## II.

# ОБЪ АСТРОНОМИЧЕСКИХЪ ПРЕЛОМЛЕНІЯХЪ.

*Т. Осиповскаго.*

---

1. Астрономическимъ преломленіемъ называется измѣненіе направленія претерпѣваемаго лучемъ свѣта, приходящимъ отъ какого ни есть свѣтила, при прохожденіи его чрезъ Атмосферу земную, покуда онъ достигнетъ нашего глаза.

2. Наблюденія показываютъ, что сіе преломленіе бываетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе направленіе луча отклоняется отъ вертикальнаго; вертикальной же лучь не претерпѣваетъ никакого преломленія.

3. Какъ сіе преломленіе лучей безъ сомнѣнія произходитъ отъ безпрестанныхъ преломленій, кои они претерпѣваютъ проходя чрезъ слои воздуха отчасу измѣняющія свою плотность начиная отъ самой вышшей части Атмосферы до самой поверхности земной; то дабы вывесть законъ цѣлаго преломленія луча, положимъ что кругъ радіуса *CA* представляетъ поверьхность земли нашей, кругъ же радіуса *CD* предѣлъ Атмосферы, при которомъ начинается чувствительное преломленіе. Пусть круги радіусовъ *CD*, *CE*, *CF* и проч. представляютъ предѣлы слоевъ Атмосферы, имѣющихъ каждый единообразную плотность, но при переходѣ отъ слоя къ слою отчасу увеличивающихъ оную даже до самой поверьхности земли.

4. Предположивъ, что въ верхней части Атмосферы, гдѣ начинается преломленіе, господствуетъ всегда единообразная теплота, должно будетъ заключить, что на сей высотѣ каждой слой той же плотности долженъ удерживать и ту же толстоту. По сему разстояніе предѣла преломленія отъ поверьхности земной, въ томъ же мѣстѣ, съ измѣненіемъ состоянія барометра и термометра должно измѣняться: при той же теплотѣ но при большей высотѣ барометра, долженъ сей предѣлъ, отъ прибавляющихся слоевъ съ низу, удаляться отъ поверьхности земной, при меньшей же высотѣ барометра отъ убывающихъ слоевъ съ низу, долженъ опускаться. Подобныя измѣненія въ высотѣ онаго предѣла должна, при той же высотѣ барометра, производить теплота, расширяя или сжимая нижніе слои, а можетъ быть измѣняя и при той же плотности воздуха преломительную его силу.

5. Положимъ, что при какой либо теплотѣ и при какомъ либо стояніи барометра въ н! которомъ мѣстѣ $A$ на поверьхности земной вошелъ въ Атмосф ру лучь $RSB$; и преломляясь при переходѣ изъ слоя въ слой въ точкахъ $S$, $H$. $I$ и проч. описалъ до глаза $A$ ломаную линѣю $SHIKA$; то онъ покажется глазу пришедшимъ по послѣднему своему направленію $AM$, и уголъ $BIA$, или, по проведеніи линѣи $AN$ параллельно $BR$, уголъ $NAM$ будетъ цѣлое преломленіе онаго луча $RS$. Проведемъ къ точкамъ $S$, $H$, $I$ и проч изъ центра земли $C$ радіусы векторы пути описаннаго лу-

чемъ, кои будутъ къ слоямъ Атмосферы перпендикулярны, и положимъ что лучь при входѣ въ первой слой при $S$, прежде преломленія въ немъ, составлялъ съ радіусомъ векторомъ уголъ $\theta$, а по преломленіи уголъ $\theta'$; то онъ со вторымъ радіусомъ векторомъ составитъ прежде преломленія уголъ $\theta' + \delta\theta'$, гдѣ $\delta\theta'$ будетъ $= SCH$. Пусть сей лучь по преломленіи составитъ со вторымъ радіусомъ векторомъ уголъ $\theta''$, то онъ съ третьимъ радіусомъ векторомъ до преломленія составитъ уголъ $\theta'' + \delta\theta''$, гдѣ будетъ $\delta\theta'' = HCI$. Пусть сей лучь по преломленіи составитъ съ четвертымъ радіусомъ векторомъ уголъ $\theta'''$, и такъ далѣе. Пусть въ какое либо время придетъ лучь изъ $S$ въ $T$, при чемъ радіусъ векторъ опишетъ уголъ $SCT$, которой назначимъ чрезъ $\omega$. Положимъ что число всѣхъ слоевъ, чрезъ кои лучь прошелъ въ сіе время, будетъ $n$, разумѣя $n$ число неизмѣримо великое, и назначимъ уголъ $\theta^{(n)}$, которой будетъ при $T$, буквою $\psi$. Пусть знаменатели преломительности, т. е. знаменатели содержанія между синусомъ паденія и синусомъ преломленія, по порядку слоевъ, будутъ $\lambda', \lambda'', \lambda''' \ldots\ldots$, то будетъ

$$\sin.\ \theta' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda' \sin\theta,$$
$$\sin.\ \theta'' = \lambda'' \sin(\theta' + \delta\theta') = \lambda'' \sin.\theta'(1 + \delta\theta'\ Cot\ \theta'),$$
$$\sin.\ \theta''' = \lambda''' \sin.(\theta'' + \delta\theta'') = \lambda''' \sin\ \theta''(1 + \delta\theta''.\ Cot.\theta''),$$

и такъ далѣе;

наконецъ при $T$

$$\sin.\ \theta^{(n)} = \lambda^{(n)} \sin.(\theta^{(n-1)} + \delta.\theta^{(n-1)}) = \lambda^{(n)} \times$$
$$\sin.\theta^{(n-1)}(1 + \delta\theta^{(n-1)}\ Cot.\theta^{(n-1)});$$

откуда, по перемноженіи между собою всѣхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ уравненій и по раздѣленіи съ обѣихъ сторонъ на $sin.\theta'.sin.\theta''.sin.\theta'''\ldots\ldots sin.\theta^{(n-1)}$, а потомъ по назначеніи произведенія $\lambda'.\lambda''.\lambda'''\ldots.\lambda^{(n)}$ чрезъ $k$, получимъ

$$sin.\theta^{(n)} = sin.\psi = k.sin.\theta(1+\delta\theta'.Cot.\theta')(1+\delta\theta''.Cot.\theta'')\ldots\ldots,(1+\delta\theta^{(n-1)}.Cot.\theta^{(n-1)}).$$

Естьли возьмемъ съ обѣихъ сторонъ иперболическіе логариѳмы, то получимъ

$$log.sin.\psi = l.k + l.sin.\theta + l(1+\delta\theta'.Cot.\theta') + l.(1+\delta\theta''.Cot.\theta'') + \ldots. + l(1+\delta\theta^{(n-1)}.Cot.\theta^{(n-1)})$$

Какъ $l(1+x) = x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots$, и при величинѣ $x$ чрезвычайно малой $l(1+x) = x$, то по малости величинъ $\delta\theta'.Cot.\theta', \delta\theta''.Cot.\theta''$ и проч. будетъ

$$l.sin.\psi = l.k + l.sin.\theta + \delta\theta'.Cot.\theta' + \delta\theta''Cot.\theta'' + \ldots. + \delta\theta^{(n-1)} \times Cot.\theta^{(n-1)}$$

Уравненіе сіе иначе изобразится чрезъ

$$l.sin.\psi = l\,k + l.sin\,\theta + \Sigma\,\delta\psi.Cot.\psi,$$

разумѣя подъ $\Sigma$ знакъ суммованія членовъ $\delta\psi.Cot\,\psi$ отъ $\psi = \theta'$ до $\psi = \theta^{(n-1)}$; или чрезъ

$$l.sin.\psi = l.k + l.sin.\theta + \int\delta\psi.Cot.\psi.\;.\;.\;.\;.\quad(a)$$

разумѣя интегрованіе совершеннымъ отъ $\psi = \theta$ до $\psi = \theta^{(n)}$.

6. Для интегрованія величины $\delta\psi.Cot.\psi$ надлежитъ прежде опредѣлить величину $\delta\psi$, которая не есть дифференціалъ $d\psi$ угла $\psi$. Ее опредѣлить можно двоякимъ образомъ; 1хъ естьли, по назначеніи радіуса вектора $CT$

чрезъ $r$, опишемъ имъ внутрь угла $d\omega$ или $\delta\psi$ дугу круга, то сія дуга будетъ $= - dr. tang. \psi$ (знакъ — взятъ здѣсь, поелику съ продолженіемъ движенія луча радіусъ векторъ уменьшается); по сему будетъ $\delta\psi = \frac{- dr. tang. \psi}{r}$; въ которомъ случаѣ будетъ $\delta\psi. Cot. \psi = - \frac{dr}{r}$. 2хъ При переходѣ каждаго угла $\theta^{(\lambda)}$ въ $\theta^{(\lambda+1)}$ сперва сей уголъ, прежде преломленія луча, получаетъ приращеніе $\delta\theta^{(\lambda)}$, а потомъ чрезъ преломленіе уменьшается нѣкоторымъ количествомъ $d.\rho$, разумѣя подъ $\rho$ претерпѣнное уже имъ преломленіе; по сему $d.\theta^{(\lambda)} = \delta.\theta^{(\lambda)} - d.\rho$ или $\delta.\theta^{(\lambda)} = d.\theta^{(\lambda)} + d.\rho$, т. е. $\delta.\psi = d.\psi + d.\rho$.

7. Такимъ образомъ оное уравненіе ($a$) будетъ

$$l. Sin. \psi = l. k + l. Sin. \theta - \int \frac{dr}{r} \ldots\ldots (a')$$

или

$$l. Sin. \psi = l. k + l. Sin. \theta + \int d\psi. Cot. \psi + \int d\rho. Cot. \psi \ldots\ldots (a'')$$

гдѣ въ интегралахъ начальной уголъ $\psi$ долженъ быть $= \theta$

Изъ снесенія сихъ уравненій получится

$$\int d\psi. Cot. \psi + \int d\rho. Cot. \psi + \int \frac{dr}{r} = o,$$

и естьли при углѣ $\psi = \theta$ радіусъ векторъ $r = R$, то будетъ

$$l \frac{Sin. \psi}{Sin. \theta} + l \frac{r}{R} + \int d\rho \, Cot. \psi = o$$

или

$$l\frac{r\,Sin\,\psi}{R\,Sin.\theta}+\int d\rho\,Cot.\,\psi=o. \;.\;.\;.\;.\quad (b)$$

8. Уравненіе $\delta\psi=d\psi+d\rho$ или $d\omega=d\psi+d\rho$ доставляетъ $d\psi=d\omega-d\rho$, а по сему $\psi=\theta+\omega-\rho$; притомъ величины $\omega$ и $\rho$ начинаются и возрастаютъ вмѣстѣ; по сему величина $\omega$ есть какая либо функція угла $\rho$ и $\psi=\theta+f.\rho$; Тейлерова же теорема показываетъ, что сія функція $f\rho$ должна быть вида $\lambda\rho+\frac{1}{2}\mu\rho^2+\frac{1}{6}\nu\rho^3+\ldots..$, гдѣ коеффиціенты $\lambda, \mu, \nu$ и проч. зависимы отъ $\theta$ и можетъ быть отъ Атмосферныхъ измѣненій.

9. Опредѣливъ теперь зависимость величины $\psi$ отъ $\rho$ приступимъ къ интегрованію формулы $d\rho\,Cot.\,\psi$. Поелику будетъ $d\psi=d\rho\,[\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots..]$, то будетъ $d\rho=\frac{d\psi}{\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots}$.

Какъ величина $\rho$ всегда очень мала, и никогда не превышаетъ 33 минутъ или 0,0096, величина же $\lambda$ состоитъ, какъ мы ниже увидимъ, изъ нѣсколькихъ единицъ, то члены $\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots..$ во все продолженіе движенія луча въ Атмосферѣ весьма мало прибавляютъ къ члену $\lambda$, а по сему величина $\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots..$ можетъ во все продолженіе движенія луча, безъ чувствительной ошибки, быть разсматриваема постоянною; но какъ она начинается величиною $\lambda$, и въ продолженіе движенія луча возрастаетъ до $\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots..$, то ближе къ истиннѣ будетъ, когда при интегрованіи возьмется середнее между сими число $\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots..$ Такимъ образомъ будетъ

$$\int d\rho \, Cot.\,\psi = \frac{\int d\psi \, Cot.\,\psi}{\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots} = \frac{l\,\frac{\sin\psi}{\sin\theta}}{\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots.}$$

Назначимъ $\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots.$ буквою $\eta$, то оное уравненіе ($b$) обратится въ

$$\eta \log.\frac{r\,Sin.\,\psi}{R\sin\theta}+l.\frac{\sin\psi}{\sin\theta}=0$$

или

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\eta}\left(\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\right)^{\eta+1}=1;$$

откуда найдется

$$\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\psi}=\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}.$$

Когда лучь достигнетъ глаза наблюдателя въ $A$, тогда уголъ $\psi$ означать будетъ видимое разстояніе направленія его отъ зенита, $r$ радіусъ земли, и $\rho$ цѣлое преломленіе лучемъ претерпѣнное. Пусть тогда будетъ $\psi=\varphi$ и $r=a$, то получимъ уравненіе

$$\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\varphi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$$

или

$$\frac{Sin.\,(\varphi-\lambda\rho-\frac{1}{2}\mu\rho^2-\frac{1}{6}\nu\rho^3-\ldots)}{\sin.\,\varphi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} \qquad (b')$$

10. Естьли мы члены $\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots.$ передъ $\lambda$ презримъ, то уравненіе ($b'$) обратится въ

$$\frac{Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)}{Sin.\,\varphi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

или

$$Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)=\zeta.\,Sin.\,\varphi,$$

которое есть уравненіе Симсоново.

11. Изъ Симсонова уравненія легко произвесть можно уравненіе Брадлеево. И дѣйствительно изъ онаго уравненія получится

$$\frac{1-\zeta}{1+\zeta}=\frac{Sin.\,\varphi - Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)}{Sin.\,\varphi + Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)}=\frac{tang\,\frac{1}{2}\lambda\rho}{tang\,(\varphi-\frac{1}{2}\lambda\rho)};$$

въ которомъ уравненіи когда степени величины $\rho$ вышшія первой предъ сею будутъ презрѣны, и по сему вмѣсто $tang.\,\frac{1}{2}\lambda\rho$ подставится $\frac{1}{2}\lambda\rho$, то получится

$$\rho=\frac{1}{\frac{1}{2}\lambda}\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right).\ tang.\,(\varphi-\tfrac{1}{2}\lambda\rho)$$

или

$$\rho=m.\ tang.\,(\varphi-\tfrac{1}{2}\lambda\rho),$$

которое и есть уравненіе Брадлеево.

12. Что принадлежитъ до величины $\frac{a}{R}$, то положимъ, что при какой либо опредѣленной теплотѣ въ мѣстѣ наблюденія, и при извѣстной высотѣ барометра; высота Атмосферы, при коей начинается преломленіе, составляетъ $p$; тогда будетъ $\frac{a}{R}=\frac{a}{a+p}=$ $\frac{1}{1+\frac{p}{a}}$, $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}=\frac{1}{\left(1+\frac{p}{a}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}}$. Какъ величина $\frac{p}{a}$ всегда очень мала, то весьма близко къ истиннѣ будетъ $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}=\left(1+\frac{p}{a}\right)^{-\frac{\eta}{\eta+1}}=$

$1 - \frac{\eta}{\eta+1} \cdot \frac{p}{a}$. Такимъ образомъ въ формулѣ Симсоновой будетъ $\zeta = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$ и въ Брадлеевой $m = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$.

13. Опредѣлимъ теперь для оныхъ двухъ формулъ и величину $\lambda$. Для сего употребимъ формулу Симсонову, какъ ближайшую къ истинной. Положимъ, что двумъ угламъ $\varphi$ и $\varphi'$ соотвѣтствуютъ преломленія $\rho$ и $\rho'$; то по сей формулѣ должно быть

$$\frac{Sin.\,\varphi}{Sin.\,(\varphi - \lambda\rho)} = \frac{Sin.\,\varphi'}{Sin.\,(\varphi - \lambda\rho')}.$$

Возьмемъ для опредѣленія величины $\lambda$ углы $\varphi = 70°$ и $\varphi' = 80°$. По таблицѣ преломленія Брадлеевой приведенной къ высотѣ Барометра 0,76 франц. метровъ, или 28 дюйм. 0,94 линѣи, при теплотѣ $-8°$ Реомюра $\rho = 172'',5$; $\rho' = 349'',3$, коимъ соотвѣтствующая величина по оной формулѣ найдется $\lambda = 5,329$. При теплотѣ $0°$ Реомюра $\rho = 164'',4$; $\rho' = 332'',8$, коимъ соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,670$. При теплотѣ $+8°$ Реомюра $\rho = 157'',0$; $\rho' = 317'',8$, коимъ соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,956$. Изъ сего измѣненія величины $\lambda$, соотвѣтствующаго таблицѣ Брадлеевой, заключить должно, что $\lambda$ съ возрастаніемъ теплоты возрастаетъ. Но естьли возьмемъ таблицу Піацціеву, о коей говорится, что она отъ $\varphi = 70°$ до $\varphi = 90°$ составлена единственно на основаніи наблюденій его, безъ всякаго участія теоріи, то онымъ же угламъ при тѣхъ же теплотахъ, какія взяты выше сего изъ таблицы Брадлеевой, соотвѣтствуютъ $\lambda = 7{,}987$; $\lambda = 5{,}048$; $\lambda = 9{,}437$. Таковой непорядочной ходъ величины $\lambda$ заставляетъ или сомнѣваться въ точности наблюденій, на коихъ основываясь Піачи составилъ свою таблицу; или сіе падать должно на формулу Симсонову, что можетъ быть только въ случаѣ томъ, когда уголъ $\omega$ описываемый радіусомъ векторомъ и преломленіе $\rho$ взаимно независимы, что невѣроятно. Естьли возьмемъ новую таблицу Лапласову, то тѣмъ же угламъ, и при тѣхъ же теплотахъ соотвѣтственныя величины $\lambda$ найдутся $\lambda = 6{,}932$; $\lambda = 7{,}267$; $\lambda = 7{,}525$; кои также показываютъ, что съ приращеніемъ теплоты величина $\lambda$ становится больше. Въ прочемъ оное число $\lambda$ такого свойства, что естьли на прим. къ Брадлеевскимъ преломленіямъ $164''{,}4$ и $332''{,}8$, соотвѣтствующимъ угламъ $\varphi$ въ $70^\circ$ и $80^\circ$ при теплотѣ $= 0$, прибавится только по $0''{,}5$, то соотвѣтствующая величина $\lambda$ по оной формулѣ Симсоновой, вмѣсто $5{,}670$ найдется $6{,}074$.

Естьли возьмемъ изъ разныхъ таблицъ преломленія соотвѣтствующія угламъ $\varphi = 10^\circ$, $20^\circ$, $30^\circ \ldots 90^\circ$, и изъ ряда сихъ преломленій произведемъ ряды разностей, то ходъ сихъ рядовъ окажется правильнѣе всѣхъ въ таблицѣ Брадлеевой; что служитъ доказательствомъ, что она должна подходить ближе всѣхъ къ истиннѣ, чего и ожидать должно отъ искуснѣйшаго изъ наблюдателей.

14. Предъидущія изслѣдованія заставляютъ вѣрить, что коеффиціентъ $\lambda$ съ измѣ-

неніемъ теплоты измѣняется. Теперь спрашивается, отъ одного ли только измѣненія плотности воздуха, теплотою причиняемаго, произходитъ оное измѣненіе въ величинѣ $\lambda$; или можетъ быть не измѣняется ли отъ теплоты и преломительная сила воздуха при той же плотности? Какъ опыты надъ преломительностію различныхъ прозрачныхъ тѣлъ дѣланные удостовѣряютъ, что преломительная сила ихъ зависитъ отъ качества и количества горючихъ веществъ въ нихъ заключающихся, теплота же изрѣжаетъ только части тѣлъ, то и не вѣроятно, чтобы она и въ воздухѣ причиняла измѣненіе въ преломительности не по одному измѣненію плотности его. Пусть при стояніи барометра $h$ и теплотѣ $\delta$ по Реомюрову термометру плотность воздуха будетъ $\delta$ и въ тоже время плотность ртути $\Delta$; то при высотѣ барометра $y$ и теплотѣ $t$ градусовъ Реом. будетъ плотность воздуха $= \frac{y}{h} \cdot \frac{\delta}{(1+mt)(1+nt)}$,

гдѣ $n$ означаетъ расширеніе воздуха отъ прибавленія одного градуса теплоты, и $m$ таковое же расширеніе ртути; для коихъ величинъ новѣйшие опыты доставляютъ $n = \frac{3}{640}$ и $m = \frac{1}{4330}$ при высотѣ барометра $h = 0{,}76$ Фр. метровъ.

Поелику въ формулѣ Симсоновой $\omega = (\lambda + 1)\ \rho$, и при томъ же углѣ $\omega$ преломленіе $\rho$, при увеличивающейся и изрѣжающей воздухъ, и по сему уменьшающей преломительную его силу, теплотѣ становится менѣе, то при семъ количество $\lambda+1$ становится болѣе. И такъ разсмотримъ, не пропорціонально ли увеличиваніе количества $\lambda+1$ изрѣженію воздуха. При семъ предположеніи, ежели величину $\lambda+1$ соотвѣтствующую теплотѣ 0° назначимъ чрез $\varsigma$, то величина $\lambda+1$ соотвѣтствующая $t°$ должна быть $(1+nt)(1+mt)\varsigma$. Число $\lambda+1$ соотвѣтствующее преломленіямъ показаннымъ въ таблицѣ Брадлеевой при 0° температуры и при высотѣ барометра 28° есть 6,670; по чему для $t=8°$ оно должно быть $\left(1+\frac{3}{80}\right)\left(1+\frac{8}{4330}\right).\ 6,670=6,933$; и для $t=-8°$ должно быть 6,408; но выше видѣли мы, что выкладка основаемая на таблицѣ Брадлеевой для сихъ чиселъ доставляетъ 6,956 и 6,329. Числа 6,933 и 6,956 малымъ чѣмъ разнятся между собою; но разность чиселъ 6,408 и 6,329 довольно чувствительна, хотя, какъ мы выше въ § 13 видѣли, въ выраженіи количествъ преломленія не причиняетъ значительной разности.

15. Предъидущій параграфъ показываетъ, что величины $\lambda$, доставляемыя формулою Симсоновою для Брадлеевой таблицы преломленій, выходятъ менѣе, нежели каковы бы онѣ долженствовали быть, дабы измѣненія въ нихъ были пропорціональны измѣненію плотности воздуха причиняемому теплотою. Не происходитъ ли сіе отъ несовершенной точности формулы Симсоновой? Для сего возьмемъ изъ § 9 точнѣйшую формулу $\frac{Sin\ \theta}{Sin.\ \varphi}=$

$\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$. Она будучи приложена къ двумъ угламъ $\phi$ и $\phi'$ при той же теплотѣ доставляетъ $\frac{Sin.\,\theta'}{Sin.\,\phi'}=\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi}\times\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}}$, между тѣмъ какъ Симсонова доставляетъ $\frac{Sin.\,\theta'}{Sin.\,\phi'}=\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi}$. Какъ величина $\frac{a}{R}=\frac{1}{1+\frac{p}{a}}$, то будетъ $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}}=$ $1-\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}\cdot\frac{p}{a}$, ибо величина $\frac{p}{a}$ очень мала; по сему будетъ

$$\frac{Sin.\,\theta'}{Sin.\,\phi'}=\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi}\left\{1-\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}\cdot\frac{p}{a}\right\};$$

которое уравненіе показываетъ, что буде величина $\mu$ есть величина отрицательная, то количество $\lambda$ будетъ болѣе, нежели каково доставляетъ оное уравненіе выведенное изъ формулы Симсоновой, а притомъ сіе количество не есть постоянно; впрочемъ, по малости величины $(\rho'-\rho)\,\frac{p}{a}$, сіе измѣненіе величины $\lambda$ очень мало.

16. Естьли въ формулѣ $\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$ положимъ $\theta=\phi-\lambda\rho-\frac{1}{2}\mu\rho\rho$, $\eta=\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho$, то будетъ $\frac{\eta}{\eta+1}=\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}$ и оная формула обратится въ

$$\frac{Sin.\,\varphi\,Cos.\,(\lambda\rho+\frac{1}{2}\mu\rho^2)-Cos.\,\varphi.\,Sin.\,(\lambda\rho+\frac{1}{2}\mu\rho^2)}{Sin.\,\varphi}=$$

$$\left(1+\frac{p}{a}\right)^{\frac{-\eta}{\eta+1}}$$

или

$$1-\lambda\rho\,Cot.\,\varphi-\tfrac{1}{2}(\lambda\lambda+\mu\,Cot.\,\varphi)\rho\rho=1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right)\cdot\frac{p}{a}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right\}\left\{1+\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right\}\cdot\frac{p^2}{a^2};$$

откуда чрезъ сравненіе сходственныхъ членовъ найдется

$$\lambda\rho\,Cot.\,\varphi=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right).\ \frac{p}{a}$$

$$\rho^2(\lambda\lambda+\mu\,Cot.\,\varphi)=-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right)\cdot\frac{p^2}{a^2}$$

по изключеніи же величины $\frac{p}{a}$,

$$\frac{\lambda\lambda\,tang\,\varphi^2+\mu\,tang.\,\varphi}{\lambda\lambda}=-\left\{1+\frac{2(\lambda+1)^2}{2\lambda(\lambda+1)+\mu\rho}\right\}$$

или

$$\frac{\lambda\lambda\,tang.\,\varphi^2+\mu\,tang.\,\varphi}{\lambda^2}=-\left\{\frac{2\lambda+1}{\lambda}-\frac{\mu\rho}{2\lambda\lambda}\right\};$$

и получится

$$\mu=-\frac{\lambda[2\lambda+\lambda\,tang.\,\varphi^2+1]}{tang.\,\varphi-\frac{1}{2}\rho}.$$

Такимъ образомъ будетъ

$$\theta=\varphi-\lambda\rho+\frac{\frac{1}{2}\lambda(2\lambda+\lambda\,tang.\,\varphi^2+1)}{tang.\,\varphi-\frac{1}{2}\rho}\cdot\rho\rho;$$

гдѣ въ знаменателѣ $\frac{1}{2}\rho$ передъ $tang.\,\phi$ безъ чувствительной ошибки презрѣно быть можетъ; въ которомъ случаѣ будетъ

$$\mu = -\lambda[(2\lambda+1)\,Cot.\,\phi+\lambda\,tang.\,\phi]$$

и

$$\theta = \phi-\lambda\rho+\tfrac{1}{2}[(2\lambda+1)\,Cot.\,\phi+\lambda\,tang.\,\phi]\,\rho\rho;$$

такъ что въ формулѣ Симсоновой величина $\lambda$, собственно говоря, есть

$$\lambda' = \lambda[1-\tfrac{1}{2}((2\lambda+1)\,Cot.\,\phi+\lambda\,tang.\,\phi)\rho]$$

откуда получится

$$\lambda = \lambda'[1+\tfrac{1}{2}[(2\lambda+1)\,Cot.\,\phi+\lambda\,tang.\,\phi]\rho]$$

и

$$\lambda = \lambda'[1+((\lambda'+\tfrac{1}{2})\,Cot\,\phi+\lambda'\,tang.\,\phi)\rho];$$

по сему безъ чувствительной ошибки

$$\mu = -\lambda'((2\lambda'+1)\,Cot.\,\phi+\lambda'\,txng.\,\phi),$$

$$\frac{p}{a} = (\lambda'+1)\rho\,Cot.\,\phi;$$

кои когда подставлены будутъ въ уравненія параграфа 15$^{го}$, то получимъ для поправленія формулы Симсоновой и опредѣленія точнѣйшей величины $\lambda$ уравненіе

$$\frac{Sin.(\phi'-\lambda\rho')}{Sin.\,\phi'} = \frac{Sin\,(\phi-\lambda\rho)}{Sin\,\phi}\left\{1+\frac{\lambda((2\lambda+1)\,Cot\,\phi+\lambda\,tang.\,\phi)\rho(\rho'-\rho)\,Cot.\,\phi}{2(\lambda+1)}\right\};$$

или

$$\frac{Sin.(\phi'-\lambda\rho')}{Sin.\,\phi'} = \frac{Sin.(\phi-\lambda\rho)}{Sin.\,\phi}\left\{1+\frac{\lambda(\lambda+(2\lambda+1)\,Cot.\,\phi^2)\rho(\rho'-\rho)}{2(\lambda+1)}\right\};$$

и какъ величины $\mu$ и $\frac{p}{a}$ для сего уравненія выведены посредствомъ одного угла $\phi$, то сіе уравненіе будетъ точнѣе, когда изобразится чрезъ

$$\frac{Sin.(\phi'-\lambda\rho')}{Sin.\phi'}=\frac{Sin.(\phi-\lambda\rho)}{Sin.\phi}\left\{1+\frac{\lambda(\lambda+\frac{1}{2}(2\lambda+1)(Cot.\phi^2+Cot.\phi'2)\times\frac{1}{2}(\rho'+\rho)\cdot\frac{1}{2}(\rho'-\rho)}{\lambda+1}\right\}.$$

Естьли по сей формулѣ поправимъ выше найденныя величины для таблицы Брадлеевой посредствомъ тѣхъ же угловъ $\phi=70°$ и $\phi'=80°$, то для теплоты $+8°$ найдется $\lambda=5,816$, для теплоты $0°$ $\lambda=6,121$, для теплоты $-8°$ $\lambda=6,425$.

Естьли теперь, посредствомъ величины $\lambda+1=7,121$ соотвѣтствующей теплотѣ $0°$, выведемъ по предъидущему параграфу величины $\lambda+1$ для $+8°$ и $-8°$ теплоты, то сіи величины выйдутъ 6,841 и 7,402, кои почти равно разнятся отъ величинъ 6,816 и 7,425, каковыя доставляютъ поправленныя величины $\lambda$, и притомъ разность сія весьма невелика; да и та произойти можетъ отъ того, что мы въ оной формулѣ, которую для поправленія употребили, вмѣсто истинныхъ величинъ $\lambda$, $\mu$ и $\frac{p}{a}$, употребили только величины приближенныя. Чрезъ сіе можемъ удостовѣриться, что величины $\lambda$ вмѣстѣ съ теплотою измѣняются сообразно тому, какъ въ предъидущемъ параграфѣ предполагаемо было. И какъ изъ § 13 явствуетъ, что хотя бы измѣненіе въ величинѣ $\lambda$ сдѣлалось довольно чувствительно, но оно не причинитъ чувствительнаго измѣненія въ находимомъ по формулѣ Симсоновой преломленіи, то мы и предположимъ, что теплотѣ $0^\circ$ соотвѣтствуетъ $\lambda = 6{,}12$; тогда соотвѣтствующая каждой другой теплотѣ $t'$ величина $\lambda+1$ будетъ выражаться чрезъ $\left(1+\frac{3t}{640}\right)\left(1+\frac{t}{4330}\right)\times 7{,}12$; которое выраженіе по § 14му должно будетъ еще помножить на содержаніе высоты барометра, бывшей при наблюденіи, въ высотѣ барометра составляющей 0,76 Фран. метровъ.

17. Опредѣлимъ теперь, посредствомъ Симсоновой формулы $Sin.(\varphi-\lambda\rho)=\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{p}{a}\right)\times Sin.\varphi$ величину $\frac{p}{a}$; и найдется $\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{p}{a}=$

$$\frac{Sin.\varphi - Sin.(\varphi-\lambda\rho)}{Sin.\varphi} \text{ и } \frac{p}{a}=\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\frac{2\,Sin.\tfrac{1}{2}\lambda\rho.\,Cos.(\varphi-\tfrac{1}{2}\lambda\rho)}{Sin.\varphi}.$$

Возьмемъ уголъ $\varphi=70^\circ$ и величину $\lambda$ соотвѣтствующую теплотѣ $0^\circ$, то есть $\lambda=6{,}12$, то получится $\frac{p}{a}=0{,}00207927$. Такую часть радіуса земнаго при теплотѣ $0^\circ$ составляетъ высота Атмосферы, при коей преломленіе становится чувствительнымъ. Для теплоты $+8^\circ$, коей соотвѣтствуетъ $\lambda=6{,}4$, найдется посредствомъ онаго же угла $\varphi=70^\circ$ величина $\frac{p}{a}=0{,}00206384$. Для теплоты $-8^\circ$, коей соотвѣтствуетъ $\lambda=5{,}84$ найдется посредствомъ онаго же угла $\varphi = 70°$ величина $\frac{p}{a} =$ 0,00209592. По сему при увеличивающейся теплотѣ величина $\frac{p}{a}$ уменьшается, и слѣдовательно чувствительное преломленіе начинается ближе къ поверхности земли. Напротивъ величины $\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$ остаются при всѣхъ теплотахъ почти совсемъ неизмѣнны, и ихъ назначить можно среднимъ числомъ 0,0017872, такъ что въ формулѣ Симсоновой будетъ

$$Sin. (\varphi - \lambda\rho) = 0{,}9982128 \times Sin.\ \varphi.$$

Примѣръ 1й. По наблюденію Мешеня учиненному 18 Генваря (нов. ст.) 1798 года при высотѣ Барометра 27 дюйм. 4,5 лин. и теплотѣ $+ 7°$ Реомюра для угла $\varphi = 86° 14' 42''$ найдено преломленія $12' 4'',2$.

По основаніямъ нами представленнымъ будетъ $\lambda + 1 = 7{,}12 \left(1 + \frac{3.7}{640}\right)\left(1 + \frac{7}{4330}\right) \times \frac{336{,}94}{328{,}5} = 7{,}555$ и $\lambda = 6555$; потомъ

$$\begin{array}{ll}
log.\ 0{,}9982128 = & 9{,}9992231 \\
log.\ Sin.\ \varphi = & \underline{9{,}9990667} \\
l.\ Sin.\ (\varphi - \lambda\rho) = & 9{,}9982898 \\
\varphi - \lambda\rho = & 84° 55' 7'' \\
\lambda\rho = & 1° 19' 35'' \\
\rho = 12' 8'',4\,; &
\end{array}$$

слѣдовательно выкладка доставляетъ $4'',2$ болѣе, нежели наблюденіе.

Примѣръ 2й. По наблюденію того же Мешеня, учиненному 21 Генваря 1798 года при высотѣ барометра 28 дюйм. 3,3 лин. и теплотѣ 6°,5 Реомюра, для угла $\varphi = 86°15'20''$ найдено преломленіе $12'32'',5$.

По основаніямъ нами представленнымъ будетъ $\lambda + 1 = 7{,}12 \left(1 + \frac{3.6{,}5}{640}\right) \left(1 + \frac{6{,}5}{4330}\right) \times$

$\frac{336{,}94}{339{,}3} = 7{,}297$ и $\lambda = 6{,}297$; потомъ

$$
\begin{array}{ll}
\textit{log.}\ 0{,}9982128 = & 9{,}9992231 \\
l.\ Sin.\ \varphi = & 9{,}9990719 \\
\hline
l.\ Sin.\ (\varphi - \lambda\rho) = & 9{,}9982950 \\
\varphi - \lambda\rho = & 84°55'34'',8 \\
\lambda\rho = & 1°19'45'',2 \\
\rho = & 12'39'',9
\end{array}
$$

по сему выкладка доставляетъ $7'',4$ болѣе нежели наблюденіе.

Сіи небольшія разности выкладки отъ наблюденій нельзя приписать единственно неточности основаній выкладки, но могутъ зависѣть и отъ несовершенной точности самыхъ наблюденій.

18. При вывожденіи формулы для вычисленія преломленій мы предполагали землю нашу шарообразною; но поелику видъ ея отъ шарообразности нѣсколько отступаетъ, то для большей точности, при разныхъ широтахъ мѣстъ, полагая высоту атмосферы $p$ при той же теплотѣ одинакову во всѣхъ мѣстахъ, можно вмѣсто постояннаго радіуса $a$ употреблять радіусы кривизны земли широтѣ мѣстъ соотвѣтствующіе.