К ТЕОРИИ ПАРНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ

Ю. В. Гандель

1°. Многие смешанные краевые задачи математической физики сводятся к нахождению последовательности неизвестных коэффициентов, если задана сумма ряда с этими коэффициентами по одной полной ортогональной системе функций на части основного интервала, а разложение с теми же коэффициентами, но по другой системе функций задано на остальной части интервала. Мы будем говорить в этом случае, что задача сводится к парным рядам.

При решении смешанных аксиально-симметричных краевых задач для уравнения Гельмгольца в полуцилиндре встречаются такие уравнения, содержащие ряды по функциям Бесселя с нулевым индексом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}} J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = f(r), \ 0 < r < a, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = f_1(r), \ a < r < R, \tag{2}$$

где k — заданное неотрицательное число, $f(r)$ и $f_1(r)$ — заданные функции, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

1) положительные нули функции $J_0(\lambda)$ или

2) неотрицательные нули $J_1(\lambda)$ в зависимости от того, какие краевые условия, Дирихле или Неймана, заданы на боковой поверхности полуцилиндра.

В первом случае, который и рассматривается в настоящей работе, мы будем говорить о парных рядах Фурье — Бесселя, во втором — о парных рядах Дини.

Случай парных рядов Дини был рассмотрен в работе [1].

Как и там, целью наших исследований является сведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Именно, будет показано, что все неизвестные коэффициенты A_n выражаются по простой формуле через решение указанного уравнения, которое выписывается явно.

Такой подход к рассматриваемым задачам применяется довольно часто.

С одной стороны, наши уравнения (1)—(2) являются дискретным аналогом парных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \frac{\lambda C(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(\lambda r)\, d\lambda = f(r), \quad 0 < r < a, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \lambda C(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = f_1(r), \quad a < r < \infty, \tag{4}$$

сведение которых к уравнению Фредгольма было сделано в работе [2].

В дальнейшем покажем, что имеющиеся там результаты для парных интегральных уравнений (3)—(4) получаются из наших предельным переходом при $R \to \infty$. С другой стороны, парные ряды

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{A_n}{\lambda_n} R J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = f(r), \quad 0 < r < a, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^\infty A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = f_1(r), \quad a < r < R, \tag{6}$$

являющиеся частным случаем (1)—(2) при $k = 0$ (они встречаются при решении соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа), рассматривались в работе [3], и полученное там для парных рядов (5)—(6) интегральное уравнение является другим предельным случаем наших результатов (при $k = 0$).

Прежде чем приступать к изучению уравнений (1)—(2), покажем, что без ограничения общности можно считать $f_1(r) = 0$.

Действительно, введем в рассмотрение измеримую функцию $G(r)$, $0 < r < R$ такую, что $G(r) = f_1(r)$ при $a < r < R$, и потребуем, чтобы

$$\int_0^R t\,|G(t)|^2\, dt < \infty.$$

Вычислим коэффициенты Фурье—Бесселя функции $G(r)$

$$G_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n)} \int_0^R t G(t) J_0\left(\lambda_n \frac{t}{R}\right) dt.$$

Если теперь обозначить $B_n = A_n - G_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то для определения коэффициентов B_n мы получаем такие парные ряды

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{B_n}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}} J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = F(r), \quad 0 < r < a,$$

$$\sum_{n=1}^\infty B_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = 0, \quad a < r < R,$$

где известная функция определяется по формуле

$$F(r) = f(r) - \sum_{n=1}^\infty \frac{G_n}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}} J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right).$$

Сначала будем рассматривать эти уравнения при $R = 1$, а затем с помощью очевидных замен вернемся к общему случаю.

2°. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — все положительные нули функции (λ) и пусть k $(k \geqslant 0)$ не равно ни одному из них.

Изучаются уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} J_0(\lambda_n r) = f(r), \ 0 < r < c, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = 0, \ c < r < 1, \tag{8}$$

где $f(r)$ — заданная непрерывная функция, c $(0 < c < 1)$ — заданное число, ветвь корня $\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 - k^2}$ выбирается так, чтобы при $\lambda_n > k$ было $\gamma_n > 0$, при $0 < \lambda_n < k \operatorname{Im} \lambda_n < 0$.

Коэффициенты A_n, $n = 1, 2, \ldots$ подлежат определению, причем мы будем их искать в классе последовательностей, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{n} < \infty, \tag{9}$$

сходимость соответствующих рядов будем понимать как $l.\ i.\ m.$

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — решение системы (7)—(8). При условии (9) существует измеримая функция $h(r)$, $0 < r < 1$, такая, что

$$h(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)$$

$$\int_0^1 r\,|h(r)|^2\,dr < \infty.$$

В силу уравнения (8) $h(r) = 0$ при $c < r < 1$, поэтому

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^c r h(r) J_0(\lambda_n r)\,dr, \ n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Подставляя сюда выражение

$$J_0(\lambda_n r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \cos\left(s\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) \frac{\cos k\sqrt{r^2 - s^2}}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,ds, \tag{11}$$

вытекающее из второго определенного интеграла Сонина [4], изменяя порядок интегрирования и полагая

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^c r h(r) \frac{\cos k\sqrt{r^2 - s^2}}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,dr \equiv g(r),$$

получаем окончательно такое представление для коэффициентов A_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^c g(s) \cos\left(s\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}\right) ds. \tag{12}$$

А для функции $g(s) \in L^2(0, c)$ мы сначала построим интегральное уравнение первого рода, используя уравнение (7). Прежде чем подставлять туда полученные выражения для коэффициентов A_n, преобразуем (7).

В силу условия (9) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}} \sqrt{r}\, J_0(\lambda_n r), \quad 0 < r < c$$

сходится равномерно, так как имеет сходящуюся числовую мажоранту

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|}{n} \frac{C}{\sqrt{n}} \leqslant C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, умножая (7) на

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad 0 < t < c,$$

интегрируя почленно по r от 0 до t и учитывая, что [4]

$$\int_0^t r J_0(\lambda_n r) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr = \frac{\sin \left(t \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} \right)}{\sqrt{\lambda_n^2 - k^2}},$$

будем иметь

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2 - k^2} \sin \left(t \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr. \qquad (13)$$

Подставляя в (13) выражение (12) для A_n и изменяя порядок суммирования и интегрирования, получаем интегральное уравнение первого рода для функции $g(r)$:

$$\int_0^c \Phi(t, s)\, g(s)\, ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr \qquad (14)$$

с ядром

$$\Phi(t, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \frac{\sin \left(t \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} \right) \cos \left(s \sqrt{\lambda_n^2 - k^2} \right)}{\lambda_n^2 - k^2}, \qquad (15)$$

$$0 < t < c, \quad 0 < s < c.$$

А для оправдания возможности перемены порядка суммирования и интегрирования достаточно заметить, что ряд, определенный формулой (15), ограниченно сходится.

В следующем пункте исследуем этот ряд.

3°. Выделим в ядре (15) функцию скачка при $t = s$ и остальную, непрерывную часть. Это позволит после дифференцирования уравнения (14) по t получить интегральное уравнение Фредгольма второго рода для функции $g(s)$.

Пусть $\lambda_m < k < \lambda_{m+1}$ (возможно, что $0 \leqslant k < \lambda_1$). Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_{C_{\varepsilon, R_n}} \frac{K_0(z)}{I_0(z)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + k^2}} e^{\sqrt{z^2 + k^2}\,(t - i\delta)}\, dz, \qquad (16)$$

где $0 < t < 2c < 2$; $\delta > 0$; $K_0(z)$ — функция Макдональда, $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя, а контур C_{ε, R_n} представлен на рис. 2.

Подынтегральная функция в (16) является однозначной аналитической функцией в плоскости с разрезом вдоль луча $z = iy$, $y > -k$. Ветвь радикала $\sqrt{z^2+k^2}$ выберем так, чтобы при $z > 0$ этот корень был положительным, и [5] на положительной полуоси $z > 0$ функция $K_0(z)$ вещественна, а $I_0(z)$ — положительна.

Особенности подынтегральной функции, расположенные внутри контура C_{ε, R_n}, простые полюсы в точках $z_j = -i\lambda_j$ $(j = m+1, \ldots, n)$ нулях функции $I_0(z)$.

Применяя к интегралу (16) теорему о вычетах и используя известные соотношения между бесселевыми функциями, мы получаем

$$2\pi \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{J_1^2(\lambda_j)} \frac{e^{-it\sqrt{\lambda_j^2-k^2}}}{\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} e^{-\delta\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} =$$

$$= -\int\limits_{C_{\varepsilon, R_n}} \frac{K_0(z)}{I_0(z)} \frac{z}{\sqrt{z^2+k^2}} e^{\sqrt{z^2+k^2}(t-i\delta)} dz. \tag{17}$$

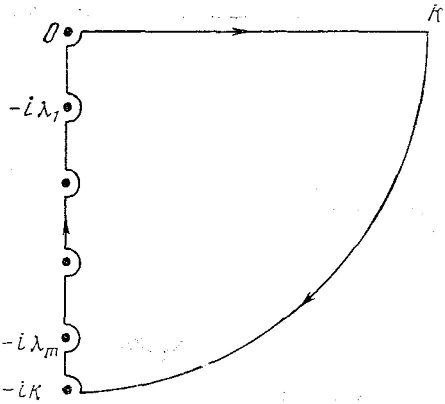

Рис. 1. Контур интегрирования Γ_ε в z-плоскости. Радиусы малых дуг равны ε.

Нетрудно показать, что интеграл от нашей функции по полуокружности $z = R_n e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$, $R_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$ стремится к нулю при $R_n \to \infty$ для каждого $t \in (0, 2c)$.

Перейдем в (17) к пределу при $n \to \infty$, вычислим интеграл на отдельных участках контура и отделим вещественную часть. Мы получаем

$$\pi \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\lambda_j)} \frac{\cos\left(t\sqrt{\lambda_j^2-k^2}\right)}{\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} e^{-\delta\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} =$$

$$= -2\int\limits_0^\infty \frac{K_0(x)}{I_0(x)} \frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}} \operatorname{ch}\left(t\sqrt{x^2+k^2}\right) \cos\left(\delta\sqrt{x^2+k^2}\right) dx +$$

$$+ \pi \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{Y_0(x)}{J_0(x)} \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} \operatorname{ch}\left(t\sqrt{k^2-x^2}\right) \cos\left(\delta\sqrt{k^2-x^2}\right) dx +$$

$$+ \frac{\pi\delta}{t^2+\delta^2} + F(t, \varepsilon, \delta), \quad 0 < t < 2c, \tag{18}$$

где γ_ε — объединение интервалов $(\varepsilon, \lambda_1 - \varepsilon)$, $(\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2 - \varepsilon)$, $\ldots$, $(\lambda_m + \varepsilon, k - \varepsilon)$, а

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_0^t F(t, \varepsilon, \delta)\, dt = 0.$$

Проинтегрируем теперь обе части (18) по t от 0 до t и перейдем к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, будем иметь

$$\pi \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\lambda_j)} \frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_j^2-k^2}\right)}{\lambda_j^2-k^2} e^{-\delta\sqrt{\lambda_j^2-k^2}} =$$

$$= -2\int\limits_0^\infty \frac{K_0(x)}{I_0(x)} x \frac{\operatorname{sh}\left(t\sqrt{x^2+k^2}\right)}{x^2+k^2} \cos\left(\delta\sqrt{x^2+k^2}\right) dx +$$

$$+\pi\int\limits_0^{k'}\frac{Y_0(x)}{J_0(x)}\,x\,\frac{\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2-x^2}\right)}{k^2-x^2}\cos\left(\delta\sqrt{k^2-x^2}\right)dx+$$

$$+\pi\operatorname{arctg}\frac{t}{\delta}+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^{t}F(t,\varepsilon,\delta)\,dt,\quad 0<t<2c. \tag{19}$$

Подставив в (18) вместо t сначала $t+s\,(0<t<c,\ 0<s<c)$, а затем $|t-s|$, полученные равенства сложим, после чего перейдем к пределу при $\delta\downarrow 0$. Учитывая, что при $0<\lambda_j<k$

$$\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_j^2-k^2}\right)\cos\left(s\sqrt{\lambda^2-k^2}\right)}{\lambda_j^2-k^2}=i\,\frac{\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\right)}{k^2-\lambda_j^2},$$

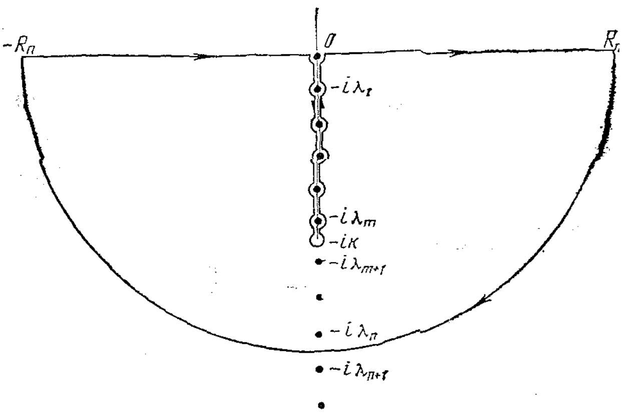

Рис. 2. Контур интегрирования $C_{\varepsilon R_n}$ в z-плоскости. Радиусы малых дуг равны ε.

находим следующее представление для ядра $\Phi(t,s)$ интегрального уравнения первого рода (16):

$$\Phi(t,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{J_1^2(\lambda_j)}\,\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda_j^2-k^2}\right)\cos\left(s\sqrt{\lambda_j^2-k^2}\right)}{\lambda_j^2-k^2}=$$

$$=\frac{2i}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{J_1^2(\lambda_j)}\,\frac{\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\right)}{k^2-\lambda_j^2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{k}{}' \frac{Y_0(x)}{J_0(x)}\,x\,\frac{\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2-x^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-x^2}\right)}{k^2-x^2}\,dx-$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{K_0(x)}{I_0(x)}\,x\,\frac{\operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2+x^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2+x^2}\right)}{k^2+x^2}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\{1+\operatorname{sign}(t-s)\}. \tag{20}$$

Преобразуем полученное выражение. Для этого рассмотрим интеграл

$$\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{K_0(z)}{I_0(z)}\,\frac{z}{\sqrt{z^2+k^2}}\,\frac{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right)}{\sqrt{z^2+k^2}}\operatorname{ch}\left(s\sqrt{z^2+k^2}\right)dz$$

по замкнутому контуру Γ_ε, изображенному на рис. 1. Этот интеграл равен нулю для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, после простых преобразований находим

$$\frac{2i}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{J_1^2(\lambda_j)}\frac{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-\lambda_j^2}\right)}{k^2-\lambda_j^2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{k}{}' \frac{Y_0(x)}{J_0(x)}x\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2-x^2})\operatorname{ch}(s\sqrt{k^2-x^2})}{k^2-x^2}dx-$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{k}\frac{K_0(x)}{I_0(x)}x\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2+x^2})\operatorname{ch}(c\sqrt{k^2+x^2})}{k^2+x^2}dx=$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\int_{C_0}\frac{K_0(z)}{I_0(z)}z\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2+z^2})\operatorname{ch}(s\sqrt{k^2+z^2})}{k^2+z^2}dz+$$

$$+\frac{2i}{\pi}\int_0^{k}\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2-x^2})}{\sqrt{k^2-x^2}}\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}, \qquad 21)$$

где C_0 — дуга окружности $z=ke^{i\varphi}$ от $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ до $\varphi=0$. Подставляя выражение (21) в представление (20) для $\Phi(t, s)$, окончательно получаем

$$\Phi(t, s)=\frac{1}{2}\{1+\operatorname{sign}(t-s)\}+\frac{2i}{\pi}\int_0^{k}\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2-x^2})}{\sqrt{k^2-x^2}}\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}-$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_{C}\frac{K_0(z)}{I_0(z)}z\frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2+z^2})\operatorname{ch}(s\sqrt{k^2+z^2})}{k^2+z^2}dz, \qquad (22)$$

а контур C состоит из дуги C_0 и луча $z=x$, $x>k$.

Итак, нам удалось представить ядро (15) в виде суммы функции скачка

$$\frac{1+\operatorname{sign}(t-s)}{2}=\begin{cases}1, & 0<s<t,\\ 0, & 0<t<s\end{cases}$$

и непрерывно дифференцируемой функции. Подставим выражение (22) в уравнение (16) и продифференцируем его по t. Учитывая, что

$$2\int_0^{k}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{k^2-x^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}k(t+s)}{t+s}+\frac{\operatorname{sh}k(t-s)}{t-s},$$

будем иметь для $g(s)$ такое интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$g(t)-\int_0^{c}K(t, s)\,g(s)\,ds=\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t}rf(r)\frac{\operatorname{ch}k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}dr \qquad (23)$$

с ядром

$$K(t, s)=-\frac{i}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sh}k(t+s)}{t+s}+\frac{\operatorname{sh}(t-s)}{t-s}\right\}+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\int_{C}\frac{K_0(z)}{I_0(z)}\frac{z}{\sqrt{z^2+k^2}}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right)\operatorname{ch}\left(s\sqrt{z^2+k^2}\right)dz. \qquad (24)$$

Все доказанные факты относятся к парным рядам (7)—(8), где основной интервал (0,1). Однако не представляет труда переформулировать их для парных рядов (1)—(2) на интервале $(0, R)$. В следующем пункте мы приводим полученные выше результаты в форме, пригодной для любого R.

4°. Рассматриваются парные ряды Фурье—Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}} J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = f(r), \quad 0 < r < a, \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right) = 0, \quad a < r < R, \tag{26}$$

где $k \geqslant 0$, $0 < a < R$ — заданные числа, λ_n, $n = 1, 2, \ldots$ — положительные нули функции $J_0(\lambda)$, $f(r)$ — заданная непрерывная функция, а ветвь корня $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ выбирается так, чтобы при $\lambda > k$ было $\gamma > 0$ и $\operatorname{Im} \gamma < 0$ при $0 < \lambda < k$. Нами доказана следующая

Теорема 1. *Если система* (25)—(26) *имеет решение* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, *для которого* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{n} < \infty$, *то оно представимо в виде*

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g(s) \cos\left(s \sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}\right) ds, \tag{27}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

где функция $g(s) \in L^2(0, a)$ *удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма*

$$g(t) + \int_0^a K(t, s)\, g(s)\, ds = F(t) \tag{28}$$

с ядром

$$K(t, s) = \frac{i}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sh} k(t+s)}{t+s} + \frac{\operatorname{sh} k(t-s)}{t-s}\right\} -$$
$$- \frac{4}{\pi^2} \int_C \frac{K_0(Rz)}{I_0(Rz)} \frac{z}{\sqrt{z^2+k^2}} \operatorname{ch}\left(t\sqrt{z^2+k^2}\right) \operatorname{ch}\left(s\sqrt{k^2+z^2}\right) dz \tag{29}$$

и правой частью

$$F(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}\, dr. \tag{30}$$

У нас есть возможность сравнить этот результат с результатами, полученными ранее в двух различных предельных случаях.

Во-первых, при $k = 0$ мы имеем

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g(s) \cos\frac{\lambda_n s}{R}\, ds,$$

а $g(s)$ удовлетворяет уравнению

$$g(t) = F_0(t) + \int_0^a K_0(t, s)\, g(s)\, ds,$$

где

$$K_0(t, s) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{K_0(Rx)}{I_0(Rx)} \operatorname{ch} tx \operatorname{ch} sx\, dx.$$

$$F_0(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \frac{rf(r)\,dr}{\sqrt{t^2 - r^2}},$$

что совпадает с результатом, приведенным в [3].

Во-вторых, интересно рассмотреть предельный случай при $R \to \infty$. Введем функцию

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a g(s)\cos\left(s\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) ds, \tag{31}$$

тогда

$$A_n = \frac{\pi}{R}\,\frac{\lambda_n'}{R} C\left(\frac{\lambda_n}{R}\right), \text{ где } \lambda_n' = \frac{2}{\pi J_1^2(\lambda_n)} \sim \lambda_n, \quad (n \to \infty)$$

уравнения (25)—(26) перепишутся так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n'}{R} C\left(\frac{\lambda_n}{R}\right) J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} r\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}} \cdot \frac{\pi}{R} = f(r), \quad 0 < r < a,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n'}{R} C\left(\frac{\lambda_n}{R}\right) J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} r\right) \cdot \frac{\pi}{R} = 0, \quad a < r < R,$$

и поскольку при больших n $\frac{\lambda_{n+1}}{R} - \frac{\lambda_n}{R} \sim \frac{\pi}{R}$, мы можем парные интегральные уравнения (3)—(4) рассматривать как результат формального предельного перехода $R \to \infty$ в уравнениях (1)—(2).

Если теперь перейти к пределу и в уравнении (28), то для предельной функции $g(s)$, через которую по формуле (31) выражается $C(\lambda)$, мы будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$g(t) + \frac{i}{\pi}\int_0^a \left\{\frac{\operatorname{sh} k(t+s)}{t+s} + \frac{\operatorname{sh} k(t-s)}{t-s}\right\} g(s)\, ds =$$

$$= \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t rf(r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr,$$

что совпадает с результатом, полученным для системы (3)—(4) в работе [2].

5°. Остановимся теперь на доказательстве достаточного условия, при котором формула (27) дает решение парных уравнений (25)—(26).

Теорема 2. *Если интегральное уравнение (28) имеет непрерывно дифференцируемое решение $g(s)$, то последовательность коэффициентов*

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a g(s)\cos\left(s\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 - k^2}\right) ds, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяет системе парных уравнений (25)—(26).

Доказательство. Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^a g(s)\cos\left(s\sqrt{\lambda^2-k^2}\right)ds = g(0)\frac{\sin a\sqrt{\lambda^2-k^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} - \int_0^a g'(s)\frac{\sin\left(s\sqrt{\lambda^2-k^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}ds,$$

и учитывая, что

$$\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda^2-k^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} = \int_0^t rJ_0(\lambda r)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}dr,$$

имеем

$$A_n = \frac{2}{R^2J_1^2(\lambda_n)}\int_0^a rG(r)J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right)dr,\ n=1, 2, \ldots, \tag{32}$$

где $0 < a < R$ и

$$G(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}g(0)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-r^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_r^a g'(s)\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{s^2-r^2}}{\sqrt{s^2-r^2}}ds.$$

Поэтому на интервале (a, R) ряд Фурье—Бесселя с коэффициентами (32) сходится к нулю и, следовательно, уравнение (26) удовлетворяется.

Осталось доказать, что найденные по формуле (27) коэффициенты A_n удовлетворяют и уравнению (25). Для этого подставим их в левую часть уравнения (25), мы получим некоторую функцию $\tilde{f}(r)$ и докажем, что она совпадает с заданной функцией $f(r)$.

Действительно, поскольку найденная последовательность коэффициентов A_n ограничена, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\sqrt{r}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2-k^2}}J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right),\ 0 < r < R$$

имеет числовую мажоранту $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$ и сходится равномерно к непрерывной функции, поэтому тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\sqrt{\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2-k^2}}J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right) \equiv \tilde{f}(r),\ 0 < r < a,$$

где A_n выражаются через $g(s)$ по формуле (27), можно преобразовать, как это было сделано в пункте 2°. Повторяя построения, которыми мы пользовались в пунктах 2° и 3°, получим

$$g(t) + \int_0^a K(t, s)g(s)ds = \tilde{F}(t), \tag{33}$$

где $K(t, s)$ определяется формулой (29), а

$$\tilde{F}(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t r\tilde{f}(r)\frac{\operatorname{ch}\left(k\sqrt{t^2-r^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}dr.$$

Сравнивая (33) с уравнением (28), решением которого является функция $g(s)$, и учитывая (30), находим

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t r\{\tilde{f}(r)-f(r)\}\frac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr=0,$$

откуда по формулам обращения Н. Я. Сонина [2] будем иметь

$$\tilde{f}(r)=f(r),\ 0<r<a.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Гандель. Об одной паре сумматорных уравнений с функциями Бесселя. «Зап. мех.-матем. ф-та и ХМО», т. 33. Изд-во Харьковского ун-та., 1967.
2. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. «Зап. физ.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. 25, серия 4, 1957.
3. I. N. Sneddon. Srivastav R. P. Dual relations involving Fourier — Bessel series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 66, 3, 1964.
4. Н. Я. Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. ГТТИ, М., 1954.
5. Ватсон. Теория бесселевых функций. ИЛ. М., 1949.

Поступила 25 мая 1969 г.