Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра вищої математики та інформатики

Кваліфікаційна робота магістра

на тему «*Прикладні математичні задачі економічного змісту в системі профільної середньої освіти*»

Виконала: здобувач ЗВО
групи МСз 61, 2 курсу
спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)»,
освітньо-професійна програма
«Математика та інформатика»
Печерська Олена Валеріївна

Науковий керівник: *кандидат фізико-математичних наук, доцент*
Аршава Олена Олександрівна

Харків
2024 рік

АНОТАЦІЯ

Печерська О.В. «Прикладні математичні задачі економічного змісту в системі профільної середньої освіти»

Кваліфікаційна робота магістра: 77 с., 21 рис., 3 табл., 2 додатки, 25 літ. джерела.

У роботі проаналізовано сучасні тенденції до реформування профільної середньої освіти.

Розроблено практичні рекомендації щодо реалізації компонентів формули Нової української школи в закладах середньої освіти економічного профілю.

Автором сформульовані принципи та методи побудови математичних моделей в економічній математиці та здійснено підбір прикладних задач економічного змісту.

Вивчено специфіку впровадження метода проєктів у профільних класах та представлена розробка smart-уроку на тему: «Екстремальні задачі в економічному аналізі» та комбінованого урока математики та інформатики на тему: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів».

Ключові слова: Нова українська школа, профільна середня освіта, математична модель, логічне мислення, аналітичні навички, метод проєктів, Smart - освіта, інтерактивні методи навчання.

ABSRTACT

Pecherska Olena «Applied mathematical problems of economic content in the system of specialized secondary education»

The master's thesis: 77 pages, 21 figures, 3 tables, 2 appendix, 25 references.

The work analyzes current trends in reforming specialized secondary education.

Practical recommendations have been developed for the implementation of the components of the New Ukrainian School formula in secondary education institutions with an economic profile.

The author formulated the principles and methods of constructing mathematical models in economic mathematics and selected applied problems of economic content.

The specifics of implementing the project method in specialized secondary education are studied and presented is a note of a smart-lesson on the topic: “Extreme problems in economic analysis” and a combined lesson in mathematics and computer science on the topic: “Linear regression. Least squares method".

Keywords: New Ukrainian school, specialized secondary education, mathematical model, logical thinking, analytical skills, project method, Smart-education, interactive teaching methods.

ЗМІСТ

ВСТУП ……………………………………………………………………... 5
РОЗДІЛ 1. ПРОФІЛЬНА СЕРЕДНЯ ОСВІТА В КОНТЕКСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕФОРМИ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ 8
1.1 Концепція та основні принципи реформування профільної середньої освіти …………………………………………………………………….. 8
1.2 Реалізація компонент формули Нової української школи в закладах середньої освіти економічного профілю ..………………….................... 11
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1 ……………………………………………. 16
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЯК ФАКТОР ФОРМУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗНАНЬ У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ ………………………………………………………………… 17
2.1 Методи та принципи математичного моделювання. Вимоги до прикладних математичних задач …………………………………….. 17
2.2 Приклади побудови математичних моделей економічних процесів… 21
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2 ……………………………………………. 45
РОЗДІЛ 3. ПРОЄКТНА ТЕХНОЛОГІЯ ТА ЕКОНОМІЧНА МАТЕМАТИКА ………………………………………………………… 46
3.1 Метод проєктів як інноваційна методика профільної середньої освіти ……………………………………………………………………... 46
3.2 Smart-урок на тему: «Екстремальні задачі в економічному аналізі» 50
3.3 Комбінований урок математики та інформатики на тему: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів» ……………………………….. 58
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3 …………………………………………… 65
ВИСНОВКИ …………………………………………………………… 66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ……………………………. 67
ДОДАТКИ ……………………………………………………………….. 72
Додаток 1 ……………………………………………………………… 72
Додаток 2 ……………………………………………………………… 75

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасна реформа освітньої галузі «Нова українська школа» привнесла багато змін не лише до змісту та структури освітніх програм, тривалості здобуття освіти, а й до основних принципів та методів викладання в закладах загальної середньої освіти [12, 18, 20]. Наразі освітянська спільнота готується до впровадження третього етапу реформи НУШ, що передбачає перехід на трирічну профільну середню освіту (10-12 класи) [7]. Профільна середня освіта матиме два спрямування − академічне (орієнтовано на продовження навчання в закладах вищої освіти) та професійне (спрямовано на професійно орієнтований підхід до здобуття освіти з урахуванням інтересів і здібностей здобувачів).

Перехід до профільної середньої освіти передбачає створення умов для поглибленого опанування знань із окремих предметів, що є, безумовно, необхідним фактором для продовження освіти або професійної діяльності в майбутньому. Профілізація старшої школи в напрямку економіки та соціології залишається актуальною як у суспільстві, так і серед здобувачів.

Математична освіта відіграє фундаментальну роль як самостійна складова, так і в якості площадки для засвоєння знань і навичок із обов'язкових і вибіркових компонент освітньої програми в класах соціально-економічної профілізації [4]. В той же час, впровадження концептуальних засад Нової української школи в освітній процес вимагає певних змін і від методики викладання математики: перехід до проєктного методу, розширення діапазону завдань, що містять практичний характер та наповнені певним реальним змістом, активна навчальна робота в напрямку формування soft skills учнів і набуття досвіду математичного моделювання. Саме інтегральний підхід до організації профільної середньої освіти сприяє побудові комфортного сучасного освітнього середовища, що має забезпечити правильний вибір здобувачем майбутньої професії.

Об'єкт дослідження – прикладні математичні задачі економічного змісту.

Предмет дослідження – принципи та методи математичного моделювання в закладах середньої освіти економічного профілю в контексті реформи Нової української школи.

Мета дослідження – провести аналіз сучасних тенденцій щодо реформування профільної середньої освіти, сформулювати принципи та запропонувати методи побудови математичних моделей в економіці.

Завдання дослідження: виділити концептуальні засади та принципи, на яких здійснюється реформа профільної середньої освіти; розробити практичні рекомендації щодо реалізації компонентів формули Нової української школи в закладах середньої освіти економічного профілю; сформулювати принципи та методи побудови математичних моделей в економічній математиці, надати інфографіку загальних вимог до прикладних задач; здійснити підбір прикладних задач економічного змісту, навести приклади побудови математичних моделей та їх розв'язків; вивчити специфіку впровадження метода проєктів у профільних класах; розробити smart-урок на тему: «Екстремальні задачі в економічному аналізі»; розробити комбінований урок математики та інформатики на тему: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів».

Гіпотеза дослідження: прикладні математичні задачі економічного змісту є ефективною складовою в формуванні економічних знань у системі профільної середньої освіти.

Методи дослідження: формалізація, систематизація, абстрагування, узагальнення, аналіз і синтез, наочно-образне моделювання.

Наукова новизна та теоретичне значення результатів, одержаних у кваліфікаційній роботі, полягає в тому, що:

✓ зміст математичної освіти розглядається в контексті реформування профільної середньої освіти;

✓ розроблено практичні рекомендації щодо реалізації компонентів формули Нової української школи в закладах середньої освіти економічного профілю;

✓ запропонована методика побудови математичних моделей в економічній математиці;

✓ вивчена специфіка впровадження метода проєктів у класах економічного профілю.

Практичне значення: отримані результати можна використовувати під час складання освітніх програм, що мають бути реалізовані закладом загальної середньої освіти, навчальних програм із математики та соціально-економічних предметів, конспектів уроків із елементами STEM-освіти, розробки інтерактивних завдань і практичних вправ.

Апробація результатів дослідження. Основні теоретичні результати дослідження доповідалися на II Міжнародній науково-практичній конференції «Integration of science and practice as a mechanism of effective development» (10-13 вересня 2024 р., Копенгаген, Данія) [4] .

На базі Комунального закладу «Харківський ліцей №49 Харківської міської ради» була проведена апробація навчального матеріалу, методична розробка якого представлена в кваліфікаційній роботі.

РОЗДІЛ 1
ПРОФІЛЬНА СЕРЕДНЯ ОСВІТА В КОНТЕКСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕФОРМИ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ

1.1. Концепція та основні принципи реформування профільної середньої освіти

Трансформація сучасної середньої освіти в Україні відбувається згідно з Закон України Про повну загальну середню освіту [20, ст. 4, 10] та відповідно до Концепції Нової української школи [18, с. 23]. В освітній процес наразі впроваджено два етапи реформи – на першому та другому рівнях повної загальної середньої освіти (початкова та базова середня освіта). Освітяни дискутують, сперечаються, діляться власним досвідом, навчаються у колег і готуються до реалізації третього етапу реформи Нової української школи – на третьому рівні повної загальної середньої освіти (профільна середня освіта).

Такий крок має бути серйозним, непростим, виваженим, бо майбутня освіта в старшій школі буде відрізнятися від попередніх роках не лише своєю тривалістю (три роки замість двох), але й змістом, методиками та принципами.

Свої погляди на профільну середню освіту в контексті Нової української школи, а саме: зміст, напрями, особливості організації освітнього процесу, формування мережі закладів, було детально сформульовано в статті [12]. Основними тезами є наступні положення (рис.1).

Рис. 1. Профільна середня освіта: зміст та напрями

Успішне реформування профільної середньої освіти можливе за певних умов.

По-перше, це кардинальні зміни всієї системи повної загальної середньої освіти на всіх рівнях. Ця система має створювати всі умови для того, аби здобувач розібрався в своїх уподобаннях і спланував свій подальший шлях – працювати або вдосконалювати свої знання. Досягти цієї мети має допомогти профільна середня освіта, яка враховує індивідуальні особливості й таланти, інтереси й хобі, бачення свого покликання.

Концепти, що мають має бути покладеними в основу реформування профільної середньої освіти:

1) давати міцну базу загальнообов’язкових знань для всіх, хто здобуває повну загальну середню освіту;

2) забезпечити можливість обрати профільне спрямування освіти та поглиблене вивчення відповідних профільних дисциплін.

Ці обидва концепти мають забезпечувати як теоретичну, так і практичну підготовку.

Отже, система повної загальної середньої освіти реформується під впливом декількох чинників.

По-перше, це закон і підзаконні акти. Основний постачальник послуги середньої освіти є держава. Вона шляхом закону встановлює правила надання цих послуг і регулює діяльність постачальників освітніх послуг.

По-друге, це оточуюче середовище, історичний і соціальний контекст. Вони диктують вимоги до результату, який мають дати постачальники освітніх послуг, і вимогу до здобувачів освіти, які пройшли свій шлях в закладах освіти.

Для того, аби всі рівні освіти працювали на єдину ціль, всі заклади освіти (ліцеї, коледжі, заклади спеціалізованої освіти) на території певної громади мають працювати індивідуально, але водночас з дотриманням єдиної концепції й принципів.

Реформування профільної середньої освіти ґрунтується на таких ціннісних орієнтирах, як повага до індивідуальності та підвищення значущості власного досвіду, вибору, прагнень здобувача.

Освітній процес має збуджувати та підтримувати пізнавальний інтерес, забезпечувати рівний доступ до освіти кожного здобувача освіти без будь-яких форм дискримінації. Нова система освіти має створювати всі умови задля того, аби здобувач розібрався в своїх уподобаннях і спланував свій індивідуальний освітній трек у формі певної профілізації (рис. 2). Досягти цієї мети має допомогти профільна середня освіта, яка враховує індивідуальні особливості й здібності. Таким по суті є дитиноцентричний підхід.

Рис. 2. Профілі навчання академічного спрямування профільної середньої освіти

Нова українська школа працюватиме на засадах «педагогіки партнерства». Основні принципи цього підходу [18, с.14-15] мають знайти віддзеркалення й у профільній середній освіті (рис. 3).

Після налагоджування всіх складових відповідно до концепції на виході, після здобуття профільної середньої освіти суспільство має отримаємо нову особистість, у якій будуть сформовані ключові компетентності Нової української школи [18, с.11-12].

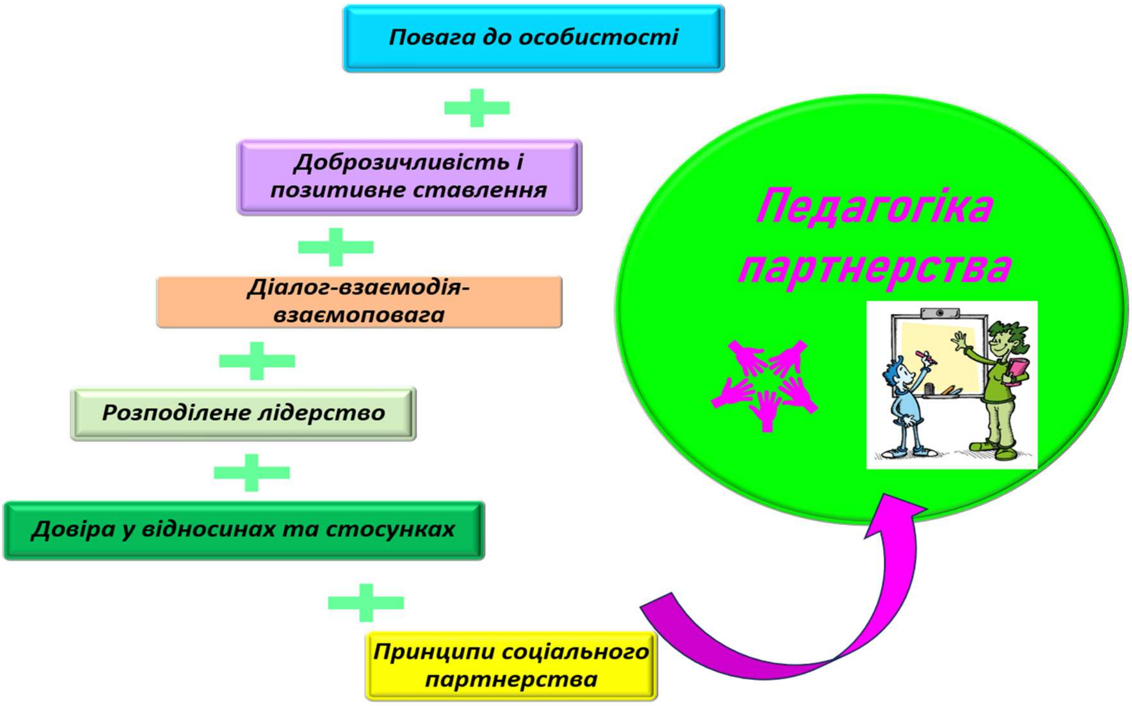


Рис. 3. Педагогіка партнерства

Саме такі українці є затребуваними сучасним світовим і українськими суспільством. Вони матимуть пролонговану ефективність впродовж тривалого часу. Тож завдання освіти полягає в тому, щоб допомогти підростаючому поколінню з пошуком свого місця в суспільстві та обранням майбутньої професії [23]. Треба робити це з урахуванням тенденціями на ринку праці, що динамічно змінюється.

1.2. Реалізація компонент формули Нової української школи в закладах середньої освіти економічного профілю

Концепція Нової української школи [18, с. 8-9] представляє формулу НУШ, що складається з дев'яти компонентів (рис. 4).

Сьогодні не достатньо дати дитині лише знання. Потрібно розуміти, що вдале використовувати здобутих знань не менш важливо. Такий підхід дозволяє формувати необхідні компетентності – знання, навички, вміння, які є необхідними для успішної професійної діяльності в певній галузі.

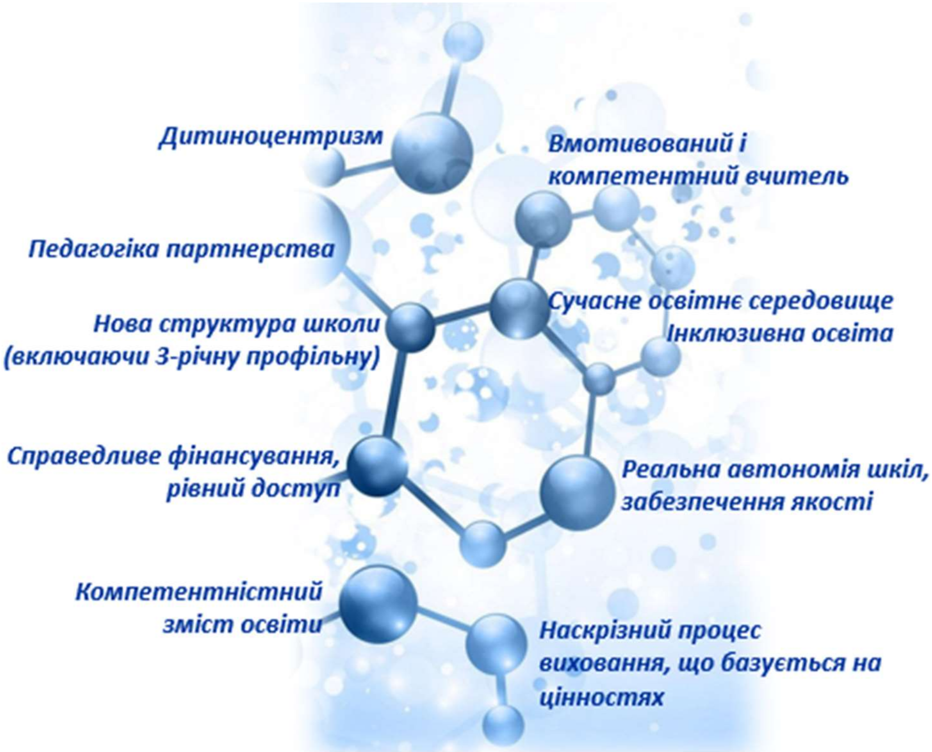


Рис. 4. Формула Нової української школи

Функціонування Нової української школи в першу чергу спрямовано на розвиток наступних ключових компетентностей [18, с. 10-13]:

1) спілкування державною мовою;
2) спілкування іноземними мовами;
3) математична компетентність;
4) основні компетентності у природничих науках і технологіях;
5) інформаційно-цифрова компетентність;
6) уміння вчитися впродовж життя;
7) ініціативність і підприємливість;
8) соціальна та громадянська компетентності;
9) обізнаність та самовираження у сфері культури;
10) екологічна грамотність.

Усі перелічені компетентності є ознаками повноцінної особистості. Вони розвиваються під час освітнього процесу та під час проведення різних заходів впродовж всього періоду навчання. Рівень розвитку компетентності повинен мати свою систему оцінювання, відмінну від оцінювання рівня засвоєння навчального матеріалу.

Уроки математики сприяють розвитку системності й логічності мислення. Процес розв’язання математичних задач розвиває здатність аналізувати, порівнювати та узагальнювати інформацію. Геометрія дозволяє розвивати просторову уяву. Доказ теорем розкриває навички аргументації. Задачі економічної спрямованості допомагають здобувачам повної загальної середньої освіти розібратися в своїх громадських ролях, а, отже, розвивають практично всі ключові компетентності (рис. 5).

Рис. 5. Приклад розвитку компетентностей через розв’язання задач економічного змісту

Починаючи зі здобуття середньої освіти, діти починають розуміти, яким чином діяльність людини впливає на особисте життя та життя всієї країни. Економічна освіта дає розуміння таких понять, як податки, витрати, оплати труда, оцінка ризиків і прибутковості підприємницької діяльності й т. і. На уроках економічної математики учні тренують економічне мислення, навчаються приймати обґрунтовані, виважені рішення та оцінювати результат прийнятих рішень.

Розвиваючи економічне мислення здобувачів, заклад освіти сприяє розвитку соціалізацію дитини, його економічної та громадської культури. Розвиток математичної компетенції дозволяє адекватно застосовувати математичні та економічні знання для вирішення практичних завдань і проблем, що виникають у повсякденному житті.

Реформа НУШ передбачає новий підхід до освіти в старшій школі, а саме – профілізацію середньої освіти. В роботі [4] запропоновано перелік обов'язкових та вибіркових освітніх компонент економічного змісту для класів соціально-економічного профіля (рис. 6).

Рис. 6. Реалізації концепції НУШ щодо профільної середньої освіти на прикладі класів соціально-економічної профілізації

У сучасну епоху знання, здобутті в різних галузях, не є ізольованими, а навпаки, вони стають найбільш ефективними у взаємозв'язку з різними науками. Необхідність міжпредметного синтезу підкреслюється й принципами НУШ. Завдяки такому синтезу в здобувачів формується широкий світогляд, відбувається розвиток логічного мислення, здійснюється активізація уваги та сконцентрованості під час навчання, зростає зацікавленість із боку учнів до навчальних предметів.

Математика є інструментом, який допомагає вивченню різних дисциплін. Продемонструємо це на прикладах предметів, що входять до програми середньої освіти. Так у географії математичні знання використовуються для перетворення різних видів масштабів, обчислення температур, визначення різниці в місцевому часі, побудови графіків тощо. Більшість хімічних розрахункових задач розв’язуються арифметичними методами або за допомогою рівнянь і пропорцій, а для складання плану рішення складних завдань застосовуються синтетичний та аналітичний методи.

Зв’язок фізики та математики є доволі тісний: розв’язання задач, обробка експериментальних даних, вираз залежності між фізичними величинами – це лише декілька прикладів, що надають уявлення такого зв’язку.

У природознавстві вивчають симетрію в природі, а в біології – розв’язують задачі з генетики за допомогою окремих розділів математики (теорія ймовірностей та математична статистика).

Уроки трудового навчання проводяться з використанням математичних формул. На них обчислюються масштаби виробів, здійснюють креслення елементів одягу, визначають пропорції харчових продуктів.

Вивчення інформатики дозволяє опанувати сучасний візуальний цифровий контент, проводити обчислення даних, спираючись на математичні формули, будувати графіки та діаграми.

У предметах економічного профіля математика допомагає навчитися вирішувати безліч задач − від розрахунку прогнозної кількості населення до визначення найбільш привабливого портфелю продуктів виробництва [1, 3, 4, 19].

Міждисциплінарний синтез в освітньому процесі профільної освіти, безумовно, сприяє формуванню у здобувачів такої системи soft skills, що неодмінно впливає на здатність учнів застосовувати знання та навички під час розв’язання прикладних задач. Свій погляд на такий інноваційний підхід в освіті представимо за допомогою інфографіки (рис. 7).

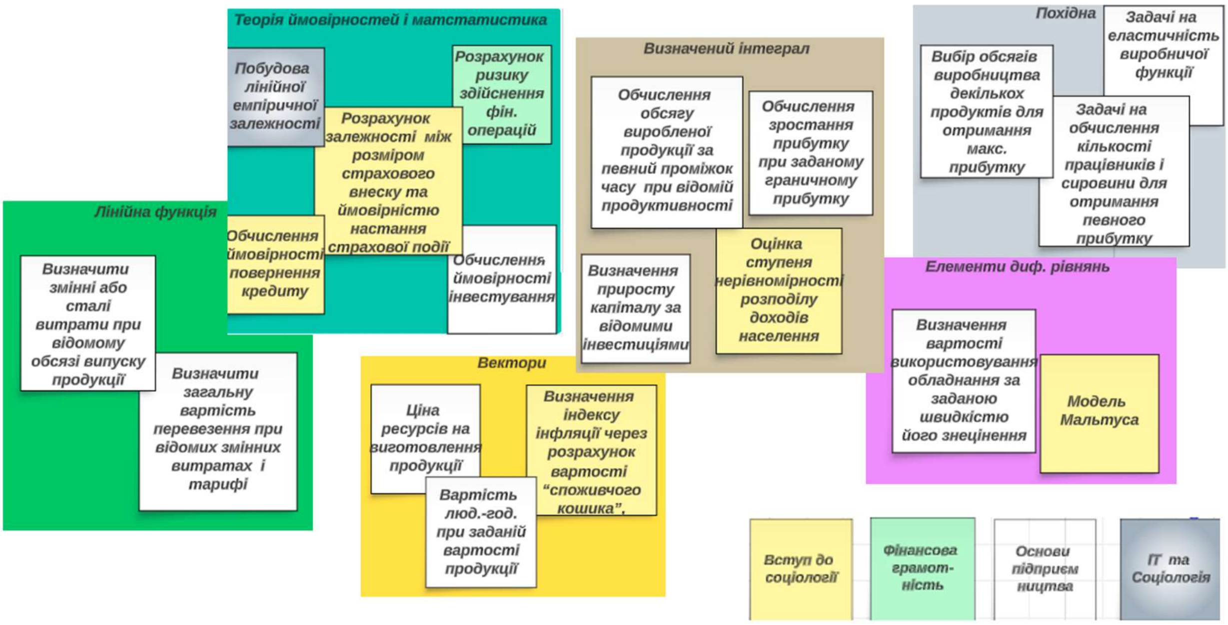


Рис. 7. Приклади міждисциплінарного синтезу математики та предметів економічного профіля

Міжпредметні зв'язки є одним із напрямків дитиноцентричного підходу освіти, що забезпечує розвиток всебічно розвиненого покоління. Сучасні здобувачі середньої освіти для успішної реалізації своїх професійних знань у майбутньому мають володіти обчислювальними, інформаційно-графічними, логічними, бізнес-орієнтованими компетентностями.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Проведено аналіз сучасних тенденцій до реформування профільної середньої освіти; виділено концептуальні засади та принципи, на яких здійснюється реформа Нової української школи.

2. Розроблено практичні рекомендації щодо реалізації компонентів формули Нової української школи в закладах середньої освіти економічного профілю.

РОЗДІЛ 2
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЯК ФАКТОР ФОРМУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗНАНЬ У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ

2.1. Методи та принципи математичного моделювання. Вимоги до прикладних математичних задач

Із метою дослідження/пізнання довільного об’єкту будь-якої природи цей самий об’єкт-оригінал може бути замінений на об’єкт-модель. Через модель отримуються результати, які аналізуються та інтерпретуються. Все разом – підбір моделі, її побудова, аналіз і інтерпретація результатів – є процесом моделювання.

Математичне моделювання є одним із способів дослідження об’єкту шляхом створення його математичної моделі.

Часто використання математичного моделювання є надзвичайно важливим при дослідженні складних об’єктів, бо випробовувати на реальному об’єкті може бути неможливим, або вимагає багато ресурсів (часу, грошей і т.і.).

Базовим поняттям методу математичного моделювання виступає поняття математичної моделі.

Математичною моделлю називається система математичних співвідношень, за допомогою яких описується досліджуваний процес, явище тощо.

Самим поширеним прикладом математичної моделі є *Модель Мальтуса* − закон про пропорційну залежність між швидкістю росту і розміром популяції.

Позначимо через N − чисельність популяції. Диференціальне рівняння, що одержано Бернуллі (1760), має вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N,$$

де t – час, μ – величина, що дорівнює різниці коефіцієнта народжуваності B та смертності D, а саме: $\mu = B - D$.

Розв’язком диференціального рівняння при μ = *const* є експоненціальна функція вигляду:

$$N(t) = N(0)e^{\mu t}.$$

При $\mu = const > 0$ із останнього рівняння отримаємо закон розвитку популяції, який називають законом Мальтуса.

Отже, за допомогою закону Мальтуса можна описати процес зміни чисельності популяції протягом певного часу.

Можна навести інші приклади математичних моделей:

- ✓ система хижак-жертва (рівняння Лотки-Вольтерри) – визначає залежність між чисельністю хижаків та жертв;
- ✓ модель оптимальної поведінки покупця – виражає вибір покупця при обмеженому бюджеті множини продуктів;
- ✓ модель Гарячого Всесвіту.

Правильно побудована математична модель об’єкта або системи має відповідати наступним *принципам*:

Адекватність – обрана математична модель має відповідати оригіналу, відображати його досліджувані властивості з заданою точністю. Оскільки в математичних моделях досліджуються кількісні властивості об’єкта, то потрібно, щоб похибка результату не перевищувала задану.

Об’єктивність – висновки, зроблені на підставі моделі, мають відповідати реальним умовам.

Простота – модель має бути сконцентрована на основних параметрах дослідження й не перевантажена другорядними факторами.

Чутливість – створена модель має мати здатність реагувати на зміни вхідних параметрів.

Стійкість – при незначних коливаннях вхідних параметрів результат, виданий моделлю, також має показати незначне відхилення.

Універсальність – обрана модель має мати широкий спектр її застосування, тобто бути універсальною.

Економічність – реалізація або підтримка моделі не має вимагати надто багато ресурсів (обладнання, часу і т. і.)

Продуктивність – обчислення моделі, отримання результату через модель повинні вимагати мінімальну кількість ресурсу обчислювальної техніки й часу. Видача різноманіття результату на базі моделі має бути оптимально швидкою.

Прикладна задача – це задача, що виникла поза математичної галузі, проте вона може бути розв'язана за допомогою математичного інструменту (методів, формул, рівнянь тощо).

Прикладні задачі реалізують декілька важливих функцій:

- освітня функція – формують певні знання та навички;
- розвиваюча функція – розв'язання задач розвиває аналітичні здібності та навички порівняння й узагальнення, розширює загальну обізнаність і світогляд;
- демонструють міжпредметні зв'язки та роблять освітній процес більш цілісним і прив'язаним до реального життя, допомагають глибше розібратися в інших предметах, створюють умови для осмисленого сприйняття інших предметів.

Через розуміння функцій прикладних задач легко можна сформулювати *вимоги до прикладних математичних задач* (рис. 8):

1. Задачі повинні мати реальний зміст, який наочно продемонструє практичне застосування нових математичних знань. У тому числі серед них можуть бути задачі, пов'язані і інтернет-бізнесом та/або з віртуальними електронними грошовими одиницями.

2. Задачі повинні передбачати використання тем, фактів та методів розв'язання з тих підручників, за якими відбувається викладання математики в закладі середньої освіти й які вже опановані або опановуються саме зараз здобувачами. Новий спосіб розв'язання задачі може бути використаний як підготовка до вивчення нової теми й не вимагатиме невідкладного розв'язання задачі.

3. Мова написання задач та вжиті терміни мають бути добре відомими здобувачам і не потребують додаткового перекладання або пояснення. Робота з умовою задачі й даними не має викликати потреби їх додатково розшифрувати.

4. Умови задачі та дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим процесам та ситуаціям або бути максимально до них наближені.

5. Ідеально, якщо зміст задач стосується особистого досвіду здобувачів, їхніх родин або місцевості та суспільства, в яких вони мешкають. Це дозволить продемонструвати користь від запропонованих знань і збільшити зацікавленість учнів.

Рис. 8. Вимоги до прикладних математичних задач

6. Умови прикладних задач повинні бути прив’язаними до реальних відомих та/або зрозумілих професій і сфер економіки, моделювання їх реальних процесів.

7. Зазвичай прикладні задачі містять реальні або наближені дані і розв'язання задачі не є елементарним для більшості учнів, а вимагає застосування розрахунків і обчислювальної техніки.

8. У профільних класах прикладні задачі мають розгорнуте формулювання, яке дозволяє здобувачам поринути повністю в описану в задачі проблему. Умова задачі може бути навіть блоком якоїсь нової теми, яка розглядається саме через цю прикладну задачу.

У процесі роботи з прикладними задачами здобувачі тренують навички математичного моделювання, оскільки побудова математичної моделі в таких задачах є невід'ємним етапом її розв'язування. Підготовка математичної моделі задачі вимагає від учнів багатьох умінь: виділяти основні фактори досліджуваного процесу; підбирати оптимальний математичний апарат для побудови моделі; виділяти фактори, що можуть дати похибку.

У деяких задачах математична модель вже міститься в самій умові задачі, в інших математичну модель необхідно побудувати самостійно. Зрозуміло, що перший тип задач є значно простішим.

Робота зі складною прикладною задачею вимагає активізації пізнавальної діяльності здобувачів. Тож, використання прикладних задач на уроках математики несе значущу роль у надбанні цільових компетентностей. Важливо пам'ятати, що умови задач мають бути сучасно актуальними, з врахуванням соціально-економічної ситуації, бо зміни відбуваються постійно; мають враховувати сучасні акценти, які вносить час, інформаційного суспільства з новими задачами й проблемами в економіці. Тож, необхідно переглянути долю прикладних задач сучасного економічного змісту.

2.2. Приклади побудови математичних моделей економічних процесів

Як було зазначено в п. 2.1, математична освіта в профільних класах має бути насичена прикладним змістом, а вивчення нових тем та розділів супроводжуватися економічною інтерпретацію термінів і теорем.

Наведемо приклади побудови математичних моделей економічних процесів та їх розв’язків за допомогою властивостей лінійної функції, векторів, елементів диференціального й інтегрального числення функцій однієї змінної, елементів теорії диференціальних рівнянь. Для кожного з вказаних розділів представимо математичний апарат, використовуючи концептуальні карти (concept mapping).

Лінійна функція

Побудуємо концептуальну карту «Лінійна функція» (рис. 9), використовуючи навчальний матеріал відповідно до підручника [14, с. 228-241].

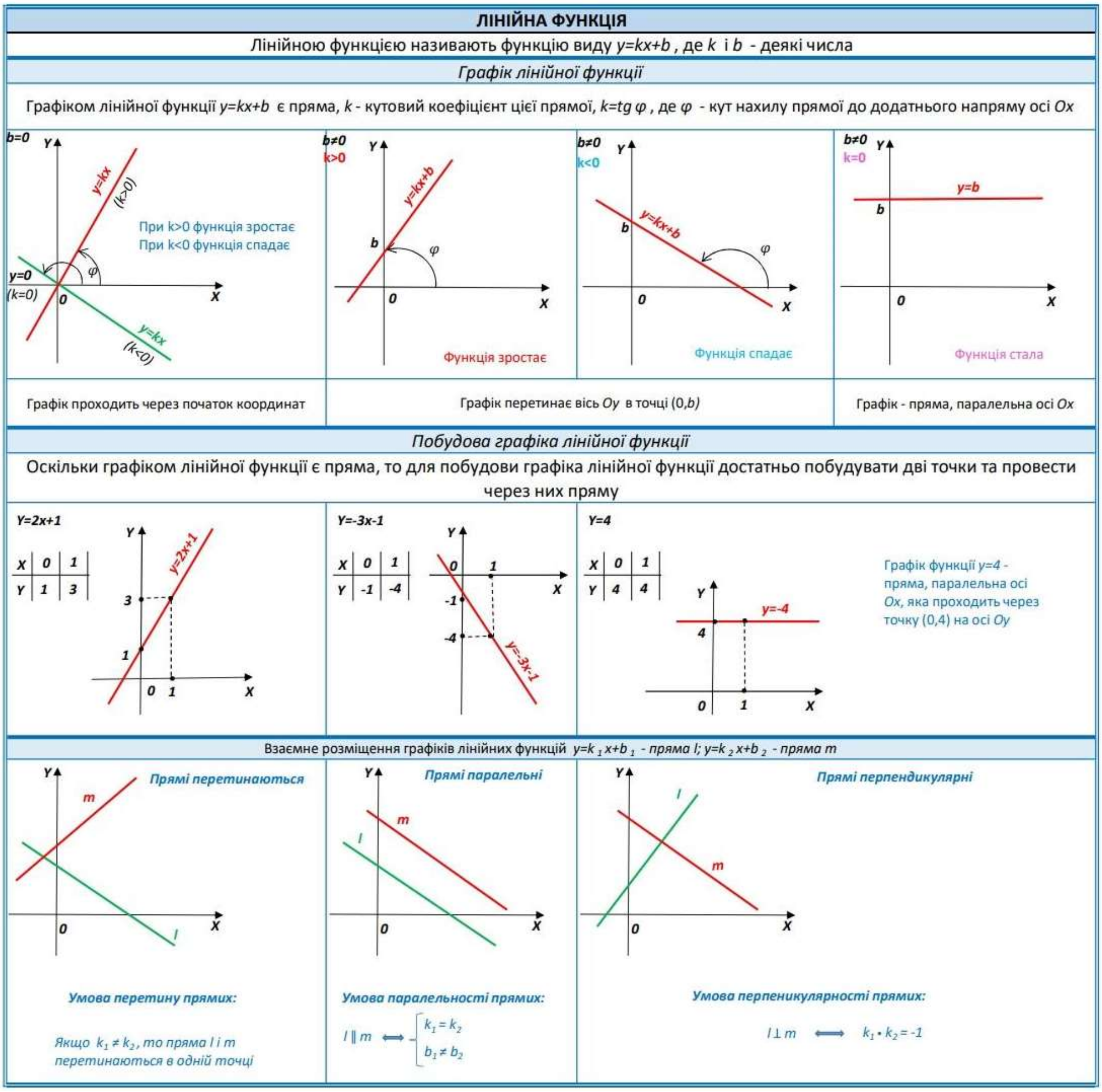


Рис. 9. Концептуальна карта «Лінійна функція»

Розглянемо підходи до застосування лінійної залежності під час розв'язання задач економічного змісту.

Позначимо через y – загальні витрати підприємства протягом місяця за умови випуску x одиниць однорідної продукції; b – величина, яка визначає сталі витрати підприємства, що не залежать від обсягу продукції, наприклад, витрати на опалення підприємства, розмір заробітної плати службовцям, охоронцям і іншим працівникам тощо; k − витрати підприємства протягом місяця на одиницю продукції.

Тоді лінійна залежність між загальними витратами підприємства та обсягом випуску продукції визначається формулою: $y = kx + b$.

Задача 1. У піцерії працюють два піцайоло, заробітна оплата яких становить по 200 *грн.* на день. Фінансові витрати на застосування енергоресурсів (електроенергія в духових шафах) при виготовлені 10 піц складають 80 *грн*. Орендна плата за приміщення піцерії становить 1000 *грн*. на місяць (30 днів), незалежно від кількості виготовленої піци. Записати формулу, що визначає лінійну залежність між загальними витратами на роботу піцерії протягом місяця та кількість виготовленої піци за умови, якщо вартість продуктів на виготовлення однієї піци становить 40 *грн*.

Розв'язання. Введемо наступні позначення:

x – кількість піци, виготовленої протягом місяця;

y − загальні витрати піцерії протягом місяця.

Із умови задачі сталі витрати піцерії становлять:

$$b = 200 \cdot 2 \cdot 30 + 1000 = 13000 \text{ (\textit{грн.})}.$$

Визначаємо витрати піцерії протягом місяця на одиницю продукції:

$$k = \frac{80}{10} + 40 = 48 \text{ (\textit{грн.})}.$$

Лінійна залежність між загальними витратами на роботу піцерії протягом місяця та кількість виготовленої піци має вигляд:

$$y = kx + b;$$

$$y = 48x + 13000.$$

Відповідь: $y = 48x + 13000$.

Задача 2. Вкладник поклав в банк деяку суму грошей, розподіливши їх між двома рахунками. Перший рахунок надає вкладнику 4% річних, другий − 1,5% річних. Через рік вкладник отримав 1100 *грн.* прибутку, з яких 560 *грн.* за першим рахунком. Яка загальна суму була внесена на обидва рахунки?

Розв'язання: Будемо вважати, що банківські відсотки нараховуються пропорційно часу. З'ясуємо, з якої суми вкладу було отримано 560 *грн.* прибутку. Для цього позначимо цю суму *x.* Тоді 4% річних можна представити наступним чином: $0{,}04 \cdot x = 560; x = \frac{560}{0{,}04} = 14000$ (*грн.*). Отже, на перший рахунок було покладено 14000 *грн.*

За умовою задачі вкладник отримав 1100 *грн.* прибутку, тому прибуток із другого рахунку становить: 1100 – 560 = 540 (*грн.*). Саме така сума складає 1,5% від внеску на другий рахунок.

Визначимо суму внеску на другий рахунок:

$$0{,}015 \cdot y = 540; y = \frac{540}{0{,}015} = 36000 \text{ (}\textit{грн.}\text{)}.$$

Загальна сума внеску дорівнює: 14000+36000 = 50000 (*грн.*).

Відповідь: 50000 *грн.*

Позначимо через k − тариф перевезення вантажу на одиницю відстані, b − сталі витрати перевізника, що не залежать від відстані x. Тоді лінійна залежність між загальною вартістю перевезень y на відстань x визначається формулою: $y = kx + b$.

Задача 3. Перевезення вантажу з одного міста до заданого пункту, що розташований на відстані $x_1 = 100$ *км*, коштує $y_1 = 200$ грошових одиниць, а до іншого пункту, що знаходиться на відстані $x_1 = 400$*км* – $y_2 = 400$ грошових одиниць. Встановити залежність між вартістю перевезення y на відстань x, якщо вартість є лінійною функцією від відстані.

Розв'язання. Оскільки залежність між вартістю перевезення y на відстань x є лінійною функцією від відстані, тому будемо шукати залежність у вигляді: $y = kx + b$.

За умовою задачі $200 = 100k + b; 400 = 400k + b$. Для визначення коефіцієнтів k і b розв'язуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 100k + b = 200; \\ 400k + b = 400; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 300k = 200; \\ 100k + b = 200; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{3}; \\ b = 200 - 100k; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{3}; \\ b = 200 - 100 \cdot \dfrac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{3}; \\ b = \dfrac{400}{3}. \end{cases}$$

Отже, лінійна залежність між вартістю перевезення y на відстань x має вигляд: $y = \frac{2}{3}x + \frac{400}{3}$.

Відповідь: $y = \frac{2}{3}x + \frac{400}{3}$.

Вправи

Задача 4. Кур'єр служби доставки Glovo заробляє за виконану роботу 100 *грн.* в день і 15% від суми кожного доставленого замовлення. Визначити заробіток кур'єра в залежності від кількості замовлень протягом дня.

Відповідь: $y = 0{,}15x + 100$.

Задача 5. Припустимо, що перенесення вартості обладнання на продукцію, що виготовляється за його допомогою, залежить від часу t. Початкова вартість обладнання складає y_0 тисяч грошових одиниць, а термін роботи обладнання до повного зносу – $t_{\text{зн}}$ років. Скласти рівняння прямої, що є графіком лінійної залежності перенесеної на продукцію частини вартості обладнання від терміну роботи цього обладнання. Визначити цю величину через $t_{\text{ф}}$ років?

Розв'язати задачу, якщо задано наступні вихідні дані:

а) $y_0 = 30, t_{\text{зн}} = 15, t_{\text{ф}} = 11$;

б) $y_0 = 35, t_{\text{зн}} = 20, t_{\text{ф}} = 17$;

в) $y_0 = 40, t_{\text{зн}} = 25, t_{\text{ф}} = 21$.

Задача 6. Розв'язати задачу 3 за умови, що $x_1 = 300$ *км*, $x_1 = 1200$ *км*, $y_1 = 400$ грошових одиниць, $y_2 = 600$ грошових одиниць. Побудувати графік отриманої лінійної залежності.

Відповідь: $y = \frac{2}{9}x + \frac{1000}{3}$.

Вектори

Представимо концептуальну карту «Вектори» (рис. 10), яка складена на основі навчальний матеріал, поданого в підручнику [16, с. 292 − 295].

Задача 7. Визначити загальні витрати підприємства на виготовлення однієї одиниці продукції, якщо вихідні дані про ресурси x_i задано в табл. 1.

Таблиця 1

Ресурси підприємства

Ресурси x_i		Обсяг	Вартість p_i	
x_1	сировина	300 *кг*	p_1	75 *грн./кг*
x_2	витрати на оплату праці	0,65 *людино-годин*	p_2	20 *грн./ людино-годин*
x_3	витрати на обладнання	0,7 *машино-годин*	p_3	30 *грн./ машино-годин*

Розв'язання. Розглянемо вектор витрат ресурсів підприємства на одиницю продукції:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (300;\ 0{,}65; 0{,}7)$$

та вектор вартості відповідних ресурсів на виготовлення однієї одиниці продукції:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = (75;\ 20; 30).$$

Загальні витрати підприємства на виготовлення однієї одиниці продукції позначимо через $c(\vec{x})$. Цю величину можна обчислити як скалярний добуток векторів $\vec{x}$ і $\vec{p}$, тобто

$$c(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{p} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = 300 \cdot 75 + 0{,}65 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot 30 =$$

$$= 22500 + 13 + 21 = 22534 \text{ (}\textit{грн.}\text{)}$$

Відповідь: 22534 *грн.*

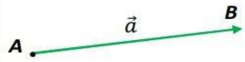
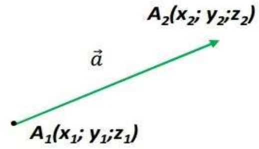
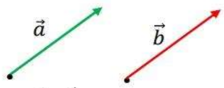
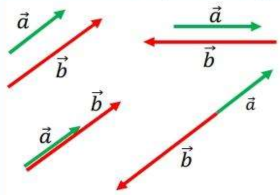
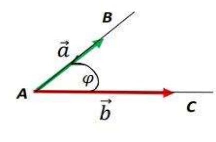
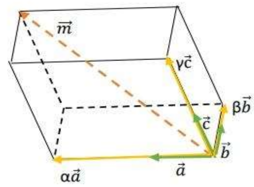
ВЕКТОРИ		
Вектором називають напрямлений відрізок		Довжину цього відрізка називають довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора $\lvert\vec{a}\rvert = AB$
Координати вектора (у просторі)		$\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3)$, де $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Рівні вектори	 $\vec{a} = \vec{b}$ $\Updownarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert \\ \text{вектори } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \\ \text{однаково напрямлені} \end{array} \right.$	$\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3) = \vec{b}\ (b_1; b_2; b_3)$ $\Updownarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{array} \right.$ Два вектори називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину й напрям.
Операції над векторами		
Сума векторів	Різниця векторів	Множення вектора на число
$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}\ (b_1; b_2; b_3) =$ $= \vec{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}\ (b_1; b_2; b_3) =$ $= \vec{c}\ (a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$	$\lambda\overline{(a_1; a_2; a_3)} = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$ При $\lambda<0$ вектор $\vec{a}$ і вектор $\lambda\vec{a}$ протилежно напрямлені. При $\lambda>0$ вектор $\vec{a}$ і вектор $\lambda\vec{a}$ однаково напрямлені.
Колінеарні вектори		
Ненульові вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих	 Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.	$\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $\Updownarrow$ $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ $\Updownarrow$ $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$ відповідні координати пропорційні
Скалярний добуток		
Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\varphi$ 	$\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b}\ (b_1; b_2; b_3)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат векторів
Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, тоді ці вектори перпендикулярні		
Розкладання вектора		
$\overrightarrow{m}$ – довільний вектор простору, $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ – некомпланарні (не паралельні одній площі) вектори		Завжди існує розкладання: $\overrightarrow{m} = \alpha\,\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, $(\alpha, \beta, \gamma$ – єдині)

Рис. 10. Концептуальна карта «Вектори»

Задача 8. Будівельна фірма, що виграла тендер для будівництва нового житлового комплексу, отримала в трьох банках кредити в розмірі 700, 800 і 900 *тис. грн.* відповідно під річну процентну ставку 25, 30 і 20 %. Визначити загальну суму, що має сплатити фірма наприкінці року за кредити.

Розв'язання. Розглянемо вектор кредитів

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (700;\ 800; 900)$$

та вектор процентних ставок

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) = (1{,}25;\ 1{,}3; 1{,}2).$$

Отже, керівництво фірми наприкінці року має погасити кредити та сплатити загальну суму, яку можна обчислити за формулою:

$$\vec{x} \cdot \vec{p} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = 700 \cdot 1{,}25 + 800 \cdot 1{,}3 + 900 \cdot 1{,}2 =$$

$= 875 + 1040 + 1080 = 2995$ (*тис. грн.*)

Відповідь: 2995 *тис. грн.*

Задача 9. Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», що складається з трьох видів продуктів *A, B, C* (див. в табл. 2).

Таблиця 2

Обсяги продуктів та вартість одиниці продукту в поточному й попередньому місяцях

Вид продукту	Обсяг вживання продукту	Вартість одиниці продукту в поточному місяці	Вартість одиниці продукту в попередньому місяці
A	5	2000	1500
B	8	4000	3800
C	3	3000	2500

Розв'язання. Введемо наступні вектори:

$\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) = (5;\ 8; 3)$ − вектор обсягу споживчих товарів;

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = (2000;\ 4000; 3000)$ − вектор вартості одиниці продуктів в поточному місяці;

$\overrightarrow{c_п} = (c_{1п}, c_{2п}, c_{3п}) = (1500;\ 3800; 2500)$ – вектор вартості одиниці продуктів в попередньому місяці.

Обчислимо індекс цін p (%) за формулою

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\overrightarrow{c_п} \cdot \vec{q}} \cdot 100\% = \frac{2000 \cdot 5 + 4000 \cdot 8 + 3000 \cdot 3}{1500 \cdot 5 + 3800 \cdot 8 + 2500 \cdot 3} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{10000 + 32000 + 9000}{7500 + 30400 + 7500} \cdot 100\% = \frac{51000}{45400} \cdot 100\% \approx 112{,}3\%.$$

Індекс інфляції i обчислюємо, використовуючи формулу

$$i = \frac{(\vec{c} - \overrightarrow{c_п}) \cdot \vec{q}}{\overrightarrow{c_п} \cdot \vec{q}} \cdot 100\%.$$

Визначимо координати вектора

$$\vec{c} - \overrightarrow{c_п} = (2000 - 1500; 4000 - 3800; 3000 - 2500) = (500; 200; 500).$$

Тоді індекс інфляції дорівнює:

$$i = \frac{(\vec{c} - \overrightarrow{c_п}) \cdot \vec{q}}{\overrightarrow{c_п} \cdot \vec{q}} \cdot 100\% = \frac{500 \cdot 5 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3}{1500 \cdot 5 + 3800 \cdot 8 + 2500 \cdot 3} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{2500 + 1600 + 1500}{45400} \cdot 100\% = \frac{5600}{45400} \cdot 100\% \approx 12{,}3\%.$$

Відповідь: індекс цін дорівнює $112{,}3\%$; індекс інфляції дорівнює $12{,}3\%$.

Вправи

Задача 10. Фірма для виготовлення однієї одиниці виробу витратила 38555 *грн*. Під час виробництва витрати фірми на ресурси склали: 250 одиниць сировини першого виду за ціною 65 *грн.* за одну одиницю та 300 одиниць другого виду за ціною 70 *грн.* за одну одиницю. Виготовлення одиниці виробу відбувається протягом 9 *людино-годин*. Обчислити вартість у *грн.* однієї людино-години.

Відповідь: 145 *грн./ людино-годин.*

Задача 11. Розв’язати задачу 9, якщо вихідні дані подано в таблиці 3.

Таблиця 3

Обсяги продуктів та вартість одиниці продукту

в поточному й попередньому місяцях

Вид продукту	Обсяг вживання продукту	Вартість одиниці продукту в поточному місяці	Вартість одиниці продукту в попередньому місяці
A	4	300	170
B	3	280	150
C	7	220	180

Відповідь: індекс цін дорівнює 149,8%; індекс інфляції дорівнює 49,8%.

Похідна функції

Концептуальна карта «Похідна функції» (рис. 11) складена на базі навчальний матеріал, поданого в підручнику [16, с. 132 – 155].

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Похідною функції $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Економічний зміст похідної

Еластичністю функції $y = y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'(x).$$

Правила диференціювання

Сталий множник можна виносити за знак похідної	Похідна суми диференційованих функцій дорівнює сумі їх похідних	Похідна добутку диференційованих функцій обчислюється за формулою	Похідна частки диференційованих функцій обчислюється за формулою
$(Cu)' = Cu'$	$(u + v)' = u' + v'$	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

Таблиця похідних

Степеневі функції	*Показникові функції*	*Логарифмічні функції*	*Тригонометричні функції*
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$	$(sinx)' = cosx$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$(cosx)' = -sinx$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$			$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$
$(x)' = 1$; $(C)' = 0$ $(C = const)$			$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$

Рис. 11. Концептуальна карта «Похідна функції»

Математичний апарат диференціального числення функцій однієї змінної має поширене застосування в моделюванні економічних процесів. Окреме місце в економічних дослідженнях займає поняття *виробничої функції* $y = y(x), x \geq 0, y \geq 0$ – це функціональна залежність, аргумент якої x приймає значення фактору виробництва (об'єму використаного або витраченого ресурсу), а значення функції дорівнюють об'ємам продукції, що виробляють.

Виробничі функції використовують для встановлення таких функціональних залежностей, як залежність витрат ресурсів підприємства від випуску продукції; залежність кількості виробленої продукції від часу; залежність об'ємів виробництва від обсягу продукції; залежність розміру виторгу від реалізації продукції тощо.

Розглянемо похідні кожного типу виробничої функції та надамо їх економічну інтерпретацію.

1. Розглянемо виробничу функцію $y = y(x)$ – функцію витрат ресурсів підприємства від кількості продукції x. Припускаємо, що кількість продукції збільшується на Δx. Тоді кількості продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати ресурсів підприємства $y(x + \Delta x)$.

Приріст аргументу (кількості продукції Δx) викликає приріст функції (витрат ресурсів підприємства): $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.

Тоді середній приріст витрат ресурсів підприємства (приріст витрат ресурсів на одиницю приросту кількості продукції) становить $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Границя вигляду (за умови, що вона існує та є скінченною)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

називається *граничними витратами виробництва при обсязі продукції x од.*

Граничні витрати виробництва дорівнюють швидкості зміни витрат ресурсів підприємства.

Задача 12. Задано $y = 60x - 0{,}03x^3$ *грош. од.* – залежність між витратами ресурсів підприємства y й обсягом продукції x *од.* Обчислити граничні та середні витрати підприємства за умови, що обсяг продукції становить 20 *од.*

Розв'язання. Визначаємо граничні витрати підприємства:

$$y'(x) = 60 - 0{,}03 \cdot 3 \cdot x^2 = 60 - 0{,}09x^2;$$

$$y'(20) = 60 - 0{,}09 \cdot 20^2 = 60 - 36 = 24 \text{ (\textit{грош. од.})}.$$

Функція середніх витрат підприємства на одиницю продукції визначається наступним чином:

$$z(x) = \frac{y}{x} = \frac{60x - 0{,}03x^3}{x} = 60 - 0{,}03x^2;$$

$$z(20) = 60 - 0{,}03 \cdot 20^2 = 60 - 12 = 48 \text{ (\textit{грош. од.})}.$$

Економічна інтерпретація задачі: середні витрати підприємства на виробництво одиниці продукції складають 48 *грош. од.* в той час, коли граничні витрати підприємства (додаткові витрати підприємства на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва 20 *од.* складають 24 *грош. од.*

Відповідь: граничні витрати підприємства дорівнюють 24 *грош. од.;* середні витрати підприємства дорівнюють 48 *грош. од.*

2. Розглянемо виробничу функцію $y = y(t)$ – функціональна залежність кількості виробленої продукції y за час t . Дамо аргументу t приріст Δt. Тоді період часу від t до $t + \Delta t$ кількість виробленої продукції на підприємстві зміниться від $y(t)$ до значення $y(t + \Delta t)$.

Середня продуктивність праці протягом вказаного періоду становить $\frac{\Delta y}{\Delta t}$.

Границя вигляду (за умови, що вона існує та є скінченною)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t)$$

називається *продуктивність праці в момент часу* t.

Задача 13. Залежність кількості виробленої продукції y за час t задається формулою: $y = 20t^2 + 4t + 35$ *од.* Визначити продуктивність праці в момент часу $t = 7$ *год.*

Розв'язання. Знаходимо похідну виробничої функції та її значення при $t = 7$:

$$y'(t) = 20 \cdot 2 \cdot t + 4 = 40t + 4;$$

$$y'(7) = 40 \cdot 7 + 4 = 284 \ (\text{од./год.}).$$

Відповідь: 284 (*од./год.*).

3. Розглянемо виробничу функцію $y = y(x)$ – функціональну залежність випуску продукції підприємства y від витрат ресурсу x. Припустимо, що аргумент x отримав приріст Δx. Тоді витратам ресурсу $x + \Delta x$ відповідає випуск продукції підприємства $y(x + \Delta x)$.

Приріст аргументу (витрати ресурсу Δx) викликає приріст функції (випуску продукції підприємства): $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.

Тоді середній приріст випуску продукції підприємства (приріст випуску продукції на одиницю приросту випуску продукції) становить $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Границя вигляду (за умови, що вона існує та є скінченною)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

називається *граничним продуктом підприємства при обсязі продукції x од.*

4. Нехай задана виробнича функція $y = y(x)$ – залежність розміру виторгу підприємства від реалізації x *од.* продукції. Припускаємо, що кількість реалізованої продукції збільшується на Δx, то розміру виторгу складає $y(x + \Delta x)$. Приріст аргументу (кількості одиниць реалізованої продукції Δx) викликає приріст функції (розмір виторгу від реалізації): $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.

Тоді середній приріст виторгу підприємства становить $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Границя вигляду (за умови, що вона існує та є скінченною)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$$

називається *граничним виторгом підприємства від реалізації x од. продукції.*

Задача 14. Виторг торгівельної фірми від реалізації спортивних костюмів задається залежністю: $y = 75\,x - 0{,}05x^2, 0 \le x \le 750,$ де x –

кількість одиниць костюмів, що продано. Визначити граничний виторг фірми за умови, що реалізовано:

1) 120 костюмів;

2) 200 костюмів.

Розв'язання. Визначимо граничний виторг фірми від реалізації x од. костюмів:

$$y'(x) = 75 - 0{,}05 \cdot 2 \cdot x = 75 - 0{,}1x.$$

Якщо торгівельна фірма реалізує 120 костюмів, то її граничний виторг складає:

$$y'(120) = 75 - 0{,}1 \cdot 120 = 75 - 12 = 63 \text{ (\textit{грош. од.})}.$$

У разі реалізації 200 костюмів граничний виторг складає:

$$y'(200) = 75 - 0{,}1 \cdot 200 = 75 - 20 = 55 \text{ (\textit{грош. од.})}.$$

Відповідь: 1) 63 *грош. од.*; 2) 55 *грош. од.*

Зауваження. До економічного змісту похідної та означення еластичності функції ми будемо звертатися в розділі 3.2 під час методичної розробки уроку на тему: «Екстремальні задачі в економічному аналізі».

Вправи

Задача 15. Залежність між витратами ресурсів підприємства y й обсягом продукції x *од.* задається формулою $y = 20x - 0{,}02x^3$ *грош. од.* Визначити граничні та середні витрати підприємства за умови, що обсяг продукції становить 10 *од.*

Відповідь: граничні витрати підприємства дорівнюють 14 *грош. од.;* середні витрати підприємства дорівнюють 18 *грош. од.*

Задача 16. Залежність між витратами ресурсів підприємства y й обсягом продукції x *од.* задається формулою $y = x^3 - 3x^2 + 15$ *грош. од.*

Визначити:

1) обсяг виробництва, за якого середні витрати підприємства будуть мінімальними;

2) побудувати криві повних, середніх та граничних витрат підприємства.

Відповідь: 2 *од.*

Задача 17. Готель має 60 номерів. Кількість зайнятих номерів, вартість проживання в яких становить 500 *грн.* за добу, складає 50. За умови, що вартість проживання до 400 *грн.* за добу, кількість зайнятих номерів зростає та становить 55 номерів. Визначити граничний виторг готелю, вважаючи, що закон попиту є лінійним. За якою вартістю номера значення граничного виторгу є максимальним?

Визначений інтеграл

Концептуальна карта «Визначений інтеграл» (рис. 12) складена на базі навчальний матеріал, поданого в підручнику [17, с. 88 − 94].

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ

Первісна та невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на даному інтервалі, якщо для будь-якого x із цього інтервалу виконується рівність:

$$F'(x) = f(x)$$

Сукупність всіх первісних даної функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається наступним чином:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таблиця невизначених інтегралів

Степеневі функції	*Показникові функції*	*Тригонометричні функції*
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \;\; (x > 0)$	$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \;\; (x \neq 0)$		$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
$\int dx = x + C$		$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$
$\int 0 \cdot dx = C$		
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ $(x \neq 0)$		

Визначений інтеграл

Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ визначена й неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – її довільна первісна на цьому відрізку, то має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Застосування визначеного інтеграла в економіці

Визначення обсягу продукції	*Дисконтована вартість грошового потоку*	*Визначення надлишок для споживача й виробника*
$q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt,$ $f(t)$ – продуктивність праці, t – час, q – обсяг продукції	$P_v = \int_0^T I\,(t)e^{-pt}dt,$ P_v – дисконтована вартість грошового потоку, $I\,(t)$ – швидкість грошового потоку в момент часу t, p – річна процентна ставка	$CS = \int_0^{q_0} p(q)dq - p_0 q_o,$ $PS = p_0 q_o - \int_0^{q_0} p(q)dq,$ CS – надлишок для споживача, PS – надлишок для виробника, q – кількість товару, p – ціна товару (вартість однієї одиниці), $(p_0;\, q_0)$ – точка рівноваги попиту й пропозиції

Рис. 12. Концептуальна карта «Визначений інтеграл»

Визначений інтеграл має велике значення в економічному аналізі. Наведемо декілька прикладів застосування визначеного інтеграла під час моделювання динамічних процесів, визначення середніх значень економічних функцій, обчислення дисконтованої вартості грошового потоку тощо.

1. Припустимо, що підприємство виробляє деяку продукцію. Відома залежність між f − продуктивністю праці та t – часом $f = f(t)$. Тоді обсяг продукції q, що виробляється на підприємстві протягом інтервалу часу $[t_1;\ t_2]$, визначається за формулою $q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.

Отже, *економічний зміст визначеного інтеграла* полягає в тому, що його значення дорівнює обсягу продукції, що виробляється на підприємстві з заданою продуктивністю праці $f = f(t)$ протягом інтервалу часу $[t_1;\ t_2]$.

Задача 18. Задана продуктивність праці на промисловому підприємстві $f(t) = 7t - t^2$. Тривалість робочого дня на цьому підприємстві становить 8 годин. Визначити обсяг виробленої продукції:

1) протягом всього робочого дня;

2) протягом інтервалу часу [3; 6].

Виконати порівняння обсягів виробленої продукції в процентному відношенні.

Розв'язання. Визначаємо обсяг виробленої продукції $q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.

1) $q_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_0^8 (7t - t^2)\,dt = \left(7 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^8 = \left(7 \cdot \frac{8^2}{2} - \frac{8^3}{3}\right) -$

$$-\left(7 \cdot \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = 224 - \frac{512}{3} = \frac{160}{3}.$$

2) $q_2 = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_3^6 (7t - t^2)\,dt = \left(7 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_3^6 = \left(7 \cdot \frac{6^2}{2} - \frac{6^3}{3}\right) -$

$$-\left(7 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) = (126 - 72) - (31{,}5 - 9) = 54 - 22{,}5 = 31{,}5.$$

Процентне відношення обсягів виробленої продукції становить:

$$k = \frac{q_2}{q_1} \cdot 100\% = \frac{31{,}5}{\frac{160}{3}} \cdot 100\% \approx 59\%.$$

Відповідь: 1) $\frac{160}{3}$; 2) 31,5; $k \approx 59\%$.

2. Під час розв'язання економічних задач часто доводиться звертатися до однієї з властивості визначеного інтеграла, що має назву

Теорема про середнє значення. Якщо функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a; b]$, то існує точка $c \in [a; b]$ так, що виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Позначимо

$C = C(t)$ – змінні витрати підприємства;

$R = R(t)$ – дохід підприємства;

$P = P(t)$ – прибуток підприємства.

Тоді їх середні значення протягом часу від $t = t_0$ до $t = t_1$ обчислюються за формулами:

$$C_{\text{сер}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} C'(t)dt;\ R_{\text{сер}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} R'(t)dt;\ P_{\text{сер}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} P'(t)dt.$$

Якщо $C'(x), R'(x), P'(x)$ – функції граничних витрат, доходу та прибутку підприємства відповідно, то при реалізації x одиниць продукції зміни витрат доходу та прибуток за умови збільшення реалізації виробленої продукції від a до b одиниць можна визначити відповідно за формулами:

$$C(b) - C(a) = \int_a^b C'(x)\ dx;$$

$$R(b) - R(a) = \int_a^b R'(x)\ dx;$$

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\ dx.$$

Задача 19. Граничний прибуток підприємства задається функцією $P'(x) = 27{,}8 - 0{,}01x$. Реалізація продукції, що вироблена на підприємстві, збільшується від 1000 до 1800 одиниць. Визначити зростання прибутку підприємства.

Розв'язання. Для розв'язання задачі використовуємо формулу

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\ dx.$$

Із умови задачі $a = 1000, b = 1800$.

$$P(1800) - P(1000) = \int_a^b P'(x)\ dx = \int_{1000}^{1800} (27{,}8 - 0{,}01x)\ dx =$$

$$= \left(27{,}8 \cdot x - 0{,}01 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1000}^{1800} = (27{,}8 \cdot 1800 - 0{,}005 \cdot 1800^2) -$$

$$-(27{,}8 \cdot 1000 - 0{,}005 \cdot 1000^2) = 33840 - 22800 = 11040 \ (\textit{грош. од.})$$

Відповідь: прибуток підприємства зростає на 11040 *грош. од.*

3. *Дисконтованою вартістю грошового потоку* називають вартість інвестицій або майбутнього грошового потоку у визначений момент часу, що розраховується з врахуванням відповідного коефіцієнта дисконтування.

Введемо наступні позначення:

P_v – дисконтована вартість грошового потоку;

$I\ (t)$ – швидкість грошового потоку в момент часу t;

p – річна процентна ставка.

Тоді дисконтована вартість грошового потоку (present value) через T років обчислюється за формулою:

$$P_v = \int_0^T I\ (t) e^{-pt} dt.$$

Задача 20. Обчислити дисконтовану вартість грошового потоку через три роки, якщо річна процентна ставка складає 5%, а швидкість грошового потоку задається формулою: $I\ (t) = e^t + 3$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для обчислення дисконтованої вартості грошового потоку через $T = 3$ років, маємо:

$$P_v = \int_0^T I\ (t) e^{-pt} dt = \int_0^3 (e^t + 3) e^{-0{,}05}\ dt = \int_0^3 e^{(1-0{,}05)t} dt +$$

$$+\int_0^3 3e^{-0,05t}dt = \left.\frac{e^{(1-0,05)t}}{1-0,05}\right|_0^3 + 3\cdot\left.\frac{e^{-0,05t}}{-0,05}\right|_0^3 = \left(\frac{e^{(1-0,05)\cdot 3}}{1-0,05} - \frac{e^{(1-0,05)\cdot 0}}{1-0,05}\right) +$$

$$+3\cdot\left(\frac{e^{-0,05\cdot 3}}{-0,05} - \frac{e^{-0,05\cdot 0}}{-0,05}\right) = \frac{e^{2,85}-1}{1-0,05} - 3\cdot\frac{e^{-0,15}-1}{0,05} =$$

$= \frac{e^{2,85}-1}{0,95} - 60\cdot(e^{-0,15}-1) \approx 17,145 - (-8,358) = 25,503$ (*млн. грн.*).

Відповідь: $25,503$ *млн. грн.*

У роботі [4, с. 206] наведено ще один приклад застосування визначеного інтеграла до розв'язання задачі про реалізацію товару та надана геометрична інтерпретація закону попиту та пропозиції.

Вправи

Задача 21. Обчислити обсяг виробленої продукції, що виготовляється на підприємстві протягом п'яти годин, якщо продуктивність праці $f(t)$ змінюється в залежності від часу t за формулою $f(t) = 6t - t^2$.

Відповідь: $\frac{100}{3}$.

Задача 22. Визначити середнє значення витрат підприємства, якщо обсяг виробництва змінюється від 0 до п'яти одиниць, а витрати підприємства K в залежності від обсягу виробництва x задаються функцією

$$K(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: 31 *грош. од.*

Задача 23. Граничний прибуток підприємства задається функцією $P'(x) = 0,5x + 8$, де x – кількість одиниць виробленої продукції. Визначити загальний прибуток від реалізації 1500 одиниць продукції.

Відповідь: 574 500 *грош. од.*

Задача 24. Обчислити дисконтовану вартість грошового потоку через п'ять років, якщо річна процентна ставка складає 3%, а швидкість грошового потоку задається формулою: $I\ (t) = 2e^t$.

Відповідь: $261,32$ *млн. грн.*

Диференціальні рівняння

Елементи диференціальних рівнянь є потужним інструментом під час вивчення економічних моделей. Але в освітній програмі здобувачів середньої освіти цій темі приділяється небагато часу або взагалі вона виноситься на самостійне вивчення (є елементом позанавчальної та проєктної роботи).

Представимо деякі методичні рекомендації щодо вивчення елементів диференціальних рівнянь у закладах середньої освіти.

Диференціальним рівнянням називають рівняння, в якому встановлюється залежність між незалежними змінними, числовими значеннями та невідомими функціями й їх похідними.

Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної невідомої функції, що входить до диференціального рівняння.

Будемо розглядати диференціальні рівняння 1 -го порядку:

$$F(x, y, y') = 0 \text{ або } y' = f(x, y).$$

Розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називається функція $y = y(x)$, яка диференційована на деякому інтервалі й така, що після підставлення її до рівняння $y' = f(x, y)$ вона перетворює його на тотожність.

Початковими умовами називаються додаткові умови, що накладаються на функцію $y = y(x)$ під час розв'язку задачі, яка приводить до диференціального рівняння.

Для диференціального рівняння 1-го порядку початкова умова має вигляд: $y(x_0) = y_0$ (припускається, що функція $y = y(x)$ неперервна в точці x_0).

Загальним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називається функція $y = y(x, C)$, що залежить від незалежної змінної x та довільної сталої C та при цьому виконуються умови:

1) за будь- якого конкретного значення сталої C функція $y = y(x, C)$ є розв'язком диференціального рівняння;

2) за будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$ можна визначити таке значення $C = C_0$, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє цю початкову умову.

Частинним розв'язком диференціального рівняння 1-го порядку називають розв'язок, що отримано з загального розв'язку підставленням конкретного значення сталої C.

Диференційні рівняння використовують під час моделювання в економіці. За допомогою диференціальних рівнянь можна описувати процеси, явища в динаміці, аналізувати їх взаємозв'язки протягом часу та прогнозувати їх поведінку. Цей математичний апарат дозволяє формувати ключові компетентності майбутніх економістів [5, с. 147-149]. Розглянемо декілька прикладів застосування теорії диференціальних рівнянь у моделюванні економічних процесів.

Задача 25. Відомо, що швидкість знецінювання обладнання підприємства в наслідок його зносу в кожний момент часу t пропорційна фактичній вартості. Початкова вартість дорівнює P_o. Визначити вартість обладнання через п'ять років.

Розв'язання. P_o – вартість обладнання в момент часу $t = 0$. Знецінювання обладнання дорівнює $P_o - P$, де $P = P(t)$. Тоді швидкість знецінювання обладнання можна виразити наступним чином: $(P_o - P)' = -P'$.

За умовою задачі швидкість знецінювання обладнання підприємства в наслідок його зносу в кожний момент часу t пропорційна фактичній вартості, отже, отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку: $-P' = kP$ з початковою умовою $P(0) = P_o$.

Розв'язуємо диференціальне рівняння:

$$-\frac{dP}{dt} = kP;\ -dP = kPdt.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dP}{P} = -kdt.$$

Інтегруємо отриману рівність:

$$\int \frac{dP}{P} = -\int kdt;\ \ln|P| = -kt + C;\ \ln|P| = -kt + \ln|C_1|;$$

$$\ln|P| - \ln|C_1| = -kt;\ \ln\left|\frac{P}{C_1}\right| = -kt;\ \frac{P}{C_1} = e^{-k}\ ; P = C_1 \cdot e^{-kt}.$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння, що описує процес зміни вартості обладнання на підприємстві має вигляд: $P = C_1 \cdot e^{-k}$.

Оскільки $P(0) = P_o$, то $P(0) = C_1 \cdot e^{-k\cdot 0} = C_1$. Із початкової умови визначили, що довільна стала C_1 має дорівнювати P_o.

Остаточно, частинний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$P(t) = P_o \cdot e^{-kt}.$$

Визначимо вартість обладнання через п’ять років його експлуатації:

$$P(5) = P_o \cdot e^{-5k}.$$

Відповідь: $P_o \cdot e^{-5k}$.

Задача 26. [3, с. 64] Попит і пропозиція на продукцію визначаються рівняннями $q = 4p' - 2p + 39$ і $s = 44p' + 2p - 1$, p – ціна продукції, p' – похідна ціни за часом (тенденція формування ціни). Відомо, що в початковий момент часу $t = 0$ ціна продукції p за одну одиницю складала 5 грош. од. Визначити закон зміни ціни продукції в залежності від часу за умови, що виконується вимога відповідності попиту пропозиції.

Розв’язання. Для виконання вимоги відповідності попиту пропозиції має виконуватися рівність:

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1,$$

або $10p' + p - 10 = 0$.

Розв’язуємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$-10\frac{dp}{dt} = p - 10;\ \frac{dp}{p-10} = -\frac{dt}{10};\ \ln|p-10| = -\frac{t}{10} + \ln|C|;$$

$$\ln|p-10| - \ln|C| = -\frac{t}{10};\ \ln\left|\frac{p-10}{C}\right| = -\frac{t}{10};\ \frac{p-10}{C} = e^{-0,1t}.$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$p = C \cdot e^{-0,1t} + 10.$$

Оскільки початковий момент часу $t = 0$ ціна продукції p за одну одиницю складала 5 грош. од., то початкова умова може бути записана наступним чином: $p(0) = 5$.

Визначимо частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$p(0) = C \cdot e^{-0,1\cdot 0} + 10 = 5; C = -5;$$

$$p_{\text{ч}} = -5 \cdot e^{-0,1t} + 10.$$

Відповідь: для того, щоб між попитом і пропозицією зберіглася рівновага, необхідно, щоб ціна змінювалась за формулою $p = -5 \cdot e^{-0,1t} + 10$.

Задача 27. [5, с. 148] На початковий момент часу $t = 0$ чоловік мав заощаджень у розмірі 50000 *грн.* За три їх розмір зменшився до 45000 *грн.* Визначити розмір заощаджень чоловіка через 8 років.

Розв'язання. Відомо, що швидкість знецінення заощаджень через інфляцію пропорційна до їхнього залишкового розміру.

Позначимо через y_0 – початковий розмір заощаджень. Тоді знецінення заощаджень через t років становить $y_0 - y(t)$, а швидкість їх знецінення $\frac{d(y_0 - y(t))}{dt} = ky(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Розв'яжемо диференціальне рівняння 1-го порядку:

$$-\frac{dy}{dt} = ky;\ dy = -kydt;\ \frac{dy}{y} = -kdt.$$

Інтегруємо отриману рівність:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int kdt\,;\ \ln|y| = -kt + C;\ \ln|y| = -kt + \ln|C_1|\,;$$

$$\ln|y| - \ln|C_1| = -kt;\ \ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = -kt;\ \frac{y}{C_1} = e^{-k}\ ; y = C_1 \cdot e^{-kt}.$$

Оскільки $y(0) = 50000$, то $y(0) = C_1 \cdot e^{-k\cdot 0} = C_1$. Із початкової умови визначили, що довільна стала C_1 має дорівнювати 50000.

Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$P(t) = 50000 \cdot e^{-kt}.$$

Визначимо коефіцієнт пропорційності:

$$P(3) = 50000 \cdot e^{-3k} = 45000;\ e^{-3k} = \frac{45000}{50000} = 0{,}9.$$

Логарифмуємо отриману рівність:

$$-3k = \ln 0{,}9; k = \frac{\ln 0{,}9}{-3} \approx 0{,}035.$$

Отже, функція, що описує зміну розмірів заощаджень, має вигляд:

$$P(t) = 50000 \cdot e^{-0{,}035t}.$$

Обчислимо розмір заощаджень чоловіка через 8 років:

$$P(8) = 50000 \cdot e^{-0{,}035 \cdot 8} \approx 37789\ (\textit{грн.}).$$

Відповідь: 37789 *грн.*

Вправи

Задача 28. Відомо, що сумарний прибуток підприємства є функцією $y(x)$, де x − обсяг виробленої продукції. Граничний прибуток підприємства задається рівністю $y' = 30000 - x$. Визначити функцію сумарного прибутку підприємства за умови, що нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток.

Відповідь: $y = 30000x - \frac{x^2}{2}$.

Задача 29. Попит і пропозиція на продукцію визначаються рівняннями $q = -2p' - 2p + 40$ і $s = -3p' + 2p + 60$, p – ціна продукції, p' − похідна ціни за часом (тенденція формування ціни). Відомо, що в початковий момент часу $t = 0$ ціна продукції p за одну одиницю складала 20 грош. од. Визначити закон зміни ціни продукції в залежності від часу за умови, що виконується вимога відповідності попиту пропозиції.

Відповідь: $p = 25 \cdot e^{4t} - 5$.

Задача 30. Виторг від реалізації x одиниць продукції фірми задається функцією $U(x)$. Граничний виторг визначається співвідношенням $U' = x + 100$. Визначити виторг фірми за реалізовану продукцію, якщо виторг від реалізації 100 одиниць продукції становить 40 000 *грош. од.*

Відповідь: $U(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25000$.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Сформульовано принципи та методи побудови математичних моделей в економічній математиці; надана інфографіка загальних вимог до прикладних задач.

2. Здійснено підбір прикладних задач економічного змісту; наведено приклади побудови математичних моделей та їх розв’язків за допомогою властивостей лінійної функції, векторів, елементів диференціального й інтегрального числення функцій однієї змінної, елементів теорії диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 3

ПРОЄКТНА ТЕХНОЛОГІЯ ТА ЕКОНОМІЧНА МАТЕМАТИКА

3.1. Метод проєктів як інноваційна методика профільної середньої освіти

Відомий знавець дитячої педагогіки Г.Г. Ващенко виділив проєктну роботу за її здатність забезпечити «пристосування змісту та методів освітньої роботи до особливостей дитячої природи». Основна мета методу проєктів в середній освіті – це пробудження інтересу учнів до розв'язання проблемних задач через практичну діяльність, і застосування при цьому всіх набутих знань з різних предметів. Все це шляхом самостійної групової або самоорганізації.

Педагогічний і психологічний аспекти проєктної діяльності

Робота над проєктами надає дітям змогу проявити свої знання і практичні навички та вміння, творчі здібності, здатність до самостійності і водночас роботі в команді, креативність при пошуку рішення задачі проєкту [8, 11, 21].

Чинники успішного впровадження проєктної діяльності:

- *налагоджена комунікація* між вчителем та здобувачем;
- *залученість* всього оточення учня, від батьків, а інколи й усього колективу закладу середньої освіти, до однокласників і вчителя;
- *процес навчання* ґрунтується на зрозумілих для дитини принципах звичайного життя, що важливий для неї;
- *вміння зацікавити здобувачів цікавою проблемою*, що спонукає до пошуку відповіді на неї;
- *комфортні, підготовлені робочі умови* для самостійної роботи, коли вчитель не вмішується;
- *концентрація на результаті, а не на змаганнях міх учасниками* задля збереження легкої робочої діяльності, серед учасників проєктної команди;
- *отримання дітьми позитивного зворотнього зв'язку* щодо їхніх власних результатів, від атмосфери в команді, від командного духа [22].

Розглянемо основні етапи та типи проєкту. Робота над проєктом вимагає залученості як педагога, так і дітей. Вона розподіляється наступним чином по етапах виконання проєкту (рис. 13).

Рис. 13. Розподіл обов'язків на етапах виконання проєкту

Алгоритм організації проєктної діяльності [24]

Етап 1. На основі навчальних планів і інтересів учнів обираємо тему проєкту.

Етап 2. Формулюємо учням мету й завдання проєктної діяльності.

Етап 3. Визначаємо вимоги до кінцевого продукту проєкту та його презентації.

Етап 4. Плануємо хід проєкту, визначаємо командні ролі.

Етап 5. Запрошуємо учнів іншого класу, батьків, працівників навчального закладу до участі у проєктній діяльності, ознайомлюємо їх із темою та завданнями проєкту.

Етап 6. Працюємо над реалізацією проєкту.

Етап 7. Презентуємо продукт діяльності.

Етап 8. Аналізуємо результат роботи над проєктом, визначаємо наступний крок.

Важливо, щоб між учасниками робочого процесу над проєктом процесу переважав демократичний підхід (рівний-рівний відносини), що передбачає розуміння і прийняття кожного учня таким, який він є, прояв взаємоповаги один до одного, надання дітям підтримки з боку вчителя.

До організації проєктної діяльності дітей можна залучати їхніх батьків та родичів, в залежності від типу проєкту (рис.14). Визначивши тему проєкту, вчитель і учні розробляють план робіт, які потім можуть виконувати разом з іншими дорослими членами команди.

Рис. 14. Типи проєктів за домінантною діяльністю

Розвивальний потенціал методу проєктів

Суть методу проєктів – мотивувати учнів до розв'язання різних проблем, що потребує від них певних знань і дій. Через проєктну діяльність учні застосовують свої знання у різних умовах, отримують практичний результат та набувають нових знань і досвіду. У сучасному середовищі «дорослих задач» метод проєктної роботи є найбільш застосованим. Тому це знаходить відображення і в процесі здобуття середньої освіти.

Проєктна діяльність – є формою отримання знань, яка базується на самоорганізації, відповідальності за себе і результат, здатності приймати рішення, здатності враховувати інтерес учасників проєктної команди, навчання через власний досвід. Крім того, часто проєктна робота реалізується через міжпредметні зв'язки поза межами програми одного конкретного предмету [24].

Робота в проєкті формує у здобувачів актуальний досвід (рис. 15), розвиває компетентності. На кожному етапі роботи над проєктом відбувається спілкування між учасниками проєктної команди й навколишнім середовищем, учні на практиці отримують нову, корисну інформацію, відкривають для себе нові факти і висновки, формують нові знання, змінюють погляд на відомі факти.

У проєкті формуються аналітичні навички, здатність виділити головне і найцінніше, навички збору конкретних фактів, їх порівняння та систематизація, навичок робити висновок тощо. Учасники проєкту демонструють власні і відчувають емоції та почуттями інших, отримують досвід роботи в групі.

Рис. 15. Вплив проєктної роботи на здобувачів

Взаємини між співучасниками одного проєкту формують моральні якості здобувачів, розвиваються комунікативні навички в спілкуванні з рівними і старшими. Складнощі в спілкування підштовхують до самоаналізу, до аналізу поведінки оточуючих і власного розвитку задля досягнення результату. Завдяки реальності проблеми проєкту діти мають змогу відчути власну затребуваність в світі дорослих і рівних завдяки від власній роботі і досягненням.

Будь-яка корисна, розвиваюча діяльність, в якій дитина бере участь, не лише дозволяє легко запам'ятати нову інформацію і навички, а й дає учасникам колосальне задоволення від процесу і результату. Ось чому навчальні заклади все частіше створюють освітні проєкти, які спонукають дитину до пізнавальної діяльності та розширюють рівень обізнаності дитини.

Переваги проєктної форми роботи виявляються в наступному [24]:

- ✓ навчання в проєкті відбувається ненав'язливо, в звичній життєвій ситуації, через набування власного досвіду, бо ціль проєктної роботи полягає в розв'язанні проблеми власним способом, що має заохочувати дітей до роботи й навчання;
- ✓ розвиваються навички аналізу, синтезу, класифікації, узагальнення, порівняння;
- ✓ стимулює пізнавальну активність й допитливість;
- ✓ спрощується сприймання й засвоєння навчального матеріалу;
- ✓ формується цілісне бачення картини світу.

Залежно від типу проєкту, робота над ним вимагає від здобувачів різноманіття в методах і способах роботи над ним, один з яких лідирує.

Проєктна діяльність може бути різною за складністю, за тривалістю - короткотривалими (упродовж одного дня, заняття) та довготривалими (до двох тижнів).

Масштабні за проблематикою проєкти складаються із декількох проєктів, результати кожного з яких окремо презентують.

Отже, метод проєктів актуальний і дуже ефективний. Він дає можливість дітям проводити власні експерименти, усвідомлювати отримані власним досвідом знання, всебічно розвиватися.

3.2. Smart-урок на тему: «Екстремальні задачі в економічному аналізі»

Тема: «Екстремальні задачі в економічному аналізі»

Вчитель-розробник: Печерська Олена Валеріївна

Час: 45 хв

Навчальна мета: закріпити теоретичні знання з теми «Дослідження функції на екстремум. Екстремальні задачі в економічному аналізі», набути навички й вміння розв'язувати економічні задачі за допомогою похідної; сприяти розвитку логічного мислення.

Виховна мета: розвивати у здобувачів навички аналізу та увагу, стратегічне мислення, вміння систематизувати та узагальнювати факти, робити висновки та приймати рішення, сприяти розвитку творчого підходу до розв'язання завдань.

Тип уроку: комбінований урок.

Клас: 10 клас.

Обладнання: проєктор, смартфони або планшети з доступом до інтернету.

Очікувані результати: опанування здобувачами основних формул диференціального числення та формування практичних навичок під час розв'язання прикладних задач; учні навчяться застосовувати похідну для розв'язання задач економічного змісту та будуть здатні орієнтуватися в ситуаціях, що виникають у реальному житті й потребують відповідних знань.

Хід уроку

І. Організаційний момент: привітання, перевірка готовності до заняття (1 хв).

На початку уроку вчитель перевіряє присутність здобувачів та їх налаштованість на роботу.

Вчитель: Оголошує тему уроку: «Екстремальні задачі в економічному аналізі». Сьогодні ми розберемо приклади розв'язання прикладних задач на застосування економічного змісту похідної функції, дізнаємося про такі економічні показники, як сумарні витрати, загальна вартість виробленого продукту, попит на товар, сумарний виторг тощо, навчимося надавати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Готуйтеся до цікавих задач та неочікуваних ситуацій! Нехай наш урок буде продуктивним та цікавим для кожного з вас! Пропоную перейти до основної частини нашого уроку та ознайомитись із новим матеріалом.

ІІ. Актуалізація знань (5 хв).

Вчитель: Перш ніж ми зануримося в роботу, повторимо основні теоретичні положення, що нам знадобляться сьогодні протягом уроку:

- Що називають похідною функції в точці?
- Як визначити похідну степеневої, показникової, логарифмичної функцій?
- За якими формулами знаходять похідну тригонометричних функцій?
- Сформулюйте основні правила диференціювання.
- Продовжить речення: «Функція зростає (спадає) на заданому інтервалі, якщо ……».
- Які точки називають критичними точками функції?
- Продовжить речення: «Точку x_0 називають точкою максимуму (мінімуму) функції, якщо …….».
- Сформулюйте необхідну та достатню умови екстремуму функції.

III. Викладання нового матеріалу (25 хв)

Вчитель: сформулюємо *економічний зміст похідної:*

Еластичністю функції $y = y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'(x).$$

Розглянемо функцію $K = K(x)$ – функцію витрат ресурсів підприємства від кількості продукції x.

Границя вигляду (за умови, що вона існує та є скінченною)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$$

називається *граничними витратами виробництва при обсязі продукції x од*.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількості продукції, що випускається) x і визначаються не постійними виробничими затратами, а тільки змінними (на сировину, паливо й т.і.)

Задача 1. Загальна вартість продукції, що виробляється на підприємстві, задається формулою

$$C(q) = 1500500 + 1200q + 0{,}5q^2,$$

де q – кількість одиниць продукції (рис. 16). Скільки одиниць продукції потрібно виробити, щоб середня вартість продукції була мінімальна?

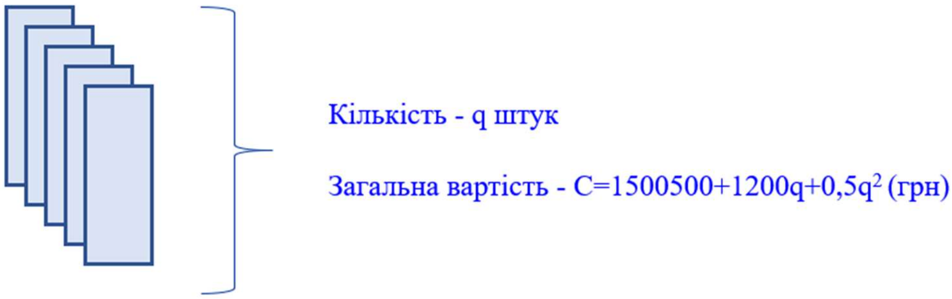


Рис.16. Ілюстрація до задачі 1

Розв'язання. Для того, щоб визначити середню вартість одиниці продукції, необхідно загальну вартість поділити на кількість продукції. Припустимо, що загальна вартість ста одиниць продукції складає 2750 *грн.*, то середня вартість одиниці продукції становить 2750:100=27,5 (*грн.*).

Складаємо математичну модель задачі, тобто записуємо функцію, що задає середню вартість однієї одиниці продукції:

$$f(q) = \frac{C}{q} = \frac{1500500}{q} + 1200 + 0{,}5q.$$

Визначимо похідну $f'(q) = -\frac{1500500}{q^2} + 0{,}5$. Якщо $f'(q) = 0,$ то

$$\frac{1500500}{q^2} = 0{,}5.$$

або $q^2 = \frac{1500500}{0{,}5} = 3001000$. Звідси $q_0 \approx 1732{,}34$ (*од*). При переході через точку $q_0 \approx 1732{,}34$ знак $f'(q)$ змінюється з «-» на «+», отже, точка q_0 є точкою мінімуму функції $f(q)$.

Економічна інтерпретація. Оскільки мова йде про продукцію, то кількість не може бути величиною дрібною. Отже, результат маємо округлити до найменшого цілого числа, $q = 1732$ одиниці. Мінімальна середня вартість продукції дорівнює:

$f(1732) = \frac{1500500}{1732} + 1200 + 0{,}5 \cdot 1732 \approx 866 + 1200 + 866 = 2932$ (*грн.*).

Задача 2. Задана функція попиту $q(p) = 50 - p$, де p – ціна продукції. Визначити еластичність попиту.

Розв'язання. Запишемо формулу для визначити еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'(p).$$

Тоді $E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'(p) = \frac{p}{50-p} \cdot (-1) = \frac{p}{p-50}$. Якщо ціна $p = 5$, то при її підвищення на 1% попит знизиться на $\frac{1}{9}$.

Економічна інтерпретація. Еластичність попиту як функції ціни визначає тенденцію зміни попиту на продукцію за умови, що ціна зросте на 1%.

Задача 3. Статистичним шляхом встановлено, що обсяг продукції цеху (*ум. од.*) протягом робочого дня задається функцією:

$$u(t) = -\frac{20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300,$$

де t – час у годинах ($0 \le t \le 8$) (зміна триває не більше 8 годин).

Визначити:

а) продуктивність праці, її швидкість та темп її зміни через 3 години після початку роботи;

б) визначити, в який момент часу продуктивність праці буде найбільшою.

Результат пояснити аналітично і графічно. Зробити економічний аналіз результатів.

Розв'язання.

а) Продуктивність праці $z(t) = u'(t)$, тому

$$z(t) = \left(-\frac{20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300\right)' = -20t^2 + 120t + 140 \text{ (од./год.)}$$

Продуктивність через три години після початку роботи становить:

$$z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140 = -180 + 360 + 140 = 320.$$

Швидкість зміни продуктивності знайдемо як першу похідну від $z(t)$:

$$z'(t) = (-20t^2 + 120t + 140)' = -40t + 120.$$

Обчислимо швидкість зміни продуктивності через три години після початку роботи: $z'(3) = -40 \cdot 3 + 120 = 0$.

Далі визначаємо темп зміни продуктивності:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-40t + 120}{-20t^2 + 120t + 140}$$

та обчислюємо його значення через три години після початку роботи:

$$\frac{z'(3)}{z(3)} = \frac{-40 \cdot 3 + 120}{-20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140} = \frac{0}{320} = 0.$$

б) Графік функції продуктивності праці являє собою параболу, гілки якої спрямовані вниз. Отже, найбільше значення цієї функції буде досягатися в точці, що є абсцисою вершини параболи. Для побудови графіка функції обчислимо координати вершини параболи:

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\cdot(-2\ \ )} = 3,\ z(t_0) = z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140 = 320.$$

Вершина параболи – точка $M(3; 320)$, гілки параболи опущено донизу. Знайдемо точки перетину параболи з віссю абсцис:

$$-20t^2 + 120t + 140 = 0$$

$$-t^2 + 6t + 7 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot 7 = 64$$

$$t_1 = \frac{-6 - 8}{-2} = 7; \quad t_2 = \frac{-6 + 8}{-2} = -1$$

Для знаходження точки перетину з віссю ординат покладаємо $t = 0$ та обчислюємо відповідне значення функції:

$$z(0) = -20 \cdot 0 + 120 \cdot 0 + 140 = 140.$$

Намалюємо графік продуктивності праці (рис. 17). Із графіка можна побачити, що продуктивність праці зростає в перші 3 години роботи, а потім поступово знижується до кінця робочого дня.

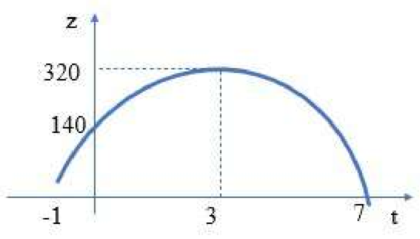


Рис. 17. Графік продуктивності праці

Вчитель: Перейдемо до розв'язання практичної задачі, яка виникла у підприємця під час роздумів про майбутній напрямок розвитку виробництва.

Отже, власник підприємства має капітал у 7 *млн грн*. Його можна розмістити в банку під 40% річних або інвестувати у виробництво, причому ефективність вкладення очікується в розмірі 250%. Витрати задаються квадратичною залежністю $\frac{x^2}{20}$**.** Прибуток від виробництва оподатковується в p%.

Допоможімо власнику підприємства визначитися: при яких значеннях p вкладення у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу в банку?

Складаємо математичну модель задачі.

Увесь капітал 7 *млн. грн*. розділимо на частини:

x – інвестування у виробництво, $(7-x)$ – розміщення в банку під відсотки.

Тоді через рік із банку можна отримати ті гроші, що вклали, й плюс відсотки $(7-x)+(7-x)\cdot 0{,}4 = 1{,}4\cdot(7-x)$ (*млн. грн.*). Дохід від інвестування у виробництво через рік становитиме (враховуючи нараховані 250%): $x+2{,}5x = 3{,}5x$ (*млн. грн.*).

Тоді прибуток від виробництва – це дохід мінус витрати $\frac{x^2}{20}$, тобто $3{,}5x-\frac{x^2}{20}$ (*млн. грн.*). Чистий прибуток від виробництва дорівнюватиме

$$3{,}5x-\frac{x^2}{20}-(3{,}5x-\frac{x^2}{20})\frac{p}{100},$$

оскільки прибуток оподатковується в p %.

Позначимо через $i=\frac{p}{100}$, тоді

$$3{,}5x-\frac{x^2}{20}-\left(3{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)\frac{p}{100}=\left(3{,}5x-\frac{x^2}{20}\right)(1-i).$$

Через рік загальна сума (від розміщення вкладу в банку та від виробництва) прибутку становитиме:

$$S(x) = 1{,}4(7 - x) + \left(3{,}5x - \frac{x^2}{20}\right)(1 - i).$$

Для розв’язання завдання необхідно визначити найбільше значення цієї функції на відрізку [0,7]. Для цього знаходимо похідну функції $S(x)$:

$$S'(x) = 1{,}4(-1) + \left(3{,}5 - \frac{2x}{20}\right)(1 - i) = -1{,}4 + \left(3{,}5 - \frac{x}{10}\right)(1 - i).$$

Прирівнюємо $S'(x)$ до нуля та знаходимо критичну точку функції:

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -1{,}4 + \left(3{,}5 - \frac{x}{10}\right)(1 - i) = 0 \Rightarrow x_0 = 35 - \frac{14}{1 - i}.$$

Отже, критична точка $x_0 = 35 - \frac{14}{1-i}$. Із умови задачі випливає, що ця точка має належати відрізку [0,7], тобто виконуються нерівності:

$$0 \leq x_0 \leq 7 \ \Rightarrow 0 \leq 35 - \frac{14}{1 - i} \leq 7.$$

У результаті розв’язання нерівностей, враховуючи економічний зміст, отримаємо: $i \leq 0{,}6$.

Економічний висновок: вкладення у виробництво є більш ефективним при податку $p \leq 60$ %.

IV. Самостійна робота для перевірки знань (12 хв).

Вчитель: Я підготувала для вас цікаву самостійну роботу, яку розміщено на онлайновому сервісі інтерактивних вправ, за допомогою якої ви зможемо перевірити, чи засвоїли навчальний матеріал. Для цього прошу вас відкрити веб-сайт за наступним посиланням і виконати вправи, які там розміщено: https://learningapps.org/watch?v=p9txa25f524

або

V. Рефлексія (1 хв).

Вчитель: Сподіваюся, завдання для самостійної роботи вас зацікавили. Чи сподобався Вам урок? Чи залишились запитання щодо навчального матеріалу? (Проходить обговорення уроку між учнями та вчителем).

VI. Домашнє завдання (1 хв).

Вчитель: У якості завдання пропоную розв’язати задачі:

1) Обсяг продукції u (*ум. од.*) цеху упродовж робочого дня визначається функцією: $u = -t^4 + 15t^3 - 4t^2 + 80t + 320$, де t – час (*год.*). Визначити продуктивність праці через дві години від початку роботи.

2) На підприємстві змінні витрати місячного обсягу x (*тонн*) випуску продукції визначаються функцією: $K = \frac{1}{5}\sqrt{x} - 12x^2 + 300$. Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?

На початку наступного уроку ми разом перевіримо домашнє завдання та перейдемо до наступної теми.

Дякую Вам за роботу на уроці, гарного дня!

Презентація уроку надана в додатку 1.

3.3. Комбінований урок математики та інформатики на тему: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів»

Тема: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів»

Вчитель-розробник: Печерська Олена Валеріївна

Час: 45 хв.

Навчальна мета: закріпити теоретичні знання з теми «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів», набути навички й вміння розв’язувати економічні задачі за допомогою методу найменших квадратів із використанням Excel; сприяти розвитку логічного мислення.

Виховна мета: розвивати у здобувачів навички аналізу та увагу, стратегічне мислення, вміння систематизувати та узагальнювати факти, робити висновки та приймати рішення, сприяти розвитку творчого підходу до розв’язання завдань.

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

Клас: 11 клас.

Обладнання: проєктор, смартфони або планшети з доступом до інтернету.

Очікувані результати: опанування здобувачами основних методів усереднення несумісних розв’язань надлишкової системи рівнянь та формування практичних навичок роботи в Excel під час розв’язання прикладних задач; учні навчаться застосовувати метод найменших квадратів для розв’язання задач економічного змісту та будуть здатні орієнтуватися в ситуаціях, що виникають у реальному житті й потребують відповідних знань.

Хід уроку

І. Організаційний момент: привітання, перевірка готовності до заняття (1 хв).

На початку уроку вчитель перевіряє присутність здобувачів та їх налаштованість на роботу.

Вчитель: Оголошує тему уроку: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів». Сьогодні ми розберемо приклади розв’язання прикладних задач на застосування економічного змісту методу найменших квадратів та лінійної регресії, дізнаємося про те, як може бути використаний Excel – програма для роботи з електронними таблицями – під час розв’язання таких задачах і яким чином ця програма полегшує й пришвидшує роботу економічного аналітика, навчимося надавати економічну інтерпретацію отриманих результатів.

Готуйтеся до цікавих задач та неочікуваних ситуацій! Нехай наш урок буде продуктивним та цікавим для кожного з вас! Пропоную перейти до основної частини нашого уроку та ознайомитись із новим матеріалом.

ІІ. Викладання нового матеріалу (30 хв).

Вчитель: Надамо означення.

Регресією називають залежність однієї випадкової змінної від іншої. Розділ математичної статистики, який вивчає аналітичні методи залежності однієї випадкової величини від іншої, називається *регресійним аналізом*.

Сформулюємо основну задачу регресійного аналізу та визначимо етапи її розв’язання (рис. 18).

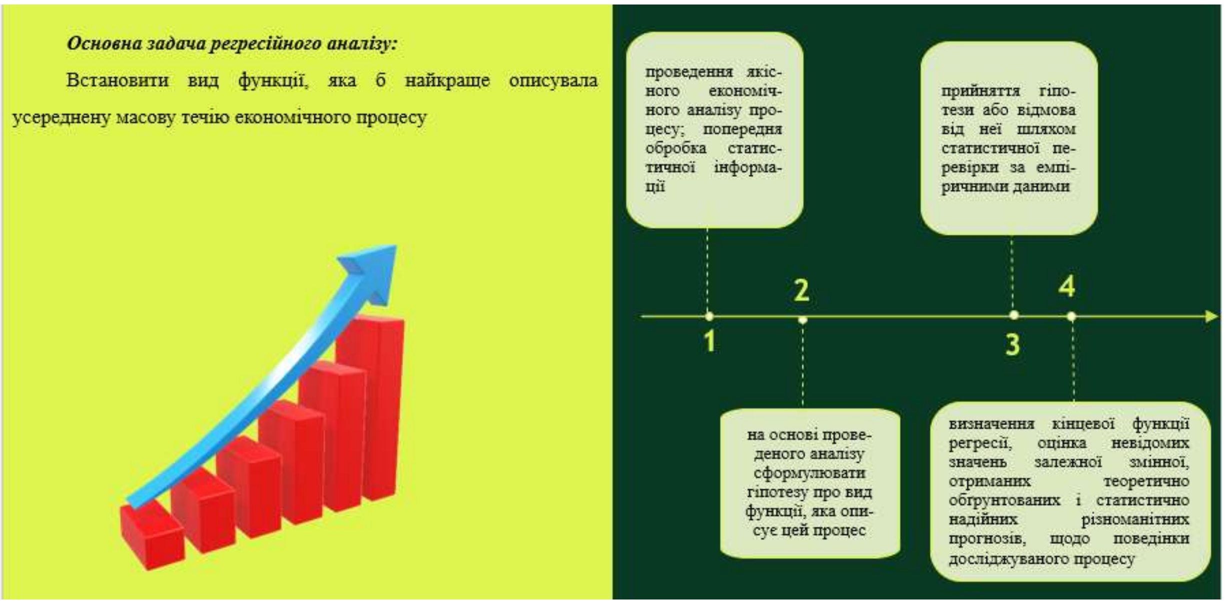


Рис. 18. Етапи регресійного аналізу

Розглянемо побудову емпіричної залежності за методом найменших квадратів.

У економічних та соціологічних дослідженнях використовують емпіричні формули, які складені на основі досвіду та спостережень. Одним із поширених методів отримання таких формул є *метод найменших квадратів* (МНК). Розглянемо його зміст у випадку лінійної залежності двох величин.

Припустимо, що проведено n вимірювання значень двох величин. Результати вимірювання записано в вигляді таблиці

x	x_1	x_2	x_3	….	x_n
y	y_1	y_2	y_3	….	y_n

Потрібно визначити залежність між величинами x і y.

Будемо розглядати x і y як прямокутні координат точок на площині.

Кореляційним полем називають сукупність точок, розташованих в декартовій системі координат, які характеризують зв'язок між двома ознаками.

Припустимо, що точки з відповідними координатами з емпіричної таблиці майже належать деякій прямій, наприклад, розташовані таким чином, як на рис. 19. У такому випадку природно вважати, що між x і y існує наближена лінійна залежність, тобто y є лінійною функцією від x, яку можна подати у вигляді $y = ax + b$, де a і b деякі сталі коефіцієнти, які потрібно визначити.

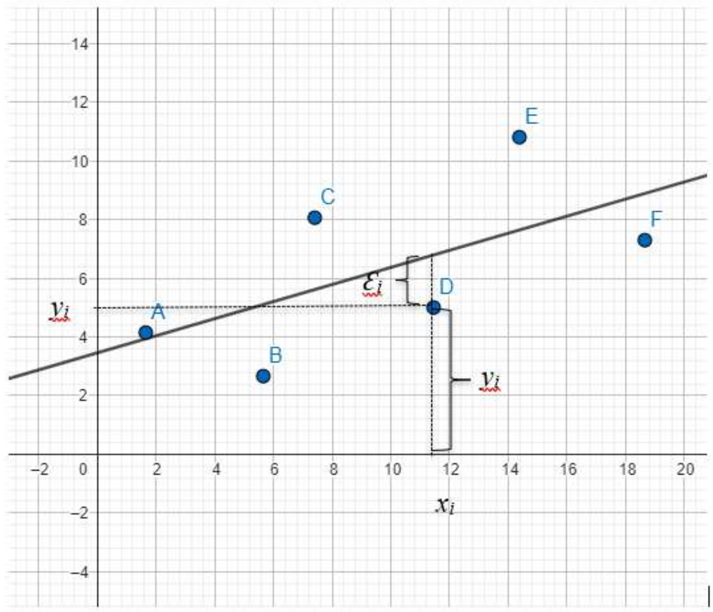


Рис. 19. Кореляційне поле

Запишемо рівняння $y = ax + b$ у вигляді $ax + b - y = 0$.

Оскільки точки (x, y) лише наближено розташовані на прямій, то формули $y = ax + b$ і $ax + b - y = 0$ є наближеними.

Отже, підставляючи в формулу $ax + b - y$ замість x і y їх значення з таблиці x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ... ; x_n, y_n, отримаємо рівності:

$$ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1;$$

$$ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2;$$

…………….

$$ax_n + b - y_n = \varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – деякі числа (в загальному випадку відмінні від нуля), які ми будемо називати *похибками*.

Поставимо перед собою задачу про визначення коефіцієнтів a і b таким чином, щоб сума квадратів похибок $U = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2$ набула найменшого значення.

Можна показати, що коефіцієнти a і b визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \,. \end{cases}$$

Така система називається *нормальною системою метода найменших квадратів*. Розв'язуючи її, визначаємо коефіцієнти a і b та підставляємо їх до емпіричної формули $y = ax + b$.

Історична довідка. Метод найменших квадратів (МНК) є одним із найбільш потужних методів обробки статистичних даних, розроблений в 1795-1805 рр. французьким математиком Андрієн М. Лежандром (1752-1833) і німецьким математиком Карлом Фрідрихом Гауссом (1777-1855).

Використання МНК, якому понад 200 років, було ускладнене через великі обсяги обчислень, які вимагає цей метод. Після появи в середині XX століття ПК цей метод набув широкого застосування.

Сьогодні метод найменших квадратів застосовується в статистичних, природничих, економічних, соціологічних, політичних дослідженнях тощо. Його реалізація супроводжується використанням багатьох програмних продуктів та онлайн-сервісів і застосунків.

Розглянемо використання МНК на прикладі.

Задача 1. Припустимо, що в результаті проведення деякого експерименту отримано дані: (1; 6), (2; 5), (3; 7), (4; 10) (рис. 20). Визначити емпіричну залежність за методом найменших квадратів. Побудувати прогноз при $x = 6$.

Розв'язання: Побудуємо кореляційне поле (рис. 20).

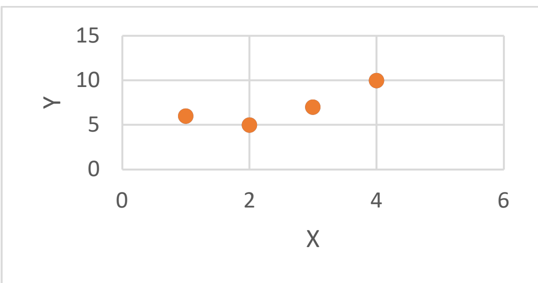


Рис. 20. Кореляційне поле

Складаємо розрахункову таблицю:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	6	1	6
2	2	5	4	10
3	3	7	9	21
4	4	10	16	40
Σ	***10***	***28***	***30***	***77***

Будемо шукати емпіричну залежність у вигляді $y = ax + b$.

Нормальна система метода найменших квадратів має вигляд:

$$\begin{cases} 30a + 10b = 77; \\ 10a + 4b = 28. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 10b = 77; \\ 10a = 28 - 4b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 \cdot \frac{(28-4b)}{10} + 10b = 77; \\ a = \frac{(28-4b)}{10}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (28 - 4b) + 10b = 77; \\ a = \dfrac{(28 - 4b)}{10}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 84 - 2b = 77; \\ a = \dfrac{(28 - 4b)}{10}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 7; \\ a = \dfrac{(28 - 4b)}{10}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3{,}5; \\ a = 1{,}4. \end{cases}$$

Отже, отримаємо $a = 1{,}4; b = 3{,}5$. Рівняння лінійної залежності між x і y має вигляд: $y = 1{,}4x + 3{,}5$.

Обчислимо похибки:

x_i	1	2	3	4
y_i	6	5	7	10
$1{,}4x_i + 3{,}5$	4,9	6,3	7,7	9,1
$ax_i + b - y_i = \varepsilon_i$	-1,1	1,3	0,7	-0,9
ε_i^2	1,21	1,69	0,49	0,81

Сума квадратів похибок

$$U = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = 1{,}21 + 1{,}69 + 0{,}49 + 0{,}81 = 4{,}2.$$

Зобразимо на кореляційному полі графік емпіричної функції (рис. 21).

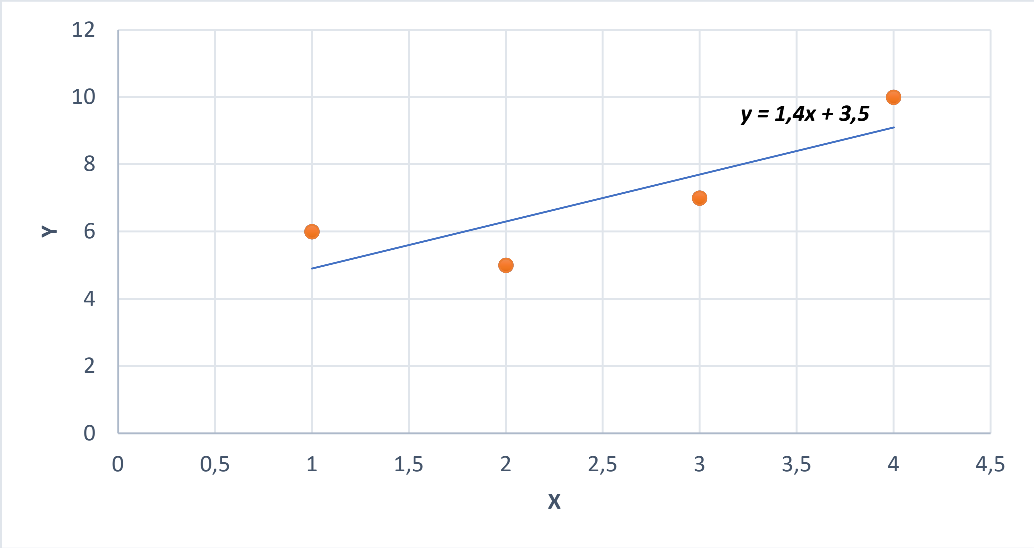


Рис. 21. Графік емпіричної функції

Обчислимо прогнозоване значення змінної y при $x = 6$:

$$y(6) = 1{,}4 \cdot 6 + 3{,}5 = 11{,}9.$$

Розглянемо розв'язок задачі за допомогою програми для роботи з електронними таблицями Excel. Прошу пройти за посиланням і виконати роботу паралельно з відеоуроком

III. Самостійна робота (10 хв.).

Задача 2. Скласти емпіричну залежність за методом найменших квадратів, якщо результати вимірювань двох величин подано у вигляді таблиці:

x	2	3	4	5	6	7
y	2	4,3	8,1	12,1	18,1	36,2

Відповідь: $y = 6{,}18x - 14{,}36$.

IV. Рефлексія (1 хв).

Вчитель: Де використовується МНК? Наведіть приклади його практичного застосування? Чи залишились запитання щодо навчального матеріалу? (Проходить обговорення уроку між здобувачами та вчителем).

V. Домашнє завдання (3 хв).

Вчитель: У якості завдання пропоную розв'язати дві задачі:

1. Маємо дані про ціну на біткоїн X (*дол. за од.*) від початку його запуску по роках $У$. Використовуючи Excel, підібрати тип залежності між змінними X і $У$, знайти емпіричну формулу, використовуючи метод найменших квадратів. Спрогнозувати мінімальну і максимальну вартість біткоїну в 2030 році.

Рік	2024	2023	2022	2021	2020	2019	2018
Максимум	$73 750	$42 500	$47 835	$68 789	$29 096	$13 017	$18 343
Мінімум	$39 800	$16 000	$18 490	$29 796	$3 850	$3 401	$3 217

Рік	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011
Максимум	$19 892	$981	$465	$310	$ 163	$16	$32
Мінімум	$784	$351	$172	$13	$11	$4	$0.29

2. Маємо шість міст, розташування яких задано координатами, які подані в таблиці. Визначити оптимальний варіант прокладання траси для заданих міст, використовуючи метод найменших квадратів.

x	2	2	13	10	12	6
y	4	7	10	0	-6	-10

На початку наступного уроку ми разом перевіримо домашнє завдання та перейдемо до наступної теми. Дякую Вам за роботу на уроці, гарного дня!

Під час підготовки навчального матеріалу використовувалися літературні джерела [2, 6, 9, 10, 13, 15, 25].

Презентація уроку надана в додатку 2.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Вивчена специфіка впровадження метода проєктів у профільних класах.

2. Виконана методична розробка smart-уроку на тему: «Екстремальні задачі в економічному аналізі» та комбінованого уроку математики та інформатики на тему: «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів»: план-конспект уроку, дидактичні матеріали, презентація.

ВИСНОВКИ

1. Проблема профілізації освіти є актуальною та може розглядатися в якості елементу підготовки здобувачів повної середньої освіти до усвідомленого й зваженого вибору майбутньої професії.

2. Інноваційний підхід до змісту освітньої програми в профільних класах, зокрема в класах економічного спрямування, дотримання правильного співвідношення між освітніми компонентами на користь інтегрованого підходу до освіти сприяє формуванню ключових компетентностей здобувачів, що є базовою категорією реформи Нової української школи.

3. Прикладна спрямованість математичної освіти в профільних класах є невід'ємною складовою в частині реалізації в підвищенні якості освіти, демонстрації застосування математичних знань у практичній діяльності й подальшій побудові індивідуальної професійної траєкторії.

4. Прикладні математичні задачі є діяльними, моделюють життєві ситуації, будуються на реальному матеріалі та вимагають від здобувачів застосування не лише математичних знань, а й загальних компететностей. Тому методичний акцент, зроблений на розв'язанні прикладних математичних задач, є фундаментом для проведення проєктної діяльності в системі середньої освіти.

5. Метод проєктів є одним із інноваційних методів викладання математики в профільних класах. Завдяки впровадження такої методики здобувачів мають можливість розвиватися, набувати власний досвід у проведені експериментів та формувати індивідуальні освітні треки.

6. Гіпотеза дослідження, яка полягала в тому, що прикладні математичні задачі економічного змісту є ефективною складовою в формуванні економічних знань у системі профільної середньої освіти, підтверджена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алілуйко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. Тернопіль: ТНЕУ, 2017. 148 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://dspace.wunu.edu.ua/bitstream/316497/20458/1/%D0%90%D0%BB%D1%96%D0%BB%D1%83%D0%B9%D0%BA%D0%BE.PDF (дата звернення: 20.07.2024)

2. Аршава О.О. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика) : Тексти лекцій. Х.: ХНУБА, 2018. 52 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/370735872_Ekonomiko-matematicni_metodi_ta_modeli_ekonometrika_Teksti_lekcij (дата звернення 03.11.2024).

3. Аршава О.О., Іохвідович Н.Ю., А.І. Кононенко та ін. Прикладні задачі з вищої математики для економічних спеціальностей: Навчально-методичний посібник. Х.: ХДТУБА, 2011. 71с. Available from: https://www.researchgate.net/publication/381827334_PRIKLADNI_ZADACI_Z_VISOI_MATEMATIKI_Navcalno-metodicnij_posibnik [accessed Jul 22 2024].

4. Аршава О.О., Печерська О.В. Особливості математичної освіти в класах соціально-економічної профілізації // *Integration of science and practice as a mechanism of effective development. Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference*. Copenhagen, Denmark. 2024. Pp. 204-208. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://books.google.com.ua/books?hl=ru&lr=&id=OrAlEQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA204&ots=1HtCuwkyLe&sig=MTkoyby-4vM6oXESYot1XjkXU9Y&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false (дата звернення: 10.10.2024)

5. Бірюкова Т.В., Сукач Т.М., Яровий І.М. Застосування диференціальних рівнянь у формуванні професійних компетентностей у

здобувачів вищої та передвищої освіти. *Вісник університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія». Педагогічні науки.* 2020. №2 (20). С. 141-150. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
https://pedpsy.duan.edu.ua/images/PDF/2020/2/17.pdf (дата звернення: 18.08.2024).

6. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навчальний посібник. К.: КНЕУ, 2003. 408 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
http://elcat.pnpu.edu.ua/docs/Вітлінський.pdf (дата звернення 03.11.2024).

7. Державний стандарт профільної середньої освіти: затверджено Постановою Кабінету Міністрів України від 25.07.2024 № 851. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-п#Text (дата звернення 21.10.2024).

8. Дьоміна І. Проектне навчання: коротко про головне : веб сайт. URL: https://nus.org.ua/view/proektne-navchannya-korotko-pro-golovne/ (дата звернення: 22.08.2024).

9. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
http://dspace.wunu.edu.ua/bitstream/316497/650/1/navch._posibnuk_ivaschyk.pdf (дата звернення 03.11.2024).

10. Застосування методу найменших квадратів в Excel. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://uk.soringpcrepair.com/the-least-squares-method-in-excel/ (дата звернення 03.11.2024).

11. Косович О.В. Проектна діяльність як одна з форм інноваційних методичних технологій навчання. *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія “Педагогіка, соціальна робота“.* Випуск 22. С. 76-78. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/6151/1/ПРОЕКТНА%20ДІЯЛЬНІСТЬ%20ЯК%20ОДНА%203%20ФОРМ%20ІННОВАЦІЙНИХ%20МЕТОДИЧНИХ%20ТЕХНОЛОГІЙ.pdf (дата звернення: 22.08.2024).

12. Кремень, Василь Григорович, Олег Михайлович Топузов, Олександр Іванович Ляшенко, Юрій Іванович Мальований, і Тетяна Миколаївна Засєкіна. «ПРОФІЛЬНА СЕРЕДНЯ ОСВІТА: КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ДЛЯ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ ». *Вісник Національної академії педагогічних наук України* 5, no. 2 (Серпень 10, 2023): 1-8. дата звернення Липень 8, 2024. https://visnyk.naps.gov.ua/index.php/journal/article/view/389.

13. Математика для економістів: Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 051 «Економіка», освітні програми: «Економічна кібернетика», «Міжнародна економіка», «Економіка бізнес-підприємства», «Управління персоналом та економіка праці», «Бізнес-аналітика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. І. Д. Фартушний. Електронні текстові дані (1 файл: 2,91 Мбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 109 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/items/a092fd6c-030a-415f-842d-6efa52705ca2 (дата звернення 03.11.2024).

14. Мерзляк А., Якір М. Алгебра : підруч. для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2024. 353 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://pidruchnyk.com.ua/2892-algebra-merzliak-7-klas-2024.html (дата звернення: 04.08.2024).

15. Метод найменших квадратів : Навчально-методичний посібник для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форми навчання інж спец. / Н. Г. Косуліна [та ін.]: Харків. нац. техн. ун-т сіл. госп-ва ім. П. Василенка. Харків: ХНТУСГ, 2020. 25 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://repo.btu.kharkov.ua/bitstream/123456789/33472/1/NP_Metod%20naymenshykh%20kvadrativ%20_23.pdf (дата звернення 03.11.2024).

16. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://vshkole.com/10-klass/uchebniki/matematika/yep-nelin-2018-riven-standartu/stranitsa-326 (дата звернення: 04.08.2024).

17. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://vshkole.com/11-klass/uchebniki/matematika/yep-nelin-oye-dolgova-2019/stranitsa-1 (дата звернення: 17.08.2024).

18. Нова українська школа : концептуальні засади реформування середньої школи : веб сайт.
URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf (дата звернення: 08.07.2024).

19. Пістунов І.М., Турчанінова І.Ю. Теорія ймовірності та математична статистика для економістів. З елементами електронних таблиць: Навч. Посібн. Дніпро: НТУ «ДП», 2023. 174 с. Режим доступу:
http://pistunovi.inf.ua/TU_ma_MC2.pdf (дата звернення: 04.08.2024).

20. Про повну загальну середню освіту: Закон України від 16.01.2020 №463-IX. Дата оновлення 24.03.2024. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text

21. Романовська М. Б. Метод проектів у навчальному процесі : методичний посібник. Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2007. 160 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу:
https://ktef.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/47/2019/12/metod-proektv-y-navchalnomy-protses-metodichniyi-posbnik.pdf (дата звернення: 22.08.2024).

22. Токаренко Н.М. Організовуємо проектну діяльність: крок за кроком. *Вихователь-методист дошкільного закладу.* 2013. № 11. С. 59 - 62.

23. Трішкіна Н.І. Сучасні підходи до формування професійних компетенцій фахівців торговельно-економічного профілю. *Вісник Дніпропетровського університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія». Педагогічні науки.* 2015. №1 (9). С. 193-199. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://pedpsy.duan.edu.ua/images/PDF/2015/1/31.pdf (дата звернення: 18.08.2024).

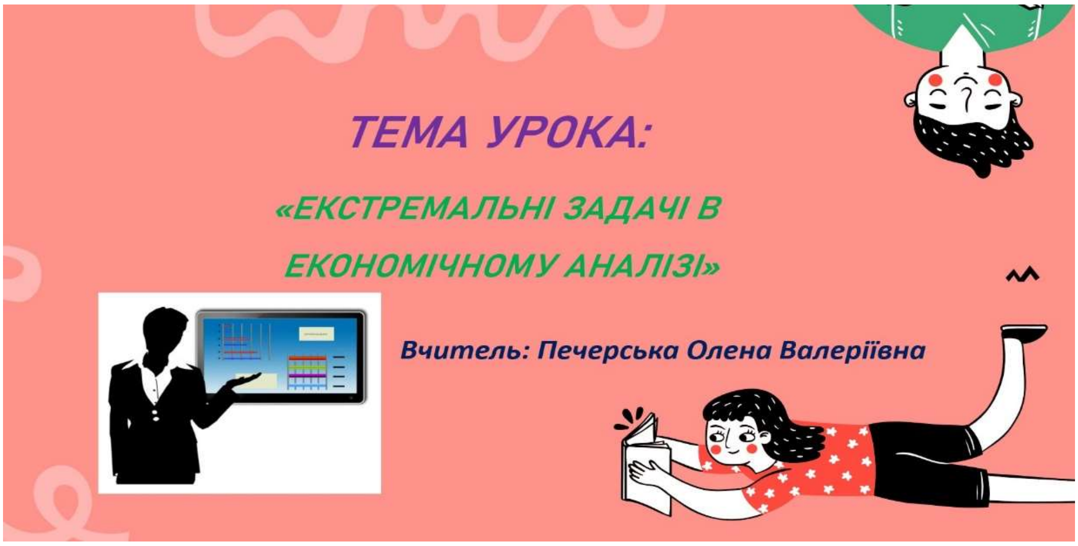
24. Центр розвитку дитини «Гармонія» [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.garmoniya.mk.ua/articles/konsultaciya-metod-proyektiv-yak-vazhlyvyy-osvitniy-instrument.html#:~:text= (дата звернення 07.09.2024).

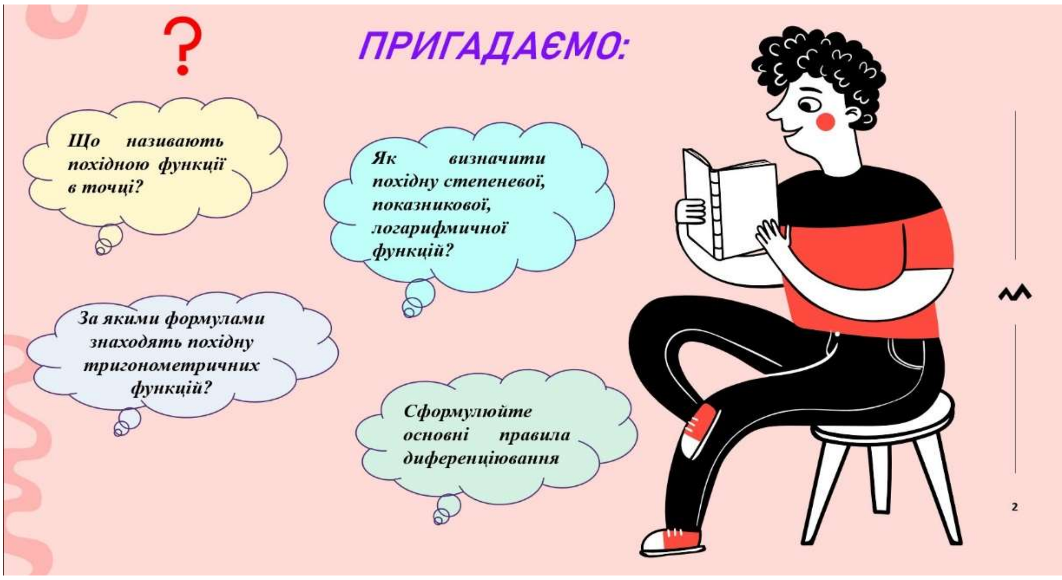
25. https://www.slideshare.net/slideshow/metod-naymenshih-kvadrativ/234270163

ДОДАТКИ

Додаток 1

Презентація уроку «Екстремальні задачі в економічному аналізі»





Економічний зміст похідної

Еластичністю функції $y = y(x)$ **відносно змінної** x **називають границю відношення відносного приросту функції** y **до відносного приросту змінної** x**:**

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'(x).$$

Розглянемо функцію $K = K(x)$ **– функцію витрат ресурсів підприємства від кількості продукції** x**.**

Границя вигляду (за умови, що вона існує та є скінченною)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$$

називається граничними витратами виробництва при обсязі продукції x **од.**

Задача 1. Загальна вартість продукції, що виробляється на підприємстві, задається формулою

$$C(q) = 1500500 + 1200q + 0{,}5q^2,$$

де q ***– кількість одиниць продукції. Скільки одиниць продукції потрібно виробити, щоб середня вартість продукції була мінімальна?***

Задача 2. Задана функція попиту $q(p) = 50 - p$***, де*** p ***– ціна продукції. Визначити еластичність попиту.***

Задача 3. **Статистично встановлено, що обсяг продукції цеху (*ум. од.*) протягом робочого дня задається функцією:**

$$u(t) = -\frac{20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300,$$

де t **– час у годинах** $(0 \le t \le 8)$ **(зміна триває не більше 8 годин).**

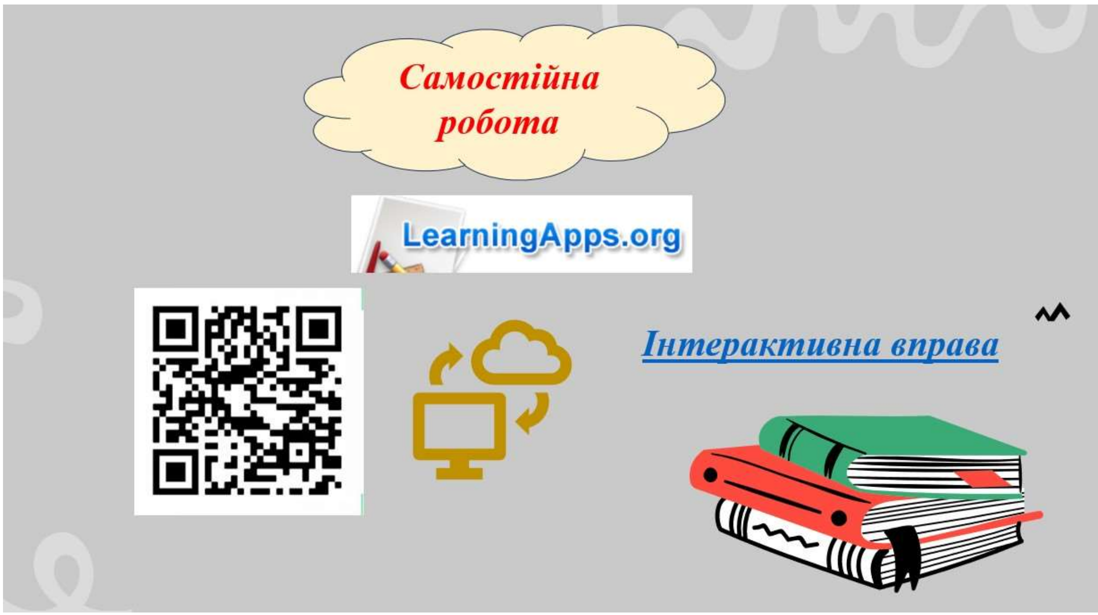
Визначити:

а) продуктивність праці, її швидкість та темп її зміни через 3 години після початку роботи;

б) визначити, в який момент часу продуктивність праці буде найбільшою.

Результат пояснити аналітично і графічно. Зробити економічний аналіз результатів.

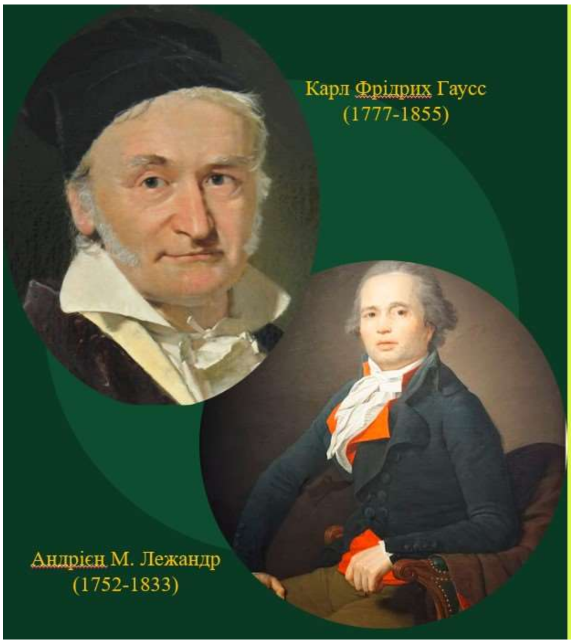

Перейдемо до розв'язання *практичної задачі*, яка виникла у підприємця під час роздумів про майбутній напрямок розвитку виробництва.
Отже, власник підприємства має капітал у 7 *млн грн*. Його можна розмістити в банку під 40% річних або інвестувати у виробництво, причому ефективність вкладення очікується в розмірі 250%. Витрати задаються квадратичною залежністю $\frac{x^2}{20}$. Прибуток від виробництва оподатковується в p%.
Допоможімо власнику підприємства визначитися: при яких значеннях p вкладення у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу в банку?
7


Самостійна робота
LearningApps.org
Інтерактивна вправа


Домашнє завдання
1. Обсяг продукції u (*ум. од.*) цеху упродовж робочого дня визначається функцією:
$u = -t^4 + 15t^3 - 4t^2 + 80t + 320$, де t – час (*год.*).
2. Визначити продуктивність праці через дві години від початку роботи. На підприємстві змінні витрати місячного обсягу x (*тонн*) випуску продукції визначаються функцією:
$K = \frac{1}{5}\sqrt{x} - 12x^2 + 30.$
Як змінюються витрати залежно від випуску продукції щомісяця?
9

Додаток 2

Презентація уроку «Лінійна регресія. Метод найменших квадратів»



Карл Фрідрих Гаусс (1777-1855)

Андрієн М. Лежандр (1752-1833)

Хвилинка історії

Метод найменших квадратів (МНК) є одним з найбільш потужних методів обробки статистичних даних, розроблений в 1795-1805 рр. французьким математиком Андрієн М. Лежандром (1752-1833) і німецьким математиком Карлом Фрідрихом Гауссом (1777-1855).

Використання МНК, якому понад 200 років, було ускладнене через великі обсяги обчислень, які вимагає цей метод. Після появи в середині XX століття ПК цей метод набув широкого застосування.

Сьогодні метод найменших квадратів застосовується в статистичних, природничих, економічних, соціологічних, політичних дослідженнях тощо. Його реалізація супроводжується використанням багатьох різноманітних програмних продуктів та онлайн-сервісів і застосунків.

Приклад використання МНК

Припустимо, що в результаті деякого експерименту отримано дані: (1;6), (2;5), (3;7), (4;10). Визначити емпіричну залежність за методом найменших квадратів. Побудувати прогноз при $x = 6$.

Будемо шукати емпіричну залежність у вигляді $y = ax + b$

1 Побудуємо кореляційне поле. Складаємо розрахункову таблицю↓

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	1	6	1	6
2	2	5	4	10
3	3	7	9	21
4	4	10	16	40
Σ	10	28	30	77

2 Нормальна система метода найменших квадратів має вигляд: ↓

$$\begin{cases} 30a + 10b = 77; \\ 10a + 4b = 28. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30a + 10b = 77; \\ 10a = 28 - 4b. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot (28 - 4b) + 10b = 77; \\ a = \dfrac{(28 - 4b)}{10}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 84 - 2b = 77; \\ a = \frac{(28-4b)}{10}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 7; \\ a = \frac{(28-4b)}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3{,}5; \\ a = 1{,}4. \end{cases}$$

3 Отже, отримаємо $a = 1{,}4; b = 3{,}5$.

Рівняння лінійної залежності між x і y має вигляд:

$y = 1{,}4x + 3{,}5$.

! **Важливо**, що у *методі найменших квадратів* **ми не обмежені використанням прямої** як моделі. Наприклад, ми можемо вибрати квадратичну модель, або будь-яку іншу.

Приклад використання МНК

Припустимо, що в результаті деякого експерименту отримано дані: (1;6), (2;5), (3;7), (4;10). Визначити емпіричну залежність за методом найменших квадратів. Побудувати прогноз при $x = 6$.

4 Обчислимо похибки↓

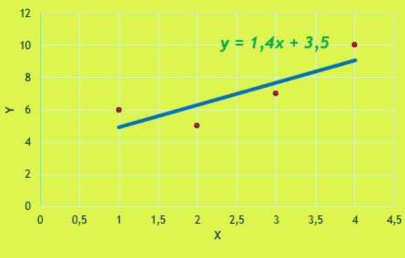
x_i	1	2	3	4
y_i	6	5	7	10
$1{,}4x_i+3{,}5$	4,9	6,3	7,7	9,1
$ax_i+b-y_i=\varepsilon_i$	-1,1	1,3	0,7	-0,9
ε_i^2	1,21	1,69	0,49	0,81

Сума квадратів похибок:

$$U = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 =$$

$$= 1{,}21 + 1{,}69 + 0{,}49 + 0{,}81 = 4{,}2$$

5 Зобразимо на кореляційному полі графік емпіричної функції ↓



6 Обчислимо прогнозоване значення y при $x = 6$ ↓

$$y(6) = 1{,}4 \cdot 6 + 3{,}5 = 11{,}9$$

x	2	3	4	5	6	7
y	2	4,3	8,1	12,1	18,1	36,2

Рік	Максимум	Мінімум
2024	$73 750	$39 800
2023	$42 500	$16 000
2022	$47 835	$18 490
2021	$68 789	$29 796
2020	$29 096	$3 850
2019	$13 017	$3 401
2018	$18 343	$3 217
2017	$19 892	$784
2016	$981	$351
2015	$465	$172
2014	$310	$13
2013	$163	$11
2012	$16	$4
2011	$32	$0.29
2010	$0.40	$0.00
2009	$0.0041	$0.00

x	2	2	13	10	12	6
y	4	7	10	0	-6	-10