdot E_k = \\ & = -\frac{4\pi e \omega_0}{k_0} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} \Big|_{v=\omega_0/k_0} \cdot \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} d\xi_0 \cdot \int_{-\Delta v_m}^{\Delta v_m} d\Delta v_0 \cdot \Delta v \cdot \operatorname{Sin}\{k_0 \xi + \varphi\}, \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

где $\xi = x - v_0 t$, $\Delta v = v - v_0$, $n_{b0} = \int f_0(v) \cdot dv$, $\Delta v_m \propto 6\pi |\gamma| / k_0$, начальные условия $\xi_0 = \xi(t=0) \in (-\pi/k_0, \pi/k_0)$ и $\Delta v_0 = \Delta v(t=0) \in (-\Delta v_m, \Delta v_m)$. Откуда несложно получить уравнения (2.12) – (2.13).

Однако учет спонтанных процессов в общей динамике развития множества физических явлений часто необходим для выяснения роли собственного шума систем, особенно вблизи порога неустойчивостей. Это позволит скорректировать представления о динамике неравновесных процессов.

Литература к приложению II

II-1. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ, 1946. – т. 16. – В. 7. – с. 574–586.

II-2. Рухадзе А. А., Силин В. П. Путь создания физических представлений о плазме без столкновений // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, А. В. Тур, В. В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2. – 376 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

О СПОНТАННОМ И ИНУЦИРОВАННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЛНАМИ

Фурье образ тока на комбинационной частоте $\omega_2 + \omega_3$ может быть записан в виде

$$j_{23}(\omega, k) = (k_2 + k_3) \frac{n_0 e^3 \{E_2 E_3\}_\omega}{m_i^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \delta(k_1 - k_2 - k_3), \quad (\text{III.1})$$

где для $\{E_2 E_3\}_\omega$ можно использовать представление

$$\{E_2 E_3\}_\omega = \{E_2 E_3\}_\omega \frac{1}{\Delta_{\Omega 23} \sqrt{\pi}} \exp\{-(\omega - \omega_2 - \omega_3)^2 / \Delta_{\Omega 23}^2\},$$

здесь $\Delta_{\Omega 23}$ – спектральная ширина пакета на комбинационной частоте, $E_i = |E_i| \exp\{i\varphi_i\}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда i -той волны.

Для поля, сопровождающего этот ток, справедливо выражение

$$E_{23}(\omega, k_2 + k_3) = 4\pi \frac{ie(k_2 + k_3)\{E_2 E_3\}_\omega \Omega_i^2}{m_i \omega^2 \omega_2 \omega_3 \varepsilon(\omega, k_2 + k_3)} \delta(k - k_2 - k_3), \quad (III.2)$$

где $\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_i^2}{k^2 v_s^2} = 0$, Ω_i и v_s – Фурье-образ диэлектрической проницаемости, ионная плазменная частота и скорость звука, соответственно. Применяя теорему Бореля, найдем работу поля над током и после обратного преобразования это выражение примет вид:

$$E_{23}^{(2)} * j_{23}^{(2)} = -i \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 W_2 \cdot W_3 \frac{8}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2 \omega_3} [1 - i\alpha] \exp\left\{ -i(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \cdot t - \frac{(\Delta_{\Omega 23} t)^2}{4} \right\}. \quad (III.3)$$

Для получения (III.3) необходимо воспользоваться соотношением

$$\frac{1}{\omega \varepsilon(\omega, k_2 + k_3)} = \frac{\omega_1}{3\omega_2 \omega_3} + i\pi \cdot \frac{k_1^2 v_s^2}{2\Omega_i^2} \{ \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1) \}, \quad (III.4)$$

кроме того, использованы следующие представления

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \omega_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_1} |E_1|^2 = 2 \frac{\Omega_i^2}{8\pi \omega_1^2} |E_1|^2$$

– плотность энергии колебаний на частоте ω_1 , $\Delta_{-1,2,3} = (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 3\omega_1 \omega_2 \omega_3 / 2\Omega_i^2$ – частотная расстройка, обусловленная дисперсией $\alpha = \pi \cdot \frac{3\omega_1 \omega_2 \omega_3}{2\Omega_i^2} \frac{1}{\Delta_{\Omega 23} \sqrt{\pi}} \exp\{-(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)^2 / \Delta_{\Omega 23}^2\}$,

причем так как $\Delta_{\Omega 23} \geq \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$, то в этих условиях α – величина порядка единицы. В условиях незначительной расстройки $\Delta_{-1,2,3}$ не превышающей спектральную ширину волновых пакетов для звуковых волн, из-за наличия резонанса $\varepsilon(\omega_1, k_2 + k_3) = 0$ ток (III.1) способен возбуждать поле на частоте ω_1 . При малых расстройках изменение энергии поля на частоте ω_1 за счет тока на комбинационной частоте

$$-(E_{23}^{(2)} * j_{23}^{(2)} + E_{23}^{(2)} j_{23}^{(2)*}) / 2 = \alpha \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 W_2 W_3 \frac{8}{3} \frac{\omega_1}{\omega_2 \omega_3}. \quad (III.5)$$

Следует обратить внимание, что знак выражения (III.5) не зависит от участвующих во взаимодействии волн, что соответствует процессу генерации (излучения) колебаний. Подобная знакоопределенность характерна для спонтанных процессов. Кроме того, генерация на частоте ω_1 обусловлена посторонними источниками (здесь волнами на частотах ω_2 и ω_3) по отношению к волне на этой же частоте, что также характерно для спонтанных процессов. Поэтому такая генерация по отношению к волне на частоте ω_1 обладает свойствами спонтанных процессов. Очевидно, при больших расстройках в спектральном интервале взаимодействующих мод, излучение (III.5) экспоненциально мало. Для энергии колебаний на частоте ω_1 , оказывается справедливым следующее уравнение [III-1]:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = \alpha \frac{8}{3} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \omega_1 \frac{W_2 W_3}{\omega_2 \omega_3} - \operatorname{Re} \frac{2\Omega_i^2 e E_2 E_3 E_1^*}{\pi m_i v_s \omega_2 \omega_3} + \frac{8}{3} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \omega_1 \left\{ \frac{\alpha' W_1 W_1}{2 \omega_1 \omega_1} + \alpha \frac{W_1}{\omega_1} \left(\frac{W_2}{\omega_2} + \frac{W_3}{\omega_3} \right) \right\}. \quad (\text{III.6})$$

Это уравнение можно записать для количества квантов в единице объема $N_i = W_i / \hbar \omega_i$:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \alpha \frac{8\hbar}{3} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 N_2 N_3 - \operatorname{Re} \frac{2\Omega_i^2 e E_2 E_3 E_1^*}{\pi m_i \hbar v_s \omega_2 \omega_3 \omega_1} + \frac{8\hbar}{3} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \left\{ \frac{\alpha'}{2} N_1 N_1 + \alpha N_1 (N_2 + N_3) \right\}. \quad (\text{III.7})$$

Аналогичное уравнение можно записать для медленной фазы колебаний на частоте ω_1 :

$$N_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{8\hbar}{6} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 N_2 N_3 - \operatorname{Im} \frac{\Omega_i^2 e E_2 E_3 E_1^*}{\pi m_i \hbar v_s \omega_2 \omega_3 \omega_1} - \frac{8\hbar}{6} \left(\frac{e}{m_i v_s} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} N_1 N_1 - N_1 (N_2 + N_3) \right\}. \quad (\text{III.8})$$

Первое слагаемое правой части каждого из уравнений (III.7) и (III.8) отвечает спонтанным эффектам, второе слагаемое определяет процесс взаимодействия всех трех волн, а третье слагаемое определяет индуцированные эффекты самовоздействия ($\propto N_1^2$) и кроссмодуляции, которые могут быть получены прямыми расчетами.

Отметим, что коэффициент перед произведением числа квантов в уравнениях (III.7) и (III.8) равный $\hbar e^2 / (m_i v_s)^2$, можно представить в виде $\alpha_v \cdot \omega \cdot \tilde{\lambda}_v^2 \cdot k^{-1}$, где $\alpha_v = e^2 / \hbar v_{ph}$ – аналог постоянной тонкой структуры для случая, когда фазовая скорость $v_{ph} = v_s$, а величина $\tilde{\lambda}_v = \hbar / m_i \cdot v_{ph}$ формально подобна комптоновской длине волны при $v_{ph} = v_s$ для рассеяния на ионе.

Об описании процессов самовоздействия. Слагаемое $\propto N_1^2$ в правых частях (III.6) – (III.8) описывает результат самовоздействия и, что примечательно, также может быть формально получено. Для тока на комбинационных частотах $2\omega_1 - \omega_1$ (можно показать, что ток увлечения дает существенно меньший вклад, чем учет возмущений на второй

гармонике) можно записать

$$j_{2\omega_1 - \omega_1}(x, t) E_{2\omega_1 - \omega_1}^*(x, t) = -\frac{W}{2} \cdot N_{2\omega} N_{\omega} (i + \alpha'), \quad (III.9)$$

где численный коэффициент $\alpha \rightarrow \alpha' = 3 \cdot 4 \frac{\omega_1^3}{\Omega_i^2} \left(\frac{1}{\Delta_{\Omega 23} \sqrt{\pi}} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{3\omega_1^2}{\Omega_i^2} \right)^2 / \Delta_{\Omega 23}^2 \right\}$ порядка единицы. Аналогично запишем процедуру получения нелинейного слагаемого для самовоздействия

$$-\frac{W}{2} \cdot (i + \alpha') [(N_{2\omega} + 1)(N_{\omega} - 1) - N_{2\omega} N_{\omega}] \cdot N_1 \approx -\frac{W}{2} N_1^2 (i + \alpha'), \quad (III.10)$$

(т. к. $N_{2\omega} \ll N_{\omega}$), значение которого также может быть получено прямым расчетом. Но так как величина тока на комбинационных частотах $2\omega_1 - \omega_1$ определяется величинами более высокого порядка малости по амплитудам колебаний, то в этом случае корректнее ориентироваться на прямые расчеты слагаемых, ответственных за эффекты самовоздействия. Подобные схемы расчетов активно использовались для описания волновых взаимодействий многими авторами (см., [III-2] и литературу там же). Однако следует заметить, что применение таких операций в рамках развитых феноменологий, в большинстве случаев весьма успешное, может исказить физический смысл отдельных элементов описания и должно опираться на прямые расчеты. В отсутствие расстройки первое слагаемое правой части (III.6) отвечает за излучение на частоте ω_1 , порожденное только комбинационным взаимодействием двух волн с частотами ω_2 и ω_1 . Второе слагаемое правой части (III.6) определяет хорошо известный коллективный процесс взаимодействия всех трех волн. Учет процесса спонтанной генерации, описываемого первым слагаемым правой части (III.6), который можно назвать спонтанным, обеспечивает не только формирование определенного уровня флуктуаций в системе, но и способен заметно повлиять на динамику многоволнового взаимодействия (подобно явлениям, обсуждаемым в работе [III-3, III-4]). В частности, нарастающий уровень шума способен привести к сглаживанию осциллирующей амплитуд и выравниванию уровней интенсивности взаимодействующих волн, также, как и воздействие случайных фазовых нарушений [III-5, III-6]. В однородном случае, при достаточно больших значениях расстройки Δ , превышающих ширину спектра участвующих в процессе взаимодействия волн, первое слагаемое правой части пренебрежимо мало, т. е. эффективность подобного спонтанного взаимодействия волн ослабляется.

Литература к приложению III

III-1. Kirichok A. V. Kuklin V. M. Theory of Some Nonlinear Processes in Plasma in Terms of Spontaneous and Stimulated Radiation // Phys. Scripta. – 82 (2010) 065506.

III-2. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. – М.: Атомиздат, 1971. – 423 с.

III-3. Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.

III-4. Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН, 1999. – т. 169. – В. 1. – с. 7–38.

III-5. Ахиезер А. И., Алексин В. Ф., Ходусов В. Д. К нелинейно теории низкочастотных колебаний в слаботурбулентной плазме // ЖЭТФ, 1977, т. 73. – В. 5(11). – с. 1757–1766.

III-6. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. Диффузионное приближение в теории нелинейного взаимодействия волн в хаотически-неоднородных средах. – В кн.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. – М.: Наука, 1981. – с. 225–234.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV О ПРИРОДЕ ЭФФЕКТА МЕССБАУЭРА

Рассмотрим взаимодействие захваченных в потенциальную яму осцилляторов с внешним полем [IV-1]. Покажем, что в условиях, когда энергия отдачи при акте поглощения или излучения кванта поля ω_0 равна $\hbar\Omega$ (где Ω – частота колебаний осциллятора в потенциальной яме, $\Omega \ll \omega_0$), наибольшей интенсивностью отличаются линии излучения и поглощения на частоте колебаний покоящегося осциллятора.

Обсудим процесс излучения осциллятора с собственной частотой ω_0 , зарядом и массой равными e, m_0 , который колеблется в потенциальной яме, ориентированной вдоль оси OZ. Вектор излучаемой электромагнитной волны также ориентирован в этом же направлении.

Пусть в начале координат находится ВЧ осциллятор, скорость которого $v_x = v_{x0} \cos \omega_0 t = a \omega_0 \cos \omega_0 t$. Медленные колебания такого осциллятора в потенциальной яме происходят со скоростью $v_z = b \Omega \cos(\Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega_0$. Законы сохранения при поглощении кванта внешнего поля $E_\nu = \hbar(\omega_0 + \Omega)$ осциллятором с массой покоя m_0 и зарядом e имеют вид $\hbar(\omega_0 + \Omega)/c = m_0 V_Q$, $\hbar\Omega = m_0 V_Q^2 / 2$. В условиях $\alpha = \hbar\omega_0 / m_0 c^2 \ll 1$ движение осциллятора вдоль оси OZ описывается уравнением $z = b \sin \Omega t$, где $\Omega = V_Q / b$, откуда следует важное соотношение [IV-2]

$$\omega_0 b / c = kb \approx 2. \quad (IV.1)$$

Векторный потенциал внешнего поля имеет компоненты $A_x = q(t) \cdot \sqrt{2} \cdot \text{Cos}\{kz + \delta\}$, $A_y = 0$, $A_z = 0$. Фаза δ зависит от ориентации осциллятора. Выбор вида A_x определяется условиями нормировки, так, чтобы интеграл от квадрата векторного потенциала в единичном объеме был равен единице, а величина $q(t)$ удовлетворяла уравнению $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, где ω и $\vec{k} = (0, 0, k)$ – волновой вектор электромагнитного поля. Полная энергия поля в объеме V равна при этом $U = V \cdot (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) / 8\pi c^2$, откуда определим эффективную массу осциллятора поля $m_{eff} = V / 4\pi c^2$. Энергия взаимодействия осциллятора с внешним полем $H' = -e \cdot v_x A_x / c$. Векторный потенциал в точке, где находится частица – осциллятор, $A_x = \sqrt{2} \cdot q_0 \exp\{i(\omega \pm \Omega)t + ikb \sin \Omega t\} \cdot \text{Cos}\{\delta\} = \sqrt{2} \cdot q_0 \text{Cos}\{\delta\} \sum_m J_m(kb) \exp\{i(\omega \pm \Omega)t + im\Omega t\}$, $v_x = v_{x0} \cdot \text{cos} \omega_0 t$ – скорость осциллятора. Условия резонанса требуют, чтобы частота в системе покоя осциллятора была равна ω_0 , то есть $\omega \pm \Omega + m\Omega = \omega_0$. Верхний знак соответствует излучению, нижний – поглощению внешнего кванта. Действительно при $b = 0$, $m = 0$ и частота внешнего поля при излучении кванта равна $\omega = \omega_0 - \Omega$, а частота внешнего поля при поглощении равна $\omega = \omega_0 + \Omega$. Если $b \neq 0$ система «осциллятор в потенциальной яме» представляют собой бесконечный набор осцилляторов (см. [IV-1], [IV-3]) $\approx J_m(kb) \cdot \exp\{i\omega_0 t + im\Omega\}$ из которых нам будут интересны лишь те, которые отвечают значениям $m = \pm 1$. То есть в системе существует m энергетических уровней, переходы на каждый из которых могут осуществляться независимо.

При этом следует обратить внимание на изменение частоты при отдаче $k \cdot t^{-1} \int t dt \cdot (dV_Q / dt) \approx \pm k V_Q / 2 = \pm \Omega$ в системе покоя частицы-осциллятора. То есть взаимодействие приводит к изменению частоты именно на величину Ω . В классической модели интервал времени передачи импульса и энергии частице-осциллятору достаточно длительный, в квантовом случае этот процесс полагают мгновенным.

Можно убедиться в том, что только при значениях частоты внешнего поля $\omega = (-m \mp 1)\Omega + \omega_0$ выражение для энергии взаимодействия осциллятора с полем оказывается отличным от нуля и может быть представлено в виде

$$H' = -e \cdot v_x A_x / c = -\frac{e \cdot v_{x0}}{c} q_0 \sqrt{2} \cdot \sum_m J_m(kb) \cdot \text{cos} \delta. \quad (IV.2)$$

Заметим, что для покоящегося осциллятора $b = 0$, в выражении (IV.2) отличным от нуля оказывается только один член ряда с $m = 0$. Таким обра-

зом, частота поглощаемого излучения $\omega = \omega_0 + \Omega$ отличается от частоты излучаемого $\omega = \omega_0 - \Omega$ на 2Ω , что отвечает разнице энергий поглощаемого и излучаемого квантов в две энергии отдачи.

При $b \neq 0$ в случае поглощения кванта $\omega + m\Omega = \omega_0 + \Omega$, что при частоте внешнего излучения $\omega = \omega_0$ определяет значение $m = 1$. В случае излучения кванта, захваченным в потенциальную яму осциллятором, $\omega + m\Omega = \omega_0 - \Omega$, что при частоте внешнего излучения $\omega = \omega_0$ определяет значение $m = -1$. Легко видеть, что при выполнении соотношения $\omega_0 b/c = kb \approx 2$ излучение и поглощение на собственной частоте осциллятора ω_0 наиболее интенсивное (т. к. $J_1^2(kb)|_{kb \approx 2} = J_{-1}^2(kb)|_{kb \approx 2} \gg J_0^2(kb)|_{kb \approx 2}$).

Для этого матричный элемент представим, как $H_{if} = -\sqrt{2}(e/c) \cdot \omega_0 \cdot x_{ab} \cdot q_{mn} \cdot J_{\pm 1}(kb) \cdot \cos \delta$. Два состояния осциллятора обозначены нижними индексами a, b , а индексы n, n' отвечают двум состояниям излученного ($n, n+1$) или поглощенного ($n, n-1$) поля. Причем, для случая поглощения $|q_{mn'}|^2 = |q_{n, n-1}|^2 = n |q_{01}|^2$, а для случая излучения $|q_{mn'}|^2 = |q_{n+1, n}|^2 = (n+1) |q_{01}|^2$, где $|q_{01}|^2 = hc^2/V\omega_0$ и использовано значение массы $m_{eff} = V/4\pi c^2$. Для квадрата матричного элемента получим выражение

$$|H_{if}|^2 = -\frac{2e^2}{c^2} \cdot \omega_0 \cdot (x_{ab}^2 + y_{ab}^2) \cdot \frac{hc^2}{V} J_1^2(kb) \cdot \cos^2 \delta \cdot \begin{Bmatrix} n+1 \\ n \end{Bmatrix}, \quad (IV.3)$$

где верхнее значение соответствует излучению (ограничимся случаем $n = 0$), а нижнее – поглощению (положим $n = 1$). Вероятность перехода можно найти, умножая на $4\pi^2 \rho(\omega_{ab})/h$, где $\rho(\omega_{ab})$ – плотность колебаний в интервале частот, и учесть, что при усреднении по начальным фазам $\langle \cos^2 \delta \rangle = 1/2$

$$P_{if} = \frac{4\pi^2}{h^2} |H_{if}|^2 \rho = \frac{8\pi e^2}{hc^3} \omega_0^2 (|x_{ab}|^2 + |y_{ab}|^2) \cdot J_1^2(kb) \cdot \cos^2 \delta. \quad (IV.4)$$

Отметим, что вероятность поглощения на частоте $\omega_0 \pm \Omega$ можно получить, заменяя в (IV.3) $J_1^2(kb)$ на $J_0^2(kb)$. Интенсивность вдоль направления OZ можно получить, умножая (IV.3) на $\hbar\omega_0$, а полную интенсивность по всем направлениям – интегрируя по углу $\theta = \vec{k} \wedge O\vec{Z}$.

Нетрудно видеть, что в случае колеблющегося в потенциальной яме осциллятора с частотой Ω и амплитудой колебаний b так как

$J_1^2(kb) \gg J_0^2(kb)$, интенсивность линий поглощения и излучения на собственной частоте осциллятора ω_0 почти на порядок превосходит интенсивность линий излучения на частоте $\omega_0 - \Omega$ и поглощения на частоте $\omega_0 + \Omega$ [IV-1]. Заметим также, что природа ВЧ осциллятора, энергия колебаний которого в потенциальной яме равна энергии отдачи, не влияет на обсуждаемый характер излучения и поглощения на его собственной частоте.

Отметим, что при излучении под углом $\theta_0 \approx 50^\circ$ когда $J_1^2(kb \cdot \text{Cos}\theta_0) = J_0^2(kb \cdot \text{Cos}\theta_0)$, интенсивности излучения на собственной частоте ω_0 и на комбинационной частоте $\omega_0 - \Omega$ сравниваются, что позволяет экспериментально²² проверить данную теорию.

Таким образом, природа эффекта Мессбауэра может быть достаточно просто пояснена особенностями излучения осциллирующих в потенциальных ямах кристаллической структуры атомов с возбужденным ядром.

Учет процессов релаксации НЧ возбуждений в сплошных средах.

Если система, обсуждаемая выше, находится в среде, то следует рассмотреть возможность излучения низкочастотного кванта $\Omega = \omega_0 (\hbar \omega_0 / 2m_0 c^2)$. Сравнительно низкая скорость, приобретаемая осциллятором в результате отдачи, часто оказывается заметно меньше фазовой скорости фононов $v_s \gg c (\hbar \omega_0 / 2m_0 c^2)$. Это делает невозможным прямую передачу кинетической энергии отдачи фонону. Об этом свидетельствует также невозможность выполнить законы сохранения энергии и импульса. Следует оценить время жизни такого низкочастотного осциллятора. В том случае, если время жизни НЧ осциллятора окажется заметно больше периода колебаний в потенциальной яме, то механизмы излучения и поглощения изолированной системы «осциллятор – потенциальная яма», обсуждаемые в данной работе применимы и для случая, когда такая система находится в среде. Другими словами, релаксационными процессами с участием фононного спектра в этом случае можно пренебречь.

В трехмерном случае характерное время релаксации НЧ движения [IV-1] порядка $\tau_{LF} \approx 3(\rho_0 \lambda_s^3 / m_0)(\omega_0 / \pi^2 \Omega_0^2)$, пропорциональное весьма большому параметру $\rho_0 \lambda_s^3 / m_0$. Этот параметр равен отношению массы атомов в трехмерном кубе, сторона которого равна длине волны звука, к величине массы одного атома. А также пропорциональное большому параметру (ω_0 / Ω) . В этом случае время жизни ВЧ осциллятора вполне может оказаться меньше времени релаксации НЧ движения за счет излучения звука [IV-3].

Влияние дрожания потенциальной ямы. Можно также показать [IV-1], что учет быстрых осцилляций-дрожания (обусловленный воздействием энергичных фононов среды) потенциальной ямы с частотой ω_s и амплитудой b_s , для которых справедливы неравенства $b_s^2 \omega_s^2 > b^2 \Omega^2$, $b_s^2 \ll b^2$,

²² Существует принципиальная возможность опровержимости данного рассмотрения, то есть выполнен критерий Поппера.

приводит к снижению амплитуды векторного потенциала A_x и энергии взаимодействия H' , в $\exp\{-W/2\} = (1 - b_s^2/b^2)$ раз. При этом уменьшается вероятность перехода (IV.3) в $\exp\{-W\}$ раз. Подобным образом на вероятность перехода будет влиять наличие сравнительно высокочастотного фононного спектра окружающей среды. В случае достаточно широкого спектра осцилляций потенциальной ямы снижение вероятности перехода $\exp\{-W\} = (1 - b^{-2} \cdot \sum_i b_i^2)$ будет незначительным, при выполнении условий на энергию $b^2 \Omega^2 \ll \sum_i b_i^2 \omega_i^2$ и амплитуды отклонений $b^2 \gg \sum_i b_i^2$.

Так, например, поглощение ядрами атомов ^{57}Fe и ^{119}Sn гамма-квантов 14,4 эв и 23,8 кэв соответственно, согласно выражению $\omega_0 b/c \approx 2$, приводит к колебаниям атомов в потенциальной яме кристалла с размахами (удвоенной амплитудой) равными $0,55 \cdot 10^{-8}$ см. и $0,33 \cdot 10^{-8}$ см. Время релаксации такого колебательного движения атомов железа и олова из-за генерации звука, определенное выше порядка 0,1 и 0,01 секунды соответственно, что на много порядков больше времени жизни возбужденного ядра атома. Приведенные выше оценки ослабления интенсивности линий $\propto \exp\{-W\}$ остаются справедливыми даже для температур Дебая θ_D (например, для железа $\theta_D = 467^0 \text{ K}$, $\omega_{S\text{MAX}} \approx k\theta_D / \hbar \approx 10^{14}$, $b^2 \gg \sum_i b_i^2$). Процесс излучения и поглощения на собственной частоте ядра ω_0 в большой степени определяется наличием значительного числа атомов, колеблющихся в потенциальных ямах кристалла, как с возбужденными, так и с не возбужденными ядрами. Источником же атомов с возбужденным ядром, совершающих колебания в потенциальной яме (на частоте Ω) в начальный момент является внешнее излучение с частотой $\omega_0 + \Omega$, количество квантов которого в единицу времени $G_k^{(+)}$ поступает извне. Очевидно, что независимо от факта возбуждения ядра атома, совершающего колебания в потенциальной яме в присутствии внешнего поля, система НЧ энергетических уровней остается той же. В работе [IV-2] показано, что количество квантов на собственной частоте ядра ω_0 на развитой стадии процесса превосходит число квантов на частоте $\omega_0 + \Omega$ в отношении $(w_{2*1} \cdot n_{10} / \delta_k) > 1$. Здесь δ_k – декремент поглощения энергии поля средой, $w_{2*1} \cdot n_{10}$ – скорость изменения количества возбужденных ядер за счет индуцированного поглощения кванта на частоте $\omega_0 + \Omega$ прежде покоящимися атомами с не возбужденными ядрами, равновесная плотность которых равна n_{10} .

Литература к приложению IV

IV-1. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G. On the emission spectrum of oscillator trapped in a potential well. // XII international workshop "Plasma electronics and new acceleration methods" 26-30 August 2013, Kharkov, Ukraine; VANT, 2013, N. 4 (86). – series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration" issue 8. –

P. 256–259; О спектрах захваченного в потенциальную яму осциллятора // Физические основы приборостроения. 2013. – Т. 2. – № 3, – С. 56–63. [arXiv:1701.06223v1](https://arxiv.org/abs/1701.06223v1) [quant-ph] – 2017.

IV-2. Куклина О. В., Куклин В. М. Об относительной роли фононного спектра и столкновительной релаксации в процессах генерации и рассеяния // Вістник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. 2009. – № 846. – В. 2 (50). – С. 20–28.

IV-3. Qiong Li, D. Z. Xu, and C. Y. Cai Recoil effects of a motional scatterer on single-photon scattering in one dimension. [arXiv:1303.1287](https://arxiv.org/abs/1303.1287) [quant-ph].

IV-4. Загородний А. Г., Куклин В. М. Особенности излучения в неравновесных средах / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц,, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – В. 1. – 532с. с. 13–81.

ПРИЛОЖЕНИЕ V МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим матрицу плотности, элементы которой для двухуровневой системы есть (см., например, [V-1]) $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$ и $\rho_{ba} = \rho_{ab}^*$, где ρ_{aa} – относительная заселенность верхнего уровня. Для простоты описания ограничимся одномерным случаем. Матричные элементы взаимодействия (дипольное приближение) $\hat{V} = -\vec{d} \cdot \vec{E}$. Определим d_{ba} – проекцию дипольного момента на направление поляризации электрического поля и запишем поляризацию N одинаковых молекул $P = N(d_{ab}\rho_{ba} + d_{ba}\rho_{ab})$, $\Omega = 2d_{ba}A/\hbar$ – частота Раби. Справедливы следующие уравнения, где нет учета спонтанного излучения

$$\frac{d}{dt}\rho_{ba} + (i\omega_{ba} + \frac{1}{T_2})\rho_{ba} = -\frac{i}{\hbar}V_{ba}(\rho_{aa} - \rho_{bb}); \quad (V.1)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) + \frac{1}{T_1}[(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - (\rho_{aa}^0 - \rho_{bb}^0)] = +\frac{2i}{\hbar}(V_{ba}\rho_{ab} - \rho_{ba}V_{ab}); \quad (V.2)$$

$$V_{ba} = V_{ab}^* = -d_{ba}[A(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} + A^*(t) \cdot \exp\{i\omega t\}]; \quad (V.3)$$

где $E = A(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} + A^*(t) \cdot \exp\{i\omega t\}$.

Очевидно
$$\frac{dP}{dt} = N(d_{ab} \frac{d}{dt}\rho_{ba} + d_{ba} \frac{d}{dt}\rho_{ab}) \quad (V.4)$$

считая $\omega_{ab} = -\omega_{ba} = \omega$, $V_{ab}^* = -d_{ab}^* E = V_{ba} = -d_{ba} E$, $\rho_{ab}^* = \rho_{ba}$, $d_{ab}^* = d_{ba}$ запишем (V.1) в виде

$$\frac{d}{dt}\rho_{ba} = -(i\omega_{ba} + \frac{1}{T_2})\rho_{ba} - \frac{i}{\hbar}V_{ba}(\rho_{aa} - \rho_{bb}), \quad (V.5)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{ab} = -\left(i\omega_{ab} + \frac{1}{T_2}\right) \rho_{ab} - \frac{i}{\hbar} V_{ab} (\rho_{bb} - \rho_{aa}), \quad (\text{V.6})$$

тогда

$$\frac{1}{N} \frac{dP}{dt} = d_{ab} \frac{d}{dt} \rho_{ba} + d_{ba} \frac{d}{dt} \rho_{ab} = i\omega (d_{ab} \rho_{ba} - d_{ba} \rho_{ab}) - \frac{1}{T_2} (d_{ab} \rho_{ba} + d_{ba} \rho_{ab}). \quad (\text{V.7})$$

Можно использовать $\gamma_{12} = 1/T_2$ – ширину спектральной линии.

Так как $-\frac{2i}{\hbar} \langle V_{ba} \rho_{ab} - \rho_{ba} V_{ab} \rangle = \frac{2}{\hbar\omega N} \langle \frac{dP}{dt} E \rangle$ из (V.2) уравнения получим

$$\frac{d}{dt} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) + \frac{1}{T_1} [(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - (\rho_{aa}^0 - \rho_{bb}^0)] = \frac{2}{\hbar\omega N} \langle \frac{dP}{dt} E \rangle \quad (\text{V.8})$$

или если определить инверсию населенностей $\mu = N(\rho_{aa} - \rho_{bb})$, то (V.8) запишем иначе

$$\frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{T_1} (\mu - \mu_0) = \frac{2}{\hbar\omega} \langle \frac{dP}{dt} E \rangle. \quad (\text{V.9})$$

Дифференцируя уравнение (V.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} &= -i\omega N \frac{d}{dt} (d_{ba} \rho_{ab} - d_{ab} \rho_{ba}) = -i\omega N d_{ba} \left[-\left(i\omega_{ab} + \frac{1}{T_2}\right) \rho_{ab} - \frac{i}{\hbar} V_{ab} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \right] - \\ &- d_{ab} (-i\omega N) \left[-\left(i\omega_{ba} + \frac{1}{T_2}\right) \rho_{ba} - \frac{i}{\hbar} V_{ba} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \right] = \\ &= (-i\omega N) \left[(-i\omega d_{ba} \rho_{ab} - i\omega d_{ab} \rho_{ba}) - \frac{i}{\hbar} V_{ab} d_{ba} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) + \frac{i}{\hbar} V_{ba} d_{ab} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \right] = \\ &- \omega^2 P - 2i\omega \left(-\frac{i}{\hbar}\right) N (\rho_{aa} - \rho_{bb}) d_{ba} d_{ab} E, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega^2 P = -2\omega |d_{ab}|^2 E \mu / \hbar, \quad (\text{V.10})$$

Если к (V.9) и (V.10) добавить уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mathcal{D} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{V.11})$$

где \mathcal{D} – декремент поглощения поля в среде, получим уравнения полуклассической модели (V.9)-(V.11), использованные в работах [V-2].

Литература к приложению V

V-1. Зейгер С. Г., Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г., Фрадкин Э. Е. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. М. : Наука, 1974..

V-2. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. – М. : Наука. 1983. – 320 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ VI РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСОВ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Расчет параметров импульса квантового источника [VI-1]. Покажем, как были определены параметры импульсов индуцированного излучения в зависимости от степени приближения к порогу (4.8). Будем считать, что общее число состояний $N = n_1 + n_2 = 10^{12}$, при этом пороговая инверсия $\mu_{0th} = \sqrt{N} = 10^6$. Переход к единой шкале времени будем оценивать согласно соотношению $T = \tau \cdot \mu_0$, где T – время в каждом отдельном случае. Начальные значения определим $M(T = 0) = M_1(T = 0) = 1$ и $N_{inc}(T = 0) = N_{inc} / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$ а также $N_c(T = 0) = N_c / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$, кроме того $N_1(T = 0) = N_k / \mu_0 = 3 \cdot 10^4 / \mu_0$. Поглощение энергии поля учитывается значением $\theta = \delta / \mu_0$, где δ – декремент поглощения поля в среде.

В отсутствие потерь или поглощения энергии квантов, результаты расчетов для разных значений начальной инверсии представлены в таблице VI.1. Размер импульса и его форма определялись по его полуширине [VI-1].

Таблица VI.1

№	μ_0	N_c	$N_c \cdot \mu_0$ $\times 10^6$	Полуширина ΔT	Полуширина ($\Delta \tau = \Delta T / \mu_0$) $\times 10^{-6}$	Отношение заднего фронта к переднему $\Delta \tau_2 / \Delta \tau_1$
1	$\sqrt{2} \cdot 10^6$	0.053	0.075	3.352	2.37	1.04
2	$2 \cdot 10^6$	0.083	0.166	4.743	2.37	1.08
3	$\sqrt{10} \cdot 10^6$	0.204	0.645	7.716	2.44	1.55
4	$\sqrt{20} \cdot 10^6$	0.318	1.422	12.46	2.78	2.46
5	$\sqrt{50} \cdot 10^6$	0.415	2.934	27.26	3.85	5.34
6	10^7	0.454	4.540	52.30	5.23	9.88
7	$\sqrt{2} \cdot 10^7$	0.475	6.716	102.5	7.25	17.6
8	$2 \cdot 10^7$	0.487	9.740	202.8	10.1	31.7
9	$\sqrt{10} \cdot 10^7$	0.494	15.62	503.3	15.9	71.4

В случае фиксированного поглощения, отвечающего значениям $\delta = 4 \cdot 10^5$, результаты расчетов приведены в таблице VI.2.

Таблица VI.2

№	μ_0	N_c	$N_c \cdot \mu_0$ $\times 10^6$	Полуширина ΔT	Полуширина ($\Delta \tau = \Delta T / \mu_0$) $\times 10^{-6}$	Отношение заднего фронта к переднему $\Delta \tau_2 / \Delta \tau_1$
1	$\sqrt{2} \cdot 10^6$	0.034	0.048	3.036	2.15	1.28
2	$2 \cdot 10^6$	0.046	0.092	4.554	2.28	1.05
3	$\sqrt{10} \cdot 10^6$	0.12	0.38	6.641	2.1	1.23
4	$\sqrt{20} \cdot 10^6$	0.211	0.94	8.348	1.87	1.63
5	$\sqrt{50} \cdot 10^6$	0.33	2.33	12.396	1.75	2.64
6	10^7	0.382	3.82	17.14	1.71	3.64
7	$\sqrt{2} \cdot 10^7$	0.418	5.91	24.35	1.72	5.14
8	$2 \cdot 10^7$	0.441	8.82	34.28	1.71	7.19
9	$\sqrt{10} \cdot 10^7$	0.462	14.6	54.77	1.73	10.9

Периодические изменения светимости звезд-цефеид. Как отмечалось выше в разделе 6, N_2 может описывать генерацию индуцированного излучения, например, в фотосфере звезд, которое представляет собой импульсы с некоторой постоянной составляющей. Кроме того, имеется спонтанная некогерентная составляющая этого же источника. К этому излучению необходимо присоединить постоянное излучение остального разогретого вещества звезды, т.е. полное излучение звезды принимает вид

$$N(\tau) = N_b + N_2(\tau) \tag{VI-1}$$

Величину постоянной составляющей N_b (спонтанная некогерентная составляющая квантового источника и постоянное излучение остального разогретого вещества звезды), необходимо добавить к N_2 . Эту добавку можно оценить, зная соотношение между максимальной и минимальной светимостью звезды $k = (N_b + N_{2\max}) / (N_b + N_{2\min})$, с другой стороны, отношение максимума и минимума светимостей звезды равно $k = L_1 / L_2 = 10^{0.4(m_2 - m_1)}$ [VI-3], здесь m_1 – видимая звездная величина при максимуме светимости звезды, m_2 – при минимуме светимости. Ниже будем ориентироваться на значения видимой звездной величины, полученной из наблюдений. По известной видимой звездной

величине m , зная расстояние d до звезды в парсеках, можно вычислить светимость L :

$$m = M_{lsun} + 5\lg(d/10) - 2.5\lg(L) \tag{VI-2}$$

Для сравнения светимостей звезд между собой часто также применяется абсолютная звездная величина (видимая звездная величина с расстояния в 10 парсек) $M_l = m - 5\lg(d/10)$, здесь d – расстояние в парсеках до звезды, $d = 273$ для дельты Цефея и $d = 133$ для Полярной звезды. Тогда светимость звезды в единицах светимости Солнца равна $L = 10^{0.4(M_{sun} - M)} L_{sun}$, $L_{sun} = 1$, где $M_{\square} = 4.77$ – абсолютная звездная величина Солнца.

Для получения зависимости светимости звезды от времени $L(\tau)$ домножим (VI-1) на коэффициент A , то есть

$$L(\tau) = A \cdot N(\tau) = A \cdot [N_b + N_2(\tau)] \tag{VI-3}$$

где $A = \frac{L_1}{N_b + N_{2max}} = \frac{L_2}{N_b + N_{2min}}$.

В таблице VI.3 приведены результаты расчетов для дельты Цефея и Полярной звезды. Для этого взяты значения таблицы 6.1 (раздела 6) из первой и пятой строк.

Таблица VI.3

Расчет	m_1	m_2	k	N_{2min}	N_{2max}	N_{2av}	N_b	A	L_1^*	L_2^*
дельта Цефея	3.48	4.37	2.27	4	20,188	10	8.748	84.507	2445.3	1077.3
Полярная звезда	2.092	2.125	1.031	9.635	10,374	10	14.315	84.412	2084	2021.6

* рассчитано по формуле (VI-3)

Можно убедиться в том, что среднее значение \bar{L} определяется соотношением

$$\bar{L} = A \cdot (N_{2av} + N_b) . \tag{VI-4}$$

На рис. VI.1 а, б показаны зависимости от времени числа квантов и соответствующей светимости дельты Цефея и Полярной звезды. Нижняя кривая представляет собой число квантов индуцированного излучения. Верхняя кривая учитывает постоянную составляющую спонтанного излучения, обусловленную другими элементами источника излучения, кроме квантовой системы.

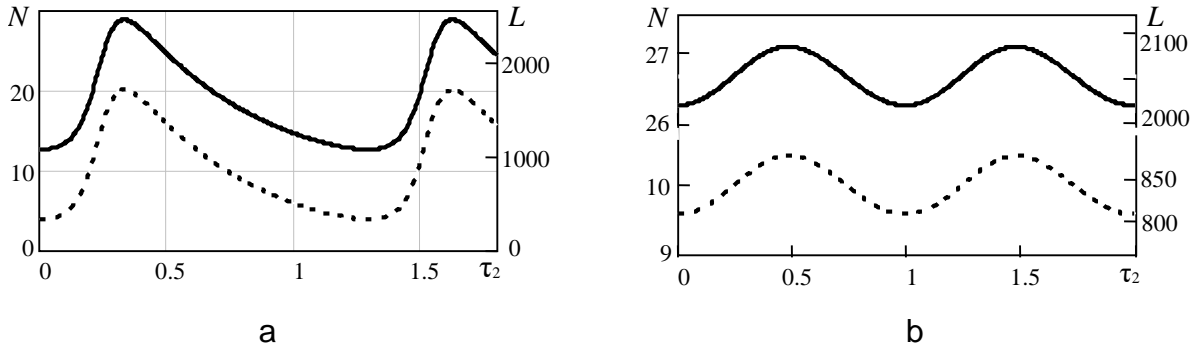


Рис. VI.1. Зависимости от времени относительного числа квантов (левая шкала) и соответствующей светимости (правая шкала) дельты Цефея (а) и Полярной звезды (b).

Нижняя кривая на каждом фрагменте представляет собой число квантов индуцированного излучения. Верхняя кривая учитывает постоянную составляющую спонтанного излучения, обусловленную другими элементами источника излучения, кроме квантовой системы.

Ниже на рисунках VI.2 и VI.3 изображено изменение звездной величины звезды дельты Цефея [VI-4]. и Полярной звезды [VI-5] со временем. По оси ординат отложены значения видимой звездной величины, по оси абсцисс время в долях периода изменения яркости звезды.

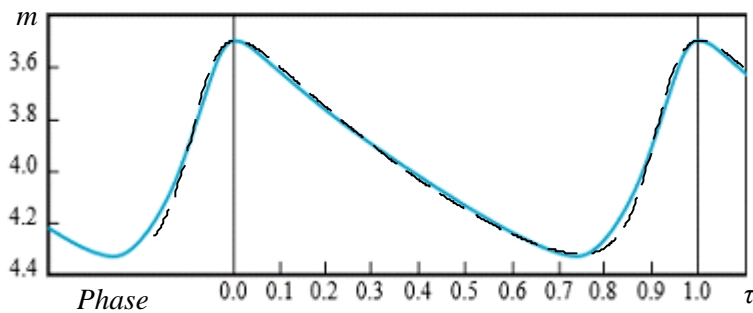


Рис. VI.2. Изменение звездной величины звезды дельты Цефея со временем. (сплошная кривая – полученная в 1930-е гг. Н. Ф. Флорей при помощи визуального фотометра) см., например, [VI.-6] и решение уравнений системы (6.10)–(6.11) в тех же переменных, при подборе уровня спонтанного излучения и масштабов (пунктир).

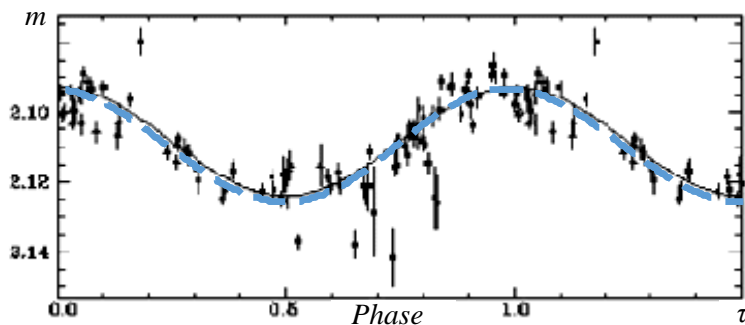


Рис. VI.3. Изменение звездной величины Полярной звезды со временем.

(сплошная кривая) и решение уравнений системы (6.10)-(6.11) в тех же переменных, при подборе уровня спонтанного излучения и масштабов (пунктир).

Подобный слой с активной средой, которую можно описать находящейся вблизи равновесия квантовой двухуровневой системой может существовать в звездах и скорее всего локализован в области фотосферы. При наличии в атмосфере звезды значительной конвекции могут быть реализованы условия для генерации импульсов индуцированного излучения. Оказывается, что можно увидеть подобие полученных решений с известными наблюдениями изменения светимости звезд-цефеид (дельты Цефея и Полярной звезды). При этом отношение периодов изменения светимости согласно таблице 6.1. также подобно (с точностью до 2,5 %).

Важно заметить, что решения уравнений (6.10) – 6.11) для этих двух случаев находятся на одной диаграмме рис. 6.3, что соответствует одному типу объектов. Так же как цефеиды малых амплитуд (DCEPS) типа Полярной звезды принадлежат к классу классических цефеид, ярким представителем которых является дельта Цефея.

Литература к приложению VI

VI-1. On the formation of pulses of coherent radiation in weakly inverted media / Kirichok A. V., Kuklin V. M., Mischin A. V., Pryjmak A. V., Zagorodny A. G. // XII international workshop "plasma electronics and new acceleration methods" 26–30 August, 2013, Kharkov, Ukraine; VANT, Series "Plasma Electronics and New Methods of Acceleration" 2013. – N 4 (86). – Issue 8. – P. 267–271

VI-2. Kirichok A. V., Kuklin V. M., Zagorodny A. G On the nature of periodically pulsating radiation sources / arXiv preprint arXiv / 1610.04628v1 [quant-ph] – 2016.

VI-3. Расторгуев А. С. Лекции по галактической астрофизике
<http://www.astronet.ru/db/msg/1228262>

VI-4. Jim Kaler, Stars and stars of the week. University of Illinois.
<http://stars.astro.illinois.edu/sow/deltacep.html>

VI-5. Jim Kaler, Stars and stars of the week. University of Illinois.
<http://stars.astro.illinois.edu/sow/polaris.html>

VI-6. Samus, N. N. & Durlevich, O. V. (April 2011), GCVS – General Catalog of Variable Stars, Institute of Astronomy of Russian Academy of Sciences and Sternberg State Astronomical Institute of the Moscow State University..

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНО-ВОЛНОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Получим воспользовавшись результатами раздела 1, систему уравнений турбулентно волновой неустойчивости подобную (7.2) в несколько упрощенной форме для большей наглядности. Рассмотрим возмущение, которое вносит ионно-звуковая волна с амплитудой E_s и частотой $\Omega = Kc_s$, распространяющаяся в плазме, в функцию распределения пучка электронов

$$f_1 = i \frac{eE_s}{m(\Omega - Kv)} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (\text{VII.1})$$

Если невозмущенная функция распределения Максвелловская $f_b = [n_{b0} / \sqrt{\pi} v_{Tb}] \cdot \exp\{-(v - v_{0b})^2 / v_{Tb}^2\}$, то легко показать, что $f_1 = (2ieE_s / Kv_0 v_{Tb} m) f_0$ и соответственно $\partial f_1 / \partial v = (2ieE_s / Kv_0 v_{Tb} m) \cdot \partial f_0 / \partial v$, тогда уравнение (2.7) принимает вид

$$\partial E_k / \partial t = 2(\gamma_0 - \delta_D) E_k - \frac{i4\gamma_0 e E_s}{Kv_0 v_{Tb} m} \cdot E_k - \frac{e}{Mc_s} E_s \cdot E_k + Q \cdot \left(1 - \frac{i2eE_s}{Kv_0 v_{Tb} m}\right), \quad (\text{VII.2})$$

где источник спонтанного излучения в отсутствии волны $Q = 2\pi^2 e^2 [\omega^2 / k^3] \cdot f_b$, инкремент пучковой неустойчивости $\gamma = \frac{2\pi^2 e^2 \omega}{mk^2} \partial f_0(v) / \partial v |_{v=\omega/k}$, а третье слагаемое правой части (VI.2) ответственно за снос энергии ВЧ турбулентности в поле ионно-звуковой волны в плазме со скоростью $V_i = -ieE_s / M\Omega$, M – масса иона, $c_s = \sqrt{T_e / M}$ – скорость звука.

Из уравнения для возмущений плотности плазмы в полях ВЧ турбулентности (см. раздел 20)

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2}, \quad (\text{VII.3})$$

воспользовавшись соотношением $n = +en_p E_s / M \cdot c_s$, получим уравнения для медленного изменения амплитуды ионно-звуковой волны

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = -\frac{K}{8en_p} \tilde{E}_k, \quad (\text{VII.4})$$

где плотность энергии представлена в виде

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k0}(t) + \tilde{E}_k \cdot \exp\{-i\Omega t + iKx\} + \tilde{E}_k^* \cdot \exp\{i\Omega t - iKx\} = \\ &= E_0 [W_0(t) + W_1 \cdot \exp\{-i\Omega t + iKx\} + W_1^* \cdot \exp\{i\Omega t - iKx\}]. \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

Систему уравнений (VI.2) (VI.4) можно записать в виде

$$\partial W_0 / \partial \tau = -\varepsilon_0 \cdot W_0 + i\alpha (A^* \cdot W_1 - A \cdot W_1^*) - \lambda (A^* \cdot W_1 + A \cdot W_1^*) + q, \quad (\text{VII.6})$$

$$\partial W_1 / \partial \tau = -\varepsilon_0 \cdot W_1 + 2i\alpha A \cdot W_0 - 2\lambda A \cdot W_0, \quad (\text{VII.7})$$

$$\partial A / \partial \tau = -\mu W_1. \quad (\text{VII.8})$$

используя следующие обозначения $\tau = \delta_D \cdot t$, $2(\gamma_0 - \delta_D) = -\varepsilon_0 \cdot \delta_D$, $A = E_s / |E_s(\tau = 0)|$, $\alpha = 2\gamma_0 e |E_{s0}| / Kv_0 v_{Tb} m \delta_D$, $\lambda = e |E_{s0}| / 2Mc_s \delta_D$, $q = Q / E_0 \delta_D$, $\mu = KE_0 / 8en_p \delta_D |E_{s0}|$.

Таким образом, не трудно получить с точностью до некоторых численных коэффициентов подобную систему уравнений, описывающую взаимодействие турбулентности с НЧ волной, способной изменить степень отклонения от порога неустойчивости.

ПРИЛОЖЕНИЕ VIII

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Систему уравнений (7.2), которая описывает распад поля накачки на две волны, можно представить в виде одного уравнения

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\partial}{\partial x} + \delta_2 \right) - \alpha_1 \alpha_2 \right\} A_{1,2} = 0 \quad (\text{VIII.1})$$

Для получения решения (VIII.1) с некоторыми начальными условиями в области $-\infty < x < \infty$ на интервале $0 < t < \infty$ воспользуемся преобразованиями Фурье по координате и преобразованием Лапласа по времени

$$A_i(\Omega, K) = \int_0^{\infty} dt \cdot \exp(i\Omega t) \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot A_i(t, x) \cdot \exp(-iKx) \quad (\text{VIII.2})$$

Для получения компонента Фурье амплитуды волн используем уравнение

$$D_L(\Omega, K) \cdot A_i(\Omega, K) = [(\Omega - Kv_1)(\Omega - Kv_2 + iv_2) + \alpha_1 \alpha_2] \cdot A_i(\Omega, K) = A_{i0}(K) \quad (\text{VIII.3})$$

где $A_{i0}(K)$ - функции, определяемые начальными условиями:

$$A_{i0}(0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{i0}(K) \cdot \exp(iKx) \cdot dK \quad (\text{VIII.4})$$

При этом в движущейся со скоростью V относительно лабораторной системе отсчета $(\xi = x - Vt, t)$, $v_2 < V < v_1$ и дисперсионное уравнение $D(\Omega, K)$ для возмущений вида $\square \exp\{-i\Omega t + iK\xi\}$, которое отвечает системе уравнений (VII.1) в принятых предположениях будет иметь следующий вид

$$D(\Omega, K) = (\Omega - Kv_1 + KV)(\Omega + KV - Kv_2 + iv_2) + \alpha_1 \alpha_2. \quad (\text{VIII.5})$$

Очевидно дисперсионное уравнение в лабораторной системе отсчета

$$D(\Omega, K)|_{V=0} = D_L(\Omega, K). \quad (\text{VIII.6})$$

Выполняя обратное преобразование, находим

$$A_i(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{C_\Omega} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dK \frac{A_{i0}(K)}{D(\Omega, K)} \exp\{-i\Omega t + iK\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \cdot G_i(\xi - \xi', t) \cdot A_{i0}(\xi, 0),$$

где $G_i(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{C_\Omega} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dK \frac{\exp\{-i\Omega t + iK\xi\}}{D(\Omega, K)}$ – функция Грина, вид которой

не зависит от начальных условий, а определяется только свойствами системы. Контур интегрирования C_Ω параллелен оси $\text{Re}\Omega = 0$ и находится выше всех особенностей подинтегрального выражения. Замыкая его в нижней полуплоскости Ω получим

$$G(\xi, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK \sum_n \frac{\exp\{-i\Omega_n(K) \cdot t + iK\xi\}}{D'_n[\Omega_n(K), K]} \quad (\text{VIII.7})$$

где $D'_n[\Omega_n(K), K] = \frac{\partial}{\partial \Omega} D(\Omega, K) |_{\Omega = \Omega_n(K)}$, причем $\Omega = \Omega_n(K)$ – корни дисперсионного уравнения $D(\Omega, K) = 0$.

Если $\text{Im}\Omega_n(K) < 0$, для всех ветвей колебаний, то система устойчива.

Если же для какого-либо корня $\text{Im}\Omega_n(K) > 0$, то следует ожидать развития неустойчивости, хотя тип неустойчивости остается пока не определенным. Для случая взаимодействия двух волн (VII.1) корней всего два:

$$\Omega_1 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \left[-1 - \theta \frac{v_1 - V}{2V - v_1 - v_2} \right], \quad \Omega_2 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \left[-\frac{v_1 - V}{v_1 - v_2} - \frac{1 - \theta}{1 + \theta^2} \cdot \frac{V - v_2}{v_1 - v_2} \right]. \quad (\text{VIII.8})$$

Вообще говоря, интеграл можно вычислить, воспользовавшись теоремой о вычетах. Для этого дополним контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса. При больших значениях $|K|$ $\Omega_1(K) \rightarrow K(v_1 - V)$ и $\Omega_2(K) \rightarrow K(v_2 - V)$, а так как замыкать контур можно только при $\text{Im}\Omega_n(K) < 0$, то при $(v_1 - V) > 0$ и $(v_2 - V) > 0$ замыкать контур придется в нижней полуплоскости, а при $(v_1 - V) < 0$ и $(v_2 - V) < 0$, соответственно в верхней полуплоскости комплексного переменного K . Корни при этих условиях находятся во внутренней области, охватываемой контуром. Можно убедиться, что в любой отдельной области $\lim_{t \rightarrow \infty} G(\xi_0, t) \rightarrow 0$. То есть, при этих условиях абсолютная неустойчивость не реализуется.

При $v_2 < V < v_1$ воспользоваться теоремой о вычетах нельзя, ибо интеграл по дуге большого радиуса расходится. Поэтому интеграл следует вычислять иным образом, например, методом перевала. Возмущение, представляющее собой огибающую поля колебаний, пропорционально $\exp\{-i\Omega_0 t\}$, где Ω_0 – значение корня дисперсионного уравнения $D(\Omega, K) = 0$, отвечающего неустойчивости в точке, где обращается в нуль производная $\partial\Omega / \partial K$. Точки перевала, определяемые из уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K} \Big|_{D(\Omega, K)=0} = 0 \quad (\text{VIII.9})$$

являются также точками ветвления функции $\Omega = \Omega_n(K)$, кроме того, это условие развития неустойчивости, при котором групповая скорость огибающей обращается в нуль

$$V_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K} \Big|_{D(\Omega, K)=0} = - \left[\frac{\partial D(\Omega, K)}{\partial K} \right] \Big|_{D(\Omega, K)=0} / \left[\frac{\partial D(\Omega, K)}{\partial \Omega} \right] \Big|_{D(\Omega, K)=0} = 0. \quad (\text{VIII.10})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IX ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ

Покажем, что если скорость выбранной нами системы отсчета V не попадает в интервал скоростей $v_g < V < v_0$, по крайней мере при низком уровне поглощения, то абсолютная неустойчивость в этой системе отсчета не реализуется. Интеграл типа (VIII.7) можно вычислить, воспользовавшись теоремой о вычетах. Дополняем как ранее контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса, При $|K| \rightarrow \infty$ $\Omega_1(K) \rightarrow K(v_1 - V)$ и $\Omega_2(K) \rightarrow K(v_g - V)$, а так как замыкать контур можно только при $\text{Im} \Omega_n(K) < 0$, то при $(v_1 - V) > 0$ и $(v_g - V) > 0$ замыкать контур придется в нижней полуплоскости, а при $(v_1 - V) < 0$ и $(v_g - V) < 0$, соответственно в верхней полуплоскости комплексного переменного K . Интеграл при этом равен сумме вычетов подинтегрального выражения в области, охваченной контуром. Чтобы найти сумму этих вычетов решим совместно уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} D(\Omega, K) = 0 \text{ и } D(\Omega, K) = 0,$$

в результате найдем

$$\Omega_n = \frac{i\delta(v_0 - V)}{v_g - v_0} + \gamma_0 \frac{[2(v_g - V) - (v_0 - V)]}{3(v_g - v_0)} \exp\{2\pi ni / 3\}, \quad (\text{IX.1})$$

$$K_n = \frac{i\delta}{v_g - v_0} + \gamma_0 \frac{\exp\{\pi i / 3\}}{3(v_g - v_0)} \exp\{2\pi ni / 3\}. \quad (\text{IX.2})$$

Выберем из корней $n = 0; 1; 2$ те, что находятся во внутренней области. Во всех случаях при $t \rightarrow \infty$, $G(\xi, t) \rightarrow 0$, то есть при $(v_1 - V)(v_g - V) > 0$ развиваться может лишь конвективная неустойчивость.

Очевидно, что при $(v_1 - V)(v_g - V) < 0$ воспользоваться теоремой о вычетах нельзя из-за расходимости интеграла вида (VII.7), который тем не менее можно вычислить методом перевала. Огибающая поля колебаний,

в случае неустойчивости растет пропорционально $\exp\{-i\Omega_0 t\}$, где Ω_0 – значение корня дисперсионного уравнения $D(\Omega, K) = 0$, в точке, где обращается в нуль производная $\partial\Omega / \partial K$. Таким образом, можно определить, используя уравнения (9.6) и

$$\partial\Omega / \partial K |_{D(\Omega, K)=0} = 0, \quad (\text{VIII.3})$$

точку перевала (9.7) и (9.8), которая и обеспечивает рост поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ X ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ С ПЛАЗМОЙ В МНОГОМОДОВОМ РЕЖИМЕ

Уравнение для описания процесса взаимодействия пучка с плазмой может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} E + 4\pi\{J_L + J_b\} = 0, \quad (\text{X.1})$$

где J_L – линейный по амплитудам возмущений ток в плазме, J_b – ток пучка. Так как фазовая скорость пучка значительно превосходит тепловую скорость частиц плазмы, уравнение (X.1) можно представить в виде

$$i\omega\varepsilon(pk_{00}v_{b0}, pk_{0b})E_{0p} + \frac{\partial}{\partial\omega} \omega\varepsilon(\omega, k) \Big|_{\substack{\omega=pk_{00}v_{b0} \\ k=pk_{00}}} \left(\frac{\partial}{\partial t} E_{0p} - \delta \cdot E_{0p} \right) = \\ = +4\pi en_{b0} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx_0 v_b \exp\{ipk_{00}(x - v_{b0}t)\} dx, \quad (\text{X.2})$$

где $\varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ и δ – здесь линейный декремент поглощения энергии колебаний $p = 1, 2, 3 \dots P$, $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_{e0}$, n_0 , n_{b0} – невозмущенные плотности плазмы и пучка, e , m_{e0} – заряд и масса покоя электронов, v_b – скорость электронов пучка, причем в начальный момент пучок полагаем моноэнергетическим $v_b |_{t=0} = v_{b0}$, $p_0 k_{00} v_{0b} = \omega_{pe}$, интегрирование в (X.2) проводится по начальным положениям частиц пучка $x |_{t=0} = x_0$. Очевидно, что здесь k_{00} – интервал между модами пространственного спектра. Электрическое поле длинноволновых возмущений, фазовая скорость которых совпадает со скоростью пучка, имеет вид

$$E = \sum_{p>0} E_{0p} \exp\{-ipk_{00}(x - v_{0b}t)\}, \quad (\text{X.3})$$

где $\varepsilon(pk_{0b}v_{b0}, pk_{00}) = 1 - \omega_{pe}^2 / (pk_{00}v_{b0})^2 = 1 - p_0^2 / p^2$, $\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \varepsilon(\omega, k) \Big|_{\substack{\omega=pk_{00}v_{b0} \\ k=pk_{00}}} = 1 + p_0^2 / p^2$.

Уравнения движения частиц, моделирующих пучок, можно представить в виде

$$\frac{dx_b}{dt} = v_b, \quad (X.4)$$

$$\frac{dv_b}{dt} = -\text{Re} \sum_p \frac{eE_{0p}}{m_{e0}} \exp\{-ipk_{00}[x - v_b t]\}. \quad (X.5)$$

Приведем также суммарное длинноволновое поле, возбуждаемое пучком, действующее на частицы плазмы

$$\begin{aligned} E_0 \exp\{i\omega_{pe} t\} &= |E_0| \exp\{i\omega_{pe} t + i\phi_0\} \approx \sum_p E_{0p} \exp\{ipk_{00}v_{0b}t - ipk_{00}x\} \approx \\ &\approx \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} E_{0p} \exp\{ipk_{00}v_{0b}t\} = \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} |E_{0p}| \exp\{ipk_{00}v_{0b}t + i\phi_{0p}\}, \end{aligned} \quad (X.6)$$

где пренебрежем отклонениями $pk_{00}\Delta x \ll \Delta x / \lambda_0 \ll 1$, где λ_0 – характерная длина волны интенсивных ленгмюровских колебаний, возбуждаемых пучком, и возмущениями, частота которых заметно отличается от ленгмюровской частоты. Амплитуда возбуждаемых пучком электронов длинноволновых ленгмюровских колебаний при этом оказывается равна

$$|E_0| = \sqrt{\left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} |E_{0p}| \cdot \text{Cos}\{\phi_{0p}'\} \right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} |E_{0p}| \cdot \text{Sin}\{\phi_{0p}'\} \right]^2}, \quad (X.7)$$

а для фазы ϕ_0 справедливо уравнение

$$\begin{aligned} |E_0| \frac{\partial \phi_0}{\partial t} &= \text{Cos}\{\phi_0\} \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[\frac{\partial |E_{0p}|}{\partial t} \text{Sin}\{\phi_{0p}'\} + |E_{0p}| \text{Cos}\{\phi_{0p}'\} \frac{\partial \phi_{0p}'}{\partial t} \right] - \\ &- \text{Sin}\{\phi_0\} \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[\frac{\partial |E_{0p}|}{\partial t} \text{Cos}\{\phi_{0p}'\} - |E_{0p}| \text{Sin}\{\phi_{0p}'\} \frac{\partial \phi_{0p}'}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (X.8)$$

где использованы выражения, $\phi_{0p}' = \phi_{0p} + (pk_{00}v_{0b} - \omega_{pe})t$

$$\text{Cos}\{\phi_0\} = \frac{1}{|E_0|} \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} |E_{0p}| \cdot \text{Cos}\{\phi_{0p}'\}, \quad (X.9)$$

$$\text{Sin}\{\phi_0\} = \frac{1}{|E_0|} \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} |E_{0p}| \cdot \text{Sin}\{\phi_{0p}'\}. \quad (X.10)$$

В пренебрежении нелинейностью плазмы, система уравнений (X.2) – (X.5) описывает возбуждение пучком нерелятивистских электронов длинноволновых колебаний. Можно показать, что в этих условиях выполняется соотношение, представляющее собой интеграл системы уравнений (X.2) – (X.5)

$$\sum_p \frac{1}{4\pi R_p} \{ |E_{0p}|^2 - \theta \int_0^t dt' |E_{0p}(t')|^2 \} + m_{e0} v_{0b} n_{b0} \cdot \frac{k_{00}}{2\pi} \int_{-\pi/k_{00}}^{\pi/k_{00}} v_b dx_0 = Const, \quad (X.11)$$

где $\frac{\partial}{2\partial\omega} \omega \varepsilon(\omega, k) \Big|_{\substack{\omega = mk_{00} v_{b0} \\ k = mk_{00}}} = R_p^{-1}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ XI ДИССИПАТИВНЫЙ РЕЖИМ ГЕНЕРАЦИИ В РЕЗОНАТОРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ АКТИВНЫМ ВЕЩЕСТВОМ

Для локальных переменных E_j , P_j и M_j справедливы укороченные уравнения полуклассической модели описания (см. раздел 4)

$$\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \Gamma_{12} P_j = -i M_j E_j, \quad (XI.1)$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial \tau} = \frac{i}{2} [E_j P_j^* - E_j^* P_j], \quad (XI.2)$$

где $E_j(\tau) = \left(\sqrt{\frac{2}{S}}\right) \cdot |E(\tau)| \cdot \text{Sin}\left\{2\pi \frac{j}{S} + \alpha\right\}$, $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^S (M_j + M_j^*) = M$.

Для числа квантов поля можно записать уравнение (закон сохранения)

$$\frac{\partial M}{2\partial \tau} + \frac{\partial \langle E(\tau) \rangle^2}{\partial \tau} + 2\Theta \langle E(\tau) \rangle^2 = 0 \quad (XI.3)$$

Следует обратить внимание, что случай $\Gamma_{12} > 1$ отвечает низким уровням интенсивности электрического поля или небольшим значениям инверсии населенностей. Напротив, при обратном неравенстве $\Gamma_{12} < 1$, интенсивности излучения и инверсии населенности весьма значительны.

Рассмотрим решения системы (XI.1), (XI.2), (XI.3) используя следующие обозначения

$$N(\tau) = \frac{1}{S} \sum N_j(\tau), \quad M(\tau) = \frac{1}{S} \sum M_j(\tau), \quad E_j(\tau) = \sqrt{2N(\tau)} \cdot \text{Sin}\left(2\pi \frac{j}{S}\right). \quad (XI.4)$$

При условиях $N(0)=0.001$ $M(0)=1$ $S=100$, $\Gamma_{12} = 0$. В этом случае обсудим влияние внешнего поглощений энергии поля, например, за счет вывода энергии ($\Theta \neq 0$).

Здесь использованы обозначения

$\mu / \mu_0 = M$, $\Omega_0 = |d_{ab}| \cdot |E_0| / \hbar = |d_{ab}| \cdot [4\pi\omega \cdot \mu_0 / \hbar]^{1/2}$ – частота Раби, отвечающая значению амплитуды электрического поля $|E_0| = [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $E = E(t) / [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $P = 4\pi\omega P(t) / \Omega_0 [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $\tau = \Omega_0 t$, $\Gamma_{12} = \gamma_{12} / \Omega_0$, $\Theta = \delta / \Omega_0$.

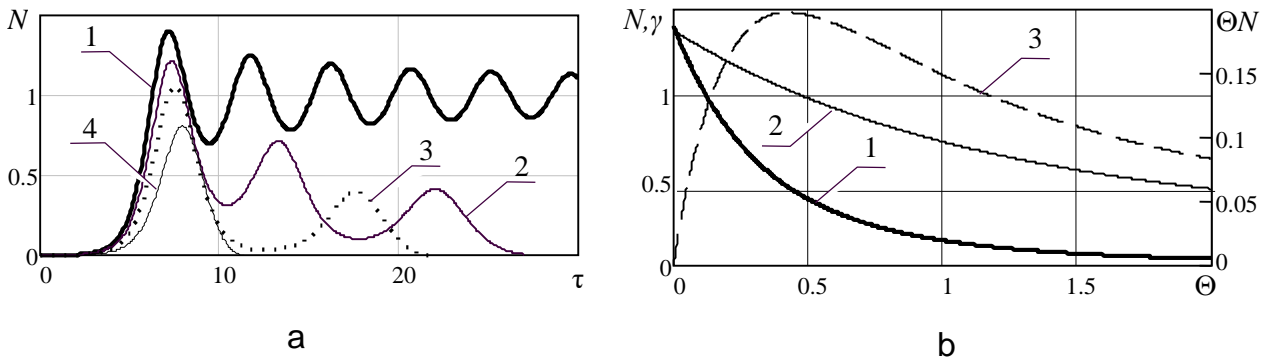


Рис. XI.1. а). Зависимость N от времени при разных Θ . 1 – $\Theta = 0$; 2 – $\Theta = 0.05$; 3 – $\Theta = 0.1$; 4 – $\Theta = 0.2$; б). Линейный инкремента процесса $\gamma = dN / Nd\tau$, максимально достижимая интенсивность поля N_{MAX} , а также максимальный поток энергии из системы $\Theta \cdot N_{MAX}$ как функции величины Θ . 1 – N_{max} ; 1 – γ_{max} ; 3 – ΘN_{max} . Во всех случаях ширина линии пренебрежимо мала $\Gamma_{12} = 0$

Представим зависимость N от времени при разных уровнях поглощения Θ , а также рассмотрим изменение линейного инкремента процесса $dN / Nd\tau$, максимально достижимую относительную интенсивность поля N_{MAX} , а также максимальный поток энергии из системы $\Theta \cdot N_{MAX}$ как функции величины Θ , отвечающие за вывод энергии из волновода [XI-1].

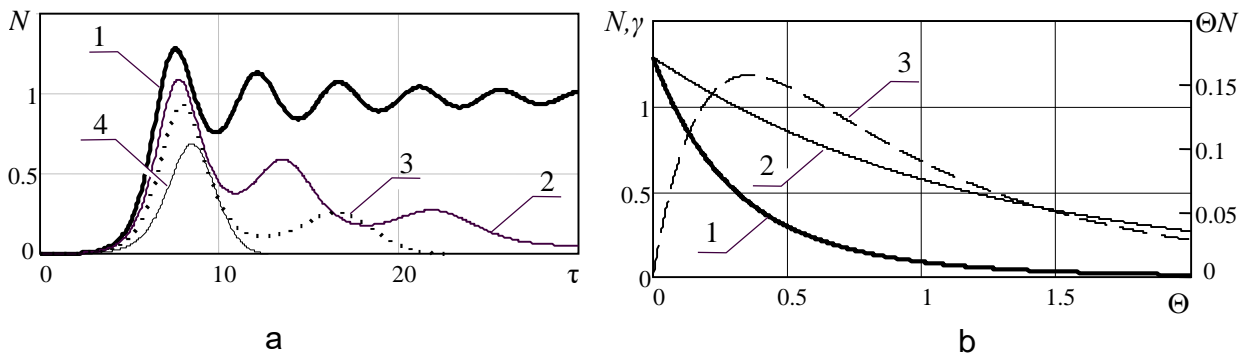


Рис. XI.2. а). Зависимость N от времени при разных Θ . 1 – $\Theta = 0$; 2 – $\Theta = 0.05$; 3 – $\Theta = 0.1$; 4 – $\Theta = 0.2$; б). Линейный инкремент процесса $\gamma = dN / Nd\tau$,

максимально достижимая интенсивность поля N_{MAX} , а также максимальный поток энергии из системы $\Theta \cdot N_{MAX}$ как функции величины Θ . 1 – N_{max} ; 1 – γ_{max} ; 3 – ΘN_{max} . Во всех случаях для ширины линии справедливо выражение $\Gamma_{12} = 0.1$

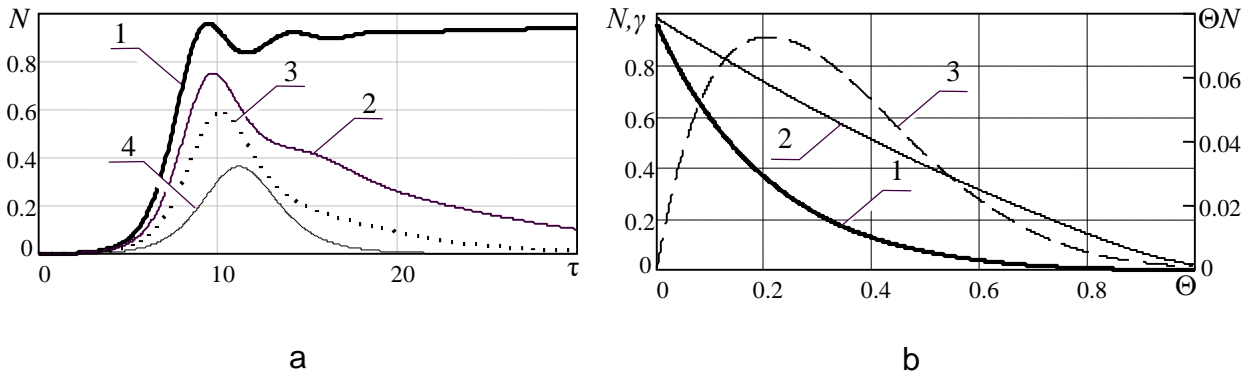


Рис. XI.3. а). Зависимость N от времени при разных Θ . 1 – $\Theta = 0$; 2 – $\Theta = 0.05$; 3 – $\Theta = 0.1$; 4 – $\Theta = 0.2$; б). Линейный инкремента процесса $\gamma = dN / Nd\tau$, максимально достижимая интенсивность поля N_{MAX} , а также максимальный поток энергии из системы $\Theta \cdot N_{MAX}$ как функции величины Θ . 1 – N_{max} ; 1 – γ_{max} ; 3 – ΘN_{max} . Во всех случаях ширина линии определяется выражением $\Gamma_{12} = 0.5$

Особенностью решений системы (XI.1) – (XI.3) при больших значениях Θ , то есть при заметном выводе энергии из системы является наличие только одного максимума поля, что возможно обусловлено быстрым снижением уровня инверсии в волноводе. На рис. XI.4. представлена диаграмма зависимости максимальной амплитуды поля как функции двух переменных Θ и Γ_{12} :

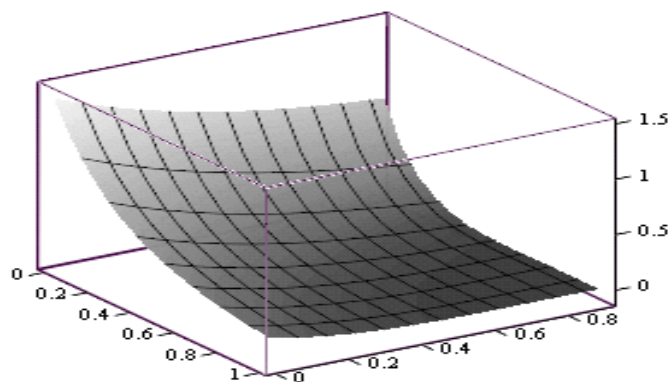


Рис. XI.4. Зависимость N_{max} от величин Θ и Γ_{12}

Литература к приложению XI

XI-1. Kostenko V. V. Kuklin V. M., Poklonskiy V. M. On generation of a wave package in a waveguide, filled active medium / VANT, 2020. – N 3 (127), с.105-109.

ПРИЛОЖЕНИЕ XII КАВИТОНЫ, ФОРМИРУЕМЫЕ В ОБЛАСТИ ПЛАЗМЕННОГО РЕЗОНАНСА

Явление конверсии электромагнитного поля в области плазменного резонанса в неоднородной области на границе плазмы приводит к передаче части энергии внешнего поля коротковолновым ленгмюровским колебаниям, распространяющимся в сторону уменьшения плотности плазмы [XII-1] – [XII-3]. В данном разделе ограничимся рассмотрением только одномерного случая, так как нас будут интересовать лишь последствия формирования кавитонов и их влияние на протекание релаксационных процессов. В работах [XII-4] – [XII-7] было обнаружено, что нелинейный декремент затухания электромагнитных колебаний, обусловленный поглощением их энергии (конверсией в другие виды колебаний) в области плазменного резонанса с ростом интенсивности электромагнитного поля уменьшается обратно пропорционально его амплитуде. В качестве иллюстрации этого положения рассмотрим затухание поверхностной волны на размытой границе однородной плазмы (поле которой проникает в плазму на глубину, существенно превышающую размер граничной неоднородности). В неоднородной области в окрестности плазменного резонанса происходит возбуждение коротковолновых плазменных колебаний, групповая скорость которых направлена в сторону границы плазмы. Этот процесс приводит к частичной конверсии поверхностной волны в плазменные колебания. Так, в частности, линейный декремент колебаний поверхностной волны, распространяющейся вдоль размытой границы плазма – вакуум, обусловленный этой конверсией, имеет вид [XII-8, XII-9] (см. также [XII-10])

$$\delta_L = (\pi k_z \omega / 4)(d\varepsilon / dx) |_{\omega=\omega_{pe}}, \quad (\text{XII.1})$$

причем, ось X ориентирована вдоль неоднородности плазмы, а ось Z лежит в плоскости параллельной поверхности плазмы, $\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2(x) / \omega^2$ – диэлектрическая проницаемость плазмы. Остальные обозначения общепринятые. Наличие конверсии внешнего поля или поля поверхностной волны в продольные плазменные колебания в области плазменного резонанса позволяет корректно описать процесс проникновения поля в сильно неоднородную плазму с конечной температурой (линейная теория представлена в работе [XII-11]).

Огибающая ленгмюровских колебаний, возбуждаемых вблизи плазменного резонанса, подчиняется уравнению [XII-12]:

$$i\partial A / \partial \tau + \partial^2 A / \partial \xi^2 + A |A|^2 = \alpha_N + \alpha_N^{3/2}(\xi - i\sigma), \quad (\text{XII.2})$$

где $\tau = \omega t / 2[\alpha_N (k_D x_D)^{-2/3}]$, $\xi = 2\alpha_N^{-1/2} (k_D x_D)^{2/3} [(2x/x_D) - 1]$, $v_{Te} = T_e / m_{e0}$, $k_D = \omega / \sqrt{6} v_{Te}$, $\sigma = (v_e / \omega \alpha_N^{1/2}) (k_D x_D)^{2/3}$, $\alpha_N = 8\pi n_{e0} T_e / E_0^2 (k_D x_D)^2$, E_0 – амплитуда поверхностной волны. Условие $\alpha_N \ll 1$ в рассматриваемых условиях считаем выполненным. Выбираем решение в виде [XII-13.]:

$$A = a_s ch^{-1} \frac{a_s}{\sqrt{2}} (\xi - v\tau) \exp\left\{i\left(\frac{a_s^2}{2} + \frac{v^2}{2}\right)\tau + \frac{i}{2} v(\xi - v\tau)\right\} \quad (\text{XII.3})$$

Это точное решение уравнения (XII.2), где $\alpha_N = 0$ [XII-14]. В условиях $\alpha_N \ll 1$ учет правой части (XII.2) приводит к медленному изменению амплитуды a_s и скорости v возмущения, подобно тому, как это было сделано для гидродинамических решений [XII-13]. Влияние неоднородности на поведение поля плазменных волн ранее обсуждалось также в работе [XII-15].

В начальный момент $\tau < [2 / \pi^2 \alpha_N^2]^{1/3}$ происходит линейный рост «сползающего» к границе плазмы кавитона (и увеличение его скорости) $a_s \cong \pi \alpha_N \tau$, $v = -\alpha_N^{3/2} \tau$ который сменяется осциллирующим режимом (обменом энергией между кавитоном и полем поверхностной волны). Разделив средний поток энергии ленгмюровской волны на энергию поверхностной волны получим, что

$$\delta_{NL} = \delta_L (\alpha_N^{1/2} / 2^{3/2}). \quad (\text{XII.4})$$

То есть, декремент обратно пропорционален амплитуде поля электромагнитной волны. Кроме того, нелинейное затухание оказывается меньше линейного. Следует отметить, что использование стационарного описания поведения среднего поля вблизи плазменного резонанса также дает уменьшение поглощения энергии обратно пропорционально амплитуде внешнего проникающего излучения [XII-16] – [XII-18].

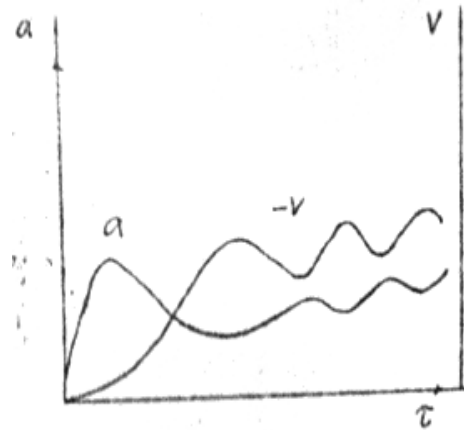


Рис. XII.1. Линейный рост «сползающего» к границе плазмы кавитона сменяется обменом энергией между кавитоном и полем поверхностной волны

В случае нелинейной теории интенсивное излучение способно изменить условия проникновения поля в плазму. Проникновение в плазму, плотность которой n_{e0} незначительно превышает критическое значение $n_{ecr} = \omega^2 m_{e0} / 4\pi e^2$, достаточно мощного излучения при превышении его амплитудой некоторого пороговой величины [XII-19] также может сопровождаться

формированием кавитонов – областей с пониженной плотностью плазмы, наполненных плазменными колебаниями. Подобная задача рассматривалась позднее также в работе [XII-20]. Было показано, что при достаточно больших интенсивностях внешнего поля формирующиеся кавитоны периодически возникают и перемещаются вглубь плазмы.

Литература к приложению XII

XII-1. Денисов Н. Г. Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме // ЖЭТФ, 1956. – Т. 31. – № 4. – С. 609–618.

XII-2. Пилия А. Д. О трансформации волн в неоднородной плазме. // ЖТФ, 1966. – т. 36. – № 5. – С. 818–826.

XII-3. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. – М. : Атомиздат, 1973. – С. 146–198.

XII-4. Kondratenko A., N. Kuklin V. M., Tkachenko V. I., Peneva I. Ch. On the change of beam instability nature in the plasma waveguide with diffuse boundaries. Conf. on Surface waves in plasma. Blagoevgrad Bulg., Sept. 28 – Oct. 3 1981. Inv. talk and contr. papers. Sofia, 1983. – P. 325–327.

XII-5. Давыдова Т. А. Параметрические неустойчивости и образование кавитонов в окрестности плазменного резонанса // Физика плазмы. 1982. – Т. 8. – № 4. – С. 850–856.

XII-6. Таранов В. Б. Шамрай К. П. Нелинейное насыщение резонансного затухания поверхностных волн, возбуждаемых электронным пучком в полуграниченной плазме // Физика плазмы, 1984. – Т. 1. – В. 5. – С. 961–967.

XII-7. Taranov V. B., Shamrai K. P. Resonance damping of intense surface wave in a semi-bounded plasma // Plasma Phys. and Contr. Fusion., 1985. – V. 27. – N 8. – P. 925–929.

XII-8. Романов Ю. А. К теории характеристических потерь в тонких пленках // ЖЭТФ, 1964. – Т. 47. – № 6. – С. 2119–2133.

XII-9. Степанов К. Н. О влиянии плазменного резонанса на распространение поверхностных волн в неоднородной плазме // ЖТФ, 1965. – Т. 35. – № 6. – С. 1002–1014.

XII-10. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 320 с.

X-11. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. К вопросу об эффективных граничных условиях в горячей плазме с размытой границей // Радиотехника и Электроника, 1981. – т. 26. – № 8. – С. 1708–1709.

XII-12. Morales G. I., Lee Y. C. Generation of density cavities and localized electric fields in a nonuniform plasmas // Phys. Fluids, 1977. – V. 20. – N 7. – P. 1135–1147.

XII-13. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток. – в кн.: Нелинейные волны. – М., Наука, 1979. – С. 63–104

X-14. Chen H. H., Liu C. S. Langmuir solitons and resonance absorption in laser irradiated plasmas // Plasma Physics, Edited by H. Wilhelmsson, N.Y. – 1977.

XII-15. Гильденбург В. Б., Фрайман Г. М. Деформация области плазменного резонанса в сильном электромагнитном поле. ЖЭТФ, 1975. – Т. 69. – № 5 (11). – С. 1601–1606.

XII-16. Гильденбург В. Б., Литвак А. С., Фрайман Г. М. Деформация профиля плотности и эффективность резонансного поглощения лазерного излучения в неоднородной плазме // Письма в ЖЭТФ, 1978. – В. 28 – С.433–436.

XII-17. Гильденбург В. Б. Скачок плотности плазмы в поле сильной электромагнитной волны и его влияние на эффективность резонансного поглощения // в сб. трудов «Взаимодействие сильных электромагнитных волн с бесстолкновительной плазмой» Горький, 1980. – С. 51–83.

XII-18. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 175 с.

XII-19. Резцов А. С. О проникновении мощной электромагнитной волны в плазму // Физика плазмы. 1986. – Т. 12, В. 4. – С. 496–499.

ПРИЛОЖЕНИЕ XIII

ЗАТУХАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В РЕЗОНАТОРЕ ЗАПОЛНЕННОМ АКТИВНОЙ СРЕДОЙ

Рассмотрим процессы затухания волновых пакетов конечной амплитуды в ограниченных системах, которые навязывают возможный набор длин волн мод в таком пакете и формируют пространственную структуру поля в волноводах. В случае заполнения волновода активной двухуровневой средой (системой диполей), описание возможно с помощью полуклассической модели взаимодействия поля и частиц (см., например, [XIII-1]). При этом квантовомеханическое описание среды объединяется с классическим представлением поля. В этом подходе существенную роль играет частота Раби, определяющая вероятности индуцированного излучения или поглощения квантов поля [XIII-2, XIII-3] и осцилляторное изменение инверсии населенностей (нутаацию).

В зависимости от соотношения между значениями частоты Раби $\Omega = |d_{ab}| |E(t)| / \hbar$ (где d_{ab} и E дипольный момент частицы и амплитуда электрического поля, соответственно) и ширины линии волнового пакета \mathcal{V}_{12} процесс может менять характер поведения поля. Здесь ширина линии обратно пропорциональна времени жизни состояний (времени жизни энергетических уровней), что обусловлено релаксационными процессами.

Для локальных переменных E_j , P_j и M_j справедливы укороченные уравнения полуклассической модели описания (см. раздел 4)

$$\frac{\partial P_j}{\partial \tau} + \Gamma_{12} P_j = -i M_j E_j, \quad (\text{XIII.1})$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial \tau} = \frac{i}{2} [E_j P_j^* - E_j^* P_j], \quad (\text{XIII.2})$$

где $E_j(\tau) = (\sqrt{\frac{2}{S}}) \cdot |E(\tau)| \cdot \text{Sin}\{2\pi \frac{j}{S} + \alpha\}$, $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^S (M_j + M_j^*) = M$.

Для числа квантов поля можно записать уравнение (закон сохранения)

$$\frac{\partial M}{\partial \tau} + \frac{\partial \langle E(\tau) \rangle^2}{\partial \tau} + 2\Theta \langle E(\tau) \rangle^2 = 0 \tag{XIII..3}$$

Напомним, что случай $\Gamma_{12} > 1$ отвечает низким уровням интенсивности электрического поля или небольшим значениям инверсии населенностей. Напротив, при обратном неравенстве $\Gamma_{12} < 1$, интенсивности излучения и инверсии населенности весьма значительны.

Рассмотрим решения системы (XIII.1), (XIII.2), (XIII.3) используя следующие обозначения

$\mu / \mu_0 = M$, $\Omega_0 = |d_{ab}| \cdot |E_0| / \hbar = |d_{ab}| \cdot [4\pi\omega \cdot \mu_0 / \hbar]^{1/2}$ – частота Раби, отвечающая значению амплитуды электрического поля $|E_0| = [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $E = E(t) / [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $P = 4\pi\omega P(t) / \Omega_0 [4\pi\hbar\omega\mu_0]^{1/2}$, $\tau = \Omega_0 t$, $\Gamma_{12} = \gamma_{12} / \Omega_0$, а также.

$$N(\tau) = \frac{1}{S} \sum N_j(\tau) , M(\tau) = \frac{1}{S} \sum M_j(\tau) , E_j(\tau) = \sqrt{2N(\tau)} \cdot \text{Sin}\left(2\pi \frac{j}{S}\right) . \tag{XIII.4}$$

Обсудим влияние ширины линии Γ_{12} на характер поглощений волны активными частицами. Внешние механизмы поглощения энергии рассматривать не будем ($\Theta = 0$).

Результаты численного моделирования. Для расчетов используем уравнения (XIII.1) – (XIII.4),

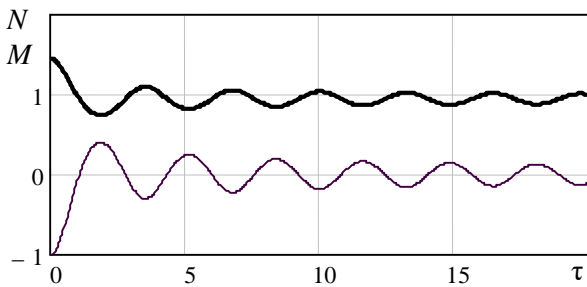


Рис. XIII.1. Поведение относительного числа квантов (жирная линия) и относительной инверсии населенностей (тонкая линия) с течением времени при пренебрежимо малой ширине линии $\Gamma_{12} = 0$

Ниже использованы начальные условия $N_0 = 1.45$, $M_0 = -1$, $S = 100$, $\Theta = 0$. Следует обратить внимание на осцилляции, обусловленные интерференцией процессов индуцированного излучения и поглощения квантов поля в разных участках волновода (см. рис. XIII 1.). Природа этого явления обсуждалась в разделе 4 (см. также

Частота осцилляций инверсии населенностей отвечает значениям частоты Раби и пропорциональна значению электрического поля в этой локальной области. Оказывается

в нашем случае при разной ширине линии с течением времени $N \rightarrow 0.95$, причем $M \rightarrow 0$. При увеличении ширины линии осцилляции интенсивности поля (число квантов) и инверсии населенностей ослабевают (см. рис. XIII-2.)

При достаточно большой ширине линии, режим изменения интенсивности поля (числа квантов) и инверсии населенностей приобретает монотонный характер (см. рис. XIII-3)

Это монотонное изменение числа квантов и инверсии населенностей двухуровневой системы в присутствии электрического поля характерно для случая описания процесса балансными уравнениями. Важно отметить, что конечная ширина волнового пакета способна подавить интерференцию колеблющихся с разной локальной частотой Раби участков инверсии населенностей в поле стоячей волны волновода.

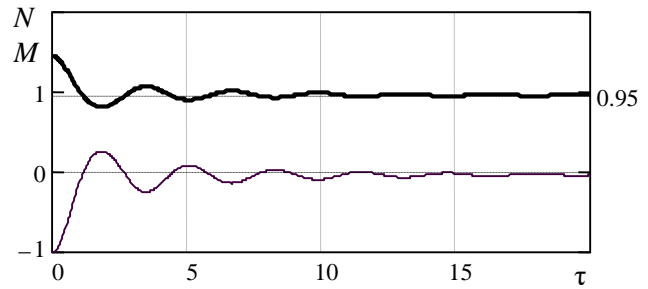


Рис. XIII.2. Поведение относительного числа квантов (жирная линия) и относительной инверсии населенностей (тонкая линия) с течением времени при малой ширине линии $\Gamma_{12} = 0.25$

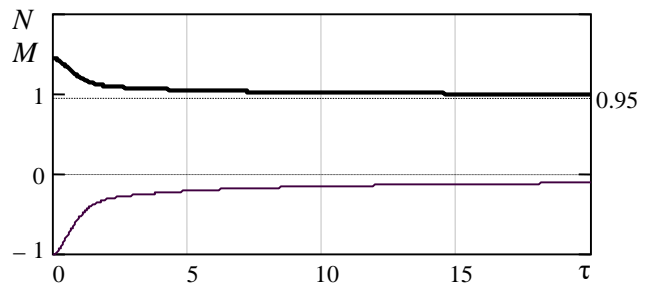


Рис. XIII.3. Поведение относительного числа квантов (жирная линия) и относительной инверсии населенностей (тонкая линия) с течением времени при ширине линии $\Gamma_{12} = 3$

Литература к приложению XIII

XIII-1. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. – М.: Наука. 1983.

XIII-2. Давыдов А. С. Квантовая механика Физматгиз. 1963. – 748 с.

XIII-3. Allen L., Eberly J. Optical resonance and two-level atoms. Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons. New York – London – Sydney – Toronto. 1975. – 222 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ XIV

ЗАТУХАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В РЕЗОНАТОРЕ ЗАПОЛНЕННОМ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМОЙ

Ширина линии волнового пакета может определяться как диссипативными процессами (в квантовой системе это величина, обратная времени жизни энергетических уровней) или реактивными процессами формирования волнового пакета (в классических волноводных системах это спектральная ширина пакета).

При рассмотрении затухания поля в плазме (затухания Ландау на электронах) роль инверсии населенностей берет на себя величина $\mu = n_2 - n_1 = f(v_0 + \hbar k / m) - f(v_0) = (\hbar k / m) \cdot \partial f(v) / \partial v |_{v=v_0}$, где $f(v)$ – функция распределения электронов по скоростям, n_2, n_1 – число электронов, скорость которых меньше и больше фазовой скорости волны [XIV-1, XIV-2]. При этом именно конечная спектральная ширина волнового пакета может влиять на характер распределение частиц по скоростям. При большой ширине пакета как известно [XIV-3] можно наблюдать процесс так называемой квазилинейной релаксации, который приводит к формированию «плато» на функции распределения частиц в пространстве скоростей. Кстати, роль частоты Раби здесь выполняет частота осцилляций захваченных частиц в потенциальной яме поля $\Omega_{tr} = \sqrt{ekE / m_e}$ (здесь e, m_e заряд и масса электрона, а k – волновое число колебаний, $v_{ph} = \omega / k$ фазовая скорость волны).

Если спектральная ширина пакета мала $\Delta k \cdot v_{ph} \approx \Delta \omega \ll \Omega_{tr}$, процесс затухания волны приобретает характерный осцилляторный вид, связанный с обменом энергией между волной и захваченными ее полем электронами плазмы. В случае обратного неравенства, наблюдается практически монотонный характер затухания поля с формированием в окрестности фазовой скорости волны характерного «плато» на функции распределения электронов по скоростям, отвечающего состоянию с нулевой инверсией населенностей в этом случае представляемой в виде $\mu = (\hbar k / m) \cdot \partial f(v) / \partial v |_{v=v_0} = 0$.

Рассмотрим процесс затухания плазменных (ленгмюровских) волн на электронах плазмы. Эффективно взаимодействуют с волной электроны, движущиеся со скоростью v близкой к фазовой скорости волнового пакета. Ограничимся для простоты описания одномерным случаем [XIV-4] (см. также [XIV-5]).

Из материалов раздела 2 следует, что комплексное уравнение для поля, которое описывает процесс индуцированного поглощения поля плазменной волны на электронах плазмы, может быть записано в виде

$$\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial E_n}{\partial t} + i\omega\varepsilon \cdot E_n = \frac{4\pi e\omega}{k} \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_0 \cdot \int_{-\pi/k}^{\pi/k} d\xi_0 \int_{-v_m}^{v_m} v_0 dv_0 \exp(ik_n \xi + i\varphi_n) \quad (\text{XIV.1})$$

где $\xi = x - v_0 t$, $\Delta v = v - v_0$, $n_{b0} = \int f_0(v) dv$, $\Delta v_m \propto 6\pi|\gamma|/k_0$, а начальные условия $\xi_0 = \xi(t=0) \in (-\pi/k_0, \pi/k_0)$ и $\Delta v_0 = \Delta v(t=0) \in (-\Delta v_m, \Delta v_m)$.

Результаты численного моделирования [XIV-6]. Для расчетов используем уравнения уже для пакета волн :

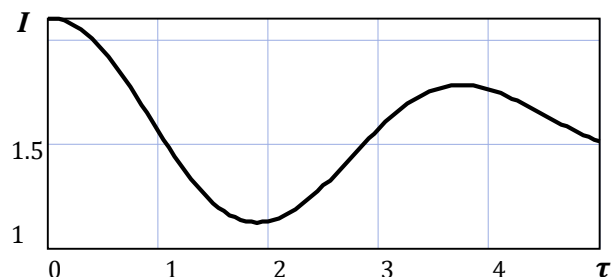
$$\frac{\partial A_n}{\partial \tau} + i(n - n_0)A_n = -8\pi \int_{-0.5}^{0.5} d\xi \int_{-\eta}^{+\eta} d\eta \cdot \eta \cdot \exp\{-2\pi n i \xi\} \quad (\text{XIV.2})$$

$$2\pi \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = -\text{Re} \left[\sum_3^6 A_n \cdot \exp\{2\pi n i \xi\} \right] \quad (\text{XIV.3})$$

где моды волнового пакета $A_n = |A_n| \exp\{i\varphi_n\}$, основная волна $n_0 = 5$, сателлиты $n = 3; 4; 6; 7$, при следующих начальных условиях: $A_5 = 1.0$ – амплитуда основной волны, амплитуды сателлитов – $A_3 = A_7 = 0.2$; $A_4 = A_6 = 0.7$, число частиц 5000, $\xi \in (0, 1)$, причем $\eta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\xi}{d\tau}$, $\xi = \frac{kx}{2\pi}$.

Поведение волнового пакета во времени исследуем по изменению суммы квадратов модулей всех амплитуд $|A_n|^2$. Это значение определяет интенсивность результирующей волны нашего пакета: $I = \sum_{n=3}^7 |A_n|^2$

В одномодовом режиме (случай узкой ширины линии волнового пакета – одна мода $n_0 = 5$) наблюдается осцилляция интенсивности волны. Этот режим затухания волны на начальной стадии известен как затухание Ландау. В расчетной схеме интенсивность монохроматической волны равна $I = |A_5|^2$. В развитом режиме процесс приобретает нелинейный характер со слабо затухающими осцилляциями поля (см. рис. XIV. 4).



Для пакета ($A_3 = A_7 = 0.2$; $A_5 = 1.0$; $A_4 = A_6 = 0.7$) наблюдается уменьшение интенсивности волнового пакета, связанное с обменом энергией между полем и захваченными волной электронами плазмы (см. рис. XIV.2).

Функция распределения электронов в окрестности фазовой скорости волны $f(\eta)$ для разных моментов времени для волновых пакетов с разной шириной линии представлена ниже.

В одномодовом режиме функция распределения сильно меняется при осцилляциях амплитуды волны (см. рис. XIV.3).

Затухание пакета приводит к формированию устойчивого состояния функции распределения электронов по скоростям с практически равной нулю производной по скорости вблизи фазовой скорости пакета (см. рис. XIV.4)

Рис. XIV.1. Поведение с течением времени интенсивности волны I в одномодовом режиме.

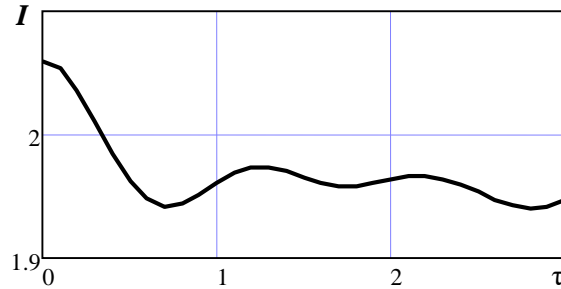


Рис. XIV.2. Поведение интенсивности волны I с течением времени для волнового пакета

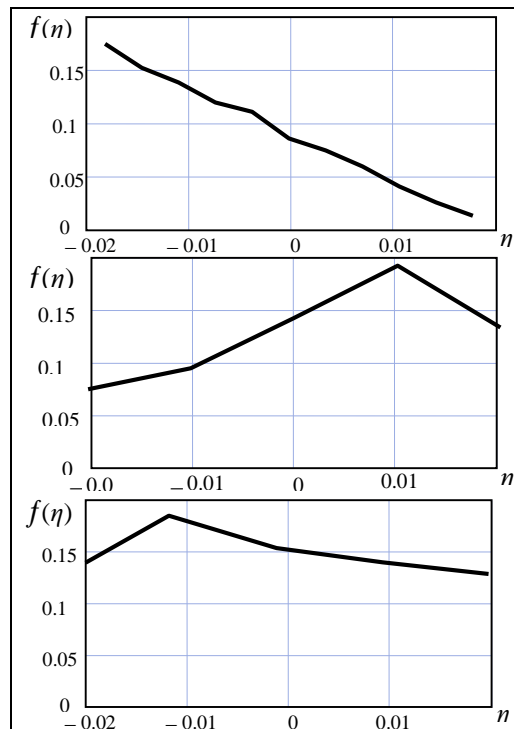


Рис. XIV.3. Функция распределения электронов в окрестности фазовой скорости волны $f(\eta)$ для моментов времени $t = 0; 3; 4$ в одномодовом режиме.

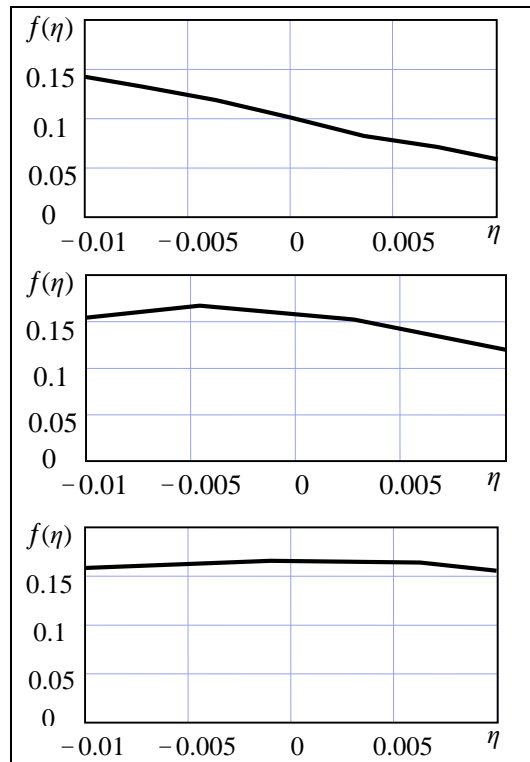


Рис. XIV.4. Функция распределения электронов в окрестности фазовой скорости волны для моментов времени $t = 0; 2; 5$ в случае затухания волнового пакета.

В случае малой спектральной ширины пакета $\Delta k \cdot v_{ph} \approx \Delta \omega \ll \Omega_{tr}$, процесс затухания волны приобретает характерный осцилляторный вид, связанный с обменом энергией между волной и захваченными ее полем электронами плазмы. В случае обратного неравенства, наблюдается монотонный характер затухания поля с формированием в окрестности фазовой скорости волны характерного «плато» на функции распределения электронов по скоростям, отвечающего состоянию с нулевой инверсией населенностей в этом случае представляемой в виде $\mu = (\hbar k / m) \cdot \partial f(v) / \partial v |_{v=v_0} = 0$.

Литература к приложению XIV

- XIV-1. Андронов А. А. К вопросу о затухании и нарастании плазменных волн // Изв. ВУЗов. Радиофизика, 1961. – Т. 4. – № 5. – С. 861–866.
- XIV-2. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
- XIV-3. Akhiezer A. I. Plasma Electrodynamics. / A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, A. G. Sitenko, K. M. Stepanov, R. V. Polovin. N.-Y. : Pergamon, 1975, 431p.
- XIV-4. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ, 1946. – Т. 16. – В. 7. – С. 574-586.
- XIV-5. Рухадзе А. А., Силин В. П. Путь создания физических представлений о плазме без столкновений // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 2 / В. А. Буц, А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Конторович, В. М. Куклин, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, А. В. Тур, В. В. Яновский;

под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. М. Куклин – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2016. – Вып. 2. – 376 с.

XIV-6. Kuklin V. M, E V. Poklonskiy E. V., Sevidov S. M, On the attenuation of a wave packet in limited systems filled with an active medium and plasma / East Eur. J. Phys. 1. 37-46 (2020) DOI:10.26565/2312-4334-2020-1-02.

ПРИЛОЖЕНИЕ XV

КИЛЬВАТЕРНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПЛАЗМЕ ЭЛЕКТРОННОГО СГУСТКА

Для получения кильватерного поля сгустка нам понадобилось найти кильватерное поле отдельной частицы. Важно отметить, что если рассматривать бесконечную периодическую систему расположения отдельных частиц, как это часто делают, а затем неограниченно увеличивать величину периода, то переход к кильватерному полю отдельной частицы сгустка окажется затруднительным. Ибо в периодической системе поле присутствует как впереди, так и позади отдельно взятой частицы. А для одиночной частицы поле излучения впереди нее в направлении ее движения отсутствует. Для получения корректного результата нужен иной способ расчета кильватерного поля отдельной частицы. Представим плотность заряда электрона, движущего со скоростью $v > 0$ в следующем виде $\rho = -e \cdot \delta(-v \cdot t + x - s) = -e \cdot \delta(\xi - s)$. Используем уравнение Пуассона $\partial D / \partial x = \partial \hat{\epsilon} E / \partial x = 4\pi\rho$, которое в Фурье представлении запишем в виде [XV-1]:

$$-ik\varepsilon(\omega, k) \cdot E(\omega, k) = 4\pi\rho(\omega, k) \quad (XV.1)$$

Выполняя обратное преобразование левой части уравнения, получим

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ik\xi\} \cdot dk \cdot [k \cdot \varepsilon(k) \cdot E(k)] = k_0 \cdot \left. \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \right|_{k_0} \cdot \frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} \cdot \exp\{-ik_0\xi\}. \quad (XV.2)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что волновой пакет располагается в пространстве волновых векторов вблизи k_0 , и тогда $d(k_0 + K) = dK$, кроме того $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iK\xi\} \cdot dK \cdot E(K)$ – медленно меняющаяся в пространстве амплитуда напряженности электрического поля.

Используем также тот факт, что движущейся системе отсчета уравнение $\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon(kv, k) = \varepsilon(k) = 1 - \omega_{pe}^2 / kv(kv + iv) = 0$ имеет корни $k_{1,2}v = k_0v = \pm\omega_{pe} - iv/2$.

Уравнение Пуассона при этом принимает вид:

$$(\partial E(\xi) / \partial \xi) \cdot \exp\{-ik_0\xi\} = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k \big|_{k_0}\}^{-1} \cdot \delta(\xi - s), \quad (XV.3)$$

причем, в этом случае выполняется соотношение $k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k \big|_{k_0} = \partial \omega \varepsilon(\omega) / \partial \omega \big|_{\omega=k_0v}$. Заметим, что преобразовывать правую часть (XV.1) вообще не понадобилось. Для дальнейшего преобразования уравнения (XV.3), воспользуемся представлением $\delta(x) = d\theta(x) / dx$, где $\theta(x)$

– симметричная единичная функция, равная нулю при $x < 0$, и равная единице, при $x > 0$. Учитывая наличие дельта-функции, уравнение (XV.3) можно представить в виде

$$\partial E(\xi) / \partial \xi = \alpha \cdot \delta(\xi - s), \quad (\text{XV.4})$$

где $\alpha = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0}\}^{-1} \cdot \exp\{ik_0 s\}$. Решение ищем в виде $E = C + \alpha \cdot \theta(\xi - s)$, где C – некоторая неопределенная константа. Так как напряженность поля имеет вид

$$E(\xi) \cdot \exp\{-ik_0 \xi\} = [C + \alpha \cdot \theta(\xi - s)] \cdot \exp\{-ik_0 \xi\}, \quad (\text{XV.5})$$

то в области больших значений $\xi > 0$ выражение стремится к бесконечности, что недопустимо. Поэтому, следует выбрать $C = -\alpha$. Таким образом, окончательно напряженность поля кильватерного следа за частицей, движущейся в положительном направлении

$$E(\xi) = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0}\}^{-1} \cdot \theta(s - \xi) \cdot \exp\{ik_0(s - \xi)\}. \quad (\text{XV.6})$$

Не трудно увидеть, что при соответствующей нормировке сумма таких спонтанных полей частиц представлена выражением (12.3).

Важно отметить, что поле (XI.6) описывает полное поле отдельной частицы в плазме. То есть, кулоновское поле прежде покоящейся частицы при ее движении трансформировалось именно в данное поле. Поэтому, суммируя все такие поля частиц сгустка, мы получим полное поле сгустка, которое можно представить, как сумму сопровождающего сгусток поля и отстающего от сгустка поля излучения [XV-2]. Именно сопровождающее поле - это собственное поле сгустка, или обращенное кулоновское поле сгустка, фокусирует сгусток.

О применимости описания. Уравнение (XV.4) получено для равномерно движущегося заряда. Более строгие вычисления [XI-3], позволяют получить аналогичную формулу для поля заряда с произвольным законом движения $t = t_L(x)$:

$$E = E_0 \theta[t - t_L(x)] \exp[i\omega_p(t - t_L(x))]. \quad (\text{XV.7})$$

Здесь $t_L(x)$ – так называемое лагранжево время, т. е. время прилета частицы в точку x (в лабораторной системе отсчета). Выражение (XV.7) обладает прозрачным физическим смыслом: частица, пролетая через точку x , возбуждает продольное поле с амплитудой $E_0 = -4\pi e \cdot \{k_0 \cdot \partial \varepsilon(k) / \partial k|_{k_0}\}^{-1}$. В дальнейшем, поле в этой точке холодной плазмы осциллирует с плазменной частотой и никак не зависит от последующей эволюции частицы. Важно подчеркнуть, что фаза поля, создаваемого зарядом в точке x зависит только от разности текущего времени и времени пролета заряда через данную точку.

В случае равномерного движения заряда выражения (XV.6) и (XV.7) эквивалентны, т. к. $\omega_p(t - t_L(x)) = k_0(x(t) - x) = k_0(x(t) - x) = k_0(\xi(t) - \xi)$, где $x(t)$

и $\xi(t)$ текущая координата частицы в лабораторной системе отсчета и системе отсчета, связанной с частицей соответственно. Отсюда несложно получить оценку применимости выражения (XV.6) для использования в самосогласованной модели возбуждения кильватерного поля сгустком с учетом неравномерности движения частиц сгустка, обусловленной влиянием самосогласованного поля:

$$\frac{\varphi_t - \varphi_z}{2\pi} = \frac{\varphi_z}{2\pi} \left[\frac{v_0}{v(t, x)} - 1 \right] = \frac{\varphi_z}{2\pi} \left[1 - \frac{\bar{v}(t, x)}{v_0} \right] \approx \frac{\varphi_t}{2\pi} \frac{\Delta v}{v} \ll 1, \quad (XV.8)$$

где $\varphi_t = \omega_p(t - t_L(x))$, $\varphi_z = k_0(x(t) - x)$, $\bar{v}(t, x) = (x(t) - x)/(t - t_L(x))$, и $\Delta v(x, t)$ – средняя скорость и вариация скорости частицы на участке $[x, x(t)]$, соответственно. Таким образом, уравнение для поля (XV.6) и вытекающая из него модель (11.2) – (11.3), имеют определенные ограничения. Применимость этих уравнений ограничена пространственной (или временной) областью, в которых вариация скорости пренебрежимо мала по сравнению с начальной скоростью сгустка (в большинстве приложений ее можно считать близкой к скорости света). Уточним границы применимости модели (12.2) – (12.3) в принятых нами безразмерных единицах. Будем исходить из более строгой модели [XV-3], использующей лагранжево время. Уравнение для лагранжева времени имеет в приведенных ранее обозначениях вид:

$$\frac{d\tau_{L\alpha}(\xi)}{d\xi} = \frac{\Delta}{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}(\xi)}, \quad (XV.9)$$

к которому следует добавить уравнение движения:

$$\left(\frac{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}}{\Delta} \right) \frac{dv_{L\alpha}(\xi)}{d\xi} = E(\xi, \tau) \quad (XV.10)$$

и уравнение для поля

$$E(\xi, \tau) = -\frac{2}{N} \sum_{\alpha}^N f_{\alpha} \cos[\tilde{w}_p(\tau - \tau_{L\alpha}(\xi))] \cdot \Theta(\tau - \tau_{L\alpha}(\xi)). \quad (XV.11)$$

Здесь $\tau_{L\alpha}(\xi)$ – время, когда частица с номером α проходит через точку ξ , $v_{L\alpha}(\xi)$ – ее скорость в этот момент. Интегрируя уравнение (XV.9) в интервале $[\xi, \xi_{\alpha}]$, получим:

$$\tau_{L\alpha}(\xi) = \tau - \Delta \cdot \int_{\xi}^{\xi_{\alpha}} \frac{d\xi}{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}(\xi)}. \quad (XV.12)$$

Чтобы замкнуть это уравнение, нам надо знать $v_{L\alpha}(\xi)$. Учитывая, что в лабораторной системе отсчета частица очень быстро преодолевает расстояние $[\xi, \xi_{\alpha}]$ (со скоростью около Δ^{-1}), можно предположить, что ее скорость на этом интервале меняется слабо и, поэтому, величину $v_{L\alpha}(\xi)$ можно разложить в ряд по $\xi_{\alpha} - \xi$ относительно текущего положения частицы:

$$v_{L\alpha}(\xi) \approx v_\alpha + \frac{dv_\alpha}{d\xi}(\xi - \xi_\alpha) + \dots = v_\alpha + \frac{\Delta}{1 + \Delta \cdot v_\alpha} \frac{dv_\alpha}{d\tau}(\xi - \xi_\alpha) + \dots \quad (\text{XV.13})$$

подставляя это разложение в (XI.12), получим

$$\tau_{L\alpha}(\xi) = \tau - \Delta \int_{\xi}^{\xi_\alpha} \frac{d\xi}{1 + \Delta \cdot v_{L\alpha}(\xi)} \approx \tau - \Delta(1 - \Delta \cdot v_\alpha)(\xi - \xi_\alpha) + \frac{1}{2} \Delta^3 (1 - \Delta \cdot v_\alpha) \frac{dv_\alpha}{d\tau} (\xi - \xi_\alpha)^2 + \dots \quad (\text{XV.14})$$

Несложно показать, если в полученном выражении удержать только линейное по $\xi_\alpha - \xi$ слагаемое, и подставить его в (XV.11), то мы получим уравнение (XI.5). Различие возникает при учете слагаемых более высокого порядка. Отсюда вытекает условие применимости уравнения (XI.5). Исходя из требования малости квадратичного слагаемого

$$\frac{1}{2} \Delta^3 (1 - \Delta \cdot v_\alpha) \frac{dv_\alpha}{d\tau} (\xi - \xi_\alpha)^2 \ll 1 \quad (\text{XV.15})$$

получим границу пространственной области применимости рассматриваемой модели [XI-2.]

$$\xi \gg \xi^* = -\frac{2}{\Delta^{3/2} |E|} \quad (\text{XV.16})$$

Так как всегда $|E| \leq 2$, а для релятивистских сгустков $\Delta \ll 1$, то можно считать, что предложенная нами упрощенная модель применима в достаточно широкой пространственной области и может быть использована в практических расчетах. Границы применимости модели можно определить так: если даже $|E| \approx 2$, то для $\Delta = 0$, $\xi^* \rightarrow -\infty$ – эквивалентно бесконечной скорости пучка, т. к. скорость пучка в выбранных единицах пропорциональна Δ^{-1} , для $\Delta = 0.1$, $\xi^* \approx -31$ – самый проблемный случай, для $\Delta = 0.01$, $\xi^* \approx -1000$.

Предложенная в работе модель (12.2) – (12.3) имеет важное преимущество по сравнению с более строгой моделью [XI-3] с точки зрения вычислительных ресурсов, так как содержит только уравнения, зависящие от времени, а модель [XV-3] представляет собой более сложную пространственно-временную задачу. Есть и другие особенности модели (12.2) – (12.3), которые делают ее применение предпочтительным при изучении динамики пучков с относительно небольшой плотностью, рассмотрение которых позволяет использовать линейное описание возмущений окружающей плазмы. Прежде всего, можно не учитывать магнитное поле, созданное током пучка, ибо токи в системе покоя пучка-сгустка пренебрежимо малы. Более того, все возмущения в системе можно считать потенциальными, игнорируя электромагнитные эффекты, что недопустимо при описании динамики движущихся сгустков заряженных частиц в лабораторной системе отсчета. Данное обстоятельство приобретает еще большее значение при переходе к трехмерному моделированию [XV-4], [XV-5].

Литература к приложению XV

XV-1. Загородний А. Г., Куклин В. М. Особенности излучения в неравновесных средах / Проблемы теоретической физики. Научные труды / В. А. Буц,, А. Г. Загородний, В. Е. Захаров, В. И. Карась, В. М. Куклин, А. В. Тур, С. П. Фомин, Н. Ф. Шульга, В. В. Яновский ; ред. вып. В. М. Куклин. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – Вып. 1. – 532 с. (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» ; под общ. ред. А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги). – С. 13–81.

XV-2. Куклин В. М. Одномерные движущиеся сгустки заряженных частиц в плазме // УФЖ, 1986. – Т. 31. – № 6. – С. 853–857.

XV-3. Балакирев В. А., Карбушев Н. И., Островский А. О., Ткач Ю. В. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. – Киев: Наукова думка, 1993. – 208 с.

XV-4. Киричок А. В., Куклин В. М., Мишин А. В., Приймак А. В. 1D модель движущегося в плазме сгустка заряженных частиц // Физические основы приборостроения. 2013. – т. 2. – № 3. – С. 80–93.]

XV-5. Альтеркоп Б. А., Жексембин С. Р., Рухлин В. Г. Тараканов В. П. Двумерная динамика компенсированного электронного сгустка в плотной плазме // Препринт ин-та Высоких температур АН СССР, 1986, N 6–193, – С. 35-45.

XV-6. Kuklin V. M., Moiseev S. S., Panchenko. I. P. 3-D short Beam Dynamics // Moscow. Reprint of Institute of Space Research, N 1619, 1989. – 11 P.

ПРИЛОЖЕНИЕ XVI

РЕЖИМ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ СГУСТКА ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Поля отдельной частицы и сгустка частиц. Рассмотрим режим сверхизлучения, когда поле резонатора или волноводное поле отсутствуют. Можно также определить суммарное поле излучения осцилляторов в этом же объеме. Сначала найдем поле одного осциллятора. Для медленно меняющейся в пространстве амплитуды поля излучения, справедливо уравнение

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{2\pi}{c} \cdot e \cdot a \cdot \omega \cdot \exp\{+i\psi \pm ikz\} \cdot \delta(\pm z \mp z_0) = \lambda \cdot \delta(\pm z \mp z_0) \quad (\text{XVI.1})$$

Решение которого $E_x = C + \lambda \cdot U(z - z_0)$, где $U(z < 0) = 0$, $U(z \geq 0) = 1$. Так как для излучаемой осциллятором волны справедливо уравнение $D(\omega, k) \equiv (\omega^2 \varepsilon_0 - k^2) = 0$, корни которого

$k_{1,2} = \pm(\omega_0 \text{Re } \varepsilon_0 / c)(1 + i \text{Im } \varepsilon_0 / \text{Re } \varepsilon_0) \approx \pm(\omega_0 / c \varepsilon_0)(1 + i0)$, то для волны, распространяющейся в направлении $z > z_0$, волновое число $k = k_1 > 0$ и значение постоянной C следует выбрать равной нулю, для того, чтобы избежать неограниченного роста поля на бесконечности. Для волны,

распространяющейся в направлении $z < z_0$, волновое число $k = k_2 < 0$, значение постоянной по тем же соображениям следует выбрать равной $-\lambda$. Амплитуда электрического поля при этом

$$E_x = 2\pi e a \omega M \cdot c^{-1} \exp\{-i\omega t + i\psi\} [\exp\{ik(z - z_0)\} \cdot U(z - z_0) + \exp\{-ik(z - z_0)\} \cdot U(z - z_0)] \quad (\text{XVI.2})$$

где $U(z) = 1$ при $z \geq 0$ и $U(z) = 0$ при $z < 0$, Для одной частицы в таком объеме единичного сечения и длины резонатора b , M численно равно единице.

Уравнения движения представим в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{|v_i|^2}{c^2}}} + \omega^2 x_i = -\frac{e}{m} E_x(z_i, t) \quad (\text{XVI.3})$$

где

$$x_i(t) = i \cdot a_i \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\} = iA \cdot \exp\{-i\omega t\}, \quad v_i = \omega \cdot a_i \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi\} = \omega A \cdot \exp\{-i\omega t\}$$

Уравнение движения для осциллирующего электрона имеют вид (XVI.3). Используя приведенные выше обозначения запишем (XVI.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dt} - i \frac{|3A_j|^2 \cdot \omega^3}{4c^2} A_j = \\ = -\frac{\pi \cdot e^2 \cdot M}{mc} \cdot \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N A_s \left(e^{ik(z_j - z_s)} \cdot U(z_j - z_s) + e^{-ik(z_j - z_s)} \cdot U(z_s - z_j) \right) \end{aligned} \quad (\text{XVI.4})$$

или в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{dA_j}{dt} - i\Delta_j A_j = -\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N A_s [e^{2\pi i(Z_j - Z_s)} \cdot U(Z_j - Z_s) + \\ + e^{-2\pi i(Z_j - Z_s)} \cdot U(Z_s - Z_j)] - E_0 \cdot e^{2\pi i Z_j} = \frac{1}{2} E_x(Z_j, \tau) - E_0 \cdot e^{2\pi i Z_j}; \end{aligned} \quad (\text{XVI.5})$$

здесь

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_0^2 / \delta_D = \pi e^2 M / mc; \quad E = eE / m\omega\gamma a_0, \quad A = A / a_0; \\ kz_j = 2\pi Z_j \quad \tau = \gamma t; \quad \Delta_j = \alpha |A_j|^2 A_j, \\ \gamma_0^2 = \pi e^2 n_0 / m = \omega_{pe}^2 / 4, \quad \alpha = \frac{3\omega}{4\gamma_0} (ka_0)^2 \end{aligned}$$

Учет нелинейности осциллятора необходим [XVI-1, XVI-2].

Напряженность электрического поля излучения осцилляторов в безразмерных единицах можно описать выражением

$$E_x(Z_j, \tau) = \frac{2}{N} \sum_{s=1}^N A_s [e^{2\pi i(Z_j - Z_s)} \cdot U(Z_j - Z_s) + e^{-2\pi i(Z_j - Z_s)} \cdot U(Z_s - Z_j)] \quad (\text{XVI.6})$$

в этом случае выражение для закона сохранения энергии такое же как и (13.21)

$$\frac{d}{d\tau} |A_j|^2 = -\text{Re}\{E_x(Z_j, \tau) A_j^*\} \quad (\text{XVI.7})$$

Очевидно, поле можно представить в виде

$$|E(Z, \tau)| = \sqrt{[\text{Re } E(Z, \tau)]^2 + [\text{Im } E(Z, \tau)]^2}. \quad (\text{XVI.8})$$

Представляя поле в виде $|E(Z, \tau)| \cdot \exp\{i\varphi(Z, \tau)\}$ можно выделить фазу поля $\varphi(Z, \tau)$ из соотношений

$$\begin{aligned} \text{Cos}[\varphi(Z, \tau)] &= \text{Re } E(Z, \tau) / |E(Z, \tau)|, \\ \text{Sin}[\varphi(Z, \tau)] &= \text{Im } E(Z, \tau) / |E(Z, \tau)|, \end{aligned} \quad (\text{XVI.9})$$

где

$$\begin{aligned} \text{Re } E(Z, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N A_s \cdot [\text{Cos}\{2\pi |Z - Z_s| + \psi_s\} \cdot U(Z - Z_s) + \text{Cos}\{-2\pi |Z - Z_s| + \psi_s\} \cdot U(Z_s - Z)], \\ \text{Im } E(Z, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N A_s \cdot [\text{Sin}\{2\pi |Z - Z_s| + \psi_s\} \cdot U(Z - Z_s) + \text{Sin}\{2\pi |Z - Z_s| + \psi_s\} \cdot U(Z_s - Z)]. \end{aligned}$$

Литература к приложению XVI

XVI-1. Il'inskii Yu. A., Maslova N. S. Classical analog of superradiance in a system of interacting nonlinear oscillators // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1988. – Vol. 91. – No 1. – P. 171–174

XVI-2. Kuklin V. M., Litvinov D. N., Sevidov S. M., Sporov A. E. Simulation of synchronization of nonlinear oscillators by the external field. // East European Journal of Physics 2017. – V. 4. – N 1. – P. 75–84.

ПРИЛОЖЕНИЕ XVII

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПЛАЗМЕННОГО ГИРОТРОНА

Переход (14.6) осуществляется на основе применения следующего преобразования:

$$\exp\{in\theta_{12}\} \cdot J_n(x_1) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{n-q}(x_2) \cdot J_q(x_3) \cdot \exp\{in\theta_{23}\} \quad (\text{XVII.1})$$

где x_i стороны треугольника ($i = 1, 2, 3$), $\theta_{12} = \angle x_1 x_2$ – угол между сторонами x_1 и x_2 соответственно, $\theta_{23} = \angle x_2 x_3$ – угол между сторонами x_2 и x_3 треугольника.

Ниже на рисунке XVII.1 представлена ларморовская орбита электрона в сечении волновода. Легко видеть, что $x_1 x_2 x_3$ можно определить, как r, r_B, r_C , соответственно. Здесь r_w – радиус волновода определяет положение электрона пучка, r_C – положение центра ларморовского вращения электрона, r_B – ларморовский радиус. Углы θ_{12} и θ_{23} соответствуют углам $(\pi/2) - \phi - \theta$ и ϕ_C . Используя приведенное выше соотношение, получим выражения для полей в системе вращения отдельного электрона (14.7) – (14.8)

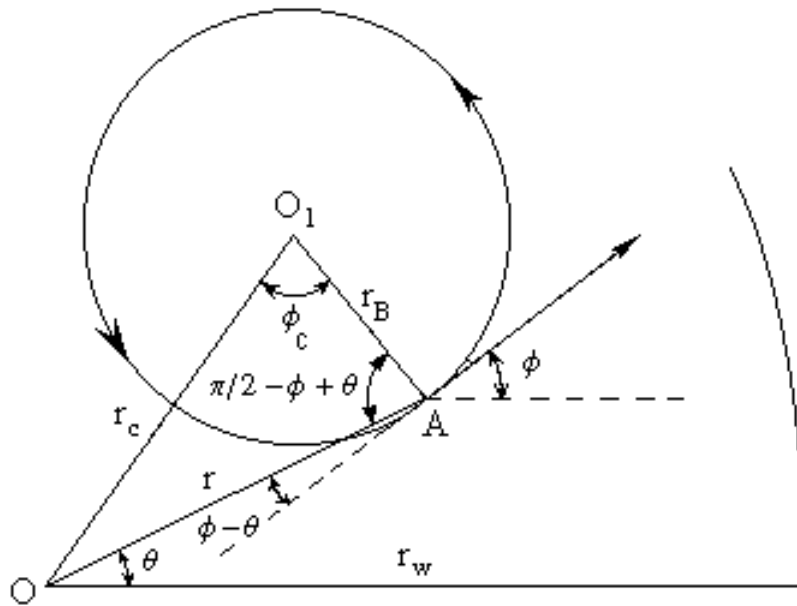


Рис. XVII-1 ларморовская орбита электрона в сечении волновода

Остановимся также на получении выражений (14.11). Для случая ТЕ волны из уравнений Максвелла следует уравнение

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) B_z = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rJ_{\theta}) - \frac{1}{r} imJ_r \right] \quad (\text{XVII.2})$$

После применения оператора $\hat{Q} = \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta J_m(k_{ms} r) \exp(-im\theta)$

к обеим сторонам этого уравнения получим

$$(k_z^2 + k_\perp^2 - \omega^2 / c^2)(k_z^2 - \omega^2 / c^2) \cdot b \cdot \pi r_w^2 \{ J_m'^2(k_{ms} r_w) + [1 - m^2 / (k_{ms} r_w)^2] \cdot J_m^2(k_{ms} r_w) \} =$$

$$= (4\pi i / \omega b^*) k_{ms}^2 \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta (\vec{J} \vec{E}^*). \quad (\text{XVII.3})$$

Откуда, учитывая граничные условия, не сложно перейти к уравнению (14.11).

Уравнения плазменного гиротрона. Выражения для поля волны в присутствии плазмы малой плотности несколько изменятся [XVII-1]

$$B_z = b(z, t) J_m(k_\perp r) \exp(-i\omega t + im\theta) \quad (\text{XVII.4})$$

$$(B_\theta, E_r) = \left[\frac{m}{r} J_m(k_\perp r) + \frac{\omega^2 \varepsilon_2}{c^2 k_\perp^2} k_\perp J_m'(k_\perp r) \right] \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta) \times$$

$$\times \left(\frac{i}{k_\perp^2} \frac{\partial b}{\partial z}, -\frac{\omega}{ck_\perp^2} b \right) \quad (\text{XVII.5})$$

$$(B_r, E_\theta) = \left(J_m'(k_\perp r) + \frac{\omega^2 \varepsilon_2}{c^2 k_\perp^3} \frac{m}{r} J_m(k_\perp r) \right) \exp(-i\omega t + ik_z z + im\theta) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{k_\perp} \frac{\partial b}{\partial z}, -i \frac{\omega}{ck_\perp} b \right) \quad (\text{XVII.6})$$

Такое представление полей рационально использовать для получения режима стационарного усиления вдоль волновода. Здесь выражение для компонент тензора диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_1 = 1 - \omega_{pe}^2 / (\omega^2 - \Omega_B^2)$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = i\varepsilon_2 = i\omega_{pe}^2 \Omega_B / \omega(\omega^2 - \Omega_B^2)$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_3 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$, причем считаются выполненными условия $(k_z / k_\perp) < 1$ и $g = (\omega^2 \varepsilon_{xy} / c^2 k_\perp^2) = \omega^2 \varepsilon_2 / c^2 k_\perp^2 < 1$, а зависимость от координаты z пока не определена. Поперечный компонент волнового вектора $k_\perp = k'_{ms} = x'_{ms} / r_w$ определим из граничного условия

$$J_m'(x'_{ms}) + \frac{\omega^2 \varepsilon_2 r_w^2}{c^2 x'_{ms}{}^2} \frac{m}{x'_{ms}} J_m(x'_{ms}) = 0. \quad (\text{XVII.7})$$

Уравнение для поля приобретает при этом вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_1}{c^2} - k_{ms}^2 \right) b = -\frac{4N_{b0} e \omega_B k_{ms}^2}{c} \left[x_{ms}^2 J_m'^2(x'_{ms}) + J_m^2(x'_{ms})(x_{ms}^2 - m^2) \right]^{-1} \times$$

$$\times J_{n-m}(k_{ms} r_c) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[a_j J_n'(a_j) + g \frac{n}{a_j} J_n(a_j) \right] \exp(-2i\pi \zeta_j). \quad (\text{XVII.8})$$

При переходе в систему координат, центр которой совпадает с центром вращения отдельного электрона пучка, поля преобразуются следующим образом

$$b'_z = b_z, \quad b'_\phi = b_\phi + igb_R, \quad b'_R = b_R - igb_\phi, \quad e'_R = e_R - ig e_\phi, \quad e'_\phi = e_\phi + ig e_R. \quad (\text{XVII.9})$$

Учитывая релятивизм для частиц пучка $\Omega_B = eB_0 / m_e c = \omega_B (1 - \beta_{\perp 0}^2 - \beta_{z0}^2)^{-1/2}$ приведем уравнения их движения

$$2\pi \frac{d\zeta}{dz} = \frac{n\omega_{B0} - \omega}{v_z} + \frac{n\omega_{B0}}{2v_z} [\beta_{\perp 0}^2 - \beta_{\perp}^2 - 2\beta_{z0}(v_z - v_{z0})/c] +$$

$$+ n \frac{e}{m_e c v_z} J_{n-m}(k'_{ms} r_c) \exp(2i\pi\zeta) \left\{ \left[\left(1 - \frac{n^2}{a^2}\right) J_n(a) - g \frac{n}{a} J'_n(a) \right] b - \frac{in^2 v_z}{\omega a^2} \times \right. \quad (\text{XVII.10})$$

$$\left. \times \left[J_n(a) + g \frac{a}{n} J'_n(a) \frac{\partial b}{\partial z} \right] \right\},$$

$$\frac{da}{dz} = in \frac{e\omega}{m_e c \omega_B v_z} J_{n-m}(k_{ms} r_c) \left[J'_n(a) + g \frac{n}{a} J_n(a) \right] \exp(2i\pi\zeta) \left[b + i \frac{v_z}{\omega} \frac{\partial b}{\partial z} \right], \quad (\text{XVII.11})$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{v_z} \right) = - \frac{e\omega_B}{k_{ms}^2 v_z^3 m_e c} \frac{\partial b}{\partial z} J_{n-m}(k_{ms} r_c) a \left[J'_n(a) + g \frac{n}{a} J_n(a) \right] \exp(2i\pi\zeta), \quad (\text{XVII.12})$$

Для случая достаточно большого ларморовского радиуса уравнения режима усиления можно представить в виде

$$\left(\frac{d^2}{d\xi_P^2} + i \frac{\partial}{\partial \tau_P} + \gamma_P^2 \right) E_P = - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j \left[J'_n(a_j) + g \frac{n}{a} J_n(a_j) \right] \exp(-2i\pi\zeta_j) \quad (\text{XVIII.13})$$

$$2\pi \frac{d\zeta}{d\xi_P} = \sigma \left[\Delta_P + \frac{a_0^2 - a^2}{2\varepsilon n^2} + \beta_{z0}^2 \frac{(\sigma - 1)}{\sigma \varepsilon'} \right] + \exp(2i\pi\zeta) \times$$

$$\times n \left\{ \left[\left(1 - \frac{n^2}{a^2}\right) J_n(a) - g \frac{n}{a} J'_n(a) \right] \sigma E_P - \frac{i\varepsilon n^2}{a^2} \left[J_n(a) + g \frac{a}{n} J'_n(a) \right] \frac{\partial E_P}{\partial \xi_P^2} \right\}, \quad (\text{XVII.14})$$

$$\frac{da}{d\xi_P} = in \left[J'_n(a) + g \frac{n}{a} J_n(a) \right] \exp(2i\pi\zeta) \left[\sigma E_P + i\varepsilon' \frac{\partial E_P}{\partial \xi_P} \right], \quad (\text{XVII.15})$$

$$\frac{d\sigma}{d\xi_P} = -R_P \sigma^3 \frac{\partial E_P}{\partial \xi_P} a \left[J'_n(a) + g \frac{n}{a} J_n(a) \right] \exp(2i\pi\zeta), \quad (\text{XVII.16})$$

где $\xi_P = z\rho_P$, $E_P = \frac{e}{m_{e0}c\rho_P v_{z0}} J_{n-m}(k'_{ms} r_c)$, $\sigma = \frac{v_{z0}}{v_z}$, $R_P = \rho_P \omega_B / k'_{ms} v_{z0}$,

$$\varepsilon' = \frac{\rho_P v_{z0}}{\omega}, \quad \Delta_P = \frac{n\omega_{B0} - \omega}{\rho_P v_{z0}}, \quad G = \frac{(\omega^2 - \Omega_B^2)^2 + \omega_{pe}^2 \Omega_B^2}{(\omega^2 - \Omega_B^2)^2}, \quad \gamma_P^2 = \frac{1}{\rho_P^2} \left[\frac{\varepsilon_1 \omega^2}{c^2} - k'_{ms}{}^2 \right],$$

$$\rho_P^3 = \frac{4N_{b0} e^2 \omega_B k'_{ms}{}^2}{m_e c^3 \beta_{z0}} \left[x'_{ms}{}^2 J_m^2(x'_{ms}) + J_m^2(x'_{ms})(x'_{ms}{}^2 - m^2) \right]^{-1} J_{n-m}^2(k'_{ms} r_c), \text{ а в левой}$$

части уравнения учтена производная по времени $\frac{\partial}{\partial \tau_P}$, где $\tau_P = \rho_P^2 c^2 / 2\omega G$.

При малом аргументе функций Бесселя, используя новую переменную $\xi_G = \beta_{\perp}^2 \omega_{B0} z / 2v_z$, можно получить модифицированные уравнения Гапонова (14.21) – (14.22).

Литература к приложению XVII

XVII-1. Kuklin V. M. Grant Report/ PST EV N 978763, NATO Science Programm Cooperative Science & Technology Sub-Programme, Hamburg. 2002.

ПРИЛОЖЕНИЕ XVIII

ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЦИКЛОТРОННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Отметим, что для этих двух волн ТЕ и ТМ справедливы интегралы

$$R \cdot a^2 - 2n \cdot \eta = Const, \tag{XVIII-1}$$

$$|E|^2 - (2/R) \cdot N^{-1} \sum_{j=1}^N \eta_j = Const, \tag{XVIII-2}$$

$$|E|^2 - n^{-1} \cdot N^{-1} \sum_{j=1}^N a_j^2 = Const, \tag{XVIII-3}$$

причем последний интеграл (XVIII-1) справедлив при $\theta=0$, если $\theta \neq 0$ в его правой части $Const \rightarrow Const + \theta \cdot \int_0^t dt' |E(t')|^2$. Полезно обратить внимание на следствие интегралов [14-7, 15-2] в отсутствие потерь энергии поля ($\theta=0$): изменение энергии поперечного движения

$$\Delta W_{\perp} = \frac{\omega_B \cdot m_e \cdot N_{b0}}{2k_{ms}^2} N^{-1} \sum_{j=1}^N (a_j^2 - a_{j0}^2) \text{ и изменения энергии продольного}$$

движения $\Delta W_{\parallel} = \frac{v_{z0} \cdot m_e \cdot N_{b0}}{k_z} N^{-1} \sum_{j=1}^N (\eta_j - \eta_{j0})$ соотносятся между собой как

$\Delta W_{\perp} / \Delta W_{\square} = n\omega_B / k_z v_{z0}$, а изменения энергии поля и изменения энергии поперечного движения как $\omega / n\omega_B$.

Случай $n < 0$ для движущихся в направлении распространения волны частиц соответствует аномальному эффекту Доплера и не реализуется для частиц, которые в этом направлении не движутся. Учет релятивизма (эффект отрицательной массы см., например, [XVIII-1, XVIII-2]) приводит к появлению нелинейности в уравнениях движения (14.13) и (15.12). Действительно, в уравнениях (14.13) и (15.12) η_i следует заменить на $\eta_i - \alpha(a_j^2 - a_{j0}^2)$, где $a_{j0}^2 = a_j^2|_{\tau=0}$, $\gamma_0 = (1 - v_{\Phi}^2 / c^2)^{-1/2}|_{\tau=0}$, $\alpha = n\omega_B^3 \cdot \gamma_0^2 / 2k_{ms}^2 c^2 \delta_h$.

Литература к приложению XVIII

XVIII-1. Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Основы плазменной электроники. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.

XVIII-2. О. В. Куклина, В. М. Куклин О механизмах насыщения циклотронных неустойчивостей электронного пучка в волноводах // Электромагнитные явления. – 2001. – Т. 2. – № 4 (8). – С. 490–497.

ПРИЛОЖЕНИЕ XIX

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Для двумерной неустойчивости плоской интенсивной волны справедлива следующая система уравнений:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = -u_0^2 - 4 \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N (u_{m,s}^2 + u_{-m,-s}^2) - 2 \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N u_{m,s} u_{-m,-s} \cos\Phi_{m,s}, \quad (\text{XIX -1})$$

$$\frac{d}{dt} u_0 = \{-\delta - 2 \sum_{s=-S}^S \sum_{m>0}^N u_{m,s} u_{-m,-s} \sin\Phi_{m,s}\} + G, \quad (\text{XIX -2})$$

$$\frac{du_{n,s}}{dt} = u_{n,s} \left\{ -\delta + u_0^2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sin\Phi_{n,s} + 2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m \neq n \\ m>0}}^N u_{-m,-z} u_{m,z} \sin\Psi_{smz} \right\}, \quad (\text{XIX -3})$$

$$\frac{d\varphi_{n,s}}{dt} = (K_{n,s}^2 + K_{-n,s}^2) - 2[u_0^2 + \frac{1}{2}u_{n,s}^2 + u_{-n,-s}^2 + 2 \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m>0 \\ m \neq n}}^N (u_{m,z}^2 + u_{-m,-z}^2)], \quad (\text{XIX -4})$$

$$-u_0^2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \cos\Phi_{n,s} - 2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m \neq n \\ m>0}}^N u_{-m,-z} u_{m,z} \cos\Psi_{smz},$$

где $\Phi_{n,s} = 2\varphi_0 - \varphi_{n,s} - \varphi_{-n,-s}$ и $\Psi_{snmz} = \Phi_{n,s} - \Phi_{m,z}$, а для волновых чисел в двух направлениях

$$K_{n,s}^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{2|n|-N}{N} \right) \sqrt{1-\delta} \right\} - K_{n,s}^2, \quad K_{m,s} = 0.1 \cdot s.$$

Для медленно меняющегося поля справедливо выражение

$$E_M(\xi, \eta, t) = [u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N [u_{m,s} \exp\{-iK_{m,s}\xi - iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{m,s} - \varphi_0)\} + u_{-m,-s} \exp\{iK_{m,s}\xi + iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{-m,-s} - \varphi_0)\}]] \quad (\text{XIX-5})$$

В том случае, если существует необходимость просмотреть тонкую структуру поля, то есть, отдельные волны

$$E_M(\xi, \eta, t) = \exp\{-ik_0\xi + i\varphi_0\} \times \\ \times \left(u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N \left(u_{m,s} \exp(-iK_{m,s}\xi - iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{m,s} - \varphi_0)) + u_{-m,-s} \exp(iK_{m,s}\xi + iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{-m,-s} - \varphi_0)) \right) \right) \quad (\text{XIX-6})$$

В системе покоя модуляции для подобной тонкой структуры поля справедливо выражение

$$E_M(\xi, \eta, t) = \exp\{-ik_0((\xi + 2k_0t)) + i\varphi_0\} \cdot [u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N [u_{m,s} \exp\{-iK_{m,s}\xi - iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{m,s} - \varphi_0) - 2K_m \cdot k_0t\} + u_{-m,-s} \exp\{iK_{m,s}\xi + iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{-m,-s} - \varphi_0) + 2K_m \cdot k_0t\}]] \quad (\text{XIX-7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ XX

САМОПОДОБНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТИ И В ОБЪЕМЕ КРИСТАЛЛОВ

Любая кристаллическая решетка в объеме и на поверхности твердого тела формируется в результате некоторого процесса – процесса упорядочения – первичной неустойчивости, обладающей определенным обратным характерным временем развития и насыщающейся нелинейностью. Эта нелинейность обусловлена отклонением от положения равновесия достаточно однородной подсистемы атомов, внутри которой преобладают взаимодействия с ближайшими соседними атомами. Очень часто нелинейность кубическая или выше (чаще всего соседних атомов больше, но их вклад во взаимодействие не всегда равноценный и именно поэтому доминируют лишь некоторые типы взаимодействий). Источником неравновесности являются возмущения плотности среды, обусловленные

перегревом, а значительное поглощение энергии в процессе упорядочения – неустойчивости обусловлено выносом энергии упругими волнами из этой области.

Процесс возникновения первичной структуры в целом определяется, прежде всего, доминирующим механизмом взаимодействия элементов, который формирует её геометрию, характерные размеры и ориентацию. Можно предположить, что на стадии первичного процесса формирования периодической структуры происходит за счет сужения спектра возмущений плотности из-за нелинейного механизма конкуренции возмущений, подобного рассмотренным выше.

Однако, кроме основного механизма взаимодействия элементов, в системе зачастую присутствует ряд и более слабых взаимодействий, проявляющих себя лишь в условиях, когда процесс построения основной (первичной) структуры близок к завершению.

Структура поверхности кристалла всегда привлекала внимание исследователей. Прежде всего, потому, что отличия структуры поверхностного слоя от внутренней структуры кристалла были несомненны, в частности существовали поверхностные регулярные образования, линейные размеры которых значительно превышали соответствующие размеры элементарных ячеек кристалла. Полагали [XX-1, XX-2], что твердое тело всегда стремится понизить свою поверхностную (а значит и общую) свободную энергию, образуя при этом на своих границах "горную" структуру холмов и долин. Так, например, известны поверхностные крупномасштабные ромбовидные регулярные образования на поверхности монокристалла кремния (так называемая, "7×7 ячейка", где располагаются 12 выпуклостей электронной плотности, соответствующих позициям отдельных атомов [XX-3]).

Поверхностные слои атомов, характер взаимодействия и соответствующее расположение которых отличаются от подобных параметров атомов, входящих в состав объемных слоев решетки, уже на масштабах, сравнимых с размерами элементарной ячейки, демонстрируют отклонения в регулярности, отмеченные, например, в экспериментах [XX-4]. Были замечены периодические отклонения в положениях локальных максимумов электронной плотности на расстояниях значительно превышающих характерный размер элементарной ячейки, но какие-либо искажения границы в направлении нормали к поверхности образца не обсуждались.

Ниже представлены результаты экспериментальных исследований [XX-5] поверхности графита методом сканирующей туннельной микроскопии (СТМ). Исследования проводили в воздушной среде на сканирующем туннельном микроскопе СТМ-1, описанном в работе [XX-6].

Разрешение в горизонтальной плоскости XY меньше $1,4 \text{ \AA}$, а по вертикали – $0,7 \text{ \AA}$. В качестве зонда использовались иглы, приготовленные способом электрохимического травления с вытяжкой. Очистка поверхности графита производилась скалыванием верхнего слоя непосредственно перед измерением. На рис. XX.1. "a", "b", "c" представлены топографические изображения участков высоко ориентированного графита при различном увеличении, полученные сканированием в режиме стабилизации туннельного тока. Время сканирования участков – 10–20 сек. На рис. XX.1. "a" представлено изобра-

жение участка высоко ориентированного графита при максимальном увеличении. Наблюдаются упорядоченные ряды гексагональной структуры графита: шестиугольник состоит из атомов с разным уровнем локальной плотности состояний. Отметим, что параметры элементарной ячейки согласуются с данными, представленными в работах других авторов.

На отдельных участках образцов обнаружена периодическая модуляция поверхностной электронной плотности (крупномасштабная гофрировка), характер которой подобен (с коэффициентом подобия близким к 10) мелкомасштабной модуляции электронной плотности в пределах элементарной ячейки на поверхности графита (см. рис. XX.1. "b"). На другом образце (см. рис. XX.1. "c") была обнаружена поверхностная гофрировка, продольные линейные размеры которой на два порядка превосходят соответствующие размеры элементарной ячейки (размер вертикальной модуляции поверхности здесь лишь вдвое больший, чем в предыдущем случае, показанном на рис. XX.1. "b"). Отметим, что линейный масштаб модуляции поверхностной электронной плотности, обсуждаемый в работе [XX-6], соответствует продольному масштабу гофрировки, изображенной на рис. XX.1. "b".

Продольный масштаб гофрировки, изображенный на рис. XX.1. "c", на порядок больше. Наблюдаемые отличия в характерных размерах модуляции поверхности графита связаны, видимо, с различными модификациями его внутренней структуры. Возможно, что в случае, изображенном на рис. XX.1. "b", представлена наиболее распространенная аллотропная форма углерода – графит с гексагональной структурой. Рис. XX.1. "b" соответствует, как можно предположить, ромбоэдрической упаковке графита. Важным в полученных экспериментальных данных является не столько факт наличия вертикальной составляющей модуляции, а скорее, несомненное подобие первичной структуры – элементарной ячейки и вторичной структуры – модуляции поверхности электронной плотности, по крайней мере, в случае, изображенном на рис. XX.1. "b".

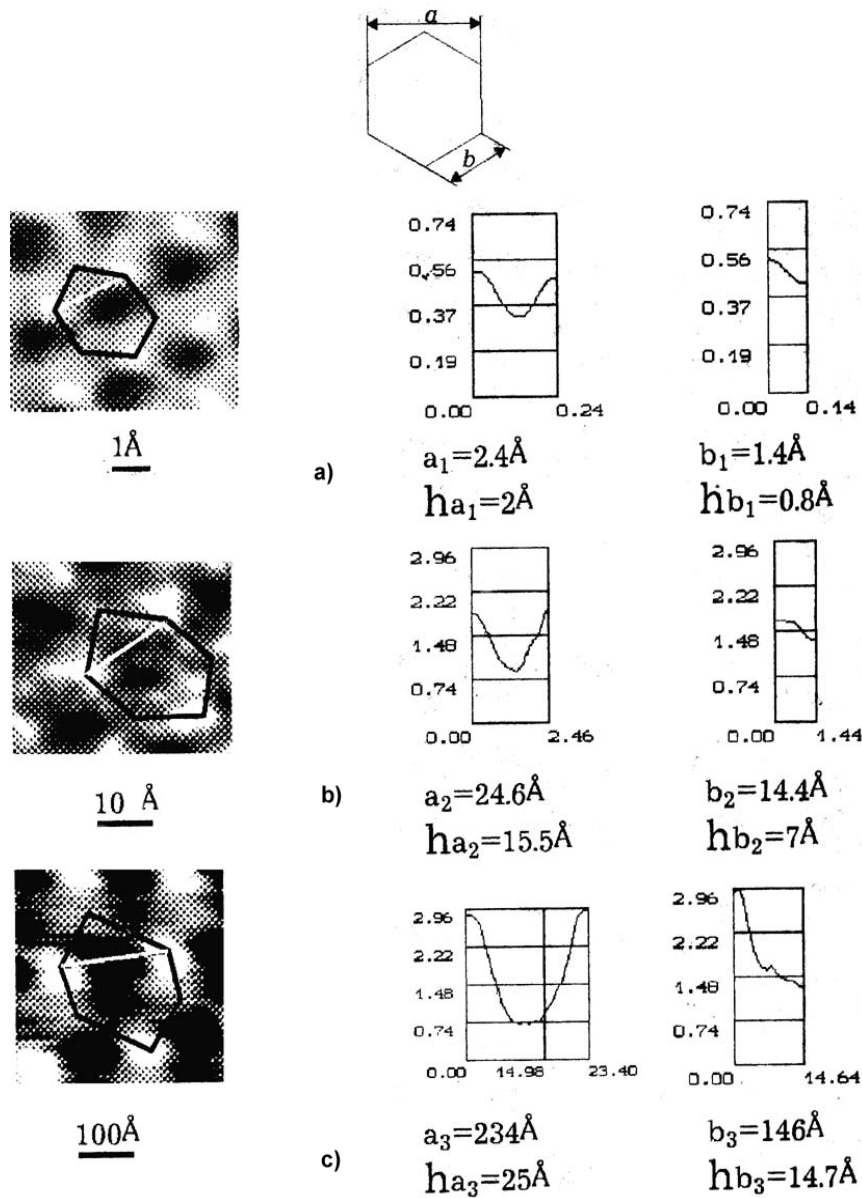


Рис. XX.1. Топографические изображения участков высоко ориентированного графита при различном увеличении, полученные методом сканирующей туннельной микроскопии

Причиной модуляционной неустойчивости, формирующей самоподобные структуры, могут быть сдвиговые напряжения, обусловленные нелинейным взаимодействием первичной структуры с несобственными возмущениями недивергентного типа, которые вблизи поверхности способны изменяться. Подход [XX-7, XX-8] к описанию устойчивости решетки может оказаться конструктивным. Можно рассмотреть и более простую модель.

Графит представляет собой многослойную структуру, каждый слой которой представляет собой атомы углерода, объединенные сильными ковалентными связями. Связь между слоями определяется более слабыми Ван-дер-ваальсовыми взаимодействиями. Можно считать поверхность каждого слоя нерастяжимой, а Ван-дер-ваальсовы силы приводят лишь к ее гофрировке. Не трудно построить модель, которая может качественно прояснить появление крупномасштабной гофрировки на поверхности гра-

фита. Рассмотрим более простой двумерный случай, причем ось X направим вдоль нерастяжимого слоя, а ось OY определим перпендикулярно границе образца. Тогда волновое число гофрировки внутри графитового образца можно записать как $k_0 = k_{00} + a_0^2 k_0^3 / 4$ где соотношение между пространственным периодом λ и волновым числом периодической структуры $k = 2\pi / \lambda$, k_{00} – волновое число в отсутствие гофрировки, a_0 – амплитуда гофрировки, причем, приведенное выше выражение справедливо для $(k_0 a_0)^2 < 1$. Для возмущенной системы можно записать уравнение

$$(k - i \frac{\partial}{\partial y}) \cdot a = k_{00} + \frac{k^3 |a|^2}{4} a. \quad (XX.1)$$

Пусть возмущения гофрировки имеют волновые числа $k_{\pm} = k_0 \pm K$ и амплитуды a_{\pm} , тогда для этих возмущений можно записать уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} a_{\pm} \pm i K a_{\pm} = i \frac{k_0^3 a_0^2}{4} a_{\mp}^*, \quad (XX.2)$$

откуда не трудно найти нарастающее к поверхности решение $\square \exp\{-iKy\} \cdot \exp\{k_0^3 a_0^2 y / 4\}$, где из-за осциллирующего множителя рост амплитуд крупномасштабных возмущений гофрировки ограничивается. Выполняется примерное равенство $(k_0 a_0)^2 \approx (ka)^2 + (a_{\pm} K)^2$, где $(k_0 a_0)^2$ значение в глубине образца. На поверхности $(ka)^2 \approx \alpha \cdot (a_{\pm} K)^2$, причем, как можно предположить, $\alpha \approx 1$ для аллотропной формы, а $\alpha \approx 0.2$ для ромбоэдрической упаковки графита.

Вместо одного устойчивого положения отдельного атома в поверхностных слоях могут появиться два и больше таких положений. Сдвиг атомных слоев в глубине кристалла заметно ослабляется, поэтому вблизи поверхности может происходить наложение однопериодических решеток друг на друга с последующим поворотом одной из них по отношению к более глубоко лежащей на небольшой угол. Такие структуры носят название структур Муара (Moire structures), причем период крупномасштабной модуляции полностью определяется углом поворота ϕ – с уменьшением ϕ период растет. Поверхностный слой кристалла может оказаться развернут на небольшой угол относительно следующего за ним слоя также выходом на поверхность достаточного количества дислокаций одного знака [XX-9] – [XX-11]. При этом на поверхности кристалла вполне может возникнуть, так называемая, сверхрешетка, т. е. решетка, обладающая той же топологией, что и основная, но имеющая больший период, зависящий от угла разворота. Несоответствие масштабов первичной структуры (периода решетки) в плоскостях, касательных к поверхности каждого из кристаллических слоев, способно приводить к появлению нормальных к этой поверхности напряжений вблизи границы кристалла. Эти силы, действующие как в вертикальном, так и в горизонтальном (то есть, параллельно макроскопической поверхности образца) направлениях, могут при относительно низком уровне флуктуаций реализовать некоторое равновесное состояние. Это равновесное

состояние должно иметь определенную глубину вертикальной модуляции поверхности кристалла, чтобы совместить масштабы на поверхности и в объеме.

Очевидно, формирование пространственной модуляции поверхностного слоя происходит в условиях воздействия более слабого физического механизма, поэтому роль флуктуаций, сопровождающих этот процесс, может оказаться существенной. В некоторых случаях флуктуации могут сорвать вторичную неустойчивость, и глубокая вертикальная модуляция поверхности может и не реализоваться. Таким образом, в первом случае (рис. XX.1. "b") $\varepsilon_2 \propto 10^{-1}$, а во втором (рис. XX.1. "c") $\varepsilon_2 \propto 10^{-2}$. Характерное время формирования регулярной поверхностной структуры, следует ожидать, соответственно в 10 и 100 раз превышает время формирования атомной структуры графита.

Объемные нарушения. При формировании монокристалла возникающая регулярная периодическая микроструктура – атомная решетка кристалла в нелинейной среде неустойчива и в объеме образца. Развитие этой неустойчивости (т. е. вторичного, более слабого процесса по сравнению с процессом формирования решетки монокристалла) приводит к крупномасштабному регулярному смещению атомов от положений, характерных для совершенной решетки (аналогу модуляционной неустойчивости). В местах наибольшего отклонения атомов происходит пространственный сдвиг атомных рядов и появление характерных дефектов – дислокаций. Отношение масштабов элементарной ячейки кристалла и крупномасштабной дислокационной сетки – сетки Франка, – порядка 10^{-4} . Если предположить, что механизм формирования сетки Франка подобен рассмотренным выше процессам, то $\varepsilon_2 \propto 10^{-4}$. Можно также ожидать, что характерное время формирования сетки Франка в 10^4 раз превышает время формирования регулярной атомной решетки. В той же пропорции находятся и силы взаимодействия, формирующие мелкомасштабную и крупномасштабную структуры.

Литература к приложению XX

XX-1. Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. Т. 1. Термодинамическая и общая кинетическая теория. – М.: Мир, 1978. – 806 с.

XX-2. Christian J. W. Transformations in metals and alloys. – Pergamon Press, 1975.

XX-3. Ramstad A., Brocks G., Kelly P. J. Theoretical study of Si (100) surface reconstruction // Phys. Rev. 1995. – V. 51 – N. 20. – P. 14504.

XX-4. Исследование асимметрии атомного изображения поверхностной решетки графита методом СТМ. // Авт.: Алекперов С. Д., Васильев С. И., Леонов В. Б., Панов В. И., Семенов А. Э. // Доклады АН СССР, Физика, 1989. – Т. 307. – № 5. – С. 1104–1109.

XX-5. О распределенных дефектах на поверхности и в объеме кристалла. // Авт: Бабаскин А. А., Каменский Ю. В., Кириченко В. Г., Киричок А. В.,

Куклин В. М., Твардовский А. // Вістник ХНУ ім. В. Н. Каразіна 2000. – № 49.. – В. 4 (12). – с. 23–28.

XX-6. Kamensky Yu., Limansky A., Limanskaya O. Imaging of oligonucleotides and DNA by Scanning Tunneling Microscopy. "Nano-2" Second International Conference on Nanometer Scale Science and Technology Aug. 2-6. – 1993.

XX-7. Hill R. On the elasticity and stability of perfect crystals at finite strain // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975. – V. 77. – P. 225–234

XX-8. Thompson J.M.T. Instabilities and catastrophes in science and engineering. – John Willey & Sons, 1982. – 320 p.

XX-9. Фридель Ж. Дислокации. – М. : Мир, 1967. – 643 с.;

XX-10. Fridel J. Dislocations. – Pergamon Press. 1964.

XX-11. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М. : Изд. Иностран. Лит. 1963. – 247 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ XXI

ПРИРОДА ВЫНУЖДЕННОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

При различных начальных амплитудах мод u_n и u_{-n} , для которых значение волновых чисел K_n^2 попадает в интервал $1 + \left(\frac{2|n|-N}{N}\right)\sqrt{1-\delta}$, имеет место их неравномерный рост при $\{-\delta + u_o^2 \sin\Phi_n^*\} = \gamma > 0$. Мода с большей амплитудой растет медленнее, чем мода меньшей амплитуды. Для разности амплитуд из уравнения (16.22) получим

$$\frac{\partial(u_m - u_{-m})}{\partial t} = \{-\delta - u_o^2 \sin\Phi_n^*\} \cdot (u_m - u_{-m}), \quad (\text{XXI.1})$$

которое и описывает динамику выравнивания растущих амплитуд мод. Выравнивание амплитуд и их рост происходит уже в процессе развития неустойчивости. Для корректного выяснения поведения разности фаз этих мод полезно использовать уравнения системы (16.18) – (16.23), откуда получим

$$\frac{d(\phi_n - \phi_{-n})}{dt} = 2 \frac{d(\phi_n - \phi_0)}{dt} = 2(u_n^2 - u_{-n}^2) \cdot \left\{ 1 + \frac{(K_n^2 - u_o^2)}{(u_n^2 + u_{-n}^2)} + \frac{2}{(u_n^2 + u_{-n}^2)} \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos\Phi_m \right\} \quad (\text{XXI.2})$$

Следует отметить, что при выравнивании амплитуд мод разность фаз уже не меняется на начальной стадии развитой неустойчивости. Таким образом, несмотря на синхронизацию основной волной суммарных фаз мод спектра $\Phi_n \rightarrow \Phi_n^*$, каждая пара мод на нелинейной стадии процесса сохраняет разность фаз, что приводит к навязанной основной волной интерференции. Но это не значит, что каждая сформированная парой мод стоячая волна не меняет своего положения относительно основной волны.

Рассмотрим детальнее поведение фаз растущих мод. Полезно перейти в систему отсчета, в которой фаза основной волны не меняется. В этой системе отсчета

$$\frac{d\phi_n}{dt} - \frac{d\phi_0}{dt} = K_n^2 - u_0^2 \left\{ \frac{u_{-n}}{u_n} \cos\Phi_n + 1 \right\} + \left\{ u_n^2 + 2 \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos\Phi_m \right\}. \quad (\text{XXI.3})$$

Считая, что суммарная фаза в процессе развития неустойчивости подстраивается к своему квазиустойчивому положению Φ_n^* и воспользовавшись тем обстоятельством, что амплитуды симметричных мод выравниваются $u_m \approx u_{-m}$, получим с точностью до квадратичных слагаемых по u_n^2

$$\frac{d\phi_n}{dt} - \frac{d\phi_0}{dt} = K_n^2 - u_0^2 \left\{ \frac{u_0^2 - u_n^2 - K_n^2 + u_0^2 + 2u_n^2}{u_0^2 + 2u_n^2} \right\} + \left\{ u_n^2 + \sum_{m>0}^N u_m^2 \frac{u_0^2 - K_m^2}{u_0^2} \right\} \approx 2(K_n^2 - u_0^2), \quad (\text{XXI.4})$$

причем, отметим, что вследствие асимметрии $-\sum_{m>0}^N u_m^2 \frac{u_0^2 - K_m^2}{u_0^2}$ в начальный момент равно нулю и на начальной стадии остается малым. Сдвигая фазу основной волны на $\pi/4$, представим волновой пакет спектра в виде

$$a - u_0 \exp[i\pi/4] \propto 2 \sum_{m>0}^N u_m \cdot \text{Cos} \{ -K_m \xi + 2(K_n^2 - u_0^2)t + \alpha_n \} \quad (\text{XXI.5})$$

где $\alpha_n = \left(\frac{\Phi_n^* - \pi/2}{2} \right)$. Выражение (XXI.5) –

это набор стоячих волн. Фазы α_n более длинных $K_m < u_0$ возмущений располагаются в отрицательной области и двигаются, как это следует из (XXI-5) в положительном направлении, а фазы α_n более коротких находятся в положительной области и движутся в отрицательном направлении. То есть более длинные стоячие волны $K_m < u_0$ движутся навстречу более коротким $K_m < u_0$, причем с уменьшением амплитуды основной волны энергия в большей степени оказывается сосредоточенной в длинноволновой части спектра огибающей. Чем более отличается длина стоячей волны, образованной парой мод, от длины растущего с максимальным инкрементом возмущения, тем больше скорость изменения ее фазы. Интерференция этих стоячих волн,

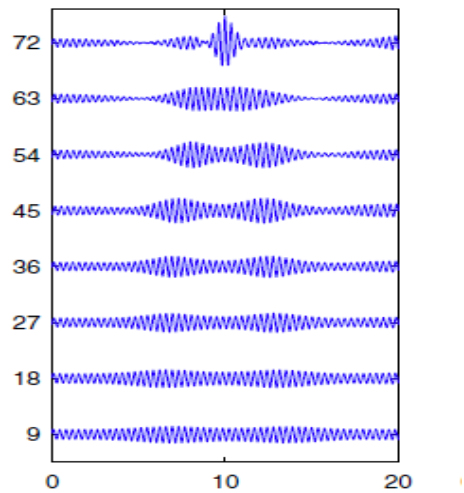


Рис. XXI.1. Эволюция профиля волны аномальной амплитуды в эксперименте [XXI-3]. По оси ординат время формирования огибающей (сек), По оси абсцисс – область огибающей (м)

навязанная основной волной, является вынужденной [XXI-1, XXI-2] и ускоряется с изменением амплитуды основной волны. Процесс интерференции набора стоячих волн, формирующих аномальную огибающую, можно усмотреть в представленных в работе [XXI-3] наблюдениях.

Литература к приложению XXI

XXI-1. Куклин В. М. Об интерференционной природе формирования тонкой структуры лазерных импульсов и аномальных всплесков амплитуды колебаний в модели Лайтхилла / VIII Харитоновские научные чтения. 21–24 марта, 2006 г. Саров, Россия, Сб. докладов. – Саров, 2006. – С. 450–456;

XXI-2. Kuklin V. M. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения. – 2006. – № 5 (5). – С. 63–68.

XXI-3. Chabchoub A., Hoffmann N, Onorato M and Akhmediev N. Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves. / Physical Review X 2, 011015 (2012).

ПРИЛОЖЕНИЕ XXII

ВОЛНЫ АНОМАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ В ОКЕАНЕ

Актуальной проблемой безопасности судоходства и нефтегазодобычи в океанах и морях является определение условий появления поверхностных волн аномальной амплитуды, способных привести к крупным катастрофам и авариям. Ранее, когда интенсивность судоходства и нефтегазодобычи были не столь интенсивными, возникновение таких волн считалось достаточно редким, и учитывать их появление и воздействие попросту не считали нужным. Однако при росте численности судов и их персонала появились многочисленные свидетельства появления таких аномальных волн. Однако людей тревожит не только обнаружение таких волн аномальной амплитуды, необходимо выяснить особенности жизненного цикла таких волн, насколько долго они способны существовать и могут ли они перемещаться. Полезно выяснить время существования волн аномальной амплитуды, характер их появления и динамику распространения.

По внешнему виду аномально высокие волны (экстремальные волны, rogue waves, abnormal waves, exceptional waves, giant waves, steep wave events) на поверхности глубокой воды (это т. н. гравитационные поверхностные волны, длина такой волны много меньше глубины океана, кстати, с уменьшением глубины скорость волны замедляется) делятся на три основных типа: "белая стена", "три сестры" (группа из трех волн)²³, одиночная волна ("одиночная

²³ Используемая простая модель, представленная выше, вполне адекватна корректному описанию нелинейных океанских волн сможет помочь прояснить только появление волновых пакетов типа «Три сестры». Существование волн другого типа вполне возможно (см., например, обсуждение этого вопроса в [XXII-8, XXII-9.]). Причины их появления обсуждаются в разделе 19.

башня") [XXII-1 – XXII-4]. Высота волны обычно указывается именно как расстояние от высшей точки гребня до низшей точки впадины. Ширина цуга гигантских волн может достигать нескольких сотен метров до километра, что больше длин таких волн. В ряде случаев направление распространения таких волн, часто сбивающихся в группы по две-три волны отличалось от основного направления движения волн вплоть до десятков градусов.

Аномально высокими волнами считаются волны, высота которых более чем в два раза превышает значимую высоту волн. Значимая высота волн рассчитывается для заданного периода в заданном регионе. Для этого отбирается треть всех зафиксированных волн, имеющих наибольшую высоту, и находится их средняя высота. Большинство современных судов может выдержать до 15 тонн на квадратный метр и в случае даже сильного волнения это соответствует более чем двукратному запасу прочности, однако аномально большие волны способны вызвать давление до сотни тонн на квадратный метр [XXII-5]. Все это внушает беспокойство работникам морского транспорта. Поэтому предпринимаются попытки выяснить области образования, определить частоту возникновения таких волн и разработать способы предупреждения об их появлении. На основании данных полученных со спутников удалось составить приблизительную карту, которая поможет судоводителям избегать опасных районов. Европейцев волнует, прежде всего, восточное побережье Южной Африки, Бискайский залив и Северное море. Есть и другие опасные регионы – это южная часть побережья Латинской Америки. Сомневаясь в возможности раннего предупреждения, шведские специалисты рекомендуют создавать виртуальные карты Мирового океана с обозначением на них скользящих «треугольников смерти» – участков, где в определенное время года и при определенных условиях наиболее вероятно появление волн-убийц. Области морских течений рассматривались и ранее как области наиболее вероятного появления волн-убийц [XXII-6]. Авторы [XXII-4, XXII-7], полагали, что вероятность случайных возвышений морской поверхности $P(H)$ подчиняется Рэлеевскому распределению:

$$P(H) = \exp\left\{-2 \frac{H^2}{H_s^2}\right\}, \quad (\text{XXII.1})$$

где H_s – средняя высота-размах одной трети самых высоких волн²⁴. Можно показать, что такие волны могут появляться довольно часто. Волной с размахом $2H_s$ по их расчетам будет примерно каждая из $3 \cdot 10^3 - 10^4$ волн (волны в океане вдали от берегов имеют длины вплоть до 100 метров и выше, а скорости порядка 10 м/с.), что не противоречило некоторым экспериментальным данным. Однако, если использовать значение этой вероятности, то для $3H_s$, получим, что волна такой высоты может наблюдаться один раз в 20 лет. Весьма часто появляющимися, в сравнении с оценкой (19.11) оказались волны с амплитудой, превышающей $2H_s$. Однако по данным на-

²⁴ W. Munk, Proposed uniform procedure for observing waves and interpreting instrument records, SIO Wave Project. Translations by DD Bidde and RL Wiegel can be found in Translations of Four French, 1944.

блюдения проекта MaxWave морской поверхности из космоса наблюдалась волна с $H/H_s = 2.9$. За 793 часа наблюдений волн в Северном море зарегистрирована волна с $H/H_s = 3.19$ [XXII-10]. Такая неожиданно частая регистрация экстремальных волн привела к необходимости серьезного пересмотра подходов к применимости классической статистической модели в области высоких волн. Случайный механизм образования аномальных волн оказался не корректным, поэтому основное внимание было уделено другим механизмам, которые в большинстве своем основаны на результатах развития модуляционной неустойчивости гравитационных поверхностных волн на глубокой воде. В частности, как и представленное выше исследование.

Для определения зон мирового океана, где с большой вероятностью ожидается появление аномальных волн необходимо на базе разработанных математических моделей определить условия, частоту и значения аномальных волн, используя характеристики внешней среды. Мониторинг, который состоит в проверке ряда критических показателей, должен быть основан на результатах моделирования, подобного моделированию, проведенному выше. Для наблюдаемых аномально больших волн удвоенная амплитуда-размах которых оценивается из эмпирического соотношения

$$(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 \propto 0,13, \quad (2A \approx H) \text{ при которой еще нет обрушения [XXII-10,}$$

XXII-12], средняя высота опасного волнения, порождающего волны убийцы, сравнима с $|\bar{A}_0| \leq 0.04\lambda$ и для волн длина волны которых 200 м., амплитуда может достигать 8 метров. Длина волны связана с периодом колебаний соотношением $\lambda \propto 1,6 \cdot T^2$ и для двухсотметровых волн с периодом 11 сек., такое волнение океана отвечает размахам волн около 15 м. Отношение максимального инкремента модуляционной неустойчивости к частоте колебаний порядка α , где $\alpha = \text{Im } \omega / \omega = (|A_0|k)^2 / 2 \approx 0.01$ в обсуждаемых выше условиях. Фазовая скорость таких волн достигает 18 м/сек, групповая – вдвое меньше.

Другими словами, характерное время процесса (обратный инкремент) при этом можно оценить, как 3–4 минуты. За время менее часа можно будет наблюдать неустойчивость на её развитой нелинейной стадии. При ветровом возбуждении (скорость ветра должна превосходить фазовую скорость гравитационных поверхностных волн, равную примерно 15–20 м/с, но если есть встречное течение, то скорость ветра может быть даже меньше этой величины на значение скорости течения) зона развитой модуляционной неустойчивости находится в 20–50 км от границы зоны активного ветрового возбуждения. Число таких волн в зонах сильного ветрового воздействия оказалось с одной стороны значительно больше, чем это разрешала статистика случайных интерференционных процессов. Но с другой стороны, простой подсчет таких волн средствами космического мониторинга из-за небольшой зоны (кадра) просмотра также может оказаться неточным. Однажды образовавшись, такие волны способны дрейфовать со скоростью (вдвое меньшей групповой) на значительные расстояния. При этом они могут попасть в следующий кадр просмотра, что неоправданно увеличит число таких волн во всей зоне наблюдения.

Моделирование динамики волн аномальной амплитуды. Здесь использовано описание в рамках так называемой модифицированной S-теории [XXII-12], при этом взаимодействие происходит только между симметричными по отношению к накачке модами спектра ($k_n + k_{-n} = 2k_0$, $k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$). В разделе 19 и в работе [XXII-13] показано, что прямой расчет уравнения (19.1 а) и S – теория приводят к качественно одним и тем же результатам.

В представленной модели характерный пространственный масштаб соотносится с длиной волны, то есть $k_0 \xi = \zeta$, временной масштаб определяется соотношением $\tau = t \cdot \alpha \cdot \omega$, то есть единица измерения в пространстве – длина волны, а единица измерения во времени – обратный инкремент, то есть характерное время процесса. Для каждого момента времени рассчитывался размах H – разница соседних максимума и минимума, при $-1047 < \zeta < 1047$ (около 333 длин волн).. Для каждого момента времени вычислялся H_{rel} – относительный максимальный размах: отношение максимального размаха H_{max} к среднему H_{av} по всему пространству

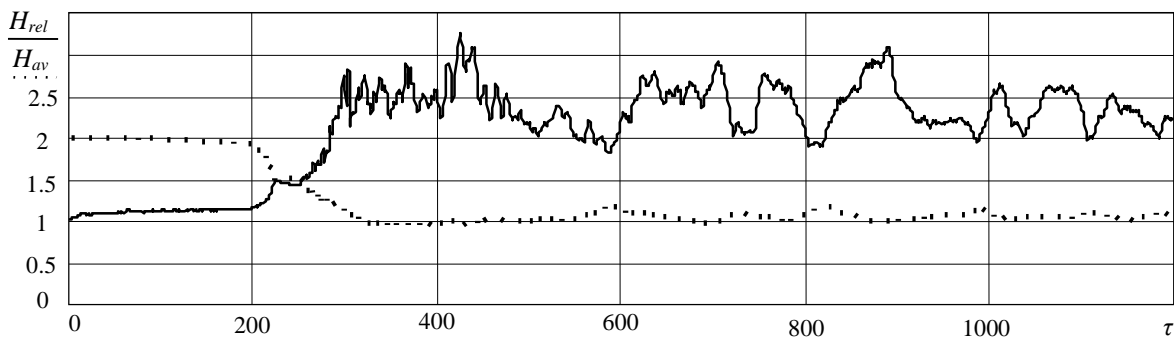


Рис. XXII.1. Поведение относительного максимального размаха волн H_{rel} в интервале $-1047 < \zeta < 1047$

На начальном этапе развития неустойчивости происходит выход на квазистационарный режим со средним размахом волнового движения, близким к единице, что примерно в два раза меньше начального значения для основной волны. Наибольшие размахи волны достигаются в момент времени $\tau = 425$ в области вблизи $\zeta = -482$ а также в момент времени $\tau = 888$ вблизи $\zeta = 956$. Например, можно представить фазовые диаграммы и вид поля в окрестности максимумов размахов (см. рис. XXII.2).

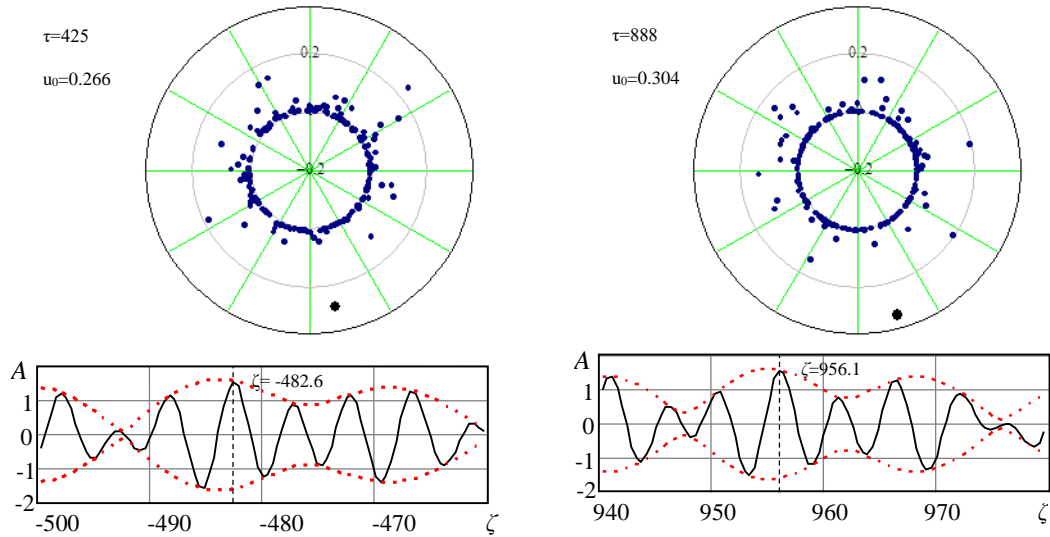


Рис. XXII.2. Фазовые диаграммы и вид поля вблизи максимумов размахов для первого максимума $H_{\max 1} = 3.118$, $H_{rel 1} = 3.253$ (слева) и $H_{\max 1} = 3.035$, $H_{rel 1} = 3.094$ (справа)

Следует обратить внимание, что, хотя амплитуда основной волны (жирная точка) не мала, она уже в меньшей степени управляет неустойчивостью. Действительно, в развитом режиме энергия основной волны оказывается вдвое меньше энергии спектра (см. рис. XXII.3), что кстати характерно для развитых режимов модуляционной неустойчивости и в других случаях [XXII-14].

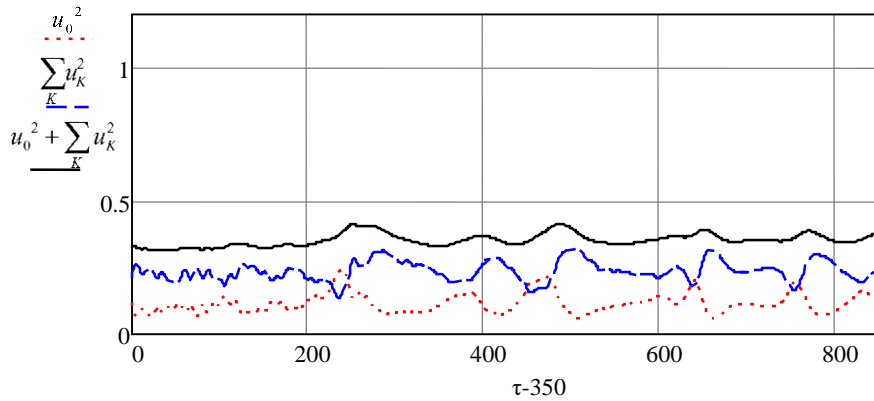


Рис. XXII.3. Поведение в развитом режиме энергии основной волны u_0^2 (нижняя кривая), энергии спектра $\sum_K u_K^2$ (средняя кривая) и полной энергии $u_0^2 + \sum_K u_K^2$ (верхняя кривая)

Представляет интерес рассмотреть движение волновых пакетов с максимальной амплитудой в пространстве и во времени (рис. XXII.4.)

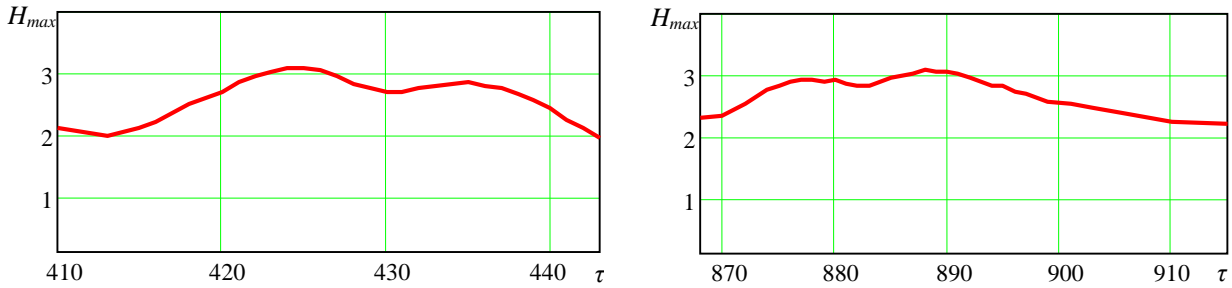


Рис. XXII.4. Изменение со временем максимальной амплитуды волновых пакетов (в системе их покоя) вблизи максимумов размахов для первого максимума $H_{max1} = 3.118$ $H_{rel1} = 3.253$ (слева) и $H_{max1} = 3.035$ $H_{rel1} = 3.094$ (справа)

Для первого пакета (слева) скорость движения максимума в принятых единицах 21.6, для второго пакета (справа) скорость движения максимального размаха 21.7. То есть движение гребня аномальной волны происходит с одной скоростью. Эта скорость является групповой скоростью пакета, что легко увидеть, рассматривая соотношение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = 21.6 = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{k_0}{\omega \cdot (\alpha / 2)} = \frac{v_g}{v_{ph}} \cdot \frac{2}{\alpha}, \text{ откуда } \frac{v_g}{v_{ph}} \approx 0.54. \quad (\text{XXII.2})$$

В лабораторной системе изменение амплитуды гребня волны аномальной амплитуды более ярко выражено (см. рис. XXII.5). Это качественно соответствует продолжительности возникновения автоволны Перегринна [XXII-15] в лабораторной системе отсчета. Хотя следует отметить, что автоволна Перегринна отвечает иной физической реальности, где дисперсия волны слабая. Гравитационные поверхностные волны обладают сильной дисперсией и уравнение НУШ (19.1 а) в этом случае сильно модифицируется. Однако в движущейся относительно лабораторной системе покоя волны время жизни волны существенно больше.

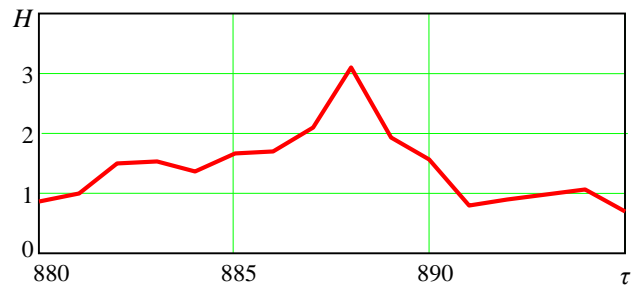


Рис. XXII.5. Изменение размаха волны аномальной амплитуды для второго пакета, максимальные значения которого были $H_{max1} = 3.035$, $H_{rel1} = 3.094$

Из рисунка XXII.4 видно, что время существования волны аномальной амплитуды в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью пакета, не превышает 40 единиц времени в рассматриваемой модели. Учитывая ее скорость, волна может пройти сотни длин волн. Стоит обратить внимание, что в рассмотренном численном эксперименте в один момент времени возникли две волны аномальной амплитуды из 333 волн в области наблюдения (см. рис. XXII.1) и за время порядка 40 единиц новых волн не возникло, то люди в море могут столкнуться с этой же волной не один раз.

Волны аномальной амплитуды, как оказалось, являются долгоживущими образованиями, дрейфующими в направлении волнового движения с групповой скоростью волнового пакета, которая вдвое меньше фазовой скорости основной волны. Продольный размер волнового пакета практически не меняется, амплитуда размаха в максимуме сначала нарастает, потом постепенно убывает. Расстояние, которое проходит волновой пакет с сохраняющимся аномальным размахом, по крайней мере равно нескольким сотням длин волн и для 200 метровых волн может достигать сотен километров.

Важно отметить, что волна, возбуждаемая в результате ветрового воздействия в результате модуляционной неустойчивости, формирует спектр возмущения, энергия которого вдвое превосходит энергию основной волны в развитом режиме неустойчивости. Именно интерференция мод этого спектра формирует причудливую волновую картину, где время от времени появляются волны аномальной амплитуды.

С одной стороны, число таких волн в зонах сильного ветрового воздействия значительно больше, чем это разрешает статистика случайных интерференционных процессов. Это обусловлено влиянием основной волны (ее амплитуда остается заметно больше амплитуд каждой из мод волнового пакета) на поведение каждой пары мод из волнового пакета возмущения. Это эффект вынужденной интерференции, навязанной основной волной. Однако простой подсчет таких волн средствами космического мониторинга из-за небольшой зоны (кадра) просмотра также может оказаться неточным. Однажды образовавшись, такие волны способны дрейфовать на значительные расстояния. При этом они вполне могут попасть в следующий кадр просмотра, что неоправданно увеличит число таких волн во всей зоне наблюдения. То есть оценки числа таких мод могут быть завышены.

Форма пакета, который содержит волну аномального размаха, более чем втрое превосходящего среднее значение размахов волнового движения, представляет собой цуг из трех волн, подобный автоволне Перегринна [XXII-15]. Замечание В. Е. Захарова о том, что существуют иные виды аномальных волн данной природы [XXII-8, XXII-9], основанное на наблюдениях [XXII-1, XXII-10], поясняется результатами работы [XXII-16], где показано, что сходящиеся фронты волн заведомо могут порождать более мощные аномальные возмущения несколько иной топологии.

Литература к приложению XXII

XXII-1. Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. – Нижний Новгород: ННГУ, 2004.

XXII-2. Kharif С., Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon // Eur. J. Mech. B-Fluid. – 2006. – V. 22 (6). – P. 603–633.

XXII-3. Yeom D.-I., Eggleton B.J. Photonics: rogue waves surface in light // Nature. 2007. – V. 450. – P. 953–962.

XXII -4. Kharif С., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

XXII -5. Бердичевский А. Гигантские волны-убийцы все еще представляют опасность для судоходства. – РИА новости, 2007. – Режим доступа: <http://transbez.com/info/sail/wave-killer.html>.

XXII -6. Lavrenov I. V. The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa // *Natural Hazards*. 1998. – Vol. 17. – P. 117–127.

XXII -7. Бадулин С., Иванов А., Островский А. Влияние гигантских волн на безопасность морской добычи и транспортировки углеводородов // *Технологии, ТЭК*. 2005. – No 2.

XXII -8. Zakharov V. E. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. Three-dimensional aspects of air-sea interaction // *Eur. J. Mech. B Fluids*. – 1999. – Vol. 18 (3). – P. 327–344.

XXII -9. Dyachenko AI, Zakharov V. E. Modulation instability of stokes wave – Freak wave // *JETP Lett*. 2005. – Vol. 81 (6). – P. 255–259.

XXII -10. Stansell P. Distributions of extreme wave, crest and trough heights measured in the North Sea // *Ocean Engineering*. – 2005. – Vol. 32. – No. 8-9. – P. 1015–1036.

XXII -11. Schwartz L. W., Fenton J. D. Strongly nonlinear waves // *Ann. Rev. Fluid. Mech.* – 1982. – Vol. 14. – P. 39–60.

XXII -12. Chernousenko V. M., Kuklin V. M., Panchenko I. P., Vorob'ev V. M. Spatial Dissipative Structures. // *Nonlinear World (IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Proc. In Physics.)*. Singapore, World Scientific 1990. – V. 2, – P. 776– 803.

XXII -13. Belkin, E. V., Kirichok, A. V., Kuklin V. M., Priymak A. V. Anomalous waves in a modulationally unstable wave field // *East Eur. J. Phys.* – 2014. – V. 1 – No. 2. – P. 4-39; Kuklin V.M. On frequency and spatial periodicity of the waves of the anomalous amplitude in the ocean / V.M. Kuklin, E.V. Poklonskiy. // *East European Journal of Physics* 2019. – V.6. – N4. – P. 41-46.

XXII-14. Chabchoub A., Hoffmann N., Akhmediev N. Rogue wave observation in a water wave tank / *Physical Review Letters* 106 (20) (2011) 204502.

XXII -15. Peregrine D. Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions/ *Journal of the Australian Mathematical Society Series* 25 (1) (1983) 16–43.

XXII -16. Chabchoub A., Hoffmann N, Onorato M and Akhmediev N. Super RogueWaves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves./ *Physical Review X* 2, 011015 (2012).

ПРИЛОЖЕНИЕ XXIII

ХОЛОДНАЯ ПЛАЗМА,

ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИЛИНА

Рассмотрим прежде случай параметрической неустойчивости внешнего длинноволнового ленгмюровского поля большой интенсивности для холодной плазмы, то есть в условиях превышении плотности энергии поля плотности тепловой энергии среды $W = |E_0|^2 / 4\pi \square n_0 T_e$. Уравнения квазигидродинамики для частиц сорта α , как известно имеют вид [XIX-1]

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + u_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E = -v_\alpha \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha,$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + u_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} n_\alpha + n_{0\alpha} \frac{\partial}{\partial x} v_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x} (n_\alpha v_\alpha), \quad (\text{XXIII.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi \sum_\beta e_\beta n_\beta,$$

где $\alpha = e$ и $\alpha = i$ соответствуют электронам и ионам. Частицы находятся в поле внешней волны, длину которой для упрощений расчетов положим равной бесконечности, осциллируя со скоростью $u_{0\alpha} = -(e_\alpha |E_0| / m_\alpha \omega_0) \cos \Phi$.

Важно отметить, что возбуждающее спектр неустойчивости начальное переменное поле в объеме рассмотрения однородно в пространстве. Это приводит к колебаниям электронов плазмы в таком пространственно-однородном поле. Что дало основание называть данный процесс параметрическим возбуждением спектра волн. Традиционно параметрическими неустойчивостями обычно называли процессы, причиной развития которых было периодическое изменение отдельного параметра (или его части), отвечающего, например, за низкочастотное движение, как в случаях, описываемых уравнением Матье. Однако последнее уравнение не содержало обратного воздействия развивающегося процесса на источник, вызывающий высокочастотную модуляцию параметра. То есть такая система не была самосогласованной. В обсуждаемом ниже случае вся система является самосогласованной, что является обычным для описания явлений в плазме. Спектр этой неустойчивости подобен спектру модуляционной неустойчивости волнового движения с конечной длиной волны. Кроме того, воздействие этого спектра приводит к модуляции плотности среды. Все это дало основание считать такую параметрическую неустойчивость разновидностью модуляционной неустойчивости (или, напротив, такую модуляционную неустойчивость считать разновидностью параметрической).

Компоненты напряженности поля внешней волны определяются следующим образом $E_0 = -i(|E_0| \exp[i(\omega_0 t + i\phi)] - |E_0| \exp[-i(\omega_0 t - i\phi)]) / 2$.

Исключая $E_n = -4\pi i e (n_{i,n} - n_{e,n}) / k_0 n$, перепишем первое уравнение системы (XXIV.1) в следующем виде

$$\frac{\partial v_{\alpha,n}}{\partial t} + u_{0\alpha} i k_0 n v_{\alpha,n} + \frac{4\pi e_\alpha i}{k_0 n m_\alpha} \sum_\beta e_\beta n_{\beta,m} = -i k_0 \sum_m m v_{\alpha,n-m} v_{\alpha,m}. \quad (\text{XXIII.2})$$

Используем следующие переменные $v_{\alpha,n} = e_\alpha n_{\alpha,n} \exp(-i a_{\alpha,n} \sin \Phi)$, $\theta_{\alpha,n} = v_{\alpha,n} \exp(-i a_{\alpha,n} \sin \Phi)$, где $a_{\alpha,n} = n e_\alpha k_0 E_0 / m_\alpha \omega_0^2$, $\Phi = \omega_0 t + \phi$. При этом первые два уравнения (XXIV.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial v_{\alpha,n}}{\partial t} + \theta_{\alpha,n} i k_0 n e_\alpha n_{\alpha,0} = -i k_0 n \sum_m v_{\alpha,n-m} \theta_{\alpha,m}, \quad (\text{XXIII.3})$$

$$\frac{\partial \theta_{\alpha,n}}{\partial t} + \frac{4\pi e_\alpha i}{k_0 n m_\alpha} \sum_\beta v_{\beta,n} \exp(i(a_{\beta,n} - a_{\alpha,n}) \sin \Phi) = -i k_0 \sum_m m \theta_{\alpha,n-m} \theta_{\alpha,m}. \quad (\text{XXIII.4})$$

Очевидно, что

$a_{i,n} - a_{e,n} = n(ek_0 E_0 / M \omega_0^2) + n(ek_0 E_0 / m_e \omega_0^2) \approx n(ek_0 E_0 / m_e \omega_0^2) = a_n$, где величина $k_n = nk_0$, определяет дискретный набор волновых чисел мод коротковолнового спектра. Для электронов уравнения (XXIII.3) – (XXIII.4) можно записать как

$$\frac{\partial v_{e,n}}{\partial t} - \theta_{e,n} ik_0 n e n_0 = -ik_0 n \sum_m v_{e,n-m} \theta_{e,m}, \quad (\text{XXIII.5})$$

$$\frac{\partial \theta_{e,n}}{\partial t} - \frac{4\pi e i}{k_0 n m_e} (v_{e,n} + v_{i,n} \exp(ia_n \sin \Phi)) = -ik_0 \sum_m m \theta_{e,n-m} \theta_{e,m}. \quad (\text{XXIII.6})$$

Используем представление

$$v_{e,n} = \sum_s u_n^{(s)} \exp(is\omega_0 t) = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} e^{i\omega_0 t} + u_n^{(-1)} e^{-i\omega_0 t} + u_n^{(2)} e^{i2\omega_0 t} + u_n^{(-2)} e^{-i2\omega_0 t}, \quad (\text{XXIII.7})$$

$$\theta_{e,n} = \sum_s v_n^{(s)} \exp(is\omega_0 t) = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} e^{i\omega_0 t} + v_n^{(-1)} e^{-i\omega_0 t} + v_n^{(2)} e^{i2\omega_0 t} + v_n^{(-2)} e^{-i2\omega_0 t}, \quad (\text{XXIII.8})$$

и известное разложение $\exp(ia \sin \Phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \exp(im\Phi)$, где $J_m(x)$ – функция Бесселя, причем $J_0(x) = J_0(-x)$, $J_1(x) = -J_1(-x) = J_{-1}(-x)$, $J_2(x) = J_{-2}(x) = J_2(-x)$ [XXIV-2], после чего найдем нерезонансные величины возмущений плотности $u_n^{(0)}, u_n^{(2)}, u_n^{(-2)}$ и скорости $v_n^{(0)}, v_n^{(2)}, v_n^{(-2)}$ в осциллирующей системе отсчета:

$$v_n^{(0)} = \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m (n-m) [v_{n-m}^{(1)} v_m^{(-1)} - v_{n-m}^{(-1)} v_m^{(1)}] = \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right]_n, \quad (\text{XXIII.9})$$

$$u_n^{(0)} = -v_{i,n} J_0(a_n) + \frac{k_0^2 n^2 m_e}{4\pi e} \sum_m v_{n-m}^{(1)} v_m^{(-1)} = -v_{i,n} J_0(a_n) - \frac{m_e}{4\pi e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}]_n, \quad (\text{XXIII.10})$$

$$v_n^{(\pm 2)} = \pm \frac{2\omega_0}{3k_0 n e n_0} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) \mp \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m m v_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(\pm 1)} = \quad (\text{XXIII.11})$$

$$= \pm \frac{2\omega_0}{3k_0 n e n_0} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) \mp \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n,$$

$$u_n^{(\pm 2)} = \frac{1}{3} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) - \frac{k_0^2 n e n_0}{\omega_{pe}^2} \sum_s s v_s^{(\pm 1)} v_{n-s}^{(\pm 1)} = \quad (\text{XXIII.12})$$

$$= \frac{1}{3} v_{i,n} J_{\pm 2}(a_n) \exp(\pm 2i\phi) + \frac{e n_0}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n.$$

Выражения (XXIII.9) и (XXIII.10), пропорциональные $J_0(a_n)$, отвечают медленным движениям, а выражения (XXIII.11) и (XXIII.12), пропорциональные

$J_{\pm 2}(a_n)$, определяются вкладом в нелинейность второй гармоники. Для резонансных величин справедливо уравнение

$$\begin{aligned} & \pm 2i\omega_0 \left[\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp i v_{i,n} \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \right] = \\ & + k_0^2 n e n_0 \sum_m m \left[v_{n-m}^{(0)} v_m^{(\pm 1)} + v_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(0)} \right] - ik_0 n (\pm i\omega_0) \sum_m \left[u_{n-m}^{(0)} v_m^{(\pm 1)} + u_{n-m}^{(\pm 1)} v_m^{(0)} \right] + \\ & + k_0^2 n e n_0 \sum_m m v_{n-m}^{(\mp 1)} v_m^{(\pm 2)} - ik_0 n (\pm i\omega_0) \sum_m \left[u_{n-m}^{(\pm 2)} v_m^{(\mp 1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{XXIII.13})$$

Было использовано представление

$u_n^{(\pm 1)} = \pm k_0 n e n_0 v_n^{(\pm 1)} / \omega_0 = ik_0 n E_n^{(\pm 1)} / 4\pi$, где $v_n^{(\pm 1)} = \pm ie E_n^{(\pm 1)} / m\omega_0$. В этом случае, собирая в правую часть (XXIII.1) слагаемые, ответственные только за электронную нелинейность, перепишем это уравнение для коротковолновых возмущений в виде

$$\begin{aligned} & \pm 2i\omega_0 \left[\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp i v_{i,n} \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \right] e^{\pm i\omega_0 t} + \\ & + \frac{\omega_0^2}{e n_0} n e^{\pm i\omega_0 t} \sum_m \frac{v_{i,n-m}}{m} \left[u_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp(\pm 2i\phi) + u_m^{(\pm 1)} J_0(a_{n-m}) \right] = \quad (\text{XXIII.14}) \\ & = (k_0 n e n_0 / \omega_0) I. \end{aligned}$$

где вклад электронной нелинейности I можно представить в виде

$$\begin{aligned} I = & - \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{(\pm 1)} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \right) \mp v^{(\pm 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[v^{(1)} v^{(-1)} \right] - \\ & - \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \pm \\ & \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \end{aligned}$$

Очевидно, что правая часть уравнения (XXIII.14) отвечающая вкладу электронной нелинейности в рассматриваемом одномерном случае, оказывается равной нулю, что прежде независимо отмечалось в работах В. П. Силина [XXIII -3] и В. Е. Захарова [XXIII -4]. Перепишем (XXIII.14) в виде [XXIII-5]

$$\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp i v_{i,n} \frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi)}{2\omega_0} \mp$$

$$\mp i \frac{\omega_0 n}{2en_0} \sum_m \frac{v_{i,n-m}}{m} \left[u_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp(\pm 2i\phi) + u_m^{(\pm 1)} J_0(a_{n-m}) \right] = 0. \quad (\text{XXIII.15})$$

Если использовать представление для резонансного поля в виде $(E_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + E_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t}) / 2$, как это было сделано в работе Е. А. Кузнецова [XXIII-6], тогда $E_n^{(pm1)} \rightarrow E_n^{(\pm 1)} / 2 = -4\pi i u_n^{(\pm 1)} / k_0 n$, и уравнение (XXIII.15) можно записать иначе

$$\frac{\partial E_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n^{(\pm 1)} \mp \frac{8\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{2k_0 n} J_{\pm 1}(a_n) \exp(\pm i\phi) \mp$$

$$\mp i \frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,n-m} [E_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{n-m}) \exp(\pm 2i\phi) + E_m^{(\pm 1)} J_0(a_{n-m})] = 0. \quad (\text{XXIII.16})$$

Приведем также уравнение для волны накачки

$$\frac{\partial E_0^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_0^{(\pm 1)} \mp$$

$$\mp \frac{8\pi\omega_0}{2en_0 k_0} \sum_m \frac{v_{i,-m}}{m} [u_m^{(\mp 1)} J_{\pm 2}(a_{-m}) \exp(\pm 2i\phi) + u_m^{(\pm 1)} J_0(a_{-m})] = 0. \quad (\text{XXIII.17})$$

Из представления волны накачки, соответствующего выбранной скорости осцилляций $u_{0\alpha} = -(e_\alpha E_0 / m_\alpha \omega_0) \cos \Phi$, получим²⁵ $E_0 \rightarrow -iE_0$ и $E_0^* \rightarrow iE_0^*$ и для E_0 уравнение (XXIII.17) можно переписать [XXIII -5, XXIII -7]:

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = \frac{8\pi i \omega_0}{2en_0 k_0} \sum_m \frac{v_{i,-m}}{m} \left[u_m^{(-1)} J_2(a_{-m}) \exp(+2i\phi) + u_m^{(+1)} J_0(a_{-m}) \right], \quad (\text{XXIII.18})$$

где $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^2) / 2\omega_0$, или, выражая возмущения плотности через напряженности электрического поля мод

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\Delta E_0 = -\frac{\omega_0}{2en_0} \sum_m v_{i,-m} \left[E_m^{(-1)} J_2(a_m) \exp(2i\phi) + E_m^{(+1)} J_0(a_m) \right]. \quad (\text{XXIII.19})$$

Здесь также члены в правой части (XXIII-19) пропорциональные $J_0(a_n)$, отвечают медленным движениям, а члены, пропорциональные $J_{\pm 2}(a_n)$, определяются вкладом в нелинейность второй гармоники.

Медленно изменяющаяся во времени напряженность электрического поля

²⁵ Фактически, это означает, что $|E_0| \exp(i\phi) \rightarrow |E_0| \exp(i\phi - i\pi / 2)$, ибо фаза $\phi_0 = i\pi / 2$ связана с выбором вида скорости осцилляций.

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= -\frac{4\pi i}{k_0 n} \left(\langle v_{en} \exp(-ia_n \sin \phi) \rangle + v_{i,n} \right) = \\ &= -\frac{4\pi i}{k_0 n} \left(v_{i,n} \left[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \left[u_n^{(1)} J_1(a_n) e^{-i\phi} + u_n^{(-1)} J_{-1}(a_n) e^{i\phi} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n^2}{en_0} J_0(a_n) \sum_m \frac{u_{n-m}^{(1)} u_m^{(-1)}}{(n-m)m} - \frac{n}{en_0} J_2(a_n) \sum_m \frac{1}{m} \left[u_{n-m}^{(1)} u_m^{(1)} e^{-2i\phi} + u_{n-m}^{(-1)} u_m^{(-1)} e^{2i\phi} \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{XXIII.20})$$

может быть представлена иначе

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= -\frac{4\pi i}{k_0 n} v_{i,n} \left[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \frac{1}{2} \left[E_n^{(1)} J_1(a_n) e^{-i\phi} + E_n^{(-1)} J_{-1}(a_n) e^{i\phi} \right] - \\ &\quad - \frac{ink_0}{16\pi en_0} J_0(a_n) \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)} - \\ &\quad - \frac{ik_0}{16\pi en_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) \left[E_{n-m}^{(1)} E_m^{(1)} e^{-2i\phi} + E_{n-m}^{(-1)} E_m^{(-1)} e^{2i\phi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{XXIII.21})$$

что позволяет описывать ионы крупными частицами, уравнения движения для которых

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{M} \sum_n \bar{E}_n \exp(ik_0 n x_s), \quad (\text{XXIII.22})$$

а плотность ионов определяется выражениями

$$v_{i,n} = en_{in} = en_0 \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp(-ink_0 x_s(x_0, t)) dx_{s0}. \quad (\text{XXIII.23})$$

Заметим, что описание ионов крупными частицами, как показано в [XXIII - 7] кроме всего прочего позволяет увеличить устойчивость расчетной схемы. Используя уравнения (XXIII.1) для ионов, в которых правыми частями можно пренебречь вследствие их малости, можно перейти к гидродинамическому описанию ионов. Уравнение для ионной плотности при этом имеет вид [XXIII - 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_{i,n}}{\partial t^2} &= -\Omega_i^2 \left(v_{i,n} \left[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \left[u_n^{(1)} J_1(a_n) e^{-i\phi} + u_n^{(-1)} J_{-1}(a_n) e^{i\phi} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n^2}{en_0} J_0(a_n) \sum_m \frac{u_{n-m}^{(1)} u_m^{(-1)}}{(n-m)m} - \frac{n}{en_0} J_2(a_n) \sum_m \frac{1}{m} \left[u_{n-m}^{(1)} u_m^{(1)} e^{-2i\phi} + u_{n-m}^{(-1)} u_m^{(-1)} e^{2i\phi} \right] \right), \end{aligned} \quad (\text{XXIII.24})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_{i,n}}{\partial t^2} = & -\Omega_i^2 \left(v_{i,n} \left[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3} J_2^2(a_n) \right] + \frac{ik_0 n}{8\pi} \left[E_n^{(1)} J_1(a_n) e^{-i\phi} + E_n^{(-1)} J_{-1}(a_n) e^{i\phi} \right] - \right. \\ & + \frac{n^2 k_0^2}{64\pi^2 e n_0} \sum_m J_0(a_n) E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)} + \\ & \left. + \frac{nk_0^2}{64\pi^2 e n_0} J_2(a_n) \sum_m (n-m) \left[E_{n-m}^{(1)} E_m^{(1)} e^{-2i\phi} + E_{n-m}^{(-1)} E_m^{(-1)} e^{2i\phi} \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{XXIII.25})$$

Можно убедиться в том, что комплексно сопряженное уравнение (XXIII.16) при нижнем знаке принимает вид (при суммировании можно заменить немой индекс $m \rightarrow -m$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (E_{-n}^{(-1)})^*}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} (E_{-n}^{(-1)})^* - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,-n}^*}{k_0 n} J_1(a_n) \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2e n_0} \sum_m u_{i,-n+m}^* \left[(E_{-m}^{(1)})^* J_{-2}(a_{-n+m}) \exp(2i\phi) + (E_{-m}^{(-1)})^* J_0(a_{-n+m}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{XXIII.26})$$

В то же время для положительных индексов, это же уравнение может быть записано

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n^{(1)}}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_0} E_n^{(1)} - \frac{4\pi\omega_{pe} v_{i,n}}{k_0 n} J_{\pm 1}(a_n) \exp(i\phi) - \\ - i \frac{\omega_0}{2e n_0} \sum_m v_{i,n-m} \left[E_m^{(-1)} J_2(a_{n-m}) \exp(2i\phi) + E_m^{(1)} J_0(a_{n-m}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{XXIII.27})$$

Легко видеть, что при $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$ и $v_{i,-n} = v_{i,n}^*$ уравнения (XXIII-26) и (XXIII-27) идентичны. Точно также можно убедиться, что из подобных преобразований следует $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$ и $v_{i,n} = v_{i,-n}^*$. То есть, возмущения заряда ионов обладают симметрией $n_{i,-n} = n_{i,n}^*$. При этом для корректного описания процесса неустойчивости достаточно использовать компоненты ВЧ поля $E_n^{(1)}$, $E_{-n}^{(1)}$ и $E_0^{(1)}$, а также возмущения заряда ионов $v_{i,n}$ при положительно определенных значениях индекса. Так как остальные величины выражаются через них, то есть можно отказаться от использования верхнего индекса. Используя эти упрощения, из (XXIII.19), (XXIII.25), (XXIII.27) можно получить систему уравнений гидродинамической модели Силина, а из (XXIII.19), (XXIII.21), (XXIII.22), (XXIII.23), (XXIII.27) – систему уравнений гибридной модели Силина.

Литература к приложению XXIII

- XXIII-1. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – Наука, 1973.
 XXIII-2. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Издание 5. – Наука, 1978.

XXIII-3. Силин В. П. Параметрический резонанс в плазме // ЖЭТФ. 1965. – Т. 48. – С. 1679.

XXIII-4. Захаров В. Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля // ЖЭТФ. 1966. – Т. 51. – № 6. – С. 688–696

XXIII-5. Kuklin V. M. Similarity of 1D Parametric Instability description of Langmuir waves // Journ. Kharkiv Nat. Univer., Phys. Ser. Nuclei, Part. Fields. 2013. – V. 1041. – № 2 (58). – С. 20–32

XXIII-6. Кузнецов Е. А. Об усредненном описании ленгмюровских волн в плазме // Физика плазмы. Наука. 1976. – Т. 2. – № 2. – С. 327–333.

XXIII-7. Chernousenko V. V, Kuklin V. M., Panchenko I. P. The structure in nonequilibrium media. In book: The integrability and kinetic equations for solitons. AN USSR, ITPh. K. Nauk. Dumka. 1990. – 472 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ XXIV

АНОМАЛЬНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАЗМЫ [XXIV -1]

Интенсивные электромагнитные поля, воздействующие на поверхность плазмы, приводят к значительным осцилляциям электронного компонента. Рассмотрим достаточно холодную плазму. Характер воздействия такого внешнего электромагнитного поля на поверхность холодной плазмы изложен в книге В. П. Силина [XXIV-2]. Обобщим этот подход на случай самосогласованного описания воздействия внешнего нормально падающего на границу плазмы электромагнитного излучения с возбуждением широкого спектра поверхностных колебаний.

Пусть на плазменное полупространство ($x < 0$) с невозмущенной постоянной плотностью плазмы n_0 нормально падает электромагнитная волна с компонентами $(0, H_y, E_z)$, где $|H_y| = |E_z| = E_0$. Причем интенсивность поля падающей волны будем считать достаточно большой и пренебрежем тепловым разбросом электронов плазмы ($E_0^2 > 4\pi n_0 T_e$). Для возмущений поверхностной

плотности заряда $\sigma_\alpha = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\rho}^{\rho} n'_\alpha dx$, где $e_\alpha, m_\alpha, n_\alpha$ – заряд, масса и возмущенная плотность заряда частиц сорта α , можно воспользоваться системой уравнений В. П. Силина [XXIV-2].

$$\exp[ia_{\alpha n} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)] \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{\alpha n} + \frac{\omega_\alpha^2}{2} \sum_{\beta} v_{\beta n} = 0 \quad (\text{XXIV.1})$$

где $v_{\alpha n} = e_\alpha \cdot \sigma_{\alpha n} \exp[-ia_{\alpha n} \sin(\omega_0 t + \varphi)]$, $a_{\alpha n} = e_\alpha n \cdot E_z(k_z = 0) / m_\alpha \omega_0 c$, $\omega_\alpha^2 = 4\pi e^2 n_0 / m_\alpha$, $\omega_0 t + \varphi$ – фаза поля с $k_z = 0$ в плазме, ω_0 – частота падающей волны.

Волновое число таких возмущений $k_{zn} = n\omega_0 / c$. Решение (XXIV.1) будем искать в виде рядов

$$v_{\alpha n} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} u_{\alpha n}^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 t\} \quad (\text{XXIV.1})$$

При описании поверхностных возмущений ионной плотности можно удерживать только первый член ряда. Слагаемые в сумме для v_{en} , пропорциональные $\exp\{\pm i\omega_0 t\}$ конечно превышают остальные члены ряда, однако для корректности необходимо удержать члены, соответствующие «нулевой» и второй гармонике. Ограничимся учетом симметричных возмущений ионов $u_{in}^{(0)} = u_{i-n}^{(0)}$, кроме того, имеют место соотношения $u_{en}^{(0)} = u_{e-n}^{(0)}$, $u_{en}^{(\pm 2)} = u_{e-n}^{(\pm 2)}$, $u_{en}^{(\pm 1)} = -u_{e-n}^{(\pm 1)}$, $(u_{en}^{(1)})^* = u_{en}^{(-1)}$.

Самосогласованная обобщенная система уравнений Силина, учитывающая обратное воздействие поля возбуждаемого коротковолнового спектра поверхностных колебаний на отраженную волну (параметры падающей волны очевидно не меняются) имеет вид:

$$\frac{du_{en}}{dt} + (\theta_n - i\Delta_1\omega_0)u_{en} = i\frac{\omega_0}{2} J_1(a_n) \cdot u_{in} \exp\{i\varphi\}, \quad (\text{XXIV.2})$$

$$\frac{d^2 u_{in}}{dt^2} = -\omega_0 \frac{m_e}{m_i} J_1(a_n) \cdot [u_{en} \exp\{-i\varphi\} + u_{en}^* \exp\{i\varphi\}], \quad (\text{XXIV.3})$$

$$D(R - R_0) = \frac{8\pi}{e n_0 E_0} \sum_n u_{in} [J_0(a_n) \cdot u_{en}^* \exp\{i\varphi\} - J_2(a_n) \cdot u_{en} \exp\{-i\varphi\}], \quad (\text{XXIV.4})$$

где $1 + R = |1 + R| \exp\{-i\varphi\} = a_n \exp\{-i\varphi\} / \beta_0 n$, $\omega_0 = (1 - \Delta_1) \cdot \omega_{pe} / \sqrt{2}$, $\beta_0 = 2eE_0 / m_e c \omega_0$,

$$R_0 = -D_0^* / D_0, \quad D_0 = \frac{\varepsilon_0}{\kappa_0} + i \frac{c}{\omega_0},$$

$$\varepsilon_0 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega_0^2, \quad \kappa_0^2 = -\omega_0^2 \varepsilon_0 / c^2,$$

$$\Delta_1 = (m_e / m_i)^{1/3} \Delta,$$

R – амплитудный коэффициент отражения

$$u_{en} = u_{en}^{(1)}, \quad u_{in} = u_{in}^{(0)}.$$

Слагаемые, пропорциональные $J_0(a_n)$ и $J_2(a_n)$ отвечают вкладу в нелинейное взаимодействие соответственно «нулевой» и второй гармоник. Из уравнений системы (XXIV.2) – (XXIV.4) можно получить соотношение

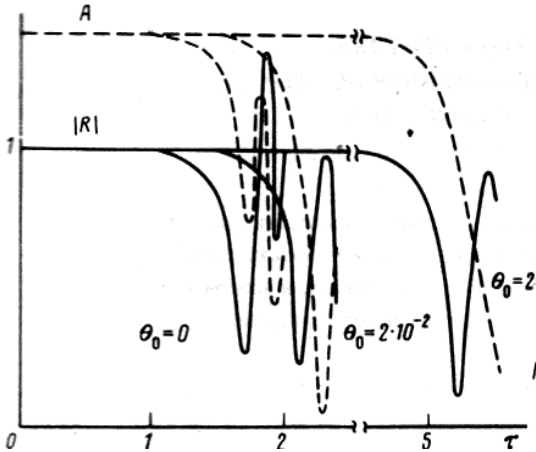


Рис. XXIV.1. Коэффициент отражения R и поле в плазме AE_0 для $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = 0.02$ [XXIV-1]

$$1 - |R|^2 = \frac{16\pi}{e\beta_0 n_0 c E_0} \sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{d|u_{en}|^2}{dt} + 2\theta_n |u_{en}|^2 \right), \quad (\text{XXIV.5})$$

которое представляет собой закон сохранения энергии.

Для численного решения уравнений (XXIV.2) – (XXIV.4) переходим к переменным $\tau = (m_e / m_i)^{1/3} \omega_0 t$, $\theta_n = n\theta_0 (m_e / m_i)^{1/3} \omega_0$, $u_{en} = |u_{en}| \exp\{i\varphi_n\}$,

$$N_n = 4\pi(m_e / m_i)^{1/6} E_0^{-1} \cdot |u_{en}| \beta_0^{1/2}, \quad M_n = 4\pi(m_e / m_i)^{-1/6} E_0^{-1} \cdot |u_{in}| \beta_0^{1/2}.$$

Особенности затухания поверхностных волн таковы, что оно растет с ростом волнового числа колебаний [XXIV-3]. В процессе развития неустойчивости разброс по фазам φ_n быстро уменьшается за времена несколько единиц τ , формируя области поверхностной электронной и ионной плотности быстро уменьшающегося масштаба. Этот же эффект синхронизации мод приводит к сильному взаимодействию коротковолнового спектра неустойчивости с отраженной волной и порождает значительные осцилляции коэффициента отражения при малой диссипации в интервале $R = 0.5 \div 1.3$. Учет потерь сужает пространственный спектр неустойчивости, уменьшает интегральный уровень энергии спектра, затягивает развитие неустойчивости, а при колебаниях коэффициента отражения последний не превышает единицу.

Литература к приложению XXIV

XXIV-1. Куклин В. М., Панченко И. П. Возбуждение коротковолнового спектра поверхностных волн в плазме мощным электромагнитным излучением. Письма в ЖЭТФ, 1986. – Т. 43. – В. 5. – С. 237–239.

XXIV-2. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М., Наука, 1973. – 287 с.

XXIV-3. Кондратенко А. Н. Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме. – М., Энергоатомиздат. 1985. – 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ XXV

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛИ ПРОКТОРА-СИВАШИНСКОГО В УСЛОВИЯХ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ [XXV-1]

При заменах $T \cdot \varepsilon^2 = t$, для медленных амплитуд A_j в отсутствии шума получим математическое выражение модели Проктора-Сивашинского для описания конвекции

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = A_j - \gamma A_{j+j_0} A_{j+2j_0} - \sum_{i=1}^N V_{ij} |A_i|^2 A_j, \quad (XXV.1)$$

где коэффициенты взаимодействия определены соотношениями

$$V_{jj} = 1$$

$$V_{ij} = (2/3) \left(1 - 2(\vec{k}_i \vec{k}_j)^2 \right) = (2/3) (1 + 2 \cos^2 \vartheta),$$

а ϑ – угол между векторами \vec{k}_i и \vec{k}_j с начальными значениями амплитуд спектра, причем $A_j|_{t=0} = A_{j_0}$, $\vartheta_{j_0} = 2\pi/3$. Решение (XXV.1) представим [XXV

-1] как и ранее в форме $\Phi = \varepsilon \sum_j A_j \exp(i\vec{k}_j \vec{r})$ с $|\vec{k}_j| = 1$.

Мягкий режим возбуждения шестигранной конвективной структуры. Учет температурной зависимости вязкости демонстрирует возможность реализовать режимы мягкого (при $\gamma < 0$) и жесткого (то есть с заданием начального возмущения уже в виде искомой структуры на 20 % превышающего средние значения аморфного состояния при $\gamma > 0$) возбуждения шестигранных конвективных ячеек, функция состояния которых практически равна функции состояния системы валов. Время структурно-фазового перехода первого рода от аморфного состояния практически такое же. При отрицательных $\gamma < 0$ наблюдается, как и в модели Свифта-Хоэнберга, режим мягкого возбуждения шестигранных конвективных ячеек (см. рис. XXV.1)

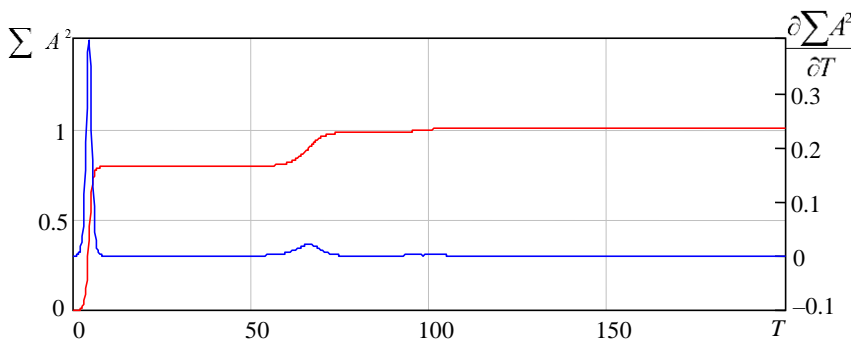


Рис. XXV.1. Поведение величины $\sum A^2$ (верхняя кривая) и ее производной $\partial \sum A^2 / \partial T$ от времени T в режиме мягкого возбуждения при $\gamma = -0.25$

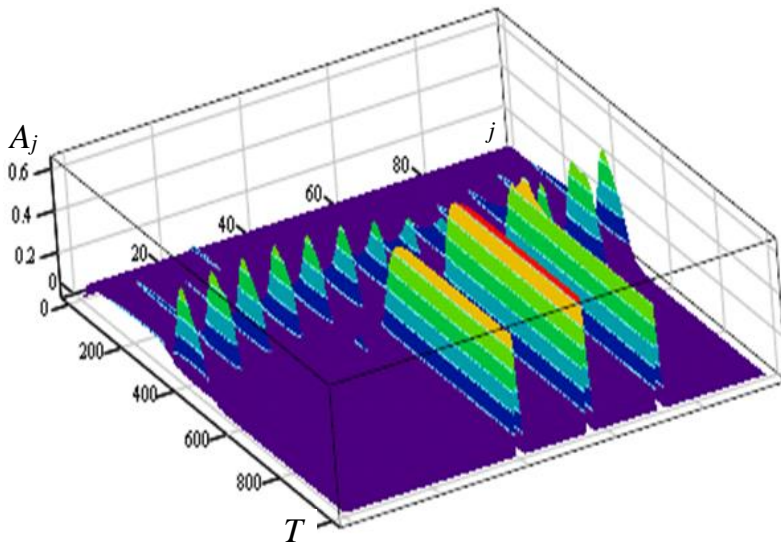


Рис. XXV.2. Динамика спектра неустойчивости при мягком режиме неустойчивости ($\gamma = -0.25$)

Интервал времени фазового перехода первого рода равен τ_2 , однако несмотря на то, что значения функции состояния равны единице, что в прежнем случае отсутствия зависимости вязкости от температуры $\gamma = 0$ отвечало системе конвективных валов, здесь формируется система шестигранных ячеек, что видно на рис. XXV.2, где изображена динамика спектра неустойчивости.

Жесткий режим конвективной шестигранной структуры.

В случае $\gamma > 0$ возможен режим только жесткого возбуждения, то есть начальные условия должны быть заданы в форме шестиугольных конвективных возмущений, четко выраженных на фоне флуктуаций. При этих условиях все характеристики

процесса подобны случаю мягкого возбуждения при тех же значениях $|\gamma|$. В противном случае динамика процесса даже в случае отличных от нуля $\gamma > 0$

подобна случаю отсутствия зависимости вязкости от температуры, рассмотренном выше.

Для реализации жесткого режима на фоне аморфного состояния была сформирована структура амплитуда которой была на 20 % больше среднего значения амплитуд мод (см. рис. XXV.3)

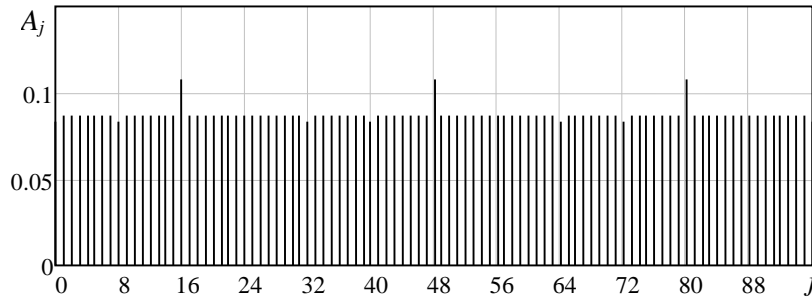


Рис. XXV.3. Начальное состояние спектра мод на фоне аморфного состояния системы перед фазовым переходом в газовой среде ($\gamma > 0$)

Поведение функции состояния $\sum A^2$ и производной $\partial \sum A^2 / \partial T$ от времени представлено на рис. XXV.4 и рис. XXV.5 соответственно

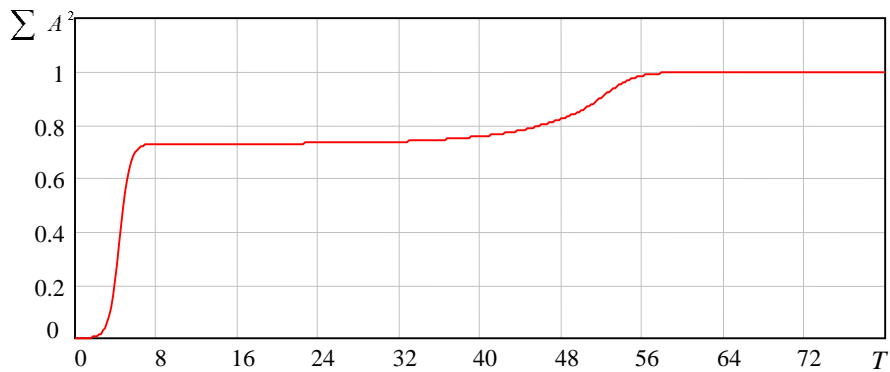


Рис. XXV.4. Поведение величины $\sum A^2$ от времени T в режиме жесткого возбуждения при $\gamma = 0.2$

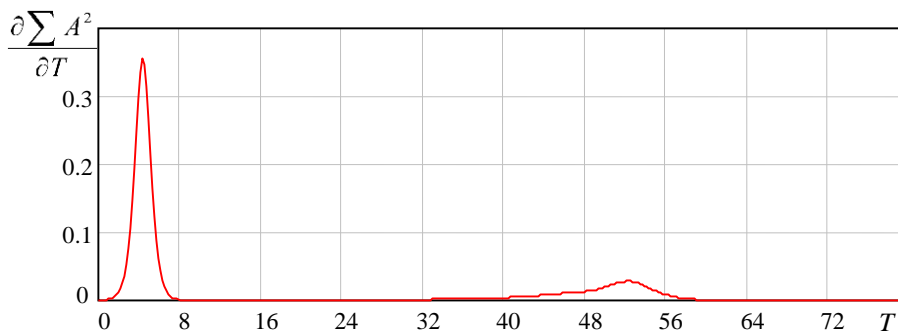


Рис. XXV.5. Поведение величины $\partial \sum A^2 / \partial T$ от времени T в режиме жесткого возбуждения при $\gamma = 0.2$

Динамика формирования спектра приведена на рис. XXV.6. Значения $1 < j < 100$ отвечает значениям угла $0 < \vartheta < 2\pi$. Возникновение в спектре трех мод, сдвинутых на $2\pi/3$ соответствует формированию шестигранных ячеек.

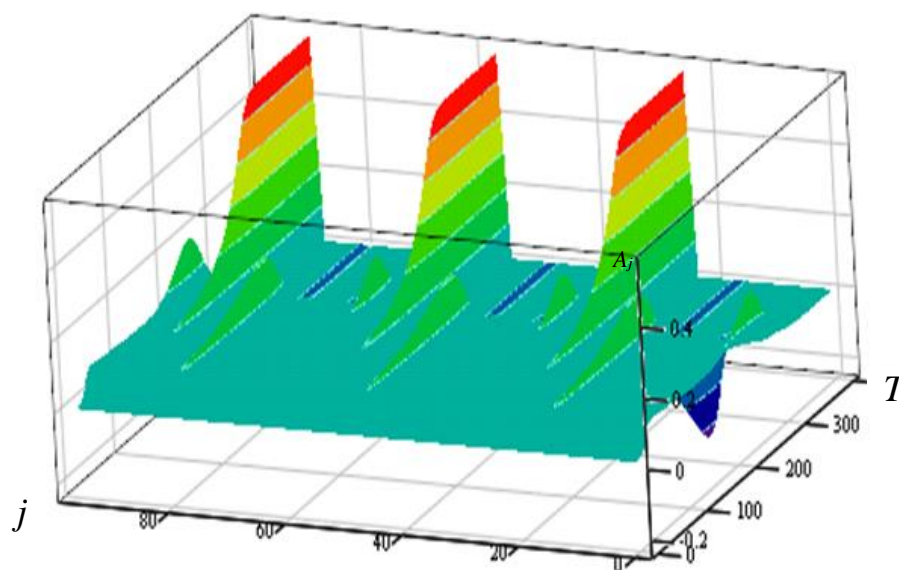


Рис. XXV.6. Динамика спектра неустойчивости при жестком режиме неустойчивости ($\gamma = 0.2$)

Литература к приложению XXV

XXV -1. Gushchin I.V. Phase transitions in convection/ I.V. Gushchin , V. M. Kuklin, E. V. Poklonskiy. // East European Journal of Physics 2019. – V.6. – N4. – P. 34-40. <http://periodicals.karazin.ua/eejp/article/view/8561>

ПРИЛОЖЕНИЕ XXVI КРИТЕРИИ ДЕФЕКТНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

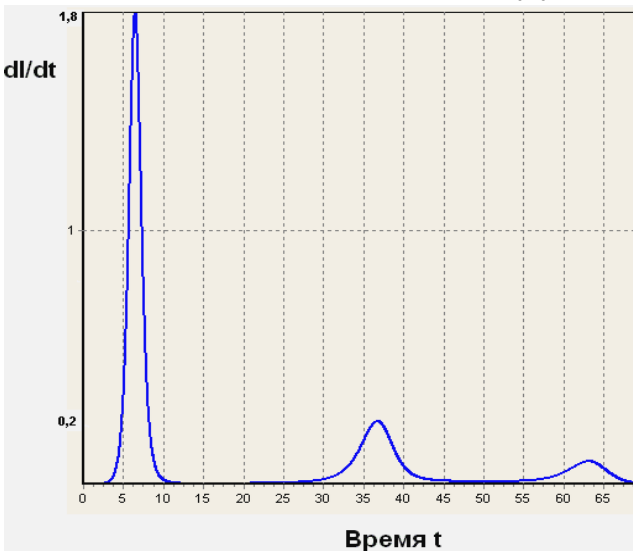


Рис. XXVI.1. Поведение производной $\partial I / \partial t$ интегральной квадратичной формы $I = \sum_j a_j^2$ со временем

число дефектных пространственных ячеек (площадь структуры, занятая нерегулярными ячейками) и N – число ячеек в идеальной регулярной структуре (полная площадь структуры) [XXVI-1, XXVI-2].

Критерии, по которым считать ячейку правильной и метод, позволяющий подсчитать число этих ячеек, следующие. Полученная картина для поля переводится в режим 8 битного изображения. То есть, максимальное количество отображаемых цветов уменьшается до 256. Тем самым сформировавшаяся структура становится более явно различимой. При увеличении подобного изображения можно достаточно явно различить, какая из структурных единиц является необходимой нам правильной ячейкой, а какая – нет. Правильная ячейка имеет правильную геометрическую форму с равномерно темным центром и соизмеримыми с центром по размеру четырьмя возвышенностями более светлого равномерного окраса.

Спектральная и визуальная дефектности. Обсуждение этого вопроса полезно связать с процессом формирования устойчивого состояния – стабильной структуры конвективных ячеек.

На интервале между вторым и третьим всплеском производной квадратичной формы (см. рис. XXVI.1) изучим динамику «спектральной дефектности» структуры $D = \sum_{j \neq 1,2} a_j^2 / \sum_j a_j^2$

, основанной на отношении квадратов амплитуд мод спектра, не отвечающего системе квадратных ячеек к полной сумме квадратов мод, а также так называемую «визуальную дефектность» $d = N_{def} / N$, где N_{def} –

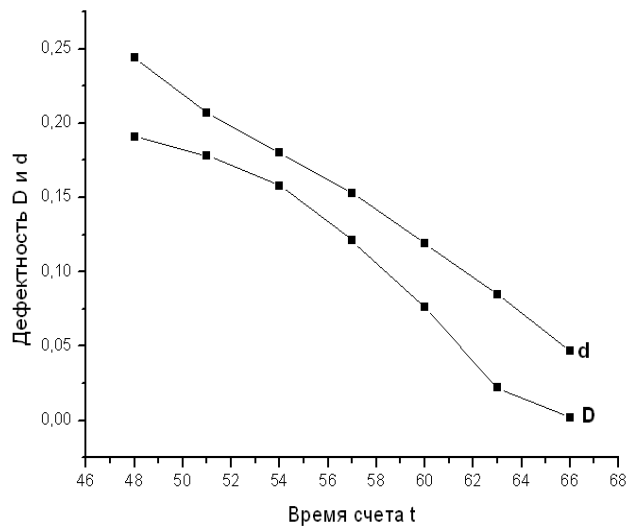


Рис. XXVI.2. Сравнительный анализ спектральной D и визуальной d дефектности. Число мод -50

Несмотря на качественный характер описания величин, характеризующих спектральную и визуальную дефектность структуры, можно отметить подобное их поведение (см. рис. XXVI.2) при приближении к завершению структурного перехода.

Учет внешнего шума и неустойчивости границ системы. Сделаем несколько замечаний относительно реализации обсуждаемых сценариев развития процессов. В случае достаточно большого уровня шума, как аддитивного ($f \neq 0$), так и мультипликативного (случайная составляющая в ε^2 в первом члене правой части (22.4)), уровень амплитуд мод с самого начала может оказаться не малым. Начальные условия также могут быть такими, что стартовое состояние системы можно считать «аморфным» с высокой степенью неупорядоченности, то есть, если амплитуды возмущений достаточно велики и отличаются друг от друга по случайному закону. Что может поддерживаться в дальнейшем случайным шумом. Важно выяснить при каких уровнях шума, удастся сохранить «аморфное» состояние, характеризующее наличием большого числа пространственных мод.

Видимо, шум весьма большой интенсивности способен удержать систему от формирования конвективных структур, однако результаты численных расчетов свидетельствуют о том, что шум даже заметной интенсивности не способен помешать образованию последовательно метастабильного (валы) и стабильного (квадратные ячейки) состояний. Напротив, при значительном уменьшении амплитуды шума процесс перехода из метастабильного в стабильное состояние способен замедляться, когда система надолго задерживается («замораживается») в метастабильном состоянии. Это согласуется с представлениями (см., например, [XXVI-3]), о том, что в ряде случаев, именно шум способствует структурным переходам.

Более интересно влияние неустойчивости границ области конвекции, которое можно качественно моделировать, изменяя случайным образом в начальный момент или в процессе развития конвективной структуры значения угла ϑ_{ij} между векторами, определяющими здесь полный набор функций, описывающих данную граничную задачу. Учет такого эффекта, замеченного И. В. Гущиным, показал намного более сильное влияние неустойчивости границ системы на развитие конвекции в целом и на характер структурно-фазовых переходов.

Обсуждаемые модели при достаточно небольшой модификации представляют интерес для широкого применения для целей имитационного моделирования процессов формирования структур и фазовых переходов второго рода. Наличие большего числа минимумов на периоде изменения угла ϑ (например – шести) приведет в конечном итоге к появлению пространственной структуры в виде вписанного в единичный круг многогранника с большим числом ребер (шестигранника). Изменяя пространственную структуру локальных минимумов потенциала и их величину можно добиться формирования любой симметричной пространственной структуры. Причем наблюдая последовательно формирование метастабильных состояний и все стадии структурных переходов. Что позволяет применять модифицированную подобным образом

модель для качественного описания процессов формирования как минимум двумерных пространственных структур в системах, где есть один выделенный масштаб, в частности, в конденсированных средах.

Литература к приложению XXVI

XXVI-1. Gushchin I. V., Kirichok A. V., Kuklin V. M. Pattern Transitions in Unstable Viscous Convective Medium // arXiv preprint arXiv: 1311.3884. – 2013.

XXVI-2. I. V. Gushchin, A. V. Kirichok, V. M. Kuklin. Pattern formation in convective media / «Journal of Kharkiv National University», physical series «Nuclei, Particles, Fields», 2013. – issue 1 /57. – V. 1040. – С. 4–27

XXVI-3. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Пер с англ. – М. : Мир, 1987. – 400 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ XXVII

О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ПРОКТОРА-СИВАШИНСКОГО-ПИСЬМЕНА К ОПИСАНИЮ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАЗВИТОЙ СТРУКТУРЫ КОНВЕКТИВНЫХ ЯЧЕЕК

Несмотря на то, что модель Проктора-Сивашинского-Письмена [XXVII-1] была выведена для чисел Прандтля порядка единицы, она оказывается справедливой и для описания эволюции развитой структуры конвективных ячеек, для которых, как показано ранее $\Phi \propto \varepsilon$. Причем, модуляционная неустойчивость этой структуры возникает лишь при малых числах Прандтля [XXVII-2].

Дело в том, что при выводе уравнений (23.1), (23.2) приведенных выше, предполагалось, что $\gamma \cdot \Psi \propto \gamma \cdot \Phi^2 \propto \varepsilon^2$, причем $\gamma \propto 1$. В случае рассмотрения модуляционной неустойчивости развитой структуры конвективных ячеек оказывается, что отличные от нуля значения $\Psi \propto \left(\frac{\Delta k}{k}\right) \cdot \Phi^2$, где в свою

очередь $\left(\frac{\Delta k}{k}\right) \propto \varepsilon$. Таким образом, модель [XXVII-1] может быть применима для описания модуляционной неустойчивости уже развитой структуры конвективных ячеек лишь при $\gamma \propto 1/\varepsilon$, так как только в этом случае выполняется условие $\gamma \cdot \Psi \propto \varepsilon^2$.

Литература к приложению XXVII

XXVII-1. Pismen, L., Inertial effects in long-scale thermal convection, Phys. Lett. A. 1986. – V. 116. – P. 241–243.

XXVII-2. Куклин В. М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах. Украинский физический журнал, Обзоры, 2004. – Т. 1. – № 1. – С. 49–81.

ПРИЛОЖЕНИЕ XXVIII

ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Прежде в конце раздела 13 мы рассматривали взаимодействие излучателей с полем волновода или резонатора, а непосредственно излучатели не воздействовали друг на друга. В этом же случае каждый излучатель генерирует свое поле, воздействуя на другие излучатели. Этот режим взаимодействия, при возникающей самосинхронизации источников генерации поля можно считать режимом сверхизлучения

Рассмотрим поведение квантовых излучателей, волновые функции которых не перекрываются и взаимодействие их определяется только за счет электромагнитного поля. В этом случае применима полуклассическая модель описания, основанная на использовании матрицы плотности. В пренебрежении релаксационными процессами уравнения для компонент матрицы плотности можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) = -\frac{2i}{\hbar}[d_{ba}\rho_{ab} - d_{ab}\rho_{ba}]E, \quad (\text{XXVIII.1})$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{ab} + i\omega_{ab}\rho_{ab} = -\frac{i}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb})d_{ab}E, \quad (\text{XXVIII.2})$$

где электрическое поле представим в виде $E + E^* = A(t) \cdot \exp\{-i\omega t\} + A^*(t) \cdot \exp\{i\omega t\}$, а быстро меняющаяся во времени поляризация одного излучателя имеет вид $d_{ba}\rho_{ab} + d_{ab}\rho_{ba}$. Из $\rho_{ab} = \bar{\rho}_{ab}e^{-i\omega_{ab}t} = \bar{\rho}_{ab}e^{-i\omega t}$ определим медленно меняющиеся величины для поляризации излучателя $\bar{p} = d_{ba} \cdot \bar{\rho}_{ab}$ и $d_{ab}\bar{\rho}_{ba} = d_{ba}^* \bar{\rho}_{ab}^* = \bar{p}^*$ а также запишем систему уравнений для инверсии одного излучателя $\bar{\mu} = (\rho_{aa} - \rho_{bb})$ и \bar{P} :

$$\frac{d}{dt}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) = -\frac{2i}{\hbar}[d_{ba}\bar{\rho}_{ab}A^* - d_{ab}\bar{\rho}_{ba}A] = -\frac{2i}{\hbar}[\bar{p}A^* - \bar{p}^*A], \quad (\text{XXVIII.3})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{p} = -\frac{i}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb})|d_{ba}|^2 A. \quad (\text{XXVIII.4})$$

Уравнение для поля отдельного излучателя имеют вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 4\pi\omega^2 \cdot \bar{p} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \delta(z_0), \quad (\text{XXVIII.5})$$

откуда можно найти величину

$$A(z, t) = \frac{i \cdot 2\pi \cdot \omega \cdot M}{c} \cdot \frac{1}{N} \sum_s \bar{p}(z_s, t) \cdot e^{ik|z-z_s|}, \quad (\text{XXVIII.6})$$

где $M = n_0 \cdot b$ - общее число излучателей, а n_0 - плотность излучателей на единицу длины. Из уравнений (XXVIII.1) – (XXVIII.2) получим для поляризации и инверсии j -того излучателя систему уравнений.

$$\frac{d}{dt}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) = \frac{2i}{\hbar} [\bar{p}^* A - \bar{p} A^*], \quad (\text{XXVIII.7})$$

$$\frac{d}{dt} \bar{p} = -\frac{i}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) |d_{ba}|^2 A, \quad (\text{XXVIII.8})$$

используя соотношения $P_j = P(z_j, \tau)$, $M_j = M(z_j, \tau)$, а также $\mu_1 = (\rho_{aa} - \rho_{bb})$ - инверсию отдельного излучателя, $\mu_{01} = \mu_j(\tau = 0)$, где $\mu_0 = \mu_{01} \cdot n_0$ - начальная инверсия на единице длины,

$$z = \frac{2\pi}{k} Z, \quad \mu = \mu_{01} \cdot M, \quad \bar{p} = |d_{ab}| \cdot \mu_{01} \cdot P, \quad t = \tau / \gamma, \quad \Gamma_{12} = \frac{\gamma_{12}}{\gamma}, \quad n_0 \cdot b = M,$$

$\gamma = \frac{2\pi \cdot \omega \cdot |d_{ba}|^2 \cdot \mu_0 \cdot n_0 \cdot b}{\hbar c}$ - инкремент процесса, запишем систему (XXVIII.7)- (XXVIII.8) в виде

$$\frac{d}{dt} M_j = -2 \cdot [P_j^* A_j + P_j A_j^*], \quad (\text{XXVIII.9})$$

$$\frac{d}{dt} P_j = M_j \cdot A_j, \quad (\text{XXVIII.10})$$

где для $A_j = A(Z_j, \tau)$ справедливо соотношение

$$A(Z, \tau) = \frac{1}{N} \sum_s P(Z_s, \tau) \cdot e^{i2\pi|Z-Z_s|} \quad (\text{XXVIII.11})$$

Последнее выражение можно представить как $A(Z, \tau) = |A(Z, \tau)| \cdot e^{i\varphi_A}$, При этом следует иметь ввиду, что для безразмерного представления поля мы разделили (XXVIII.6) на $\gamma \hbar / |d_{ba}|$. Тогда для полной амплитуды электрического поля в этой нормировке справедливо выражение $2|A(Z, \tau)|$.

Важно отметить, что инкремент $\gamma = 2\pi \cdot \omega \cdot |d_{ba}|^2 \cdot \mu_{01} \cdot n_0 \cdot b / \hbar c$ в полуклассической модели сверхизлучения соответствует инкременту диссипативной неустойчивости $\gamma = \tilde{\gamma}_0^2 / \delta_D$ (см. раздел 13).

Для 4000 излучателей, распределенных на длине волны, при $P_j(\tau = 0) = P_0 \exp(i\varphi)$, φ - случайная величина $\varphi \in (0 \div 2\pi)$, $P_0 = 0.1$, $M(\tau = 0) = 1$, $\Gamma_{12} = 0$, получим следующие результаты численного решения. На рис. XXVIII.1, XXVIII.2 представлены зависимости от времени амплитуды поля слева, справа от системы и максимальной внутри излучателя и средней инверсии системы.

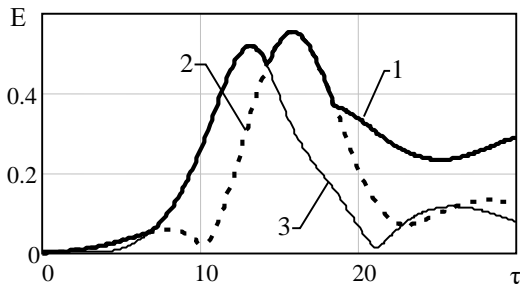


Рис. XXVIII.1 Зависимость амплитуды поля от времени,

1 – $\max_Z (E(Z, \tau))$, 2 – $E(Z = 0, \tau)$,

3 – $E(Z = 1, \tau)$.

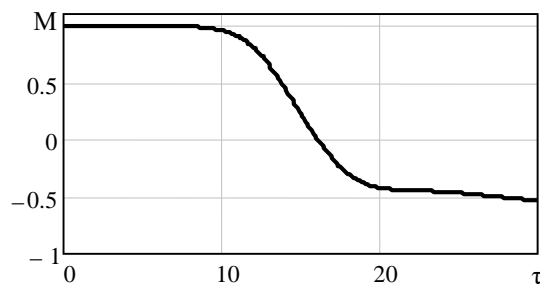


Рис. XXVIII.2 Зависимость средней

инверсии системы $M = \frac{1}{N} \sum_j M(Z_j, \tau)$

от времени

Как видно из рисунков XXVIII.1, XXVIII.2, происходит перекачка энергии инвертированной системы в поле. Напряженность поля имеет два приблизительно равных максимума в моменты времени $\tau = 13.2$ ($E = 0.52$) и $\tau = 15.8$ ($E = 0.555$). Первый максимум – на правом краю системы ($Z = 1$), второй - на левом ($Z = 0$). Такое асимметричное поведение поля связано с выбором начальных условий. Так как $E = \sqrt{N}$, где $N = 4(\delta_D^2 / \tilde{\gamma}_0^2) \cdot (N / \mu_0)$, $N = \langle E \rangle^2 / 4\pi\hbar\omega$ (см. обозначения перед формулой (13.31)), то два значения максимумов на рис. XXVIII.1 отвечают величинам N , соответственно равным 0.27 и 0.31.

Литература к приложению XXVIII

XXVIII-1. Куклин В.М., Поклонский Е.В. Полуклассические модели диссипативного режима неустойчивости и сверхизлучения системы квантовых излучателей // East European Journal of Physics V.7. 2020 (в печати).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная и конвективная неустойчивость в движущихся системах отсчета (разделы 8, 9).

Аномальное излучение движущегося в плазме сгустка при его самопрофилировании (раздел 12).

Аномальные потери энергии при диссипативной пучковой неустойчивости (раздел 10).

Аномальный рост плотности энергии волны, вследствие развития модуляционной неустойчивости. (раздел 18).

Волны-убийцы на поверхности океана (раздел 19, приложение XXIII).

Генерация когерентных импульсов вблизи порога индуцированного излучения (раздел 5, 6).

Генерация самоподобных структур модуляционной неустойчивостью вблизи ее порога. (раздел 17).

Диссипативный режим генерации в резонаторе, заполненном активным веществом (приложению XI).

Затухание волнового пакета в резонаторе заполненном активной средой (приложение XIII).

Затухание волнового пакета в резонаторе заполненном неизотермической плазмой (приложение XIV).

Интегралы систем уравнений, описывающих циклотронные неустойчивости (приложение XVIII).

Интенсивные осцилляции коэффициента отражения электромагнитной волны от поверхности плазмы (приложение XXIV).

Критерии дефектности пространственных периодических структур (приложение XXVI).

Матрица плотности и уравнения полуклассической модели (приложение V).

Модель Силина описания параметрической неустойчивости ленгмюровских колебаний в плазме. (приложение XXIII).

Модуляционная неустойчивость системы конвективных ячеек в тонком слое (раздел 23).

Новый порог индуцированного излучения (раздел 5).

О природе эффекта Мессбауэра (приложение IV).

Отрицательная макроскопическая диэлектрическая проницаемость (раздел 12).

Переходы диссипативных неустойчивостей в реактивные режимы при нелинейной диссипации (раздел 11).

Периодические изменения светимости квантовых источников (раздел 4, приложение VI).

Подобие явлений сверхизлучения и диссипативной неустойчивости (раздел 13).

Полуклассическая модель (раздел 4).

Полуклассическая модель сверхизлучения (Приложение XXVIII)

Природа вынужденной интерференции (приложение XXI).

Простая связь между выражениями для спонтанного и индуцированного излучения частиц (разделы 1 и 2) и волн (раздел 3).

Пучковая неустойчивость при отрицательной диссипации (раздел 11).

Режим сверхизлучения сгустка осцилляторов (приложение XVI).

Самомодуляция сгустка частиц, движущегося в плазме (раздел 12).

Самоподобные структуры на поверхности и в объеме кристаллов (приложение XX).

Сравнение моделей неустойчивости ленгмюровских колебаний в плазме Силина и Захарова, нагрев ионов (раздел 21).

Структурно-фазовые переходы в тонком слое конвективно неустойчивой среды (раздел 22)

Турбулентно-волновая неустойчивость (раздел 7).

Учет плазмы малой плотности в уравнениях гиротрона. (приложение XVII).

Фазовые переходы в модели Проктора-Сивашинского в условиях зависимости вязкости от температуры (Приложение XXV).

Формирование линейчатого спектра модуляционной неустойчивости вблизи порога (разделы 16, 17).

Формирование устойчивых кластеров быстрых частиц в плазме (раздел 12).

Эффект гидродинамического динамо (раздел 23).

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Каждому увлеченному наукой человеку хотелось бы написать о том, что ему пришло в голову, что он запланировал и что удалось сделать самому и с помощью своих единомышленников и учеников. Но, непременно, к чему он был сам непосредственно причастен. Ибо весь смысл жизни в науке – это поиск новых явлений, эффектов и смыслов. Наградой за изнурительный труд будет внимание немногих посвященных- коллег, а может и признание причастности автора к достижениям, которые будут замечены современниками или уже потомками.

Чаще всего достижения отдельных ученых и даже коллективов представляют собой отдельные конструкции создаваемой или уже созданной теории. Их вклад становится только тогда заметен коллегами и имеет шанс попасть в учебники, если эти конструкции несут на себе основную нагрузку и обеспечивают устойчивость здания теории. И, конечно, если эти достижения оказываются с очевидностью полезны в создании других теорий. Хотя особенно важно добиться законченности и согласованности теории, завершения ее построения, что удается редко и только тогда заслуживает признания научной общественности.

В книге остались только те темы, которые загоняли в задумчивость, которые заслоняли обычную жизнь и если и получалось что-то увидеть и понять раньше и яснее других, таких же увлеченных, амбициозных и потерянных для окружающего мира людей, то только потому, что приходилось тратить чуть больше жизненных сил и времени. Хотя и удача, капризная и непостоянная, иной раз благосклонно взглянув, даже не подсказывала, а скорее намекала, где нужно остановиться и оглядеться.

И лишь тогда, когда обнаруженные и многократно обдуманые смыслы, как хорошее вино созрели, перебродили в многочисленных обсуждениях, стоит браться за написание книг. И тогда можно надеяться, что и автору, и читателю удастся почувствовать вкус осознания этих смыслов и удовлетворение от этого осознания.

Автор не рассчитывает, что читатель внимательно прочтет книгу от начала до конца. Вполне достаточно, если каждый из тех, кто эту книгу откроет, найдет для себя сначала что-то интересное и потом уже и полезное. А что окажется самым любопытным, не знает даже автор, ибо в этой жизни все субъективно, даже признание истины. Вопрос ведь только в том, сколько поклонников среди нас она себе найдет.

Наукове видання

Куклін Володимир Михайлович

**ВИБРАНІ ГЛАВИ
(ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА)**

(Рос. мовою)

Комп'ютерне верстання *В. В. Савінкова*
Макет обкладинки *Ю. М. Рижова*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 14,71. Наклад 300 пр. Зам. №.№ 164/17.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32