

БАЗИСЫ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ СКОБКАМИ И БАЗИСЫ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ ПЕРЕСТАНОВКАМИ

Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называется M -базисом (базисом Маркушевича) в X , если существует такая последовательность функционалов $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, что

1. $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная система, т. е. $x_m^*(x_k) = 0$ при $m \neq k$, а $x_m^*(x_m) = 1$ при всех m ;

2. система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в X , т. е. $\overline{\text{Lin}}\{x_k\}_1^{\infty} = X$;

3. система $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ тотальна на X , т. е. если $x \in X$ и $x_n^*(x) = 0$ при всех n , то $x = 0$.

Нетрудно показать, что если $\{x_n\}_1^{\infty}$ — M -базис, то сопряженная система $\{x_n^*\}_1^{\infty}$ однозначно определяется векторами $\{x_n\}$.

Примером базиса Маркушевича может служить тригонометрическая система в любом из пространств $L_p[-\pi; \pi]$ при $1 \leq p < \infty$ или в пространстве $C[-\pi; \pi]$.

Для каждого элемента $x \in X$ его формальным разложением по M -базису называют ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x) \cdot x_k$. Для тригонометрической системы формальным разложением элемента является его ряд Фурье. В дальнейшем для упрощения терминологии слово «формальное» мы будем опускать.

Если разложение каждого элемента $x \in X$ по M -базису $\{x_n\}_1^{\infty}$ есть сходящийся ряд, то M -базис называют базисом, или шаудеровым базисом. Для примера отметим, что тригонометрическая система будет базисом в пространствах $L_p[-\pi, \pi]$ при $1 < p < \infty$ и не будет базисом в пространствах $L_1[-\pi, \pi]$ и $C[-\pi, \pi]$.

M -базис $\{x_k\}_1^{\infty}$ называют базисом со скобками, если найдется такая последовательность индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ что для любого $x \in X$ существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_j^*(x) x_j.$$

Понятно, что в этом случае

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_j^*(x) x_j$$

(ввиду тотальности системы $\{x_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ это соотношение достаточно проверить на функционалах x_j^*).

M -базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ будем называть переставленным базисом, если для некоторой перестановки π система $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ образует шаудеров базис.

Наконец, введем два основных определения. M -базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ — это базис с индивидуальными скобками, если для каждого элемента $x \in X$ найдется своя последовательность индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, для которой

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_j^*(x) x_j.$$

M -базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ будем называть базисом с индивидуальными перестановками, если для каждого элемента $x \in X$ найдется своя перестановка π , для которой

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_{\pi(k)}^*(x) x_{\pi(k)}.$$

Покажем, что даже в гильбертовом пространстве базис с индивидуальными скобками может не быть базисом со скобками, а базис с индивидуальными перестановками может не быть переставленным базисом.

Отметим, что вопрос о том, должен ли базис с индивидуальными перестановками в банаховом пространстве быть переставленным базисом, был поставлен Ч. Бессагой и И. Зингером [1, с. 575] в связи с исследованием свойств базисов Энфлю—Розенталя. Ответ на этот вопрос дал А. Н. Пличко [2], построив соответствующий пример в пространстве $C(\omega^2)$ непрерывных функций на $\omega \times \omega$. Похожие вопросы рассматривались также в работе П. Теренци [3], где был построен пример квазибазиса со скобками в пространстве l_1 , не являющегося базисом со скобками. (Квазибазисом со скобками П. Теренци называет такой M -базис $\{x_n\}_1^{\infty}$, что каждый элемент x представим в виде

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} x_{\pi(j)}^*(x) \cdot x_{\pi(j)},$$

где и перестановка π , и последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ зависят от x). Вопрос о связи понятий «базис с индивидуальными скобками» и «базис со скобками», насколько нам известно, никем не рассматривался.

Пример 1. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H . Сопряженная система — это функционалы e_k^* , порожденные скалярным умножением на элементы e_k : $e_k^*(x) = \langle e_k, x \rangle$. Введем в рассмотрение систему $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по следующему правилу: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{\sqrt{k}}$, $n = 1, 2, \dots$. Понятно, что $\overline{\text{Lin}}\{x_n\}_1^{\infty} =$

$= \overline{\text{Lin}}\{e_n\}_1^{\infty} = H$. Непосредственно проверяется, что если функционалы x_n^* определить формулой $x_n^* = \sqrt{n}e_n^* - \sqrt{n+1}e_{n+1}^*$, то последова-

тельность $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^\infty$ образует биортогональную систему. Проверим тотальность системы $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$. Пусть $x \in H$ — произвольный элемент.

Тогда x можно представить в виде ряда $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i$, где $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 < \infty$.

Пусть $x_n^*(x) = 0$ при всех n . Тогда $a_1 - \sqrt{2}a_2 = 0$; $\sqrt{2}a_2 - \sqrt{3}a_3 = 0$; $\dots$; $\sqrt{n}a_n - \sqrt{n+1}a_{n+1} = 0$. Иными словами, $a_2 = a_1/\sqrt{2}$; $a_3 = a_1/\sqrt{3}$; $a_4 = a_1/\sqrt{4}$; $\dots$; $a_n = a_1/\sqrt{n}$; $\dots$. Если $a_1 \neq 0$, то из этих соотношений получаем $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 = \infty$, что противоречит условию.

Поэтому $a_1 = 0$, и следовательно, все a_n равны 0 и $x = 0$. Итак, система $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ — M -базис.

Теорема 1. Построенный в примере 1 M -базис $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ является базисом с индивидуальными скобками, но не является базисом со скобками.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ — произвольный элемент гильбертова пространства. Тогда разложение элемента x по M -базису

$\{x_i\}_{i=1}^\infty$ будет иметь вид $\sum_{i=1}^\infty x_i^*(x) x_i$. Распишем, чему равна n -я частная

сумма $S_n(x)$ ряда $\sum_{i=1}^\infty x_i^*(x) \cdot x_i$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x_i = \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\sum_{k=1}^\infty a_k e_k \right) x_i = \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k e_k \right) x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i - a_{n+1} \sqrt{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{\sqrt{k}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| S_n(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|^2 = a_{n+1}^2 (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx a_{n+1}^2 n \ln n.$$

Из соотношений

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n} = \infty; \quad \sum_{n=1}^\infty a_{n+1}^2 = \|x\|^2 < \infty$$

получаем, что для некоторой последовательности $n_i \uparrow +\infty$ выполняется соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1}^2 n_k \ln n_k = 0$, и следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) = x$.

Итак, мы доказали, что $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — базис с индивидуальными скобками пространства H . Из анализа доказательства понятно, что выбор последовательности $n_1 < n_2 < \dots$ должен зависеть от x . Более того,

$\|S_n\|^2 \geq \|S_n(e_{n+1})\|^2 = (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| = \infty$, чего не бывает у базисов со скобками (там в соответствии с принципом равномерной ограниченности $\sup_k \|S_n\| < \infty$). Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичная конструкция позволяет получать примеры базисов с индивидуальными скобками, не являющихся базисами со скобками во всех пространствах l_p при $1 \leq p < \infty$.

Замечание 2. Понятно, что базис со скобками может существовать только в пространствах с аппроксимационным свойством. Нам не известно, может ли в пространстве без аппроксимационного свойства существовать базис с индивидуальными скобками.

Замечание 3. Построенный пример базиса с индивидуальными скобками обладает следующим свойством: существует такой фильтр F на множестве натуральных чисел, что разложение каждого элемента $x \in H$ по M -базису $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к x по фильтру F : $\lim_F S_n(x) = x$.

Доказательство. Обозначим через $g(n)$ величину $(n+1) \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Введем фильтр F следующим образом: будем считать, что множество $A \subset N$ принадлежит фильтру F , если сходится ряд $\sum_{n \in N \setminus A} [g(n)]^{-1}$.

Нетрудно показать корректность этого определения. Действительно, $\emptyset \notin F$; если $A \in F$ и $B \supset A$, то и $B \in F$; если $A \in F$, $B \in F$, то $A \cap B$ также принадлежит фильтру F . Пусть $x \in H$ — произвольный элемент пространства, a_n , $S_n(x)$ — те же, что в доказательстве теоремы 1.

Как было показано выше, $\|S_n(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i\|^2 = a_{n+1}^2 g(n)$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Обозначим через A_ε множество тех индексов m , для которых $a_{m+1}^2 g(m) \leq \varepsilon$. Пусть $n \in N \setminus A_\varepsilon$. Тогда $a_{n+1}^2 g(n) > \varepsilon$;

$[g(n)]^{-1} < \frac{\varepsilon}{a_{n+1}^2}$. Поэтому $\sum_{n \in N \setminus A_\varepsilon} [g(n)]^{-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{a_{n+1}^2} < \infty$. Следова-

тельно, $A_\varepsilon \in F$. Ввиду производительности ε это означает, что

$\lim_F \|S_n(x) - \sum_{i=1}^n a_i e_i\|^2 = \lim_F a_{n+1}^2 g(n) = 0$. То есть $\lim_F S_n(x) =$
 $= \lim_F \sum_{i=1}^n a_i e_i = x$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Определим пространство E_n как пространство строк $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ с нормой, задаваемой равенством $\|a\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|^2$. Естественный базис пространства E_n обозначим $\{e_k^n\}_{k=1}^n$, координатные функционалы — $\{(e_k^n)^*\}$. Так как норма на про-

пространстве E_n определяется с помощью положительно определенной квадратичной формы, то E_n — евклидово пространство (т. е. конечно-мерное пространство со скалярным произведением). Образует гильбертово пространство $\tilde{H}$ как прямую сумму пространств E_n :

$$\tilde{H} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} E_n \right)_{l_2}.$$

Тогда $\tilde{H}$ — это пространство последовательностей вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, где $x_n \in E_n$; $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

Объединим базисы пространств E_n в единую последовательность $e_1^1, e_1^2, e_2^2, e_1^3, e_2^3, \dots$. Получившаяся система $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует M -базис (и даже базис со скобками) в пространстве $\tilde{H}$. Сопряженная система — это координатные функционалы $(e_1^1)^*, (e_1^2)^*, (e_2^2)^*, \dots$.

Теорема 2. Построенная в примере 2 система $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис с индивидуальными перестановками в $\tilde{H}$, но не является переставленным базисом.

Доказательство. Вначале докажем вторую часть утверждения теоремы. Предположим, что для какой-то перестановки π система $\{g_{\pi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в $\tilde{H}$. Обозначим через C базисную константу базиса $\{g_{\pi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. такое число, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k g_{\pi(k)} \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n+m} a_k g_{\pi(k)} \right\| \quad (1)$$

выполняется при всех n, m и $\{a_k\}_{k=1}^{n+m}$ (см. [4, с. 81]). Выберем число $N > 4C^2$. Обозначим через $k_1 < k_2 < \dots < k_{2N}$ такие числа, что $g_{\pi(k_j)} \in \{e_i^{2N}\}_{i=1}^{2N}$. Положим $a_i = 0$ при $i \notin \{k_j\}_{j=1}^{2N}$; $a_{k_i} = 1$ при $1 \leq i \leq N$; $a_{k_i} = -1$ при $N < i \leq 2N$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{2N} a_{k_j} g_{\pi(k_j)} \right\|^2 &= \sum_{k=1}^{2N} |a_{k_j}|^2 + \left| \sum_{k=1}^{2N} a_{k_j} \right|^2 = 2N; \\ \left\| \sum_{j=1}^N a_{k_j} g_{\pi(k_j)} \right\|^2 &= \sum_{k=1}^N |1|^2 + \left| \sum_{k=1}^N 1 \right|^2 = N + N^2. \end{aligned}$$

Из неравенства (1) получаем, что $C^2 \cdot 2N \geq N + N^2 > N^2$; $N < 2C^2$. По построению же $N > 4C^2$. Противоречие.

Теперь докажем первую часть утверждения теоремы. Пусть $x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k^n e_k^n$ — произвольный элемент из $\tilde{H}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n |a_k^n|^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|^2 \right) = \|x\|^2 < \infty. \quad (2)$$

Запишем формальное разложение элемента x по M -базису $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k, \text{ где } b_1 = a_1^1; b_2 = a_1^2; b_3 = a_2^2; \dots; b_{\frac{n(n-1)}{2}+j} = a_j^n; \dots$$

При каждом $n \in N$ построим перестановку π для k из интервала $]n(n-1)/2; n(n+1)/2]$ так, чтобы выполнялись соотношения $\pi(k) \in]\frac{n(n-1)}{2}; \frac{n(n+1)}{2}]$;

$$\max_{k < \frac{n(n+1)}{2}} \left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^k b_{\pi(i)} \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k^n| + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|. \quad (3)$$

Для этого $\pi(i)$ будем выбирать по индукции. Положим $\pi(n(n-1)/2+1) = n(n-1)/2+1$. Для остальных k , если

$$\left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{k-1} b_{\pi(i)} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|,$$

то $\pi(k) \in]n(n-1)/2; n(n+1)/2]$ выберем произвольно. Если же

$$\left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{k-1} b_{\pi(i)} \right| > \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|,$$

то $\pi(k)$ выберем так, что

$$\text{sign } b_{\pi(k)} = -\text{sign} \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{k-1} b_{\pi(i)}.$$

При таком выборе неравенство (3) будет выполняться на каждом шаге. Докажем, что для построенной таким образом перестановки π последовательность $S_j = \sum_{k=1}^j b_{\pi(k)} g_{\pi(k)}$ стремится к x . Когда j имеет вид $n(n+1)/2$, получаем

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_k^n e_k^n \text{ и } \lim S_{\frac{n(n+1)}{2}} = x.$$

Пусть $j \in]n(n-1)/2; n(n+1)/2[$. Тогда

$$\begin{aligned} \|S_j - S_{\frac{n(n-1)}{2}}\|^2 &= \left\| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^j b_{\pi(i)} g_{\pi(i)} \right\|^2 = \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^j |b_{\pi(i)}|^2 + \\ &+ \left| \sum_{i=\frac{n(n-1)}{2}+1}^j b_{\pi(i)} \right|^2 \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |a_k^n| + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right| \right)^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^n |a_k^n|^2 \leq 5 \left(\sum_{k=1}^n |a_k^n|^2 + \left| \sum_{k=1}^n a_k^n \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду неравенства (2), $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = x$. Теорема доказана.

Заметим, что построенный пример базиса с индивидуальными перестановками удовлетворяет следующему условию: $\sup_{1 \leq n < \infty} \|g_n\| \cdot \|g_n^*\| < \infty$.

Такие системы называются ограниченными M -базисами. Если на пространствах E_n ввести эквивалентную евклидову норму

$$\|a\|_\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|^2,$$

то в этой норме будет выполняться неравенство

$$\sup_{1 \leq n < \infty} \|g_n\| \cdot \|g_n^*\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Такие M -базисы будем называть $1 + \varepsilon$ -ограниченными. Теперь утверждение теоремы 2 можно усилить следующим образом:

Теорема 3. Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить $1 + \varepsilon$ -ограниченный M -базис в гильбертовом пространстве, который является базисом с индивидуальными перестановками, но не является переставленным базисом.

Отметим, что 1 -ограниченный M -базис $\{x_k\}_1^\infty$ в гильбертовом пространстве всегда оказывается ортонормированным базисом, и поэтому в теореме 3 нельзя положить ε равным 0 .

В связи с изложенными выше фактами возникает вопрос (нам его задал Ю. И. Петунин): можно ли построить такой ограниченный базис с индивидуальными скобками, который бы не являлся базисом со скобками? Построенный в примере 1 M -базис не дает ответа на этот вопрос: для этой системы

$$\|x_n\| = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^{1/2} \approx (\ln n)^{1/2}; \quad \|x_n^*\| = \sqrt{2n+1}.$$

Поэтому мы вынуждены усложнить конструкцию из примера 1, хотя и сохранив основную идею рассуждения.

Пример 3. Выберем натуральные числа $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ так, что $n_{k+1} - n_k \approx k \ln(k+1)$. Введем пространство последовательностей A таким образом: последовательность $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ принадлежит A , если сходится два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_i \right|^2 < \infty. \quad (4)$$

Норму на пространстве A введем формулой

$$\|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_i \right|^2,$$

где ε — фиксированное положительное число. Ясно, что A — гиль-

бертово пространство, так как норму на A можно задать с помощью скалярного произведения:

$$(a, b) = \sum_{n=i}^{\infty} a_n b_n + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} a_i \right) \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} b_i - \sum_{i=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} b_i \right).$$

В дальнейшем для сокращения выкладок будем обозначать сумму

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i \text{ через } f_k(a).$$

В качестве требуемого примера возьмем естественный базис $\{e_k\}$ пространства A . Тогда сопряженной системой будут координатные функционалы $\{e_k^*\}_1^\infty$, $e_k^*(a) = a_k$. Согласно определению имеем $\|e_k\| = \sqrt{1 + \varepsilon}$; $\|e_k^*\| \leq 1$. Следовательно, $\{e_k\}_1^\infty$ — ограниченный M -базис.

Теорема 4. Построенная в примере 3 система является ограниченным базисом с индивидуальными скобками в A , но не образует базиса со скобками.

Доказательство. Вначале докажем, что $\{e_k\}_1^\infty$ — базис с индивидуальными скобками. Пусть a — произвольный элемент из A . Так

как $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \ln k \left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} |a_i|^2 \right) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим частные суммы $S_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} a_i e_i$ и остатки $R_{n_k} = a - S_{n_k}$.

Оценим норму остатка. $\|R_{n_k}\|^2 = \sum_{i=n_k+1}^{\infty} |a_i|^2 + \varepsilon |f_k(a)|^2 + \varepsilon \sum_{i=k}^{\infty} |f_i \times$

$\times (a) - f_{i+1}(a)|^2$. Так как $|f_j(a)|^2 \leq \left(\sum_{i=n_{j+1}+1}^{n_{j+1}} |a_i|^2 \right) (n_{j+1} - n_j) \approx j \ln j \times$

$\times \left(\sum_{i=n_{j+1}+1}^{n_{j+1}} |a_i|^2 \right)$, то из соотношений (4) и (5) получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_{n_k}\| =$

$= 0$. Иными словами, на некоторой подпоследовательности $\{m_j\}$ последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ остаток R_{m_j} стремится к нулю, и частные суммы S_{m_j} стремятся к a в нормированной топологии. Теперь докажем, что $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ не является базисом со скобками. Для этого нужно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| = \infty$, где S_n — оператор частной суммы:

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^n e_k^*(a) e_k = \sum_{k=1}^n a_k e_k.$$

Пусть n лежит между n_k и n_{k+1} . Рассмотрим элемент $a = \sum_{i=1}^{n_k} a_i e_i$, где a_i определены следующим образом: при $i \leq n_1$ положим $a_i = 0$;

при $j \leq k$ и $n_j < i \leq n_{j+1}$ положим $a_i = j/[k(n_{j+1} - n_j)]$; при $j > k$ и $n_j < i \leq n_{j+1}$ положим $a_i = (2k - j)/[k(n_{j+1} - n_j)]$.

При таком определении $f_j(a) = j/k$ при $j \leq k$, и $f_j(a) = (2k - j)/k$ при $j > k$. Норма a оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \sum_{i=1}^{n_{2k}} |a_i|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{2k-1} |f_i(a) - f_{i+1}(a)|^2 + \varepsilon |f_{2k}(a)|^2 = \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{n_{j+1} - n_j} + \frac{1}{k^2} \sum_{j=k+1}^{2k} \frac{(2k-j)^2}{n_{j+1} - n_j} + \frac{2k-1}{k^2} \varepsilon \leq \frac{5}{\ln(k+1)}. \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \|S_n(a)\|^2 &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \varepsilon \sum_{i=1}^{k-1} |f_i(a) - f_{i+1}(a)|^2 + \\ &+ \varepsilon |f_k(a) - f_{k+1}(S_n(a))|^2 + \varepsilon |f_{k+1}(S_n(a))|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2} |f_k(a)|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|S^n\|^2 \geq \|S_n(a)\|^2 / \|a\|^2 \geq \varepsilon \ln(k+1)/10$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \times \times \|S_n\| = \infty$. Теорема доказана.

В заключение пользуюсь возможностью выразить благодарность В. П. Фонфу и другим участникам Харьковского семинара по геометрии нормированных пространств за внимание к настоящей работе.

Список литературы: 1. *Singer I.* Bases in Banach spaces. II.— Berlin—Heidelberg—New York, 1981.—880 р. 2. *Пличко А. Н.* О базисах и дополнениях в несе-парабельных банаховых пространствах // Сиб. мат. журн.— 1984.— 25.— С. 155—162. 3. *Terenzу P.* Representation of the space spanned by a sequence in a Banach space // Arc. Math.— 1984.— 43.— Р. 448—459. 4. *Beauzamy B.* Introduction to Banach Spaces and their Geometry.— Amsterdam, 1982.— 308 р.

Поступила в редколлегию 29.05.86