

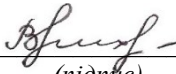
Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут «Фізико-технічний факультет»

Кафедра медичної фізики та біомедичних нанотехнологій

До захисту допущено

Кафедрою медичної фізики та біомедичних нанотехнологій протокол № 7 від
15.12.2025

завідувач кафедри  Валерія ТРУСОВА
(підпис) (ім'я, прізвище)

«15» грудня 2025 р.

Кваліфікаційна робота
здобувача другого (магістерського) рівня вищої освіти
(першого (бакалаврського) / другого (магістерського))

Побудова траєкторій розповсюдження променів зсувних хвиль
в м'яких тканинах з використанням принципу Ферма

(назва роботи)

Спеціальність (спеціалізація) 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

(код та найменування спеціальності; спеціалізації спеціальності - за наявності)

Освітня програма

«Медична фізика»
(назва освітньої програми)


Виконавець


(підпис)

Артем КУСТОВІНОВ

(ім'я, прізвище)

Науковий керівник


(підпис)

Євген БАРАННИК

(ім'я, прізвище)

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Кустовінов А.М. – Побудова траєкторій розповсюдження променів зсувних хвиль в м'яких тканинах з використанням принципу Ферма.

Дипломна робота магістра за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» – Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, 2025.

У роботі було розглянуто фізичну модель поширення зсувних хвиль у м'яких тканинах, побудовану з використанням принципу Ферма. Актуальність дослідження пов'язана із застосуванням зсувнохвильової еластографії в сучасній медичній діагностиці та необхідністю підвищення її роздільної здатності. Було приділено увагу впливу просторових неоднорідностей на форму променів і просторовий розподіл ейконалу. Метою роботи є дослідження траєкторій променів зсувних хвиль та просторового розподілу ейконалу в ізотропних і в'язкопружних середовищах, а також пояснення отриманих результатів. Для досягнення поставленої мети у роботі поставлено та розв'язано ряд задач, пов'язаних з моделюванням хвильового поля для різних типів неоднорідностей: одиничних жорстких включень, подвійних структур та моделі некротичного кільця. Також було досліджено вплив зсувної в'язкості в межах моделі Кельвіна-Фойгта. Отримано промені та ейконали для різних моделей тканин та проаналізовано їх поведінку за наявності неоднорідностей. Показано, що жорсткі включення, подвійні структури та кільцеві моделі спричиняють суттєву деформацію променів, тоді як час проходження хвилі змінюється менш виражено. Досліджено також, що збільшення в'язкості середовища еквівалентне підвищенню зсувної жорсткості, що узгоджується з експериментальними даними. Результати роботи демонструють можливість застосування побудованої моделі для пояснення властивостей хвильового поля, що вимірюється у зсувнохвильовій еластографії. Запропонований підхід може бути використаний у подальших дослідженнях для покращення алгоритмів реконструкції механічних властивостей тканин та інтерпретації ультразвукових даних.

ABSTRACT

Kustovinov A.M. – Construction of trajectories of shear wave propagation in soft tissues using the Fermat principle.

Master's thesis in the specialty 105 “Applied Physics and Nanomaterials” – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2025.

The work considered a physical model of shear wave propagation in soft tissues, constructed using the Fermat principle. The relevance of the research is related to the use of shear wave elastography in modern medical diagnostics and the need to increase its resolution. Attention was paid to the influence of spatial inhomogeneities on the shape of rays and the spatial distribution of the eikonal. The aim of the work is to study the trajectories of shear wave rays and the spatial distribution of the eikonal in isotropic and viscoelastic media, as well as to explain the results obtained. To achieve this goal, several problems related to the modeling of the wave field for different types of inhomogeneities were posed and solved: single rigid inclusions, double structures, and necrotic ring models. The influence of shear viscosity within the Kelvin-Voigt model was also investigated. Rays and eikonal functions were obtained for different tissue models, and their behavior in the presence of inhomogeneities was analyzed. It was shown that rigid inclusions, double structures, and ring models cause significant deformation of rays, while the wave transit time changes less significantly. It was also found that an increase in the viscosity of the medium is equivalent to an increase in shear stiffness, which is consistent with experimental data. The results of the work demonstrate the possibility of using the constructed model to explain the properties of the wave field measured in shear wave elastography. The proposed approach can be used in further research to improve algorithms for reconstructing the mechanical properties of tissues and interpreting ultrasound data.

ЗМІСТ

<i>РОЗДІЛ 1. Перелік умовних позначень</i>	5
<i>ВСТУП</i>	7
<i>РОЗДІЛ 1. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ</i>	15
1.1. Принцип Ферма	15
1.2. Алгоритм визначення траєкторії променів	16
<i>РОЗДІЛ 2. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ</i>	18
2.1. Модель локалізованої неоднорідності зсувної жорсткості	18
2.2. Модель подвійної пухлини	23
2.3. Модель некротичного кільця	23
2.4. Вплив в'язкості на траєкторії променів і розподіл ейконалу	25
2.5. Техніка безпеки	28
<i>ВИСНОВКИ</i>	30
<i>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</i>	32

РОЗДІЛ 1. Перелік умовних позначень

ψ_1 – просторова частина ейконалу

μ – модуль зсувної жорсткості середовища

$\mu_{\parallel}, \mu_{\perp}$ – модулі зсувної жорсткості скелетних м'язів людини, виміряні вздовж та поперек волокон, відповідно

η – коефіцієнт зсувної в'язкості середовища

c_0 – швидкість зсувних хвиль в однорідному середовищі

n – коефіцієнт заломлення зсувних хвиль

$\nabla\psi_1$ – градієнт ейконалу

l – довжина, що відраховується вздовж траєкторії променя

\vec{t} – одиничний дотичний вектор до траєкторії променя

\vec{S} – одиничний вектор головної нормалі до траєкторії

R – радіус кривизни траєкторії променя

Δs – довжина відрізка траєкторії на одному чисельному кроці

α – кут відхилення променя на одному кроці

K_1, K_2 – параметри гаусівського розподілу подвійної неоднорідності

F_1, F_2 – параметри гаусівського розподілу некроттичної неоднорідності

M – частотнозалежний модуль зсувної жорсткості

M_r – дійсна частина модуля M

M_i – уявна частина модуля M

ω – кутова частота зсувних хвиль

k – хвильове число

ρ – густина середовища

a, b – параметри, що визначають взаємне розташування центрів двох неоднорідностей зсувної жорсткості

x, y – просторові координати точки середовища

УЗД – ультразвукове дослідження

SWE – ShearWaveElastography (зсувнохвильова еластографія)

ЗХЕ – зсувнохвильова еластографія

ARFI – AcousticRadiationForceImpulse (імпульс сили радіаційного тиску)

TOF – TimeOfFlight (час проходження хвилі)

FMM – FastMarchingMethod (метод швидкого маршу)

ВСТУП

Як відомо, на сьогодні різноманітні ультразвукові діагностичні методи, що засновані на засадах ультразвукової відбивної та транз'єнтної томографії, складають дуже велику частину сучасної медичної діагностики. Це стало наслідком значних досягнень у розвитку та використанні різноманітних варіантів як традиційних ультразвукових досліджень (УЗД), так і ультразвукових доплерівських та спектральних доплерівських методик. Проте за своїм фізичним змістом ультразвукові методи принципово дозволяють досліджувати тільки ті неоднорідності в м'яких тканинах, які характеризують локальну об'ємну стисливість та густину біологічного середовища. Такі неоднорідності прийнято характеризувати таким інтегральним параметром, як акустичний імпеданс середовища.

Як наслідок на ординарних ультразвукових чорно-білих В-зображеннях внутрішньої структури біологічного об'єкту низка патологічних, фіброзних, травматично ушкоджених чи рубцьованих та інших тканин можуть відобразитися як нормальні. Така ситуація особливо характерна для ранніх стадій розвитку різних патологічних процесів [1,2]. З цієї причини останніми десятиріччями інтенсивно розроблялися принципово інші надійні неінвазивні ультразвукові методи точної діагностики, які здатні ідентифікувати патологічні відхилення у структурі тканин навіть без помітних змін їхнього акустичного імпедансу [3]. А саме, ці дослідження мають доповнювати класичні УЗД на випадок патологічних відхилень зсувної жорсткості біологічних тканин.

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

Найбільш відомим і перспективним серед таких методів є ультразвукова еластографія, яка активно розвивається та вже демонструє високу ефективність у різноманітних діагностичних застосуваннях [4–8]. Її основою є встановлена кореляція між механічними властивостями м'яких тканин [10] та наявністю в них патологічних процесів в тканинах [9], які змінюють зокрема модуль зсувної жорсткості. Це дозволяє отримувати карти просторового розподілу зсувної жорсткості у досліджуваній області інтересу і робити на цій основі висновки щодо можливого розташування патологічних тканин та тканин з патологічними станами.

Для кращого розуміння зсувнохвильової еластографії (ЗХВ, SWE) ми можемо описати базові принципи у трьох простих кроках, схематично показаних на рисунку 0.1.

Крок 1. Генерація та поширення зсувних хвиль.

Зсувні хвилі створюються сфокусованою акустичною силою випромінювання, яка генерується лінійною ультразвуковою (УЗ) решіткою. Ця сфокусована сила прикладає локальний механічний стрес до тканини й індукує невелике локалізоване зміщення. Від цієї точки збудження зсувні хвилі поширюються латерально крізь навколишні тканини в поперечній площині, тобто перпендикулярно до первинного ультразвукового променя, що створив акустичну силу випромінювання. Ці зсувні хвилі поширюються з набагато меншою швидкістю, ніж звичайні поздовжні ультразвукові хвилі, і викликають поперечні (зсувні) зміщення всередині тканини.

Крок 2. Відстеження зміщення тканини.

Коли зсувні хвилі проходять крізь тканину, для відстеження спричинених ними зміщень тканини та вимірювання швидкостей зсувних хвиль у часі використовуються швидкі УЗ-випромінювання в режимі плоскої хвилі. Рух тканини може бути кількісно та якісно оцінений за допомогою різних алгоритмів, наприклад алгоритму відстеження спеклів, який порівнює послідовні ультразвукові кадри, щоб оцінити, наскільки змістилася тканина в кожній точці або за допомогою фазових (доплерівських методів)

Крок 3. Кількісне визначення жорсткості.

Отримані карти зміщення тканин потім використовуються для розрахунку швидкості зсувної хвилі V , яку зазвичай наводять у метрах за секунду. Просторовий розподіл швидкостей зсувних хвиль у кожному пікселі безпосередньо пов'язаний із модулем зсуву μ , який відображає жорсткість та еластичність тканини й виражається в одиницях тиску.

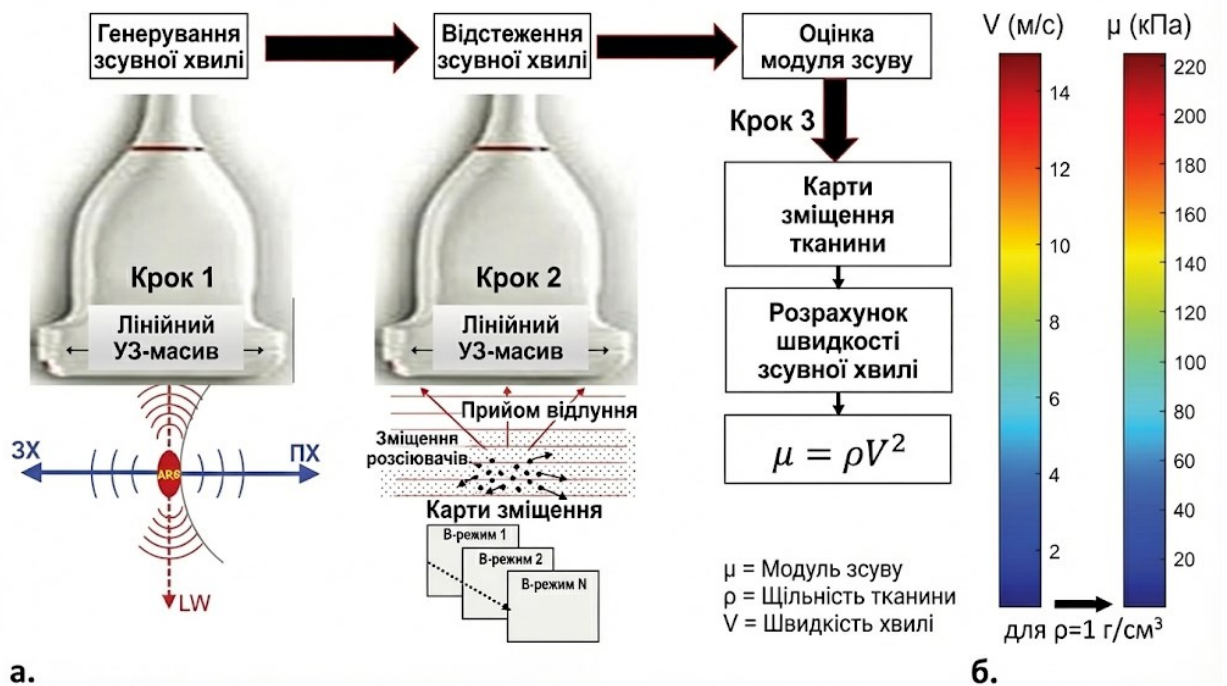


Рис. 0.1 Загальна схема еластографічних досліджень

На ультразвуковому дисплеї кількісні карти модуля зсуву зазвичай відображаються як кольорово-кодовані еластограми. Вони можуть показувати або швидкості зсувних хвиль у метрах за секунду (як на рис. 0.2), або еластичність тканини в кілопаскалях (як на рис. 0.3) [25]. У більшості кольорових шкал червоний відповідає більшій жорсткості («тверда» тканина), синій — меншій жорсткості («м'яка» тканина), а зелений і жовтий відображають проміжні рівні еластичності. Правильна інтерпретація цих кольорових еластограм і пов'язаних із ними

швидкостей зсувних хвиль потребує базового розуміння фізики SWE та того, як параметри отримання даних впливають на вимірювання.

Еластографія зсувної хвилі (SWE) є не лише предметом кількох поточних наукових досліджень, але також рутинно використовується в установах авторів як доповнення до звичайного ультразвукового дослідження (УЗД) для клінічної оцінки еластичності тканин при широкому спектрі травматичних і патологічних станів опорно-рухового апарату. Кількісні вимірювання жорсткості тканин надають важливу інформацію про внутрішні властивості тканин і можуть бути особливо корисними для виявлення ранніх стадій захворювання, коли при звичайному УЗД ще не спостерігається очевидних відхилень, а також для моніторингу загоєння тканин у часі. Крім того, ми вважаємо, що SWE має

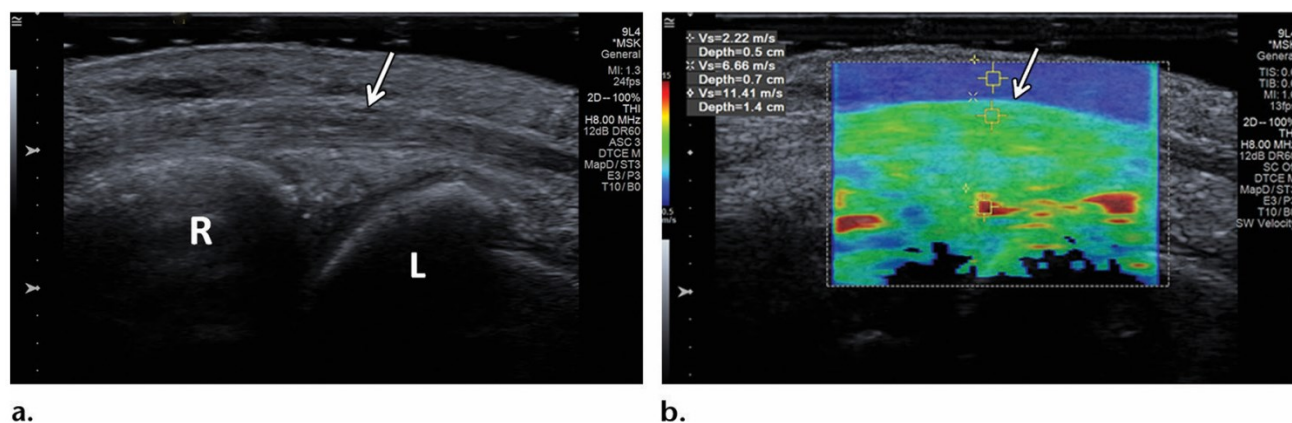


Рис 0.2. Нормальне сухожилля четвертого розгиначовогокомпартамента зап'ястка у 21-річного безсимптомного чоловіка. (а) УЗ-зображення в сірошкальному режимі вздовж довгої осі тильної поверхні зап'ястка демонструє нормальний ехогеннийфібрилярний вигляд сухожилка четвертого розгиначовогокомпартамента (стрілка). L = півмісяцева кістка, R = променева кістка. (b) Зображення SWE (кольорова еластограма) тієї самої ділянки показує переважно проміжну швидкість зсувної хвилі (6,66 м/с) у тому самому сухожиллі (стрілка).

потенціал для прогнозування ймовірного розриву сухожилка, тим самим допомагаючи клініцисту ухвалювати рішення щодо більш раннього початку та оптимізації лікування.

Наразі SWE виявилася найбільш корисною в оцінці сухожилків, з дещо меншою, але все ж значною цінністю в оцінці м'язів і периферичних нервів. Її використання поступово розширюється на вивчення зв'язок і суглобів, де попередні результати є обнадійливими. SWE також застосовується в оцінці пухлин опорно-рухового апарату; однак наразі ще надто рано визначати, чи може ця методика надійно відрізнити злякисні м'якотканинні утворення від доброякісних. Потрібні подальші проспективні, масштабніші дослідження для

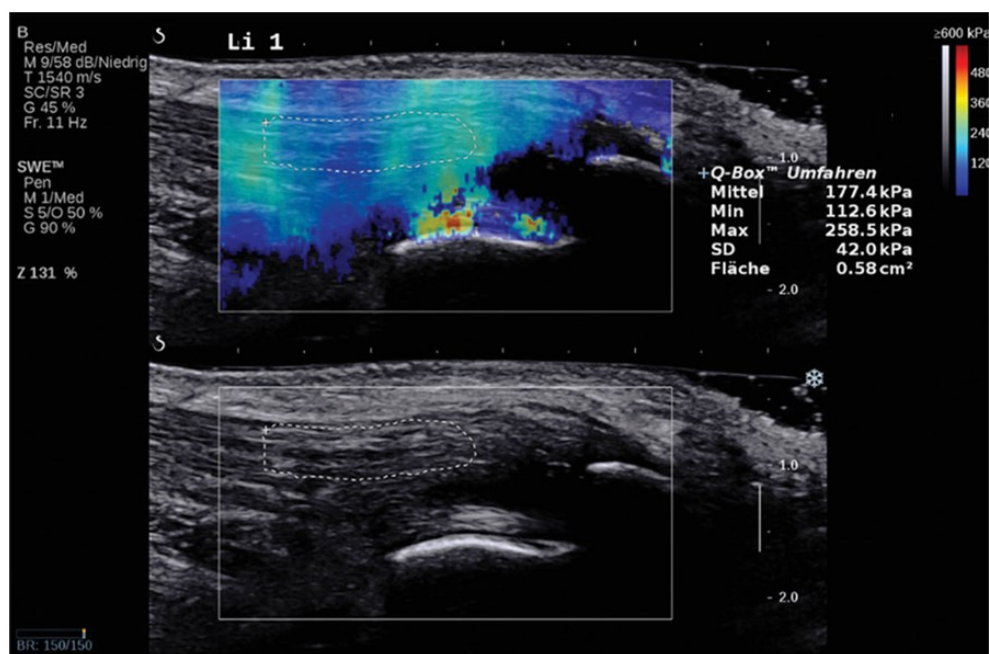


Рисунок 0.3. Нормальне ахіллове сухожилля у 69-річної безсимптомної жінки. Нижнє зображення: сірошкальне УЗ-зображення вздовж довгої осі показує нормальний ехогенний фібрилярний вигляд ахіллового сухожилка з окресленою областю інтересу (ROI). Верхнє зображення: кольорова еластограма тієї ж ділянки показує нормальне значення G досліджуваного сухожилка ($177,4 \text{ kPa} \pm 42$). Дані SWE були зібрані з використанням УЗ-сканера Aixplorer (SupersonicImagine, Екс-ан-Прованс, Франція) з лінійним датчиком L15–4 МГц.

стандартизації протоколів отримання даних, визначення відтворюваних порогових значень і уточнення ролі SWE в плануванні лікування та подальшому спостереженні в рамках рутинної практики візуалізації опорно-рухового апарату.

У переважній більшості діагностичних випадків патологічні тканини характеризуються підвищеними показниками зсувної жорсткості, які описуються такими модулями, як модуль Юнга та модуль зсувної жорсткості. Різниця може досягати декількох сотень відсотків, тобто ці механічні модулі можуть бути у 1,5–4 рази більшими, ніж у тканинах в нормі. Така особливість патологічних тканин виявлена при дослідженні раку молочної [11–13] та щитоподібної залози [14,15], периферичних лімфатичних вузлів [16], передміхурової [17] і підшлункової залоз [18], хронічних патологій нирок [19], а також у випадках осередкових уражень та фіброзу печінки [20,21].

Серед загальної сукупності методів ультразвукової еластографії [22-26] можна виділити компресійну еластографію (Compression Sonoelastography) [22], яка хронологічно почала застосовуватися першою, та зсувнохвильову еластографію (Shear-Wave Elastography, SWE) [25,26], які на сьогодні вже активно використовуються у клінічній практиці. Крім того, продовжують розроблятися та вдосконалюватися одновимірна перехідна еластографія (Transient Elastography, TE) [23] та еластографія із застосуванням статичних напружень (Strain Elastography) [24]. Активні дослідження зсувнохвильової еластографії продовжуються, оскільки цей метод не тільки підтвердив свою діагностичну ефективність, але й демонструє значний потенціал у подальшому підвищенні точності діагностики, зокрема специфічності при онкопатологіях. До переваг методу відноситься зокрема зменшення кількості біопсій при діагностуванні різних органів, таких як згадані залози [27–31], лімфатичні вузли [32], печінки [33], матки [34,35], молочні залози [36–39] та інші. Застосування зсувнохвильової еластографії разом із традиційними чорно-білими В-зображеннями суттєво підвищує діагностичну цінність ультразвукової діагностики порівняно з традиційним сірошкальним УЗД.

У методі одновимірної перехідної еластографії зсувні хвилі створюються за допомогою механічного вібраційного пристрою. Для створення джерела зсувних

хвиль всередині тканин в методі SWE використовують локальне динамічне навантаження на тканини за допомогою сили радіаційного тиску акустичного випромінювання короткого високоенергетичного імпульсу (Acoustic Radiation Force Impulse, ARFI). Як в точковій (pSWE), так і в двовимірній (2D-SWE) зсувнохвильовій еластографії [40] внаслідок швидкого затухання зсувних хвиль можна знехтувати впливом граничних умов, що суттєво спрощує описання процесу розповсюдження хвиль і подальшу обробку сигналів відгуку.

Частоти зсувних хвиль, збуджених імпульсами ARFI тривалістю у кілька сотень мікросекунд, зазвичай лежать в діапазоні 50-500 Гц. Після збудження в місці дії сили радіаційного тиску зсувна хвиля починає поширюватися перпендикулярно напрямку дії сили, і завданням дослідження є визначення її швидкості у локальних точках біологічного об'єкту. Для цього у цих точках реєструють в реальному часі малі переміщення [41-43], величина яких зазвичай менше 10 мкм. Існують різні методи оцінювання швидкості хвилі [44-47], зокрема, найчастіше використовують метод, за яким встановлюється час проходження (time-of-flight, TOF) хвилі між двома точками [44,45], який визначає групову швидкість хвилі.

Отримані результати інтерпретують у межах фізичної моделі шляхом розв'язання оберненої задачі для відновлення властивостей тканин. На сьогодні відома ціла низка вдосконалених схем інверсії [48-50], які характеризуються робастною ідентифікацією часу прибуття з урахуванням декореляції, застосування інтерференційних картин, а також швидкістю та стійкістю алгоритму оцінки швидкості розповсюдження зсувних хвиль. Використання ейконального підходу вважається коректним за умови повільної просторової зміни швидкості та відсутності суттєвих відбиттів. У в'язкопружних середовищах він передусім описує групову швидкість, визначену за часами прибуття хвиль.

Мета цієї роботи полягає у визначенні впливу зсувної жорсткості і в'язкості на значення ейконалу та траєкторії розповсюдження зсувних хвиль та в межах простої фізико-математичної моделі та переконатися у принциповій можливості пояснення експериментальних даних зсувнохвильової еластографії. Для досягнення цієї мети необхідно вирішити наступні задачі:

1. На основі аналізу наукової літератури щодо технологій, які засновані на різних методах зсувнохвильової еластографії, обрати загальну фізико-математичну модель, придатну для комп'ютерного моделювання розповсюдження зсувних хвиль та відновлення в'язкопружних параметрів тканин.

2. Обрати просторовий розподіл для моделі жорсткого включення, що імітує злоякісну пухлину і застосовується у комп'ютерних моделях та симуляціях у випадках, коли просторові зміни модуля зсувної жорсткості малі на довжині хвилі.

3. На основі розробленої фізико-математичної моделі шляхом комп'ютерного моделювання дослідити і порівняти траєкторії променів зсувних хвиль в однорідному за модулем зсувної жорсткості середовищі і в середовищі з жорстким включенням, що імітує злоякісну пухлину.

4. Винайти на основі винайдених траєкторій променів зсувних хвиль просторовий розподіл ейконалу в однорідному середовищі і в середовищі з жорстким включенням.

5. Для дослідження роздільної здатності в межах розробленої фізико-математичного алгоритму розглянути модель з двома жорсткими включеннями. Винайти і проаналізувати відповідні траєкторії променів зсувних хвиль та просторовий розподіл ейконалу.

6. В межах моделі Кельвіна-Фойгта врахувати залежність швидкості зсувних хвиль і коефіцієнта заломлення від модуля зсувної в'язкості і винайти і проаналізувати на цій основі вплив в'язкості на траєкторії зсувних хвиль і просторовий розподіл ейконалу.

7. Дати фізичну інтерпретацію отриманих результатів, провести порівняння з відомими експериментальними даними та зробити висновки щодо доцільності використання розглянутого алгоритму у загальному методі зсувнохвильової еластографії.

РОЗДІЛ 1. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

1.1. Принцип Ферма

Винайти траєкторії зсувних хвиль як в пружному, так і у в'язкопружному середовищі без вирішення системи диференціальних характеристичних рівнянь можна безпосередньо за допомогою принципу Ферма, згідно з яким [60] для траєкторії променя між двома заданими точками простору А і В мінімальним (а в загальному випадку екстремальним) є інтеграл

$$\psi_1 = \int_A^B n dl,$$

де l – довжина, що відраховується вздовж траєкторії променя n – коефіцієнт заломлення середовища, а інтегрування проводиться вздовж траєкторії розповсюдження променя. Величина ψ_1 задає оптичну довжину шляху та з точністю до сталої є одночасно просторовою частиною ейконалу. Саме її градієнт визначає коефіцієнт заломлення середовища: $n = |\nabla\psi_1|$. Прирівнюючи до нуля варіацію ейконалу, отримуємо рівняння для одиничного вектора \vec{t} , дотичного до траєкторії розповсюдження променя у будь-якій точці простору [51]:

$$\frac{d(n\vec{t})}{dl} = \nabla n, \quad (1)$$

яке можна переписати у вигляді

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = \frac{1}{n} [\nabla n - \vec{t}(\vec{t}\nabla n)] \quad (2)$$

Рівняння для дотичної однозначно задає форму променів в усьому просторі.

Похідна $\frac{d\vec{t}}{dt}$ уздовж траєкторії променю дорівнює \vec{S}/R , де \vec{S} - одиничний вектор головної нормалі траєкторії, а R – радіус кривизни променя. Вектори \vec{S} і \vec{t} взаємно перпендикулярні, тому після домноження скалярно правої і лівої частини (2) на \vec{S} отримуємо [51]

$$\frac{1}{R} = \vec{S} \cdot \frac{\nabla n}{n} \quad (3)$$

Для зсувних хвиль у пружному середовищі зі сталою густиною коефіцієнт заломлення дорівнює $n(x, y) = \frac{c_0}{c(r)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu(x, y)}}$, де μ_0 – це опорне значення жорсткості у однорідному середовищі, а $\mu(x, y)$ - модуль зсувної жорсткості, що змінюється з координатою. Отже, менший модуль μ відповідає меншій швидкості зсувних хвиль і більшому показнику заломлення n .

Рівняння (3) показує, що локальна кривизна променя пропорційна градієнту показника заломлення в напрямку головної нормалі \vec{S} . Якщо n зростає у напрямку нормалі, то промінь загинається саме в цей бік і намагається оминати області середовища з меншим показником заломлення і загинається до ділянок з більшим показником заломлення, тобто до «м'якіших», низькошвидкісних зон.

1.2. Алгоритм визначення траєкторії променів

Рівняння (3) є основою для чисельної схеми комп'ютерного обрахунку траєкторій променів зсувних хвиль у середовищі. Якщо розглядати траєкторії променів на сітці з таким кроком, на якому можна знехтувати зміною величини градієнту ∇n та викривлення променя між вузлами сітки, то повна траєкторія будується за допомогою відрізків з довжиною d , який набагато більше кроку між вузлами сітки. Як показано на рис 1.1, кожний наступний відрізок траєкторії, який з'єднує два вузли сітки, відхиляється від напрямку попереднього на невеликий кут α , який і потрібно визначити на данному кроці.

Для спрощення моделювання будемо вважати, що дотична до траєкторії співпадає з винайденим відрізком траєкторії. Такий підхід значно полегшує чисельну схему, і в границі $d \rightarrow 0$ асимптотично наближається до реального випадку, для якого вектор дотичної визначається, як сума векторів кроку до і після точки, яка опрацьовується. Тож, це означає, що на даному кроці вектор \vec{t} , як видно з рис 1.1, і вектор нормалі до траєкторії, який спрямований вздовж радіуса кривизни R , відхиляються на такий же кут α , як і сам відрізок траєкторії. Тобто, нове значення дотичного вектора пов'язане із його значенням на попередньому кроці простим поворотом:

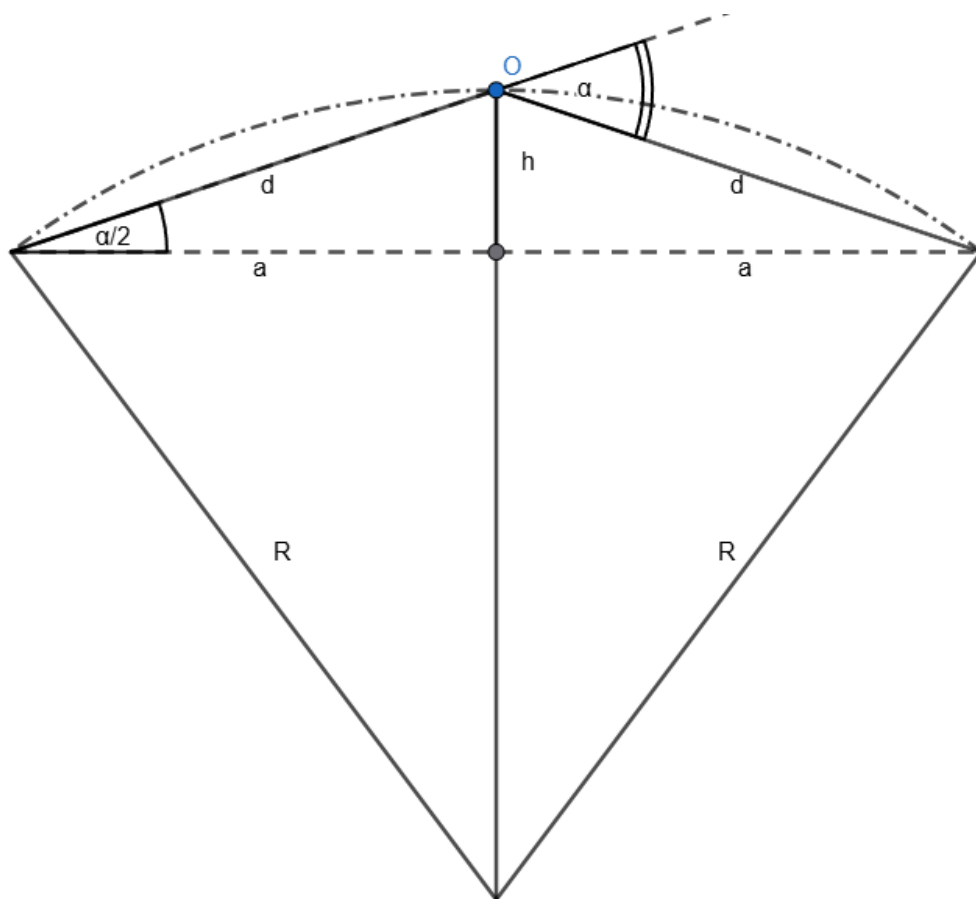


Рис. 1.1. Схема побудови відрізка траєкторії променя зсувних хвиль і кута відхилення на даному кроці її побудови.

$$\vec{t}_{new} = \vec{t} \cos \alpha + \vec{S} \sin \alpha$$

Для визначення радіусу кривизни розглянемо прямокутний трикутник з катетами a і h і з гіпотенузою d , які показані на рис.1.1. Маємо

$$a = d \cos \frac{\alpha}{2}, \quad h = d \sin \frac{\alpha}{2},$$

тоді за теоремою Піфагора та з урахуванням того, що $h = R - d$, з (3) отримуємо формулу

$$\frac{1}{R} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{d} \quad (4)$$

В той же час величина $\frac{1}{R}$ має задовольняти рівнянню (3). Для відрізка траєкторії кожній кінцевій точці відрізка відповідає найближчий вузол сітки зі своїм значенням кута α . При заданому куті α і відомих координатах вузлів напрямком нормалі \vec{S} знаходиться як одиничний вектор, перпендикулярний до вектора дотичної. Отже, перебором кінцевих точок відрізка траєкторії треба знайти вузол сітки з таким значенням кута α , для якого винайдені за допомогою рівнянь (3) і (4) значення величини $\frac{1}{R}$ будуть найкращим чином співпадати з наперед заданою точністю.

РОЗДІЛ 2.РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

2.1. Модель локалізованої неоднорідності зсувної жорсткості

На основі фізіологічних досліджень можна будувати достатньо складні фізичні моделі, що відображають властивості тканини наближено до реальних. Наприклад, відомо, що модуль зсувної жорсткості скелетних м'язів людини μ_{\parallel} , виміряний вздовж волокон, є в кілька разів більший за μ_{\perp} , виміряний поперек [51]. Строго кажучи, така поведінка вимагає анізотропної моделі з тензорним описом

жорсткості, і траєкторії зсувних хвиль мали б залежати від орієнтації волокон. Але враховуючи, що саме просторові зміни $\mu(x, y)$ формують контраст на еластограмі [53, 54], а також той факт, що, наприклад, для тих же м'язів у випадку їх патологічних змін (при інсульті, церебральному паралічі або після операцій) модуль зсувної жорсткості може збільшуватися майже у два рази [52], в першому наближенні виправданим буде використати ізотропний підхід. В такому разі можна ввести ефективний ізотропний модуль, що буде середнім між μ_{\parallel} та μ_{\perp} , для побудови модельних функцій. У цьому сенсі основний внесок у зміну траєкторій променів даються саме просторові відмінності ефективної жорсткості в різних ділянках, причому ці відмінності можуть бути співрозмірними або більшими за наявну анізотропію.

Приймемо модуль здорових тканин за μ_0 . А також припустимо, що він зростатиме до $2\mu_0$ у центрі пухлини, як це описується наступною формулою

$$\mu(x, y) = \mu_0 + \mu_0 e^{\frac{(x-3)^2 + (y-3)^2}{2\sigma_{\mu}^2}} \quad (4)$$

На Рис 2.1 продемонстровано характерний вигляд такого просторового розподілу зсувної жорсткості.

В той час, як аналітичні розв'язки рівнянь променевої апроксимації для подібних розподілів загалом не мають простого виразу і можуть бути задані лише через квадратури та на практиці давати підвищення навантаження на обчислювальну систему, запропонована та описана вище чисельна схема не має подібних недоліків.

В той час, як аналітичні розв'язки рівнянь променевої апроксимації для подібних розподілів загалом не мають простого виразу і можуть бути задані лише через квадратури та на практиці давати підвищення навантаження на обчислювальну систему, запропонована та описана вище чисельна схема

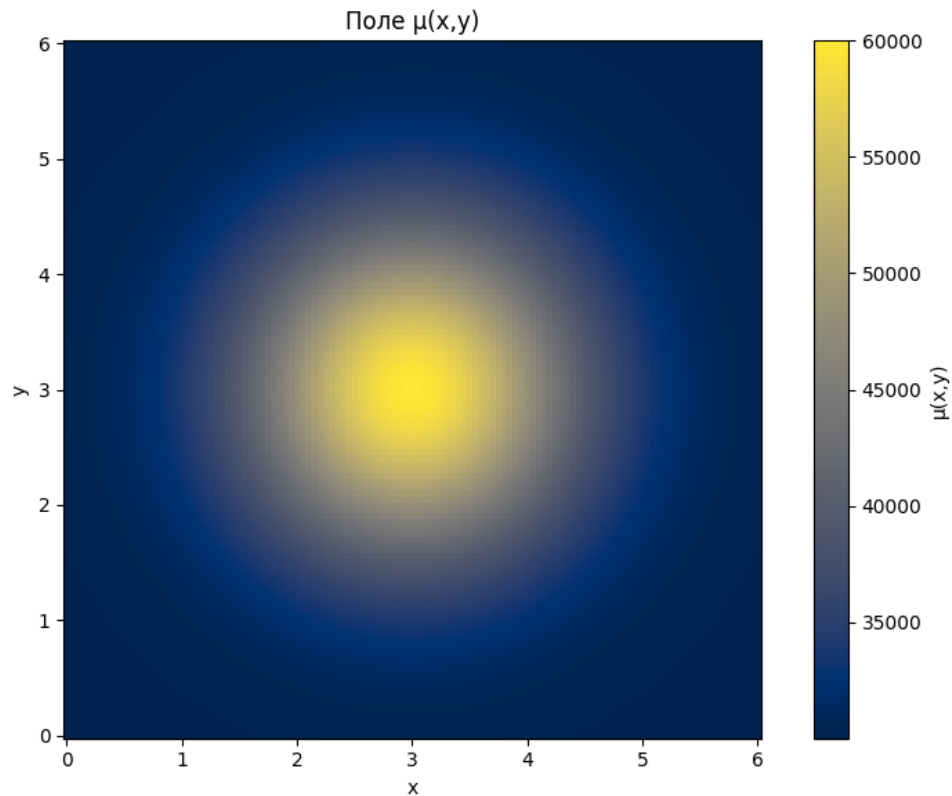


Рис. 2.1. Функція $\mu(x, y)$ з $\mu_0 = 30$ кПа, $\sigma_\mu = 1$ в межах $[0, : 6]^2$ функції, за умови Гаусівського розподілу з базовим рівнем $\mu_0 = 30000$ Па.

не має подібних недоліків.

Для постійного рівня жорсткості та для гаусівської моделі пухлини отримуємо наступні промені, вважаючи, що вони стартують від рівня $y = 0$ (Рис. 2.2). У випадку однорідного середовища з постійним μ_0 , показник заломлення є також сталим, тому отримані на Рис. 2.2 промені є просто паралельними прямими. Відсутність викривлення узгоджується з очікуваною поведінкою чисельної схеми

$$\nabla n = 0 \rightarrow \frac{d\vec{t}}{dl} = 0$$

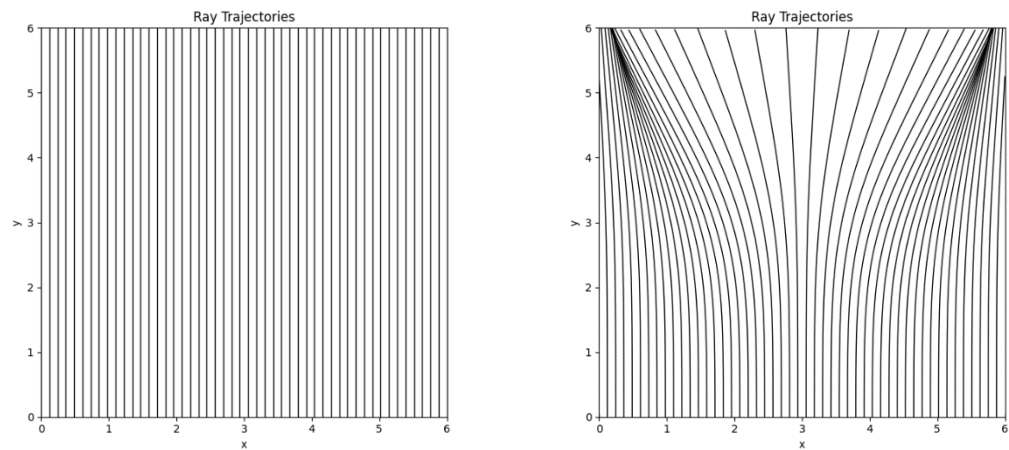


Рис. 2.2. Промені, отримані за принципом Ферма для константи $\mu_0 = 30$ кПа та для розподілу зсувної жорсткості за формулою (4)

Для модельного розподілу з пухлиною, модуль зсувної жорсткості зменшується від центру області, що досліджується, і відповідно зростає показник заломлення. На побудованих траєкторіях ми бачимо явне викривлення променів, що проходять повз центру поухлини, у напрямку збільшення показника заломлення, тобто від осередку розподілу. Така поведінка повністю узгоджується з формальним співвідношенням (3) і підтверджує коректність нашого чисельного підходу.

Якщо ж проінтегрувати на кожному кроці $d\chi$ в напрямку променів з довжиною дуги променя l [56], то можна отримати значення ейконалу:

$$\tau = \int_0^l \sqrt{\frac{\rho}{\mu(x(\chi), y(\chi))}} d\chi \quad (5)$$

Позначимо, що на практиці для пружних випадків частим є використання спеціальних чисельних методів, наприклад, метод швидкого маршу (fast marching method) (FMM) [55]. У поєднанні з fast-sweeping та робастним виділенням часу прибуття $\tau(x)$ це широко використовується для розрахунку відтворюваних карт швидкостей у печінці, щитоподібній залозі та м'язах [48,50]. Тож, в якості

додаткового підтвердження запропонованої чисельної схеми порівняємо ейконалі, отримані за інтегрування (5) по отриманим променям з ейконалами, побудованими методом швидкого маршу. Результат розрахунків наведений на Рис. 2.3 Отримані карти часу прибуття збігаються з точністю до 3% у абсолютному значенні, що додатково підтверджує правильність та ефективність розробленої схеми.

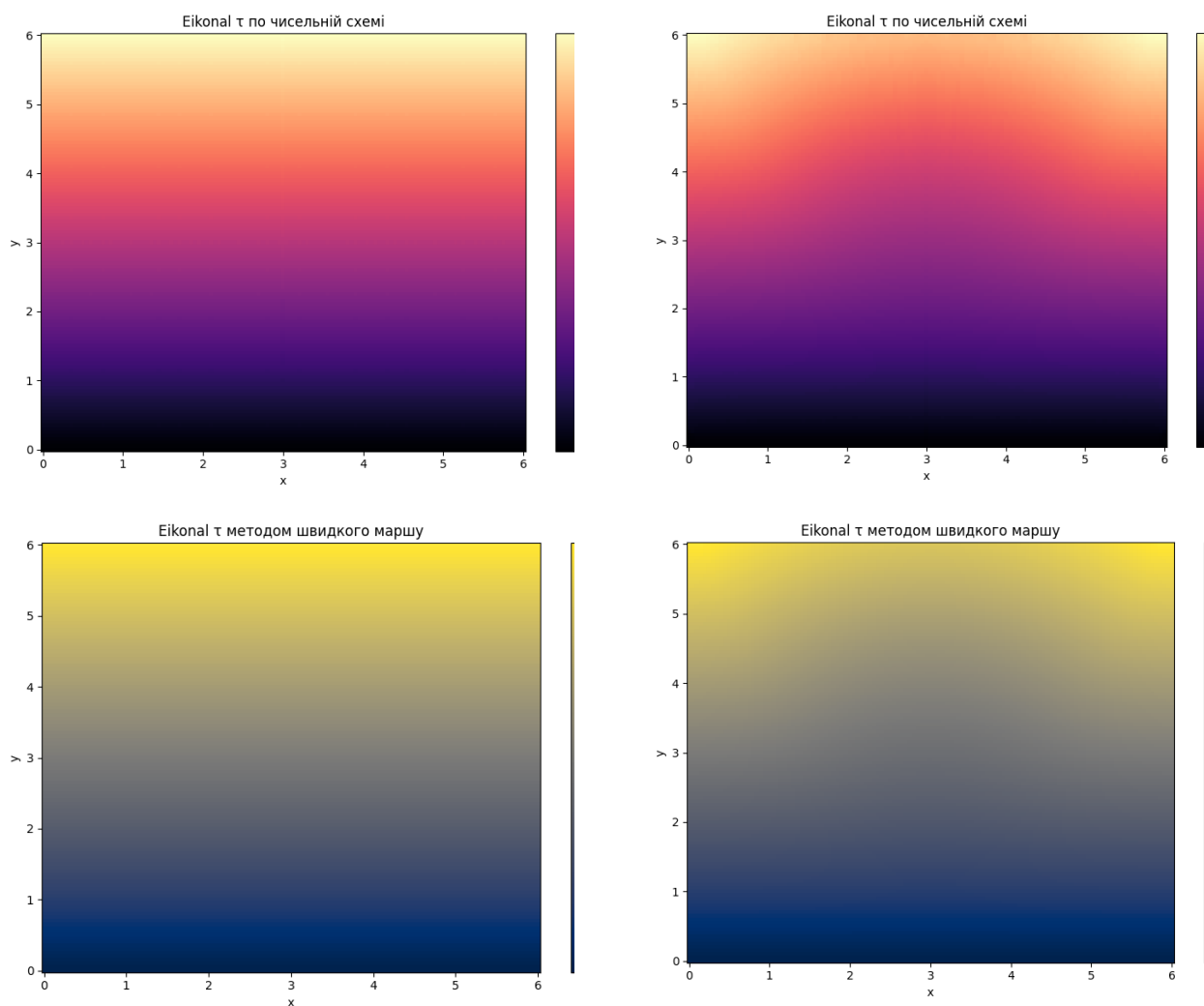


Рис. 2.3. Результати обчислення ейконалів за променями, отриманими з принципу Ферма та з методу швидкого маршу

2.2. Модель подвійної пухлини

Розповсюдженими є «подвійні» пухлини, в яких центри лежать достатньооблизько один від одного, що може бути відображено в моделі за допомогою формули

$$\mu(x, y) = \mu_0 \left(1 + K_1 e^{-\frac{(x-z)^2 + (y-z)^2}{2\sigma_1^2}} + K_2 e^{-\frac{(x-z-a)^2 + (y-z-b)^2}{2\sigma_2^2}} \right), K_1 > K_2$$

де параметри a і b характеризують відстань між пухлинами вздовж вісіх та y відповідно. За допомогою розробленої чисельної схеми будемо промені та ейконалі для такого випадку (Рис. 2.4). Можна побачити, що форма променів реагує на зміну розподілу навіть i , навіть, при незначній відстані між центрами пухлин, промені наочно відрізняються один від одного, а значення ейконалу змінюється несуттєво. Розподіли для віддалених подвійних пухлин продовжують демонструвати коректний вигин променів, який в даному випадку є асиметричним через нерівномірність градієнту коефіцієнта заломлення.

2.3. Модель некротичного кільця

Також непередбачувано може поводити себе розподіл (6) кільцевих структур (некротичне кільце), яке також має місце у клінічній практиці:

$$\mu(x, y) = \mu_0 \left(1 + F_1 e^{-\frac{(x-z)^2 + (y-z)^2}{2\sigma_1^2}} - F_2 e^{-\frac{(x-z)^2 + (y-z)^2}{2\sigma_2^2}} \right), F_1 > F_2 \quad (6)$$

Для такого розподілу розв'язок наведений на рис. 2.5. Отримані промені схожі на результати для гаусівського розподілу (4), окрім променів які йдуть через центр і поводять себе інакше, що може бути використано в .

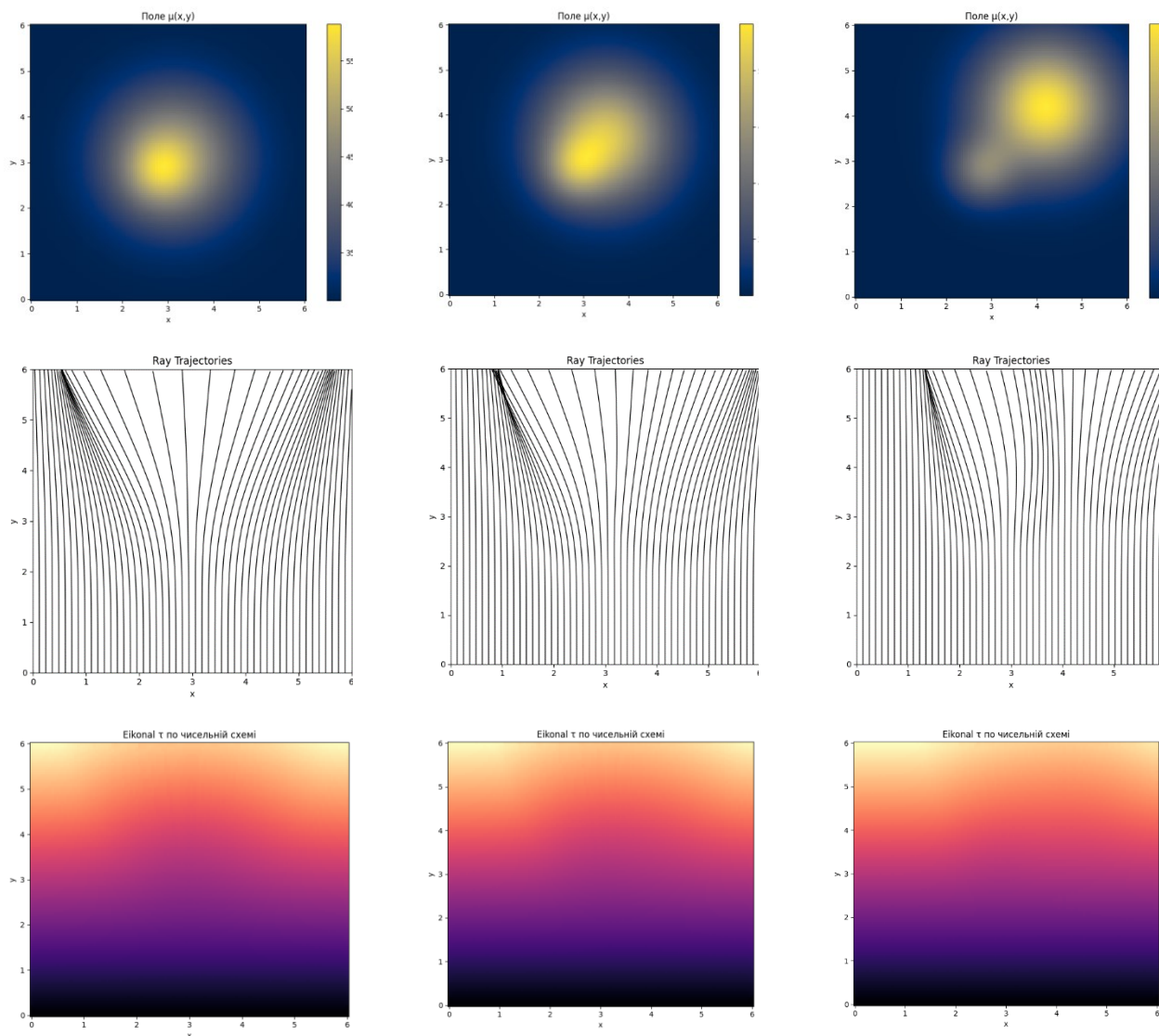


Рис. 2.4. Асиметрія променів при подвійному Гаусівському розподілі

діагностуванні.

У цих розв'язках продемонстровано, що час прибуття не дуже чутливий до зміни внутрішньої структури утворень, в той час як форма променів зазнає істотних змін. Цей факт дає додаткову інформацію та може стати об'єктом подальших досліджень.

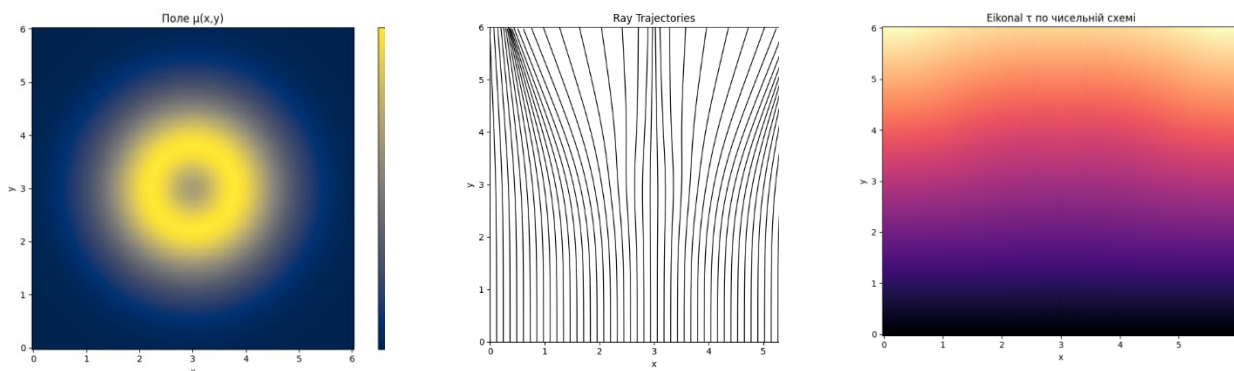


Рис. 2.5. Модель пухлини з некротичною внутрішньою частиною та відповідні промені з ейконалом

2.4. Вплив в'язкості на траєкторії променів і розподіл ейконалу

Проведемо розрахунки для обчислення нульової поправки, як вплив в'язкості на траєкторії променів і просторовий розподіл ейконалу. Для цього достатньо швидкість зсувних хвиль $\sqrt{\frac{M_r}{\rho}}$ замінити на $\sqrt{\frac{M_r^2 + M_i^2}{\rho M_r}}$. Це дає змогу обчислити час проходження тканини хвилею в залежності від частоти та в'язкості середовища. Для коефіцієнту заломлення n цеозначатиме, що йогоможназаписатичерез значення в'язкості M_{i0} та зсувної жорсткості M_{r0} у вигляді

$$n(x, y) = \Re e \left(\frac{M_0}{M} \right) = \Re e \left(\frac{M_{r0} + iM_{i0}}{M_r + iM_i} \right) \quad (18)$$

Таким чином було враховано реальне значення рефракції, яке впливає на викривлення променів.

На разі досліджено використання різних моделей в'язкопружності для потреб еластографії [57]. Але у цій роботі ми зупинимось на найпростішій моделі Кельвіна-Фойгта:

$$M = M_r + iM_i = \mu + i\omega\eta \quad (19)$$

де μ – зсувна жорсткість, η – в'язкість, а ω – частота. Ця достатньо проста модель має кілька недоліків, а саме неможливість використання в складних випадках [59] та нестійкість щодо зміни параметрів. Натомість вона є простою та добре показала себе в лабораторних умовах [58].

У випадку $\eta_0 = 0$, ми отримуємо розподіл, ідентичний пружному випадку, тобто еластичний випадок є граничним для такого розгляду, що логічно. Зі збільшенням коефіцієнта в'язкості ми будемо бачити зміну траєкторії променів та часу проходження. З цих змін можна зробити висновок, що в'язкість (це чітко видно за великих частот) буде поводити себе ідентично до додаткової пружності (жорсткості) середовища (Рис. 10 на прикладі гаусівського розподілу за використання численого методу на базі принципу Ферма для гаусівського розподілу жорсткості та в'язкості). Щоб більшою буде в'язкість, то меншим буде час проходження хвиль. Це можна продемонструвати за допомогою виразу для швидкості зсувних хвиль

$$V = \sqrt{\frac{M_r^2 + M_i^2}{\rho M_r}},$$

розклавши його в ряд Тейлора по малим η_0 :

$$V \approx \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\omega^2}{\mu^2} \eta_0^2 \right) \quad (20)$$

Якщо взяти реалістичні параметри в'язкості (а саме від 0.05 до 2 Па·с) то вплив її на швидкість через доданок у дужках становить 5-10%. Тоді (вважаючи $\mu = \mu_0$ константою) ми можемо продемонструвати різницю в часі при проходженні упродовж вісі у:

$$\Delta T_r = \frac{y_{max}}{V(\eta_0 = 10)} - \frac{y_{max}}{V(\eta_0 = 0)} \approx -0,0675 \text{ c}$$

Це добре узгоджується з отриманими чисельними результатами (Рис. 2.6, остання колонка) і демонструє спроможність запропонованого чисельного методу моделювати випадки розповсюдження у в'язкопружній середовищі.

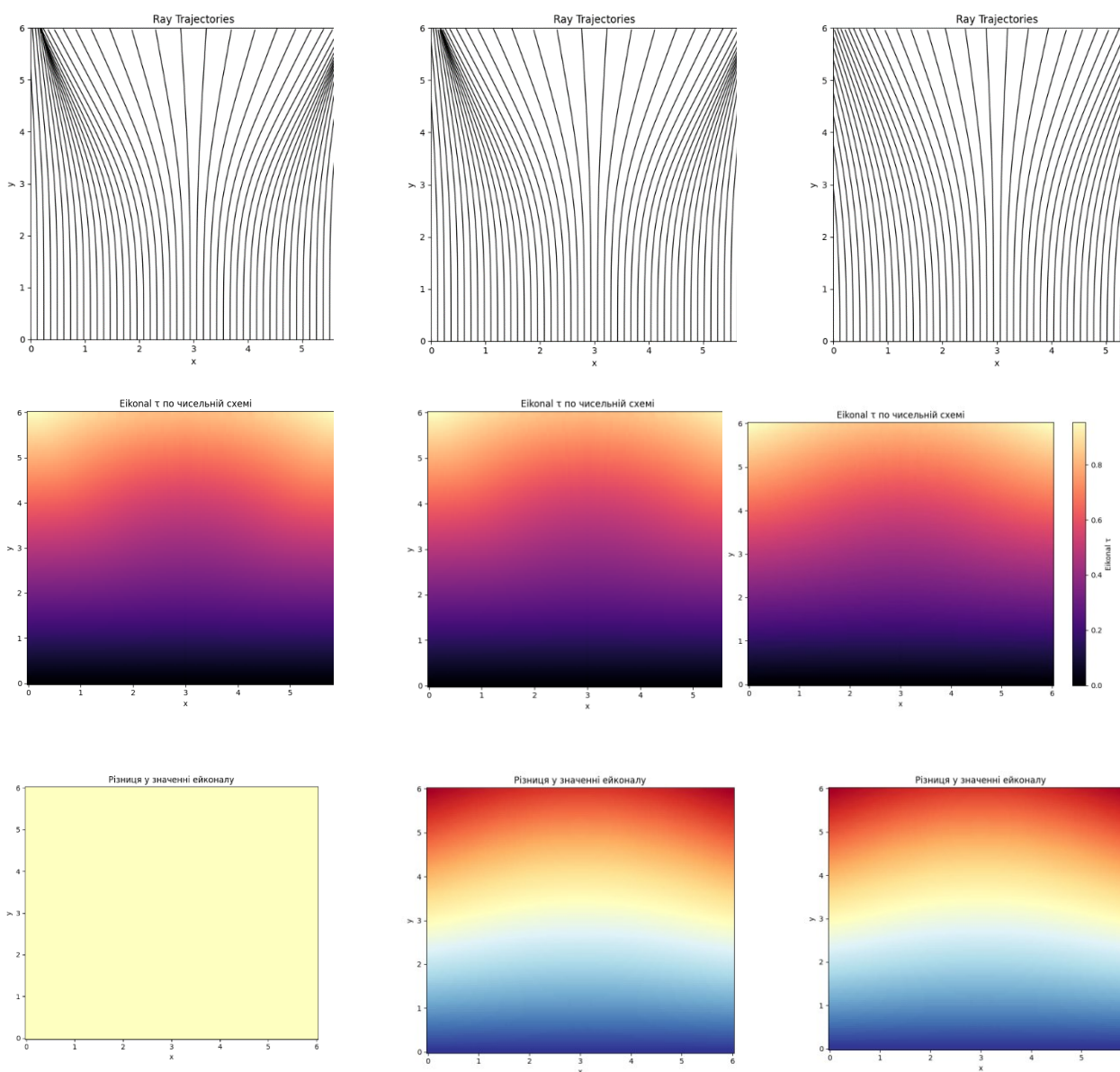


Рис. 2.6. Промені, ейконале при різних в'язкостях та порівняння з нульовою в'язкістю

Також не менш цікавою є зміна в траєкторіях розповсюдження хвилі за наявності в'язкості. Наявність додаткового градієнту впливає на ці траєкторії, «викривляючи» їх. При побудові еластограми тканини на цевартозвернути увагу, адже це може бути неправильно інтерпретовано.

Такі підходи матимуть низку недоліків. До них можна віднести складність вводу нових уточнюючих параметрів до системи та неможливість побудови уявної частини ейконалу. Також за випадку великих в'язкостей та градієнтів в'язкості модель даватиме помилку.

Натомість підходи надають можливість врахувати малі в'язкості (в ролі зон підвищеної пружності), що призводитиме до підсилення ефекту відхилення променів в середині та навколо модельної пухлини.

2.5. Техніка безпеки

При виконанні комп'ютерних розрахунків в даній дипломній роботі виконувались усі правила техніки безпеки щодо особливостей роботи на електроустаткуванні. А саме, перед включенням:

- переконатися у відсутності напруги в схемі;
- ознайомитися зі схемою установки, її особливостями;
- перевірити наявність і надійність кріплення захисного заземлення корпусів всіх приладів, що входять до комплексу лабораторної установки (схеми);
- ретельно перевірити схему з'єднання, справність ізоляції з'єднувальних проводів, розеток, штепсельних роз'ємів в кабелі живлення кожного приладу (візуально):

У процесі роботи забороняється:

- працювати на незаземленому (незануреному) і несправному електрообладнанні;
- експлуатувати електроприлади зі знятими захисними кришками;
- здійснювати перемикання в схемах, що знаходяться під напругою;

- торкатися до неізолюваних струмоведучих частин і до неструмоведучих металевих частин електрообладнання та електроапаратури;

- використовувати в якості запобіжників некалібровані саморобні вставки «жучки»;

ВИСНОВКИ

З проведеного огляду наукової літератури витікає, що різноманітні існуючі методи еластографічного дослідження, зокрема методу зсувнохвильової еластографії, знаходять широке застосування у сучасній клінічній діагностиці. Тому поліпшення цих методів і, зокрема, способів обробки первинної інформації для покращення роздільної здатності апаратури залишається важливою і актуальною задачею. З виконаної роботи можна зробити такі висновки:

1. На основі аналізу наукової літератури щодо технологій, які засновані на різних методах зсувнохвильової еластографії, було запропоновано загальну фізико-математичну модель, придатну для комп'ютерного моделювання розповсюдження зсувних хвиль та відновлення в'язкопружних параметрів тканин.

2. Запропоновано просту модель просторового розподілу жорсткого включення, яке імітує злоякісну пухлину і може бути застосоване, як показано в даній роботі, у комп'ютерних моделях та симуляціях у випадках, коли просторові зміни модуля зсувної жорсткості малі на довжині хвилі.

3. На основі розробленої фізико-математичної моделі шляхом комп'ютерного моделювання досліджено і проаналізовано траєкторії променів зсувних хвиль в однорідному за модулем зсувної жорсткості середовищі і в середовищі з жорстким включенням, що імітує злоякісну пухлину. Зроблено висновок, що аналіз траєкторій хвиль дає достатньо інформації для побудови в подальших дослідженнях просторового розподілу жорсткості в біологічному середовищі.

4. Показано, що на основі винайдених траєкторій променів зсувних хвиль можливо побудувати просторовий розподіл ейконалу в однорідному середовищі і в середовищі з жорстким включенням, які також дають додаткову інформацію щодо просторового зсувної жорсткості в біологічному середовищі.

5. На основі проведеного дослідження роздільної здатності в межах розробленого фізико-математичного алгоритму для моделі з двома жорсткими включеннями зроблено висновок, що на основі аналізу побудованих відповідних

траєкторій променів зсувних хвиль та просторового розподіл ейконалу можливо отримувати додаткову інформацію для підвищення роздільної здатності в методі зсувнохвильової еластографії.

6. В межах моделі Кельвіна-Фойгта для залежності швидкості хвиль і коефіцієнт заломлення від зсувної в'язкості досліджено вплив в'язкості на траєкторії зсувних хвиль і просторовий розподіл ейконалу. Зроблено висновок, що при великих значеннях зсувної в'язкості траєкторії хвиль і просторовий розподіл ейконалу суттєвих змін не зазнають. В той же час виявлена експериментально анізотропія згасання амплітуди в м'язах людини може пояснитися впливом зсувної в'язкості.

7. На основі фізичного аналізу отриманих результатів зроблено висновок про доцільність використання розглянутої фізичної моделі та алгоритму у загальному методі зсувнохвильової еластографії з метою підвищення його роздільної здатності та поліпшення картування просторового розподілу зсувної жорсткості у біологічних середовищах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Klauser AS, Miyamoto H, Bellmann-Weiler R, Feuchtner GM, Wick MC, Jaschke WR. Sonoelastography: musculoskeletal applications. *Radiology* 2014;272(3):622–633.
2. Choong, C.-C., Venkatesh, S. K., & Siew, E. P. Y. (2012). Accuracy of routine clinical ultrasound for staging of liver fibrosis. *Journal of Clinical Imaging Science*, 2, 58.
3. Drakonaki, E. E., Sudoł-Szopińska, I., Sinopidis, C., & Givissis, P. (2019). High resolution ultrasound for imaging complications of muscle injury: Is there an additional role for elastography? *Journal of Ultrasonography*, 19(77), 137–144.
4. Ormachea J, Parker KJ. Elastography imaging: the 30 year perspective. *Phys Med Biol*. 2020 Dec 21;65(24). doi: 10.1088/1361-6560/abca00. PMID: 33181486
5. Gennisson JL, Deffieux T, Fink M, Tanter M. Ultrasound elastography: principles and techniques. *Diagn Interv Imaging*. 2013 May;94(5):487-95. doi: 10.1016/j.diii.2013.01.022. Epub 2013 Apr 22. PMID: 23619292.
6. Bala, A. (2023). Role of compression sonoelastography in aiding the evaluation of solid liver lesions. *Journal Name*, volume(issue), pages.
7. Menezes, R., et al. (2016). Correlation of strain elastography with conventional ultrasound in evaluating breast lesions. *Journal Name*, volume(issue), pages.
8. Cè, M., D'Amico, N. C., Danesini, G. M., Foschini, C., Oliva, G., Martinenghi, C., & Cellina, M. (2023). Ultrasound Elastography: Basic Principles and Examples of Clinical Applications with Artificial Intelligence—A Review. *BioMed Informatics*, 3(1), 17-43. <https://doi.org/10.3390/biomedinformatics3010002>
9. Sarvazyan, A. P., et al. (1998). Shear wave elasticity imaging: A new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 24(9), 1419–1435.

10. Ozturk A, Grajo JR, Dhyani M, Anthony BW, Samir AE. Principles of ultrasound elastography. *Abdom Radiol (NY)*. 2018 Apr;43(4):773-785. doi: 10.1007/s00261-018-1475-6. PMID: 29487968; PMCID: PMC5973820.
11. Athanasiou A, Tardivon A, Tanter M, Sigal-Zafrani B, Bercoff J, Deffieux T, Gennisson JL, Fink M, Neuschwander S. Breast lesions: quantitative elastography with supersonicshear imaging--preliminary results. *Radiology*. 2010 Jul;256(1):297-303. doi: 10.1148/radiol.10090385. Epub 2010 May 26. PMID: 20505064.
12. Evans A, Whelehan P, Thomson K, McLean D, Brauer K, Purdie C, Jordan L, Baker L, Thompson A. Quantitative shear wave ultrasound elastography: initial experience in solid breast masses. *Breast Cancer Res*. 2010;12(6):R104. doi: 10.1186/bcr2787. Epub 2010 Dec 1. PMID: 21122101; PMCID: PMC3046449.
13. Chang, J. M., Moon, W. K., Cho, N., et al. (2012). *AJR American Journal of Roentgenology*, 198(3), W244–W251.
14. Veyrieres, J.-B., Albarel, F., Vaillant-Lombard, J., et al. (2012). *European Journal of Radiology*, 81(12), 3965–3972.
15. Liu, B.-X., Xie, X.-Y., Liang, J.-Y., et al. (2017). *Oncotarget*, 8(25).
16. Gao, Z., Chen, X., Xu, Y., et al. (2022). *Frontiers in Oncology*, 12, 908085.
17. Woo S, Kim SY, Cho JY, Kim SH. Shear wave elastography for detection of prostate cancer: a preliminary study. *Korean J Radiol*. 2014 May-Jun;15(3):346-55. doi: 10.3348/kjr.2014.15.3.346. Epub 2014 Apr 29. Erratum in: *Korean J Radiol*. 2015 Nov-Dec;16(6):1373. doi: 10.3348/kjr.2015.16.6.1373. PMID: 24843239; PMCID: PMC4023053.
18. Iino, Y., Maruyama, H., Mikata, R., Yasui, S., Koroki, K., Nagashima, H., Awatsu, M., Shingyoji, A., Kusakabe, Y., Kobayashi, K., Kiyono, S., Nakamura, M., Ohyama, H., Sugiyama, H., Sakai, Y., Chiba, T., Kato, J., Tsuyuguchi, T., & Kato, N. (2021). Percutaneous Two-Dimensional Shear Wave Elastography for Diagnosis of Pancreatic Tumor. *Diagnostics*, 11(3), 498. <https://doi.org/10.3390/diagnostics11030498>

19. Samir, A.E., Allegretti, A.S., Zhu, Q. et al. Shearwaveelastographyinchronickidneydisease: a pilotexperienceinnativekidneys. *BMC Nephrol* 16, 119 (2015). <https://doi.org/10.1186/s12882-015-0120-7>
20. Gerber L, Fitting D, Srikantharajah K, Weiler N, Kyriakidou G, Bojunga J, Schulze F, Bon D, Zeuzem S, Friedrich-Rust M. Evaluationof 2D-ShearWaveElastographyforCharacterisationofFocalLiverLesions. *J GastrointestinLiverDis.* 2017 Sep;26(3):283-290. doi: 10.15403/jgld.2014.1121.263.dsh. PMID: 28922441.
21. Indre MG, Leucuta DC, Lupsor-Platon M, Turco L, Ferri S, Hashim A, Orasan OH, Procopet B, Stefanescu H, Morelli MC, Piscaglia F, Ravaioli F. Diagnosticaccuracyof 2D-SWE ultrasoundforliverfibrosisassessmentin MASLD: A multilevelrandomeffectsmeta-analysis. *Hepatology.* 2025 Aug 1;82(2):454-469. doi: 10.1097/HEP.0000000000001190. Epub 2024 Dec 16. PMID: 39689354; PMCID: PMC12266795.
22. Goddi A, Bonardi M, Alessi S. Breastelastography: A literaturereview. *J Ultrasound.* 2012 Sep;15(3):192-8. doi: 10.1016/j.jus.2012.06.009. Epub 2012 Jun 30. PMID: 23449849; PMCID: PMC3558110.
23. Cui, Xin-Wu,; Li, Kang-Ning,; Yi, Ai-Jiao; Wang, Bin; Wei, Qi1; Wu, Ge-Ge1; Dietrich, Christoph F.3. Ultrasoundelastography. *EndoscopicUltrasound* 11(4):p 252-274, Jul–Aug 2022. | DOI: 10.4103/EUS-D-21-00151
24. Ophir J, Céspedes I, Ponnekanti H, Yazdi Y, Li X. Elastography: a quantitativemethodforimagingtheelasticityofbiologicaltissues. *Ultrasonic imaging.*1991; 13: 111-34
25. Taljanovic MS, Gimber LH, Becker GW, Latt LD, Klauser AS, Melville DM, Gao L, Witte RS. Shear-WaveElastography: BasicPhysicsandMusculoskeletalApplications. *Radiographics.* 2017 May-Jun;37(3):855-870. doi: 10.1148/rg.2017160116. PMID: 28493799; PMCID: PMC5452887.
26. Ličen U, Kozinc Ž. UsingShear-WaveElastographytoAssessExercise-InducedMuscleDamage: A Review. *Sensors (Basel).* 2022 Oct 6;22(19):7574. doi: 10.3390/s22197574. PMID: 36236672; PMCID: PMC9571996.

27. Gao, Q., et al. (2022). Diagnostic performance of C-TIRADS combined with SWE for thyroid nodules. *Frontiers in Endocrinology*, 13, 939303.
28. Petersen, M., Schenke, S. A., Firla, J., Croner, R. S., & Kreissl, M. C. (2022). SWE and TIRADS for risk stratification of thyroid nodules—Prospective study. *Diagnostics*, 12(1), 109.
29. Polat Z, Elmalı M, Tanrıvermiş Sayit A, Kalkan C, Danacı M, Kefeli M. Comparative evaluation of shear wave elastography elasticity values in thyroid nodules with cytology results and TI-RADS scoring in differentiation of benign-malignant nodules. *Eur Arch Otorhinolaryngol*. 2024 May;281(5):2609-2617. doi: 10.1007/s00405-024-08516-0. Epub 2024 Mar 10. Erratum in: *Eur Arch Otorhinolaryngol*. 2024 May;281(5):2775. doi: 10.1007/s00405-024-08637-6. PMID: 38461420; PMCID: PMC11023991.
30. Correas, J.-M., et al. (2015). Quantitative shear-wave elastography of the prostate: Diagnostic performance. *Radiology*, 275(3), 576–588.
31. Shintani S, Inatomi O, Okamoto T, Hiroe K, Eguchi T, Tomozawa Y, Inoue A, Kimura H, Nishida A, Tsuji Y, Watanabe Y, Andoh A. Diagnostic accuracy of endoscopic ultrasonographic shear wave elastography for assessing early chronic pancreatitis using the Japanese diagnostic criteria 2019. *DEN Open*. 2024 Jun 11;5(1):e387. doi: 10.1002/deo2.387. PMID: 38868706; PMCID: PMC11167156.
32. Zhang, L., et al. (2022). Differential diagnosis value of SWE for superficial enlarged lymph nodes. *Frontiers in Oncology*, 12, 908085.
33. Yoo, J., Lee, J. M., Joo, I., & Yoon, J. H. (2021). Two-dimensional SWE for liver fibrosis. *Clinical and Molecular Hepatology*, 27(2), 149–167.
34. Pongpunprut, S., et al. (2022). Comparison of SWE between normal myometrium, adenomyosis and uterine fibroid. *International Journal of Fertility & Sterility*, 16(1), 49–55.
35. Bian, J., et al. (2023). Diagnostic accuracy of SWE for endometrial cancer: A meta-analysis. *Medicine (Baltimore)*, 102(4), e32747.

36. Combination of shear-wave elastography with ultrasonography for detection of breast cancer and reduction of unnecessary biopsies: A systematic review and meta-analysis. *Ultrasonography*, 40(3), 318–332.
37. Chang, J. M., Moon, W. K., Cho, N., Yi, A., Koo, H. R., Han, W., et al. (2013). Added value of shear-wave ultrasound elastography for the differential diagnosis of breast lesions: Comparison with grayscale sonography alone or with grayscale sonography and color Doppler US. *Investigative Radiology*, 48(3), 217–228.
38. Au, F. W.-F., Ghai, S., Moshonov, H., Kahn, H., Brennan, C., Dua, H., & Crystal, P. (2014). Diagnostic performance of quantitative shear wave elastography in the evaluation of solid breast masses. *AJR American Journal of Roentgenology*, 203(3), W328–W336.
39. Lee, E. J., Jung, H. K., Ko, K. H., Lee, J. T., & Yoon, J. H. (2020). Added value of quantitative SWE and SMI to B-mode US in differentiating breast masses. *Korean Journal of Radiology*, 21(12), 1441–1452.
40. Sigrist RMS, Liao J, Kaffas AE, Chammas MC, Willmann JK. Ultrasound Elastography: Review of Techniques and Clinical Applications. *Theranostics*. 2017 Mar 7;7(5):1303-1329. doi: 10.7150/thno.18650. PMID: 28435467; PMCID: PMC5399595
41. K. Nightingale, M. Palmeri, R. Nightingale, and G. Trahey, “On the feasibility of remote palpation using acoustic radiation force,” *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 110, no. 1, pp. 625–634, 2001.
42. Pinton GF, Dahl JJ, Trahey GE. Rapid tracking of small displacements with ultrasound. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control*. 2006 Jun;53(6):1103-17. doi: 10.1109/tuffc.2006.1642509. PMID: 16846143.
43. Fai Yeung, Stephen F Levinson, Kevin J Parker, Multilevel and Motion Model-Based Ultrasonic Speckle Tracking Algorithms, *Ultrasound in Medicine & Biology*, Volume 24, Issue 3, 1998, Pages 427-441, ISSN 0301-5629, [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(97\)00281-0](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(97)00281-0).

44. Bercoff, Jeremy&Fink, Mathias. (2004). SupersonicShearImaging: a newtechniqueforsofttissueelasticitymapping. IEEE transactionsonultrasonics, ferroelectrics, andfrequencycontrol. 51. 396-409. 10.1109/TUFFFC.2004.1295425.
45. Deng Y, Rouze NC, Palmeri ML, Nightingale KR. UltrasonicShearWaveElasticityImagingSequencingandDataProcessingUsing a VerasonicsResearchScanner. IEEE TransUltrasonFerroelectrFreqControl. 2017 Jan;64(1):164-176. doi: 10.1109/TUFFFC.2016.2614944. PMID: 28092508; PMCID: PMC5266610.
46. Chen S, Urban MW, Pislaru C, Kinnick R, Zheng Y, Yao A, Greenleaf JF. Shearwavedispersionultrasoundvibrometry (SDUV) formeasuringtissueelasticityandviscosity. IEEE TransUltrasonFerroelectrFreqControl. 2009 Jan;56(1):55-62. doi: 10.1109/TUFFFC.2009.1005. PMID: 19213632; PMCID: PMC2658640.
47. Urban MW, Chen S, Fatemi M. A ReviewofShearwaveDispersionUltrasoundVibrometry (SDUV) anditsApplications. CurrMedImagingRev. 2012 Feb 1;8(1):27-36. doi: 10.2174/157340512799220625. PMID: 22866026; PMCID: PMC3410660.
48. Klein J, McLaughlin J, Renzi D. Improvingarrivaltimeidentificationintransientelastography. PhysMedBiol. 2012 Apr 21;57(8):2151-68. doi: 10.1088/0031-9155/57/8/2151. Epub 2012 Mar 28. PMID: 22452966.
49. Lin K, McLaughlin J, Renzi D, Thomas A. Shearwavespeedrecoveryinsonoelastographyusingcrawlingwavedata. J AcoustSocAm. 2010 Jul;128(1):88-97. doi: 10.1121/1.3442575. PMID: 20649204; PMCID: PMC2921425.
50. Lee HK, Kong D, Choi K, Mislati R, Doyley MM. A RobustandFastMethodfor 2-D ShearWaveSpeedCalculation. IEEE TransUltrasonFerroelectrFreqControl. 2021 Jul;68(7):2351-2360. doi: 10.1109/TUFFFC.2021.3061916. Epub 2021 Jun 29. PMID: 33625981.

51. Courtney Trutna Paley, Anna E. Knight, Felix Q. Jin, Spencer R. Moavenzadeh, Ned C. Rouze, Laura S. Pietrosimone, Lisa D. Hobson-Webb, Mark L. Palmeri, Kathryn R. Nightingale, Rotational 3D shearwave elasticity imaging: Effect of knee flexion on 3D shearwave propagation in *in vivo* vastus lateralis, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Volume 150, 2024, 106302, ISSN 1751-6161, <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2023.106302>.
52. Liu, J., et al. (2020). The Value of Real-Time Shear Wave Elastography before and after Rehabilitation of Upper Limb Spasms in Stroke Patients.
53. Z. Yin, G. -Y. Li, Z. Zhang, Y. Zheng and Y. Cao, "SWENet: A Physics-Informed Deep Neural Network (PINN) for Shear Wave Elastography," in *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 43, no. 4, pp. 1434-1448, April 2024, doi: 10.1109/TMI.2023.3338178.
54. Dooley MM, Parker KJ. Elastography: general principles and clinical applications. *Ultrasound Clin.* 2014 Jan;9(1):1-11. doi: 10.1016/j.cult.2013.09.006. PMID: 24459461; PMCID: PMC3896304.
55. A. Sethian, A fast marching level set method for monotonically advancing fronts., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 93 (4) 1591-1595, <https://doi.org/10.1073/pnas.93.4.1591> (1996).
56. Zhu, Tianfei & Chun, Kin-Yip. (1994). Complex Rays in Elastic and Anelastic Media. *Geophysical Journal International*. 119. 269-276.
57. Osika, Mariusz & Kijanka, Piotr. (2024). Ultrasound Shear Wave Propagation Modeling in General Tissue—Like Viscoelastic Materials. *Ultrasound in Medicine & Biology*. 10.1016/j.ultrasmedbio.2024.01.008.
58. Zhou B, Zhang X. Comparison of five viscoelastic models for estimating viscoelastic parameters using ultrasound shear wave elastography. *J Mech Behav Biomed Mater.* 2018 Sep;85:109-116. doi: 10.1016/j.jmbbm.2018.05.041. Epub 2018 May 30. PMID: 29879581; PMCID: PMC6035078.

59. Rouze NC, Deng Y, Trutna CA, Palmeri ML, Nightingale KR. Characterization of Viscoelastic Materials Using Group Shear Wave Speeds. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control*. 2018 May;65(5):780-794. doi: 10.1109/TUFFC.2018.2815505. PMID: 29733281; PMCID: PMC5972540.

60. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. — 4th edition, stereotype. — M.: Fizmatlit, 2005. — 656 p. — (“Theoretical Physics,” Volume VIII) https://radfiz.org.ua/files/k2/s3/TeopMex/Landau,Lifshic/Landay_VIII.pdf