

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

Є. О. Когут
О. В. Масленнікова

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Харків – 2024

УДК 51 (075.8)
К 57

Рецензенти:

В. О. Золотарьов – доктор фіз.-мат наук, професор, провідний науковий співробітник ФТІНТ ім. Б. І. Веркіна НАН України;

В. Ф. Лисиця – кандидат фіз.-мат наук, доцент, зав. кафедри математики та інформатики ХНУ імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Вченої Ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 7 від 11 квітня 2022 року)*

Когут Є. О.

К 57 Вища математика : навч посібник / Є. О. Когут, О. В. Масленнікова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – 80 с.

Видання призначено для студентів економічних спеціальностей (усіх форм навчання), які вивчають базовий курс вищої математики. Посібник містить основні поняття вищої математики, теореми і методи.

Викладання супроводжується прикладами з їхніми розв'язаннями, питаннями для самоконтролю, насичено багатим ілюстративним рядом. Відмінною рисою посібника є наявність широкого довідкового апарату. Це дозволяє використовувати посібник і як довідник студентам, аспірантам, викладачам, науковим співробітникам й усім бажаючим, які опановують вищу математику.

Посібник містить навчальний матеріал з курсу «Вища математика» і розглядає розділи Математичний аналіз та Лінійна алгебра. За кожною темою наводяться необхідні теоретичні відомості та детальні розв'язання типових завдань.

УДК 51 (075.8)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2024

© Когут Є. О., Масленнікова О. В., 2024

© Когут Є. О., макет обкладинки, 2024

ВСТУП

Видання призначено для студентів соціально-економічних і управлінських спеціальностей (усіх форм навчання), які вивчають базовий курс вищої математики. Посібник містить основні поняття вищої математики, теореми і методи.

Викладання супроводжується прикладами з їхніми розв'язаннями, питаннями для самоконтролю, насичено графіками, схемами, таблицями, які потрібні користувачам для вирішення прикладів для самоконтролю. Це дозволяє використовувати посібник і як довідник для студентів й усім бажаючим, які опановують вищу математику.

Частина 1

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Розділ 1. Введення в аналіз

Тема 1. Функції, границі функції

§ 1. Означення функції

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлено у відповідність єдине число y , то кажуть, що y є функцією від x і пишуть $y=f(x)$, $x \in X$. Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна y – залежною змінною, або функцією, під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y . Множина X називається областю визначення функції. Множина Y усіх чисел y , таких, що $y=f(x)$ для кожного $x \in X$ називається множиною значень функції.

Приклад. Знайти область визначення і множину значень функції

$$Y=f(X)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Нехай $X=D(f)$, $Y=E(f)$

Очевидно, що $1 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow |x| < 1 \rightarrow x \in (-1,1) \rightarrow D(f); x \in (-1,1)$

Очевидно $E(y): y \leq [1, \infty)$

Способи задання функції: аналітичний, графічний і табличний. При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою. При графічному способі задання функції $y=f(x)$ відповідність між змінними x і y задається графіком.

Графік – це множина точок (x,y) площини, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y=f(x)$.

Табличний спосіб задання функції $y=f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Суперпозиція функцій

Нехай функція $y=f(u)$ визначена на множині A , а функція $u=\varphi(x)$ – на множині B , причому для кожного значення $X \in B$ відповідне значення $u = \varphi(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $f(\varphi(x))$, яку називають суперпозицією заданих функцій, або складеною функцією від x , або функцією від функції. Змінну $u=\varphi(x)$ функції $y=f(u)$ називають проміжним аргументом, або внутрішньою функцією, а змінну $y=f(u)$ зовнішньою функцією.

Наприклад, функція $y = \sqrt[5]{\cos x}$ є суперпозицією двох основних функцій – степеневі та тригонометричної. $y = \sqrt[5]{u}; u \in [-1, 1], u = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$

Функцію $f(x)$, визначену на множині A , а називають обмеженою на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $X \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

Наприклад, функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ обмежені на всій числовій осі, бо $|\sin x| \leq 1; |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

Приклади:

1. Знайти область визначення функції

а) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5x+4};$

б) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+3x+2};$

в) $f(x) = \sqrt{4x-1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}};$

г) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x};$

д) $f(x) = \log_4(3x-2);$

е) $f(x) = 2\log(x+1)$

2. Знайти $\varphi(f(x))$ і $f(\varphi(x))$

а) $\varphi(x) = \frac{1-3x}{x^2+1}; f(x) = 3^x$

б) $\varphi(x) = \sin(3x+2); f(x) = \ln(x^2+1)$

3. Для функції $f(x) = x-4x^2$

Знайти

а) $f(-0,1), f(0,01), f(10);$

Значення x , для яких

б) $f(x)=0, f(x)>0, f(x)<0$;

в) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

§ 2. Означення границі функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Число A називається границею функції в точці x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Приклад:

Довести, що $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$

Нехай $y = 2x + 1$ і задано $\varepsilon > 0$, знайдемо $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівності $0 < |x - 1| < \delta$, виконується нерівність $|y - 3| < \varepsilon$. Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб $|2x + 1 - 3| < \varepsilon$, або $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, звідси $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо тепер для довільного $\varepsilon > 0$ і знайденого δ взяти значення x , що задовольняють нерівності $|x - 1| < \delta$, то $|x - 1| < \delta \rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow |2x + 1 - 3| < \varepsilon \rightarrow |y - 3| < \varepsilon$.

Односторонні (однобічні) границі

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва, в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тобто x прямує до x_0 , залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), що позначають так: $x \rightarrow x_0 - 0$. Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таке, що при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тобто, x прямує до x_0 , залишаючись більшим від x_0 (справа від x_0), що позначають так: $x \rightarrow x_0 + 0$. Ліву і праву границі функції називають

односторонніми границями і позначають так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Умова $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ є необхідною і достатньою для існування границі функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$(f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A) \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Границя функції при $x \rightarrow \infty$. Нескінченно велика функція

Нехай $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$), якщо для

довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко це записують так:
 $(\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0: |x| > M \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

Розглянемо тепер випадок, коли границею функції є нескінченність. Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, називається нескінченно великою (має границю ∞), якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 і для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$, позначення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, або $f(x) \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow x_0$.

§ 3. Нескінченно малі функції. Їхні властивості

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою функцією при $x \rightarrow x_0$, або $x \rightarrow \infty$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, або $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Приклади:

а) функція $y = (x - 3)^4$ є нескінченно малою при $x \rightarrow 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^4 = 0$

б) функція $y = \frac{1}{x-2}$ є нескінченно малою функцією при $x \rightarrow \infty$:

Основні властивості нескінченно малих функцій

1. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою функцією, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$
2. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \rightarrow x_0$, ($\alpha(x) \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією при

$x \rightarrow x_0$. Навпаки, якщо $\beta(x)$ - нескінченно велика функція при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою функцією при $x \rightarrow x_0$.

Приклад:

$$\alpha(x) = x^2 - 1; \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0 \rightarrow \frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{x^2 - 1}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \infty$$

3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.
4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є нескінченно мала функція.
5. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно мала функція.

Зауваження:

Частка від ділення двох нескінченно малих функцій у загальному випадку не є нескінченно малою функцією.

Нехай $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = 3x$, $\alpha_3(x) = x^3$. $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ і $\alpha_3(x)$ - нескінченно малі функції при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0; \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_3(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$$

Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3} = 0$$

Тобто границя відношення двох нескінченно малих функцій може дорівнювати деякому числу, нескінченності, або нулю. Тому відношення двох нескінченно малих функцій називають невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Те саме стосується добутку нескінченно малої функції на нескінченно велику функцію. Такий добуток називають невизначеністю виду $0 \cdot \infty$.

Основні теореми про границі

Теорема 1

Якщо функція має границю, то ця границя тільки одна.

Теорема 2

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінчену границю в точці x_0 (або при $x \rightarrow \infty$), то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x) \neq 0$ і справедливі

формули:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x); \quad \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x)}$$

Зауваження:

Ці теореми є вірними для будь-якого скінченного числа функцій;

Наслідки: Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)$ існує, то виконується рівність

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x), C \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \right]^n, \text{ зокрема,}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} x^n = x_0^n; n \in \mathbb{N}$$

Приклади:

$$1) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 2x + 7)$$

Використовуючи теорему про границю суми і наслідки, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 2x + 7) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 7 \neq 4 \cdot 9 - 2 \cdot 3 + 7 = 36 - 6 + 7 = 37$$

$$2) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{2x + 1}. \text{ За теоремою про границю частки дістанемо}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{2x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)} = \frac{4 + 3}{4 + 1} = \frac{7}{5}$$

$$3) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}. \text{ Тут теорему про границю частки}$$

застосувати не можна, тому що $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$. Крім того,

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$, тобто маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладемо

чисельник і знаменник на множники: $x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)$
 $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$.

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці $x=2$ розглядаються значення $x \neq 2$, то даний дріб можна скоротити на $x-2$,

$$\text{тому } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

$$4) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x-3}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$, тому теорему про границю частки застосувати не можна.

Оскільки $x^3 \rightarrow 27$ при $x \rightarrow 3$ і $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty$, $((x-3) \frac{1}{x-3}) \rightarrow 0 \rightarrow$ нескінченно мала

функція, $\frac{1}{x-3}$ – нескінченно велика функція), то $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x-3} = \infty$ як добуток

нескінченно великої функції на обмежену величину, яка не є нескінченно малою.

$$5) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x-1} - 1}$$

Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Домноживши і розділивши на вираз спряжений з $(\sqrt{x-1}-1)$, тобто на $(\sqrt{x-1}+1)$, дістанемо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x-1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1) \cdot (\sqrt{x-1}+1)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \cdot (\sqrt{x-1}+1) = 4 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

$$6) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 4}{3x^3 - 2x^2 + 5x - 7}$$

Це невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, вона задана відношенням двох многочленів, треба чисельник і знаменник розділити на найвищу степінь x у цих многочленах, тобто у цьому випадку на x^3 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 4}{3x^3 - 2x^2 + 5x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

$$7) \text{ Обчислити } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$$

Це невизначеність виду $\infty - \infty$. Домноживши і розділивши на вираз спряжений з $(\sqrt{x^2 + 3x} - x)$, тобто на $(\sqrt{x^2 + 3x} + x)$, дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{3}{x})} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x| \cdot (\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}$$

Також можуть зустрічатись невизначеності виду:

$$\|0 \cdot \infty\|, \|\infty^0\|, \|0^0\|, \|1^\infty\|.$$

Теорема 3 (про границю проміжної функції)

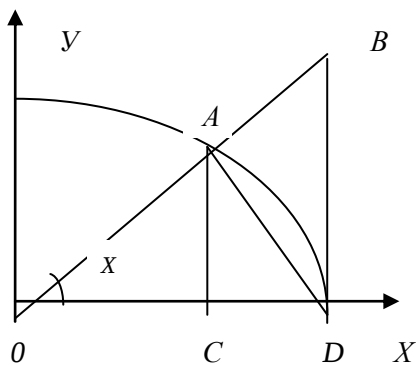
Нехай в деякому околі точки x_0 , крім, можливо самої точки x_0 , визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ і виконуються нерівності $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $g(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, то таку саму границю має

функція $f(x)$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Перша виняткова (чудова) границя

Доведемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Маємо невизначеність виду $\left\| \frac{0}{0} \right\|$. Візьмемо круг радіуса 1



І позначимо радіанну міру кута AOD через x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Порівнюючи площі трикутників AOD , BOD і колового сектора AOD ,

дістанемо $S_{\Delta AOD} < S_{sec AOD} < S_{\Delta BOD}$, звідси $\frac{1}{2}AC \cdot OD < \frac{1}{2}(OD) \cdot x < \frac{1}{2}OD \cdot BD$ або $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Розділивши останні нерівності на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, дістанемо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\sin x}$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то за теоремою 3- $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

Нехай тепер $x < 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; Оскільки $f(-x) = f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Маємо $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$; тобто $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Використання першої виняткової границі.

Приклади:

1) Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

Зведемо цю границю до першої виняткової границі. Поділивши та помноживши дріб на 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$;

2) Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$

Маємо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x \cdot \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4 \cdot 1 = 4$;

3) Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$

Маємо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x \cdot \sin(-x)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{x} =$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -8$.

Друга виняткова (чудова) границя

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Маємо невизначеність виду $\|1^\infty\|$. Доведено, що e – ірраціональне число. Його наближене значення з точністю до 10^{-18} дорівнює **2,718281828459045**.

Використання другої виняткової границі.

Приклади:

1) Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^x$

Введемо нову змінну $y = \frac{3}{x}$, тоді $x = \frac{3}{y}$ і, коли $x \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^x = \|1^\infty\| = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{3}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^3 = e^3;$$

2) Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x-2}{3x-5})^{1+4x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x-2}{3x-5})^{1+4x} = \|1^\infty\| (1 + \frac{3x-2}{3x-5} - 1)^{1+4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3x-2-3x+5}{3x-5})^{1+4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{3x-5})^{1+4x}.$$

(Введемо нову змінну $y = \frac{3}{3x-5}$, тоді $3x-5 = \frac{3}{y} \rightarrow 3x = \frac{3}{y} + 5 \rightarrow x = \frac{1}{y} + \frac{5}{3} \rightarrow 4x = \frac{4}{y} + \frac{20}{3}$ (коли $x \rightarrow \infty$, то $y \rightarrow 0$))=

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{4}{y} + \frac{20}{3}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{4}{y} + \frac{23}{3}} = \lim_{y \rightarrow 0} [(1 + y)^{\frac{1}{y}}]^4 \cdot (1 + y)^{\frac{23}{3}} = e^4.$$

Приклади:

Знайти границю функції

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2}{x+1};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2-4};$

в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{2-x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-4x}{x+x^4};$

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{x^2-1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$

є) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2-7x-40}{25-x^2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{17+2x}-5}{x-4};$

з) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{5+x}-\sqrt{9-x}};$

и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-5x^2+8}{11x^3+7x+1};$

і) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2+4x+1}{10x^5+3x^3-8x+7};$

ї) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6+8x^5-3}{x^4-3x^3+7x+1};$

й) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x-4^x}{3 \cdot 7^x+2^x};$

к) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 2^{x+3}}{3-2^x};$

$$л) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x};$$

$$м) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x \cdot \sin x};$$

$$н) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}};$$

$$о) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x+3};$$

$$п) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{4x}}{\arctg x};$$

$$р) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{3x} - 3^{2x}}{\arcsin x}$$

Еквівалентні нескінченно малі функції

Нехай $\alpha_{1(x)}$ та $\alpha_{2(x)}$ - нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_{1(x)} = 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_{2(x)} = 0$. Тоді $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються

еквівалентними нескінченно малими, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$.

Теорема:

Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1'(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2'(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то

існує і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1'(x)}{\alpha_2'(x)}$ і ці границі рівні між собою.

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій, кожену з них (або тільки одну) замінити іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій при $x \rightarrow 0$

Наслідки 1-ї виняткової границі	Наслідки 2-ї виняткової границі
$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $\arcsin x \sim x$ $\arctg x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$ $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$ $e^x - 1 \sim x$ $a^x - 1 \sim x \ln a$ $(1+x)^n - 1 \sim nx$; $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

Приклад:

Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}; \sin^7 \sim x \rightarrow 7x \sim 7x.$$

§ 4. Означення неперервності функції в точці та на проміжку

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (1). Оскільки $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$, то формулу можна записати

у вигляді: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$.

Тобто при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції. Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y=f(x)$. Різниця $x-x_0$ називається приростом аргументу в точці x_0 і позначається Δx : $\Delta x = x - x_0$. Різниця відповідних значень функції $f(x)-f(x_0)$ називається приростом функції в точці x_0 і позначається

$$\Delta y: \Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Запишемо рівність (1) в нових позначеннях. Крім того, перепишемо (1) таким чином: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$; оскільки умови $x \rightarrow x_0$ і $x - x_0 \rightarrow 0$

однакові, то рівність (1) набуває вигляду $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ (2)

Рівність (2) є ще одним означенням неперервності функції. Функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ (3)

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0 , а сама точка x_0 називається точкою розрива функції.

Види розривів:

- 1) Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$; $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$. Причому $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то розрив в точці x_0 називають розривом першого роду.
- 2) Якщо хоча б одна з односторонніх границь у формулі (3) не існує, або дорівнює нескінченності, то розрив в точці x_0 називається розривом другого роду.
- 3) Якщо для функції $f(x)$ існують скінченні границі $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$, але якщо $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$, то розрив в точці x_0 називається усувним.

Приклад:

$$y=f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & x < 3 \\ -1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (9-x^2) = 0; f(3+0) = -1, \text{ тобто}$$

$f(3-0) \neq f(3+0) \rightarrow$ функція $f(x)$ має в точці $x=3$ розрив першого роду. Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу (a,b) , то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Основні теореми про неперервні функції

Теорема 1.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0 , то в цій точці неперервними є функції $(f(x) \pm g(x)); (f(x) \cdot g(x)); (\frac{f(x)}{g(x)})$ - за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 2.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0 .

Теорема 3.

Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

Розділ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної

Тема 2. Похідна та диференціал функції

§1. Означення похідної

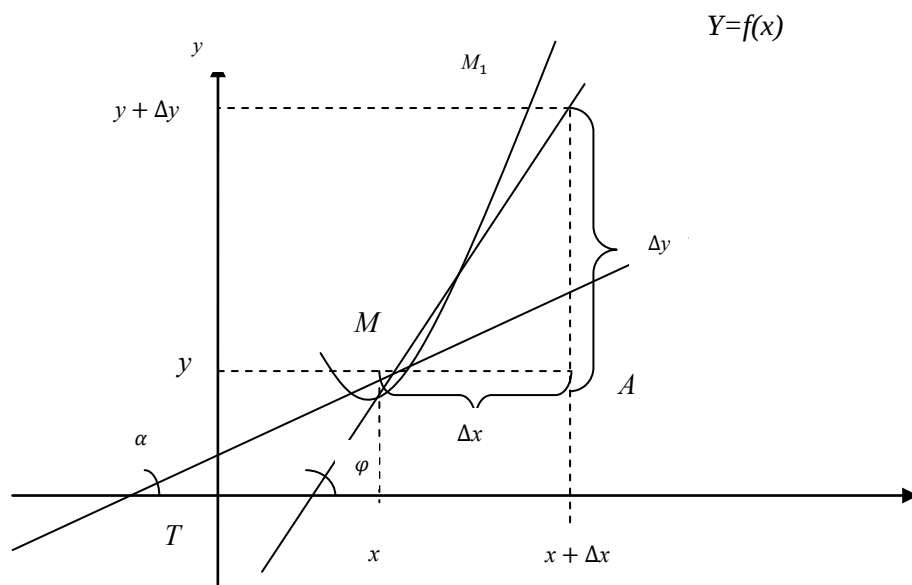
Нехай на деякому проміжку (a,b) задано функцію $y=f(x)$. Нехай $x \in (a,b)$ і надамо x довільного приросту Δx такого, що точка $(x+\Delta x) \in (a,b)$. Приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функцією $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y=f(x)$ в точці x позначається одним із таких символів: $y'; \frac{dy}{dx}; \frac{df}{dx}; y'_x; f'(x)$. Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \text{ Якщо границя } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ в деякій точці } x$$

не існує, то не існує в цій точці і похідна $f'(x)$. Нехай крива в прямокутній системі координат задана рівнянням $y=f(x)$ і має в точці $M(x,y)$ дотичну.



Знайдемо кутовий коефіцієнт цієї дотичної. Надамо аргументу x приросту Δx : тоді значенню $x + \Delta x$ відповідатимуть значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ і точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведемо січну MM_1 і позначимо через φ кут, утворений цією січною з додатним напрямом осі OX . З графіка видно, що $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AM_1}{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M_1 прямує до точки M , а січна MM_1 переходить в дотичну MT . Кут φ при цьому прямує до деякого граничного значення α .

Отже $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Таким чином

$\operatorname{tg} \alpha = K = f'(x_0)$, тобто похідна $f'(x_0)$ це тангенс кута α (кутовий коефіцієнт), що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі OX . У цьому полягає геометричний зміст похідної. Швидкість в даний момент часу – це похідна від пройденого шляху $\zeta(t)$ за часом t : $V = S'(t)$. Це механічний зміст похідної.

Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь. Нехай $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta x > 0$, тобто $\Delta x \rightarrow 0 + 0$, то відповідну границю називають правою похідною від $f(x)$ в точці x і позначають:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad \text{Аналогічно визначається ліва похідна:}$$

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Коли неперервна функція $f(x)$ має ліву і праву похідні в точці x і вони рівні, то похідна $f'(x)$ існує і $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$. Функція $f(x)$

називається диференційованою в точці x_0 , якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Теорема:

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в точці x_0 , то вона в цій точці неперервна. Справді, якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, то з першої властивості нескінченно малих функцій (тобто, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0)$$

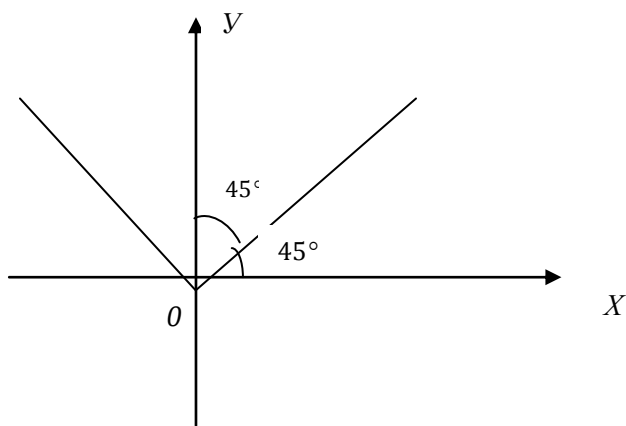
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x), \text{ де } \alpha(x) \rightarrow 0, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Тоді $\Delta y = (f'(x_0) + \alpha(x)) \cdot \Delta x \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$, а це означає, що функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна.

Обернене твердження невірне: існують неперервні функції, які в деяких точках не є диференційованими.

Приклад:

функція $y=|x|$



В точці $x=0$ неперервна, але недиференційована, тому що порушається умова $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$ і похідна не існує.

Справді $f'_+(0) \neq f'_-(0)$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Тому що, з означення $|\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \text{коли } \Delta x \geq 0 \\ -\Delta x, & \text{коли } \Delta x < 0 \end{cases}$

Таким чином, неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційованості в цій точці.

Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки

Якщо функції $u=U(x)$, $V=V(x)$ диференційовані в точці x , сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $V(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці і справедливі такі формули:

$$(U \pm V)' = U' \pm V'; (U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'; \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$$

Похідна сталої

Якщо $y=f(x)=C$, де C – стале число, то $f'(x)=C'=0$.

Дійсно, для довільних x і $\Delta x \neq 0$ маємо $f(x)=C$; $f(x + \Delta x) = C$

Тому, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$

$$C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто $(C \cdot U)' = C \cdot U'$.

Дійсно $(C \cdot U)' = C' \cdot U + C \cdot U' = 0 \cdot U + C \cdot U' = C \cdot U'$

Похідна складеної функції

Нехай $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$, тоді $y=f(\varphi(x))$ – складена функція.

Якщо функція $U=\varphi(x)$ має похідну U'_x в точці x , а функція $y=f(u)$ має

похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y=f(\varphi(x))$ має

похідну y'_x в точці x і справедлива формула $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Приклад:

Знайдемо похідну функції $y=\sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) =$$

$$= 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0$ (C – стала величина)
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0, a \neq 1$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Приклади:

Знайти похідну функції

$$1) y = 3 \sin x - 2 \cos x$$

$$y' = 3 \cdot (\sin x)' - 2 \cdot (\cos x)' = 3 \cos x - 2(-\sin x) = 3 \cos x + 2 \sin x;$$

$$2) y = 5 - 4x^3 + 3x - 1$$

$$y' = (5)' - (4x^3)' + (3x)' - 1' = 0 - 4 \cdot 3x^2 + 3 - 0 = -12x^2 + 3;$$

$$3) y = \operatorname{tg} x \cdot (3x^2 - 5)$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)' \cdot (3x^2 - 5) + \operatorname{tg} x \cdot (3x^2 - 5)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (3x^2 - 5) + \operatorname{tg} x \cdot (6x);$$

$$4) y = \frac{e^x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$y' = \frac{(e^x)' \cdot \operatorname{ctg} x - e^x \cdot (\operatorname{ctg} x)'}{(\operatorname{ctg} x)^2} = \frac{e^x \cdot \operatorname{ctg} x - e^x \cdot (-\frac{1}{\sin^2 x})}{(\operatorname{ctg} x)^2} = \frac{e^x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{e^x}{\sin^2 x}}{(\operatorname{ctg} x)^2}.$$

Диференціювання складеної функції за формулою $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (1)

Приклади:

Знайти похідну функції

а) $y = \sin^3 x$; б) $y = \ln \operatorname{tg} x$

а) Для функції $y = \sin^3 x$ останньою дією є піднесення до кубу, тому проміжний аргумент $u = \sin x$ і $y = u^3$. За формулою (1):

$$y'_x = (u^3)'_u \cdot (\sin x)'_x = 3u^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x;$$

б) Для функції $y = \ln \operatorname{tg} x$ останньою дією є взяття логарифма, тому проміжним аргументом є $u = \operatorname{tg} x$; $y = \ln u$, таким чином

$$y'_x = (\ln u)'_u \cdot (\operatorname{tg} x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Похідна неявної функції

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то кажуть, що функція задана у явній формі, або є явною. Під неявним завданням функції розуміють задання функції у вигляді $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної. Неявно задану функцію називають неявною. Нехай неявна функція $y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$ (2)

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності (2), вважаючи y функцією від x , і одержане рівняння розв'язати відносно y' . Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад:

Знайти похідну y' , якщо $x^2 + y^2 - 3y + 4x = 1$

$$\text{Маємо } 2x + 2y \cdot y' - 3y' + 4 = 0$$

$$y'(2y - 3) = -2x - 4;$$

$$y' = \frac{-2x - 4}{2y - 3} = \frac{2x + 4}{3 - 2y}$$

Зауважимо, що при диференціюванні другого доданка ми скористалися правилом диференціювання складеної функції:

$$(y^2)'_x = (y^2)'_y \cdot y'_x = 2y \cdot y'.$$

Похідні вищих порядків

Нехай на інтервалі (a, b) задана диференційована функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо ще першою похідною (або похідною першого порядку), також є функцією від x . Якщо функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі (a, b) , або в деякій точці $x \in (a, b)$, то цю останню

похідну називають другою похідною (або похідною другого порядку) і позначають одним із таких символів:

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають третьою похідною, або похідною третього порядку і позначають так:

$$y''', f'''(x), \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3 f}{dx^3}.$$

Похідною n -го порядку функції $y=f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$ -го порядку: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, або $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Похідні порядку вище першого називають похідними вищого порядку.

Приклад:

1) Знайти четверту похідну функції: $y=3x^5 - 6x^2 + 2x - 3$

Маємо $y' = 15x^4 - 12x + 2$, $y'' = 60x^3 - 12$, $y''' = 180x^2$; $y^{(4)} = 360x$

2) Знайти похідну n -го порядку функції $y=x^n$

$$y' = n \cdot x^{n-1}; y'' = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}; y''' = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3}; \dots$$

$$y^{(n)} = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots \cdot 1 = n!$$

Диференціал функції

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована в точці $x \in (a, b)$, тобто в цій точці має похідну $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; За першою властивістю нескінченно малих функцій

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \alpha \rightarrow 0, \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ звідки } \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx ; Другий доданок – нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx . Таким чином, перший доданок є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Диференціалом dy функції $y=f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx , частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Якщо $y=x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx . Тому формулу можна записати так:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

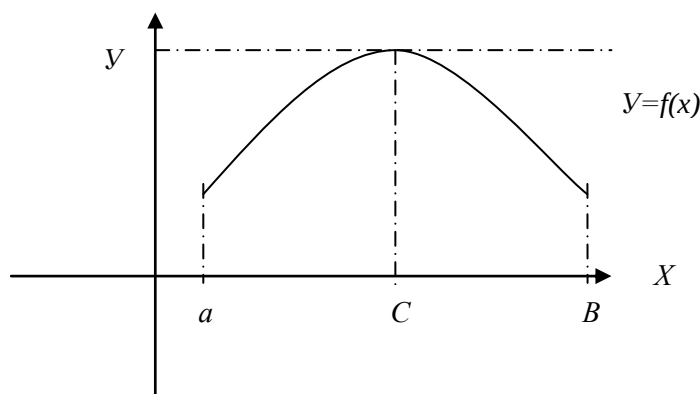
§2. Деякі теореми диференціального числення

Теорема Ферма

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці C цього інтервалу. Тоді, якщо в точці C існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ферма:

Якщо в точці $x=c$ функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(c, f(c))$ паралельна осі OX .

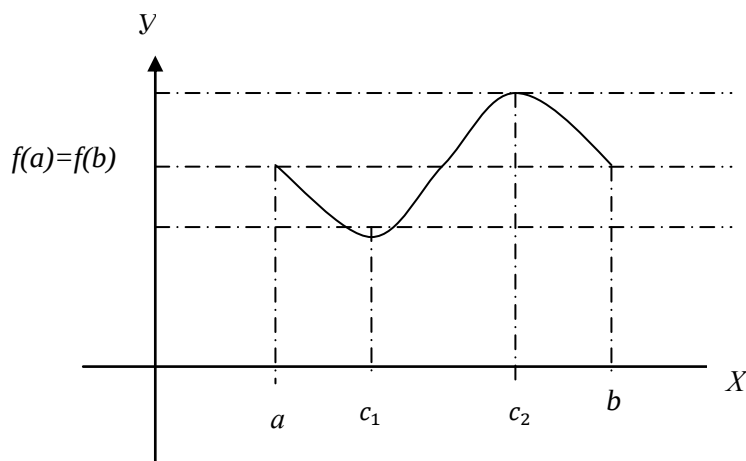


Теорема Ролля

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована в інтервалі (a, b) і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $C \in (a, b)$, в якій $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля:

Якщо функція задовольняє умови теореми Ролля, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі OX .



Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, диференційовані в інтервалі (a, b) , причому $\varphi'(x) \neq 0, x \in (a, b)$, то існує така точка $C \in (a, b)$, що $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ (1)

Доведемо це:

Введемо допоміжну функцію

$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} (\varphi(x) - \varphi(a))$, яку можна розглядати на відрізку $[a, b]$, ($\varphi(a) \neq \varphi(b)$). Функція $f(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля.

Тому знайдеться точка $C \in (a, b)$, в якій $F'(c) = 0$, або

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0, \text{ звідки й випливає формула } \underline{(1)}$$

Теорема Лагранжа

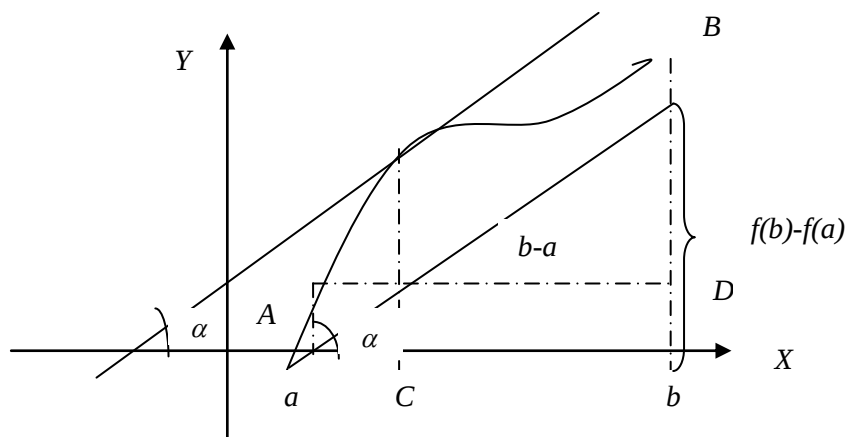
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована в інтервалі (a, b) , то в середині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $C \in (a, b)$, в якій $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ (2)

Цю теорему можна розглядати як окремий випадок Теорема Коші. Дійсно, поклавши у формулі (1) $\varphi(x) = x$ дістанемо формулу (2).

Геометричний зміст теореми Лагранжа:

Формулу (2) запишемо у вигляді $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad a < c < b$

Тоді $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BD}{AD} = \operatorname{tg} \alpha = f'(c)$.



Тобто, якщо функція $y=f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$.

Правила Лопітала

Теорема 1

Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ і в указаному околі $\varphi'(x) \neq 0$; Тоді, якщо існує границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження. Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x_0 = \infty$.

Теорема 1 дає змогу розкривати невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Теорема 2

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0 і в цьому околі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Теорема 2 дає змогу розкривати невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклади:

Обчислити границі

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Тут невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, за правилом Лопітала маємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{2x}$$

Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{2x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} \cdot 4 - e^{3x} \cdot 3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Приклади:

Знайти похідну функції

$$1) y = 4x^2 + \frac{5}{x^3} - \frac{3}{x^4};$$

$$2) y = -3x^4 + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^7};$$

$$3) y = 3\sqrt{x} - 4\sqrt[5]{x} + 2\sqrt[6]{x};$$

$$4) y = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[4]{x};$$

$$5) y = x^3\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}};$$

$$6) y = x^4 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}} + x^2\sqrt{x};$$

$$7) y = (3x^3 - 2x^2 + 7) \cdot \ln x;$$

$$15) y = \frac{3 \ln x + 7}{5x^3};$$

$$16) y = \frac{3x^2 + \log_4 x}{2x^2};$$

$$17) y = \frac{3 \sin x - 5}{2^x};$$

$$18) y = \frac{4 \operatorname{ctg} x - 1}{e^x + 3};$$

$$19) y = \log_4(x^3 - 2x + 1);$$

$$20) y = 4 \ln(\sqrt[3]{x} + 7) - 3\sqrt[5]{x};$$

$$21) y = \arccot \frac{5^x - 7}{7};$$

$$22) y = 3 \operatorname{arctg}(2^x - e^{-2x});$$

$$23) y = \log_2^3(4x + \sin x);$$

$$8) y = (4x^5 - 7x^2 + 4x) \cdot \log_3 x - 7e^x;$$

$$9) y = x^2 \cdot \sin x - 4x \cdot \log_2 x + 3;$$

$$10) y = 3x \cdot \operatorname{ctg} x + 3^x - \cos x;$$

$$11) y = x^3 \cdot \operatorname{tg} x - 3x \cdot \arccos x + 5 \cdot e^x;$$

$$12) y = x^2 \cdot \arcsin x + 4x^4 \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$13) y = \frac{2x - 3x^3 + 4}{5 - 4x};$$

$$14) y = \frac{2x^5 - 7x^2}{3(x^3 - 8)};$$

$$24) y = \ln^2(3 + \operatorname{tg} x);$$

$$25) y = \operatorname{tg} \sqrt{4} + \frac{\cos^2 5x}{2 \sin 7x};$$

$$26) y = \cos \sqrt{5} - \frac{\operatorname{ctg}^2 7x}{4 \cos 2x};$$

$$27) y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{1+x^4-5}}{3x};$$

$$28) y = \arccos \frac{\sqrt{2+x^2-3}}{x^3};$$

$$29) y^3 - 3x - \sin xy = 0;$$

$$30) 2y^2 - 5x^2 - \cos xy = 0;$$

$$31) y = a(1 - \sin t); x = a(t^2 - \cos t);$$

$$32) y = b(2t - \operatorname{tg} t); x = b(7 - \operatorname{ctg} t);$$

Знайти y'' :

$$33) y = 5^x;$$

$$34) y = \sin 2x;$$

$$35) y = 3 \cos x;$$

$$36) y = e^{3x};$$

Знайти y''' :

$$37) y = e^x;$$

$$38) y = \sin x;$$

$$39) y = \operatorname{tg} x;$$

$$40) y = \operatorname{ctg} x.$$

Рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ та рівняння нормалі

Ми вже знаємо, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, або тангенс кута α , що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі OX - це похідна $f'(x_0)$ в цій точці: $K = \operatorname{tg} \alpha = f'(\tilde{\alpha}_0)$. Тому рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд: $Y - y_0 = f'(x_0) \cdot (X - x_0)$.

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної. Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності ($K_1 \cdot K_2 + 1 = 0$, або $K_2 = -\frac{1}{K_1}$), то рівняння нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклади:

I. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

а) $y=x^3$ в точці $A(2,8)$

б) $y=\ln x$ в точці $A(1,0)$

в) $y=3x^2 + 4$ в точці $A(-1,7)$

г) $y=\frac{2+x^2}{1+3x^2}$ в точці $A(1, \frac{3}{4})$

II. Знайти границю за правилом Лопіталя

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7}{3x^2 + 2x - 5}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 2x}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2\sin x}{x^2}$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin 4x}$

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$

е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{4^x}$

Тема 3. Дослідження функцій та побудова графіків

§1. Зростання та спадання функції (Монотонність функції)

Теорема 1. (достатні умови строгої монотонності)

Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функція зростає (спадає) в точці x_0 .

Зауваження:

- 1) Для того, щоб диференційована на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ не спадала (не зростала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) всюди на (a, b) .

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, або не існує, називаються критичними точками.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

- 1) Знайти область визначення функції
- 2) Знайти похідну даної функції
- 3) Знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує
- 4) Розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна - спадає

Приклади:

Знайти інтервали монотонності функцій:

a) $y = \arctg x$

Область визначення є нескінченний інтервал $x \in (-\infty, +\infty)$

Похідна $y' = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних

точок функція не має. Оскільки $y'(x) > 0, x \in (-\infty, +\infty)$, то функція зростає на всій області визначення.

б) $y = x \cdot \ln x + 3x$

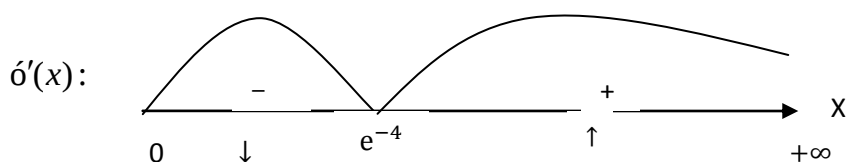
Область визначення $x \in (0, +\infty)$

Похідне $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 3 = \ln x + 4$

Знаходимо критичні точки: $\ln x + 4 = 0 \rightarrow x = e^{-4}$.

Похідна існує на всій області визначення, тому інших критичних точок функція не має.

Розбиваємо область визначення точкою $x = e^{-4}$ на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них (символами $\uparrow \downarrow$ умовно позначається зростання та спадання функції):



Маємо $\forall x \in (0, e^{-4}): y'(x) < 0 \Rightarrow$, при $x \in (0, e^{-4})$ функція спадає;

$\forall x \in (e^{-4}, +\infty): y'(x) > 0 \Rightarrow$, при $x \in (e^{-4}, +\infty)$ функція зростає.

§2. Локальний екстремум функції

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції, і для всіх x з цього окілу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму, а значення функції в цих точках називаються відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом, або локальним екстремумом.

Не слід плутати локальний максимум (локальний мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції, якого вона може набувати в області визначення функції.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, треба:

- 1) Знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу (a, b)
- 2) Обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a і b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше)

Приклад:

Знайти найбільше й найменше значення функції $y = f(x) = x^4 - 18x^2$ на відрізку $[-1, 4]$. Знаходимо критичні точки заданої функції

$$f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 0, \quad x_1 = -3; x_2 = 0; x_3 = 3$$

Відрізку $[-1, 4]$ належать точки $x_2 = 0; x_3 = 3$

$$f(0) = 0;$$

$$f(3) = -81;$$

$$f(-1) = -17;$$

$$f(4) = -32$$

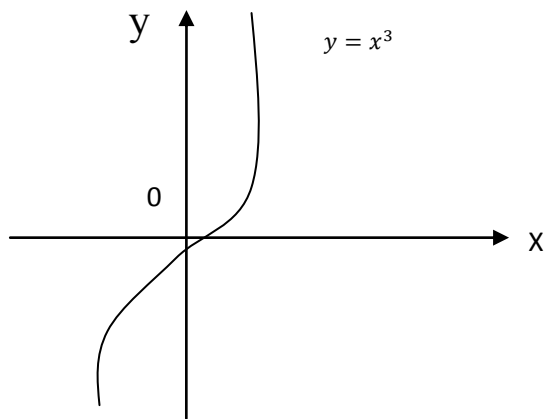
Отже, $y_{\text{наіб}} = f(0) = 0; y_{\text{наім}} = f(3) = -81$

Теорема (необхідна умова локального екстремуму)

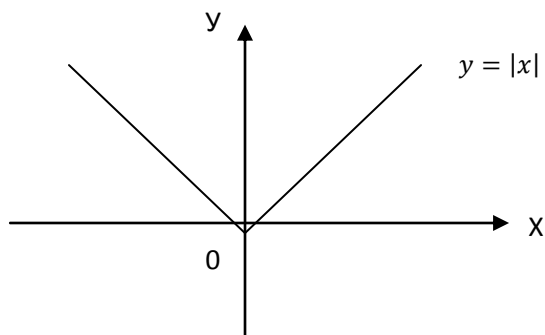
Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційована в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною, але недостатньою для того, щоб диференційована в точці x_0 функція мала локальний екстремум.

Наприклад, функція $y = x^3$ має похідну $y' = 3x^2$, вона дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму



Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, $y=|x|$ має в точці $x=0$ мінімум, але не має в цій точці похідної.



Таким чином, повна необхідна умова локального екстремуму:

Якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною. Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Таким чином, точки локального екстремуму можуть бути серед точок, в яких $f'(x)=0$ і, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує. Тому критичні точки називають також точками можливого екстремуму.

Теорема (перша достатня умова локального екстремуму)

Нехай x_0 - критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому функція має похідну $f'(x)$ крім, можливо, точки x_0 , тоді:

- 1) Якщо в інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$

- 2) Якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$
- 3) Якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 - не є екстремальною точкою функції $f(x)$

Правило дослідження функції на екстремум

Щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

- 1) Знайти критичні точки функції $f(x)$
- 2) Якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками
- 3) За зміною знака $f'(x)$
- 4) при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках.

Приклад:

Знайти локальні екстремуми функції $y=f(x)=4x^2 + \frac{1}{x}$.

Область визначення $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

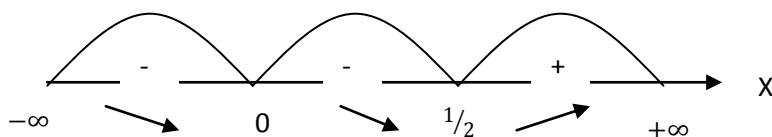
Знаходимо похідну $f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2}$

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = \frac{1}{2}$ і не існує при $x=0$.

Отже, $x = \frac{1}{2}$ - критична точка даної функції, точка $x=0$ не належить області визначення, тому не є критичною точкою.

Розбиваємо область визначення на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них:

σ' :



Отже $x = \frac{1}{2}$ - точка локального мінімуму, тобто

$$x_{\min} = \frac{1}{2}, y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

Теорема (друга достатня умова локального екстремуму)

Нехай в точці x_0 похідна функції дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$ і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 - точка локального максимуму.

Приклад:

Знайти локальний екстремум функції $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 3$

Область визначення $x \in (-\infty, +\infty)$. Похідна $f'(x) = x^2 - 4$

Розв'язуємо рівняння: $f'(x) = 0; x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2$ - це критичні точки даної функції. Знайдемо екстремуми за другою достатньою умовою: $f''(x) = 2x$ і $f''(-2) < 0$, то $x_1 = -2$ точка локального максимуму,

$y_{\max} = f(-2) = +\frac{25}{3}; f''(2) > 0$, тому $x_2 = 2$ - точка локального мінімуму,

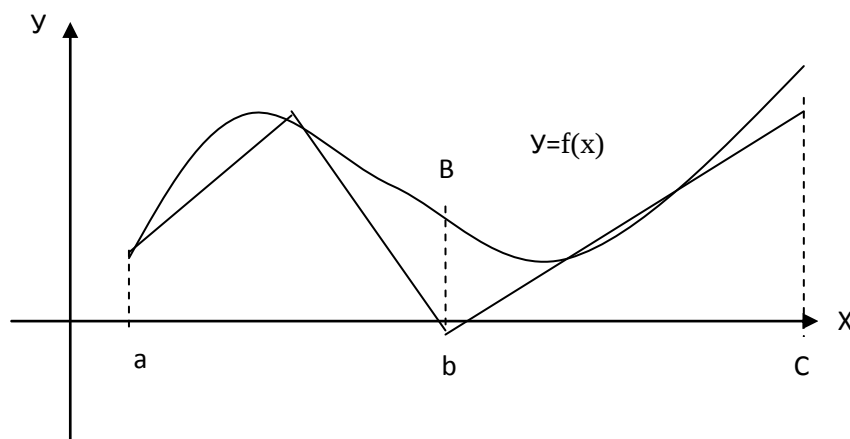
$y_{\min} = f(2) = -\frac{7}{3}$

§3. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної і дотичної на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається вгнутою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.



На рисунку крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі (a, b) , вгнута на інтервалі (b, c) і точка **B** - точка перегину.

Теорема

Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на (a, b) , тоді:

1) Якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a, b)$, то крива $y=f(x)$ опукла на (a, b) .

2) Якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$, то крива $y=f(x)$ вгнута на (a, b) .

З теореми випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує).

Однак, точками перегину кривої $y=f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує.

Наприклад:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-5/3} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Точка $A(0, 0)$ – точка перегину:

$\forall x > 0, f''(x) > 0$, тоді крива вгнута при $x > 0$

$\forall x < 0, f''(x) < 0$, тоді крива опукла при $x < 0$

Тоді точка $A(0, 0)$ відділяє її опуклу частину від вгнутої.

Теорема (достатні умови існування точки перегину)

Нехай $f''(x_0) = 0$ (або не існує). Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

Приклад:

Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = x^5 + 5x - 6$

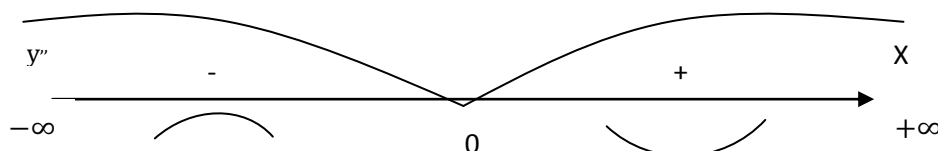
Область визначення $(-\infty, +\infty)$

Оскільки $f''(x) = 20x^3 = 0$ при $x = 0$

Розбиваємо область визначення точкою $x = 0$ на інтервали і досліджуємо зміну знака другої похідної: якщо $x \in (-\infty, 0)$, то

$f''(x) < 0$ - крива опукла, якщо $x \in (0, +\infty)$, то $f''(x) > 0$ - крива вгнута.

Точка $(0, -6)$ – точка перегину кривої.



Приклади:

1. Знайти інтервали зростання та спадання функції

a) $y = x^3 + 10x^2 + 12x - 5$

$$б) y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 15x - 6$$

$$в) y = \frac{x}{\ln x}$$

$$г) y = x \ln x + 3x$$

2. Знайти екстремуми функції

$$а) y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$б) y = \ln(x^2 + 1)$$

$$в) y = x + \sqrt{3 - x}$$

$$г) y = 1 - (x - 2)^{4/5}$$

3. Знайти найменше та найбільше значення функції на вказаному відрізці

$$а) y = x^4 - 2x^2 + 3, x \in [-3, 2]$$

$$б) y = x^4 - 8x^2, x \in [-1, 3]$$

4. Знайти інтервали вгнутості та опуклості точки перегину кривої

$$а) f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[7]{(x-1)^6}$$

$$б) f(x) = (x-4)^5 + 4x + 4$$

§4. Асимптоти кривої

Пряма називається асимптотою кривої $y=f(x)$, якщо відстань від змінної точки $M(x,y)$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка $M(x,y)$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Для існування вертикальної асимптоти $x=x_0$ необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

Рівняння похилої асимптоти має вигляд: $y=kx+b$

k та b знаходяться за формулами

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$$

Якщо хоча б одна з цих границь не існує, або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має. Якщо $k=0$, то

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \text{ тому } y=b - \text{рівняння горизонтальної асимптоти.}$$

Зауваження:

Асимптоти кривої $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$ можуть бути різні, тому при знаходженні асимптот потрібно обчислювати при $x \rightarrow +\infty$ і при $x \rightarrow -\infty$.

Приклад:

Знайти асимптоти кривої $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$

Область визначення $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$f(x)$ не визначена в точці $x = -2$ і $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = \left\| \frac{11}{-0} \right\| = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = \left\| \frac{11}{+0} \right\| = +\infty$, то $x = -2$ – вертикальна асимптота.

Шукаємо наклонну асимптоту $y = k \cdot x + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x \cdot (x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = -4$$

Пряма $y = x - 4$ є похилою асимптотою даної кривої при $x \rightarrow +\infty$; неважко переконатися, що ця пряма є асимптотою і при $x \rightarrow -\infty$.

§5. Дослідження функцій та побудова графіку

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба:

- 1) Знайти область існування функції
- 2) Якщо є точки, в яких функція не існує, треба ці точки досліджувати на неперервність функції, коли в цих точках функція має розрив 2-го роду, то пряма $x = x_0$ (де x_0 - точка розриву 2-го роду) є вертикальна асимптота
- 3) Знайти точки перетину графіка з координатними осями
- 4) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність
- 5) Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках
- 6) Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину
- 7) Знайти похилу асимптоту кривої
- 8) Побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в пунктах 1-7

Приклад:

Дослідити та побудувати графік функції $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2}$

- 1) Область існування функції: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) Функція в точці $x=0$ має розрив другого роду:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^3+8}{x^2} = \left\| \frac{8}{+0} \right\| = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^3+8}{x^2} = \left\| \frac{8}{+0} \right\| = +\infty; x=0 - \text{вертикальна}$$

асимптота кривої.

3) Якщо $x=-2$, то $y=0$ – графік перетинає ось $0x$ при $x=-2$; $x \neq 0$ - графік не перетинає ось $0y$.

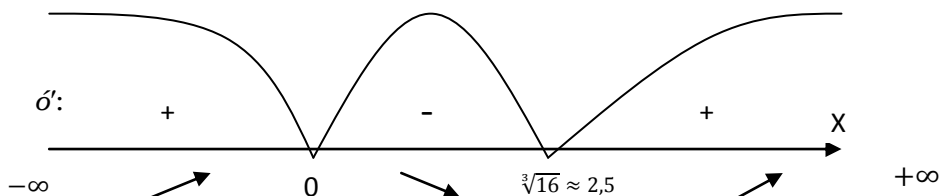
4) Функція не періодична. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3+8}{(-x)^2} = \frac{-x^3+8}{x^2} \neq -f(x)$, а також

$f(-x) \neq f(x)$, то функція загального виду.

5) Похідна

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+8) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 16x}{x^4} = \frac{x^4 - 16x}{x^4} = \frac{x(x^3 - 16)}{x^4} = \frac{x^3 - 16}{x^3}$$

дорівнює нулю при $x^3 = 16$; $x = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \approx 2,5$; при $x=0$ похідна не існує, але ця точка не входить в область визначення. Розбиваємо область визначення на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них



Отже $x = \sqrt[3]{16}$ – точка локального мінімуму, тобто

$$x_{\min} \approx 2,5; y_{\min} \approx y(2,5) = \frac{(2,5)^3 + 8}{(2,5)^2} = \frac{24}{6,25} = 3,84$$

Якщо $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{16}, +\infty)$ функція зростає.

Якщо $x \in (0, \sqrt[3]{16})$ функція спадає.

6) Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 16) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3x^5 - 3x^5 + 48x^2}{x^6} = \frac{48}{x^4}; \quad y'' \neq 0 \text{ не існує при}$$

$x=0$, яка не входить в область визначення. Маємо $y'' > 0$

при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ крива вгнута, точок перегину нема.

7) Знаходимо похилу асимптоту $y=kx+b$

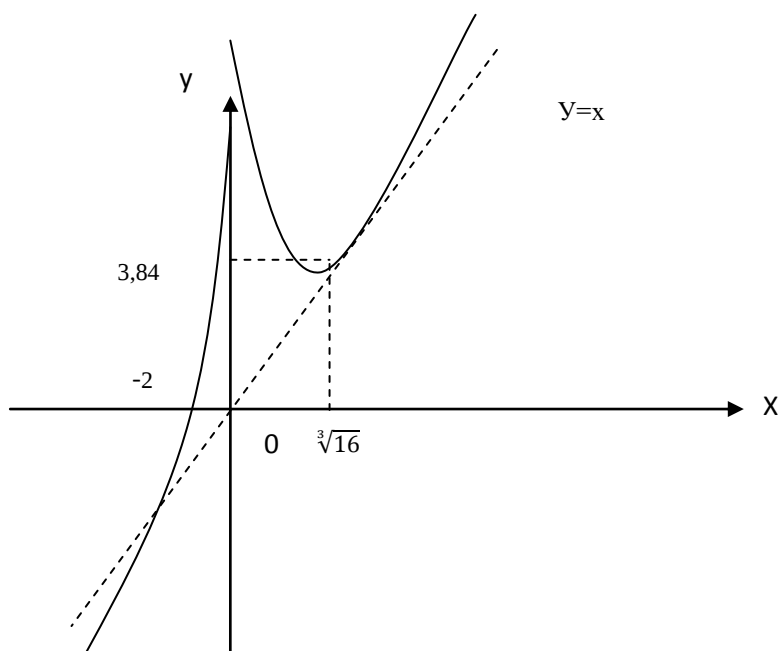
8)

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3+8}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+8}{x^3} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3+8}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+8-x^3}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0$$

то при $x \rightarrow \pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y=x$.
Враховуючи проведені дослідження, побудуємо графік.



Приклади:

1. Знайти асимптоти графіка функції

a) $y = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

б) $y = \frac{-4x^2 - 2x - 6}{3(2x + 1)}$

в) $y = x + 2 \arctg x$

г) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

2. Побудувати графік функції

$$a) y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

$$б) y = \frac{x}{(x-1) \cdot (x-4)}.$$

Розділ 3. Інтеграли

Тема 4. Інтегральне числення

§1. Первісна функція та невизначений інтеграл

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Обернена задача є знаходження функції $f(x)$ за відомою її похідної $f'(x)$. Розв'язується ця задача за допомогою невизначеного інтеграла.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , якщо $F(x)$ диференційована на (a, b) і $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$.

Наприклад:

Первісній функції $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ є функція $F(x) = \frac{x^4}{4}$ (справді,

$F'(x) = (\frac{x^4}{4})' = x^3, x \in \mathbb{R}$). Очевидно, що первісними будуть також функції

$F(x) = \frac{x^4}{4} + 2$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3$ і взагалі $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, де C – довільна стала,

оскільки $F'(x) = (\frac{x^4}{4} + C)' = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Таким чином задача знаходження

первісної розв'язується неоднозначно.

Теорема

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляд $F(x) + C$.

Дійсно, нехай $\phi(x)$ – деяка інша, крім $F(x)$, первісна функції $f(x)$, тобто

$\phi'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Маємо

$\forall x \in (a, b): (\phi(x) - F(x))' = \phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, а це означає, що

$\phi(x) - F(x) = C$. Отже, $\phi(x) = F(x) + C$.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку (a, b) і C – довільна стала, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку (a, b) і позначається символом $\int f(x) dx$.

Знак $\int$ називається інтегралом, $f(x) dx$ – підінтегральним виразом, $f(x)$ – підінтегральною функцією, x – змінною інтегрування.

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$ **(1)**.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегрування цієї функції.

Із рівностей (1) випливають властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$
2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$
3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$
4. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла: $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$
5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій: $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа доданків.
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $U = \varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$. Ця властивість називається інваріантністю формули інтегрування.

Приклади:

1. $\int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$,
тобто $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$
2. $\int \ln^2 x d \ln x = \frac{\ln^3 x}{3} + C$, тобто $\int \ln^2 x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

Таблиця основних інтегралів

Інтеграли цієї таблиці називають табличними

- 1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;
- 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
- 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
- 4) $\int e^x dx = e^x + C$;
- 5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- 6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- 7) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;
- 8) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$14) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Основні методи інтегрування

- 1. Метод безпосереднього інтегрування.** Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням.

Приклади:

Знайти інтеграли

$$a) \int \left(3x - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$$

$$\int (3x - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}}) dx = 3 \int x dx - \int x^{1/2} dx + 4 \int x^{-1/4} dx =$$

$$3 \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) - \left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C_2 \right) + 4 \left(\frac{x^{-1/4+1}}{-1/4+1} + C_3 \right) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} +$$

$$\frac{16}{3} x^{3/4} + (3C_1 - C_2 + 4C_3) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{16}{3} x^{3/4} + C.$$

В підсумку записують лише одну довільну сталу C , тому що, коли C_1, C_2, C_3 – довільні сталі, то $3C_1 - C_2 + 4C_3 = C$ також є довільною сталою. Тому надалі стала C означатиме суму всіх проміжних сталих.

б)

$$\int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$\int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$$

- 2. Метод підстановки (заміни змінної)**

Теорема

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , тобто $\int f(x) dx = F(x) + C; x \in (a, b)$ і нехай функція $x = \varphi(t)$; тоді $dx = \varphi'(t) dt$ визначена і диференційована на проміжку (α, β) , причому

множина значень цієї функції є проміжок (a, b) . Тоді справедлива формула $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$,
 $t \in (\alpha, \beta)$. Ця теорема застосовується таким способом

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x) dx = du \end{array} \right| \\ &= \int f(u) du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C \end{aligned}$$

Приклади:

1) Знайти $\int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} dx$

Введемо заміну $\ln x + 2 = t$, тоді $dt = d(\ln x + 2) = \frac{1}{x} dx$; тому

$$\int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} \cdot dx = \int t^2 dt$$

Запишемо це таким чином:

$$\int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x + 2 = t \\ d(\ln x + 2) = dt \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \cdot dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\ln x + 2)^3}{3} + C;$$

$$2) \int \cos^3 x \cdot \sin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ d \cos x = -dt \\ -\sin x \cdot dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int t^3 (-dt) = - \int t^3 dt =$$

$$- \frac{t^4}{4} + C = - \frac{(\cos x)^4}{4} + C.$$

Зауваження: $\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$, де F – первісна для f .

3. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du;$$

$$u dv = d(u \cdot v) - v \cdot du.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du, \text{ або } \int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Ця формула називається формулою інтегрування частинами.

Зауваження:

1) Інтеграли виду $\int p(x) \cdot e^{kx} dx$, $\int p(x) \cdot \sin kx dx$, $\int p(x) \cdot \cos kx dx$, де $p(x)$ – багаточлен, а k – дійсне число зручно обчислювати методом інтегрування частинами. У цих інтегралах за u слід взяти множник $p(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2) Інтеграли виразу

$$\int p(x) \ln x dx,$$

$\int p(x) \cdot \arcsin x dx, \int p(x) \arccos x dx, \int p(x) \arctg x dx$, де $p(x)$ – многочлен теж зручно обчислювати методом інтегрування частинами. У цих інтегралах з u слід взяти відповідно $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x$, а за dv – слід взяти $p(x)dx$, тобто $dv = p(x)dx$;

3) Взагалі, за u береться така функція, яка диференціюванням спрощується.

Приклади:

Знайти інтеграли

a) $\int (3x + 2) \cos x dx$

$$\int (3x + 2) \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x + 2 & dv = \cos x dx \rightarrow \\ du = (3x + 2)' dx = 3 dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = (3x +$$

$$+ 2) \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 3 dx = (3x + 2) \cdot \sin x + 3 \cos x + C$$

б) $\int x^2 \ln x dx$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = d \ln x = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot$$

$$\frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c;$$

Приклади:

1. $\int (3 - 2x + x^2 - 4x^3) dx;$
2. $\int (7x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 4x^4 - 1);$
3. $\int 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[4]{x^3} dx;$
4. $\int (5\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4\sqrt[7]{x^3}) dx;$
5. $\int (5x - 2\sqrt{x})^2 dx;$
6. $\int (x^3 + \sqrt{x})^2 dx;$
7. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 7}{3x^3} dx;$
8. $\int \frac{x^3 + 4x^4 + 6}{7x^5} dx;$
9. $\int \frac{dx}{x^2 - 16};$
10. $\int \frac{dv}{x^2 + 9};$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 + x^2}};$
12. $\int \frac{dv}{\sqrt{9 - x^2}};$

$$13. \int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+16}} \right) dx;$$

$$14. \int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2-16}} - \frac{2}{x^2-9} \right) dx;$$

$$15. \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx;$$

$$16. \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx;$$

$$17. \int \frac{7-4 \sin^3 x}{\sin^2 x} dx;$$

$$18. \int \frac{2+3 \cos^3 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$19. \int \sin(4x-1) dx;$$

$$20. \int \cos(2-7x) dx;$$

$$21. \int 5^{3x-2} dx;$$

$$22. \int e^{2-3x} dx;$$

$$23. \int \frac{3x^2+5}{x^3+5x-6} dx;$$

$$24. \int \frac{4x-4}{3-4x+2x^2} dx;$$

$$25. \int x^3 \cdot \sin(x^4-1) dx;$$

$$26. \int \operatorname{ctg}(x^3+1) \cdot x^2 dx;$$

$$27. \int (3-4x) \sin x dx;$$

$$28. \int (2x+1) \cos x dx;$$

$$29. \int (x-5)e^x dx;$$

$$30. \int (5x+8) \cdot e^{-x} dx.$$

§2. Означення визначеного інтегралу та основні його властивості

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками: $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$; $i=1, 2, \dots, n$, візьмемо довільну

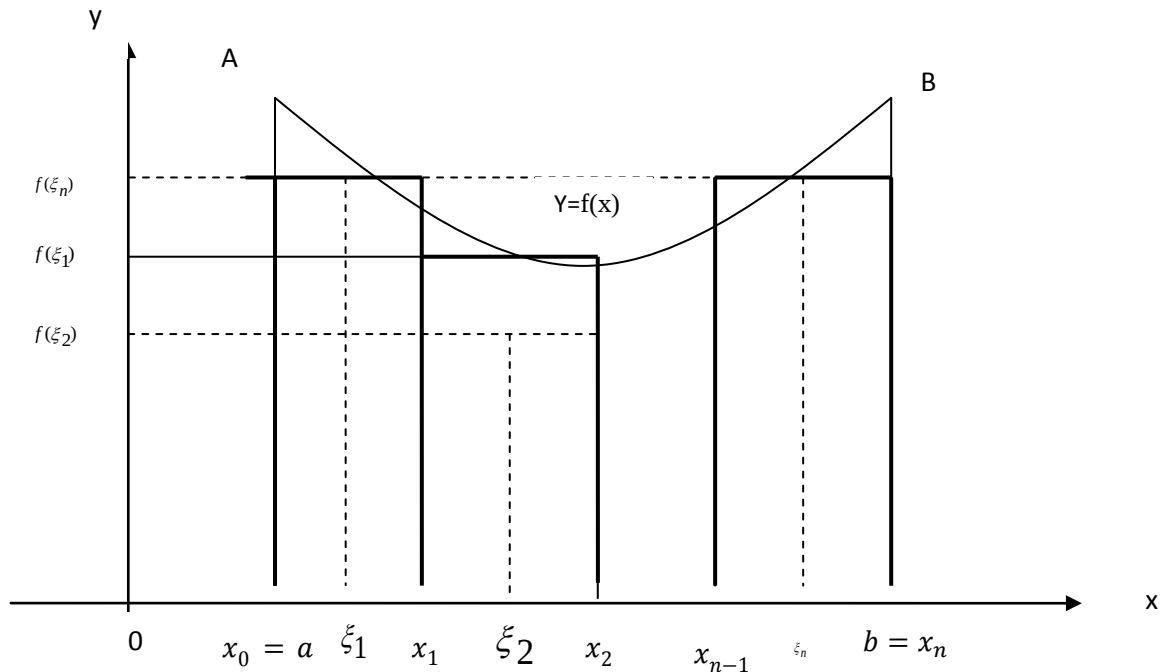
точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і побудуємо суму $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - довжин відрізка $[x_{i-1}, x_i]$.

Сума S_n називається інтегральною сумою функції $f(x)$.

Геометричний зміст інтегральної суми:

Якщо $f(x) \geq 0$, то число S_n дорівнює площі ступінчастої фігури, тобто сумі площ n прямокутників з основами Δx_i і висотами $f(\xi_i)$



Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$; $1 \leq i \leq n$.

Якщо існує нескінченна границя інтегральної суми S_n при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від розбиття точками x_i відрізка $[a, b]$, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx. \text{ Отже, згідно з означенням } \int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається інтегрованою на відрізку $[a, b]$. Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою межею інтегрування, функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією; $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування; $[a, b]$ – проміжком інтегрування.

Теорема (достатня умова інтегрованості)

Якщо функція неперервна на $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Основні властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює

$$\text{нулю: } \int_a^a f(x) dx = 0$$

2. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на

$$\text{протилежний: } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

3. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$, і $c \in (a, b)$, то справедлива

$$\text{рівність: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Сталій множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

5. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми інтегрованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, тоді вона інтегрована на будь-якому відрізку $[a, x] \in [a, b]$, тобто для довільного $x \in [a, b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t)dt$ (змінну інтегрування ми позначили через t , щоб не плутати з верхньою межею x). Заданий інтеграл, очевидно, є функцією від x .

Позначимо $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ і назвемо його інтегралом зі змінною верхньою межею.

Теорема

Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Теорема розкриває зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами.

Теорема Ньютона-Лейбніца

Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a, b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки $\phi(\tilde{0})$ є також первісною, то

$\phi(x) = F(x) + C$, тому маємо $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Поклавши в цій рівності

$x=a$, дістанемо $\int_a^a f(t)dt + F(a) + C = 0$, звідки $C = -F(a)$, тому

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

поклавши $x=b$, дістанемо $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, таким чином дістаємо формулу Ньютона-Лейбніца. Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символом $F(x)\Big|_a^b$, тому формула записується ще й так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона-Лейбніца дає зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених для верхньої і нижньої меж інтегрування.

Приклад

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Методи обчислення визначених інтегралів

1. Метод зміни змінної (або підстановки).

Теорема

Нехай виконуються умови:

- 1) Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$
- 2) Функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$
- 3) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$;

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Ця формула називається формулою зміни змінної (або підстановки) у визначеному інтегралі.

Зауваження:

- 1) Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x , то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \varphi(\alpha)$ відносно невідомого t , а верхня межа β - з рівняння $b = \varphi(\beta)$.

- 2) Часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \chi(x)$
- 3) у випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \chi(a), \beta = \chi(b)$

Приклад:

$$\begin{aligned} &\text{обчислити інтеграл } \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} \\ &\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+3x} = t \\ 1+3x = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{3} \\ dx = d\left(\frac{t^2-1}{3}\right) = \left(\frac{t^2-1}{3}\right)' \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot 2t dt = \frac{2}{3} t \cdot dt \\ x=0; t=\sqrt{1+3 \cdot 0} = \sqrt{1} = 1 \\ x=5; t=\sqrt{1+3 \cdot 5} = \sqrt{16} = 4 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot t \cdot dt}{t} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1) dt = \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \left(\frac{64}{3} - 4 \right) - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{64}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{63}{3} - 3 \right) = \frac{2}{9} \cdot 18 = 4 \end{aligned}$$

2. Метод інтегрування частинами визначеного інтеграла

Формула інтегрування частинами визначеного інтеграла

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Всі зауваження відносно інтегрування частинами невизначеного інтеграла переносяться на цю формулу.

Приклад: Обчислити інтеграл $\int_0^1 \arctg x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} \arctg x = u \Rightarrow du = d\arctg x = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dx = dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| = \arctg x \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \cdot dx}{1+x^2} = \\ &= \arctg 1 \cdot 1 - \arctg 0 \cdot 0 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - 0 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

Знайдемо $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}$ заміною змінної:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ d(1+x^2) = dt \rightarrow (1+x^2)^1 dx = dt \rightarrow 2x \cdot dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \\ x=0; t=1+0^2=1 \\ x=1; t=1+1^2=2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^2 \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2; (\ln 1 = 0)$$

Тому

$$\int_0^1 \arctg x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

Приклади:

Обчислити визначений інтеграл

$$1) \int_1^2 (2x + \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x}) dx;$$

$$2) \int_0^1 (x^5 + 2\sqrt[4]{x^3} + e^x) dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 16};$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1};$$

$$5) \int_0^3 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx;$$

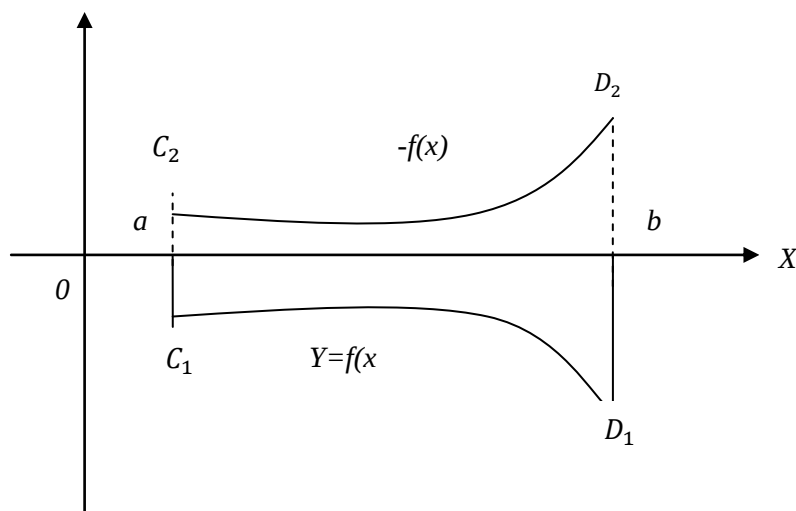
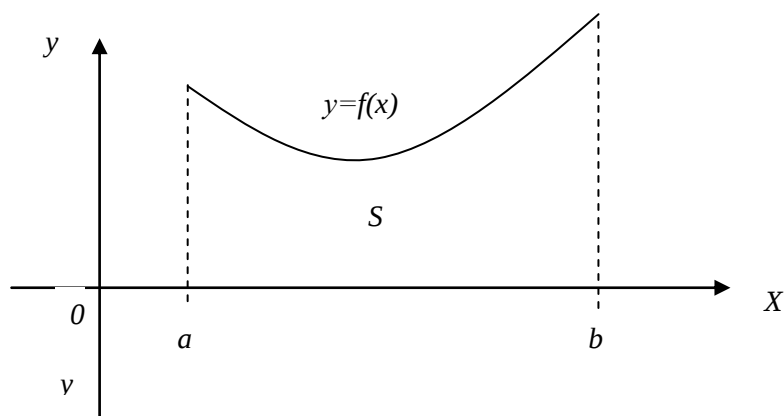
$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx;$$

$$7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cdot \cos x dx;$$

$$8) \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$$

§3. Обчислення площ плоских фігур

Якщо на відрізку $[a, b]$ функція $y=f(x)$ неперервна і $f(x) \geq 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$ знаходять за формулою $S = \int_a^b f(x) dx$ (1)

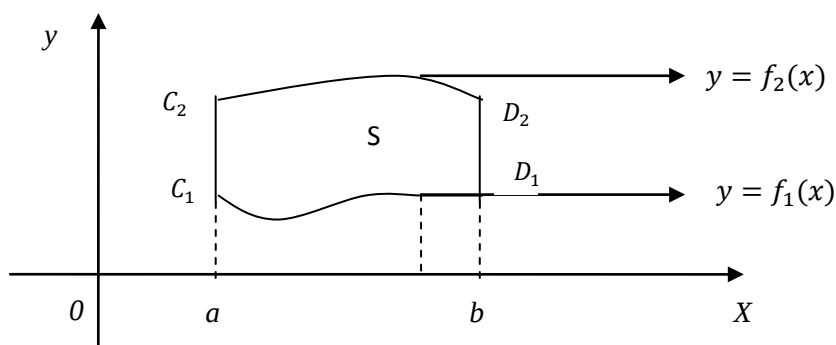


Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$ то фігура a, C_1, D_1, b лежить під віссю OX . Площа цієї фігури дорівнює площі криволінійної трапеції aC_2D_2b , яка обмежена зверху кривою $-f(x) \geq 0$, тоді $S = -\int_a^b f(x) dx$ (2)

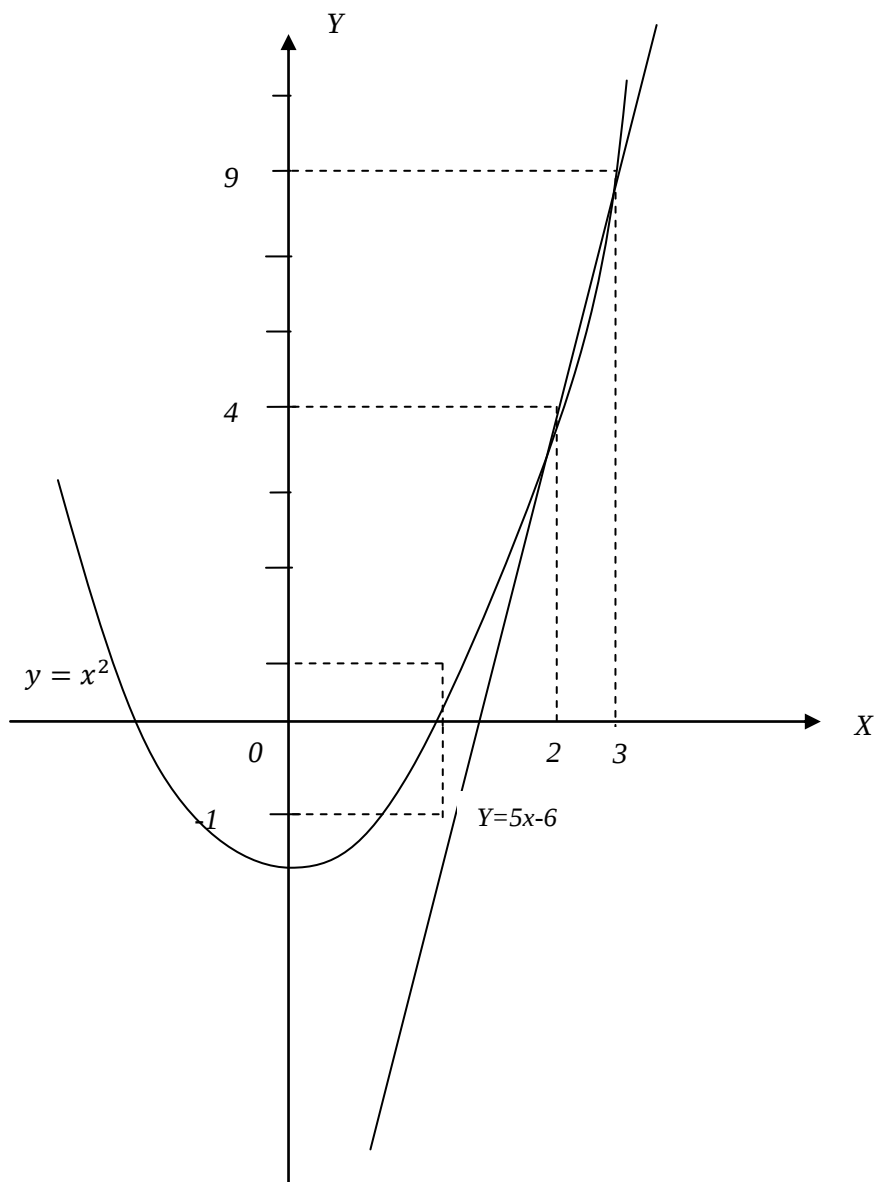
Ці формули (1) і (2) можна об'єднати в одну: $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Якщо треба обчислити площу фігури C_1, C_2, D_1, D_2 , то

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$



Приклад: знайти площу фігури, обмеженої прямою $y=5x-6$ і параболою $y=x^2$.



Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y = 5x - 6 \\ y = x^2 \end{cases}$ дістанемо $x_1 = 2, x_2 = 3$. Це і є межі інтегрування.

Тому

$$S = \int_2^3 ((5x-6) - x^2) dx = \left(5 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = \left(\frac{5}{2} \cdot 9 - 18 - \frac{27}{3} \right) - \left(\frac{5}{2} \cdot 4 - 12 - \frac{8}{3} \right) =$$

$$= \frac{45}{2} - 18 - 9 - 10 + 12 + \frac{8}{3} = \frac{45}{2} + \frac{8}{3} - 25 = \frac{135 + 16 - 150}{6} = \frac{1}{6}$$

§4. Невласні інтеграли

Невласний інтеграл – це інтеграл від функції на необмеженому проміжку, або від необмеженої функції.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$ і інтегрована на будь-якому відрізку $[a, b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$, тоді, якщо існує скінченна границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, її називають невластним інтегралом

першого роду і позначають так: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, таким чином, за означенням

$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$. У цьому випадку інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ – інтегровну на проміжку $[a, +\infty)$.

Якщо ж границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ не існує, або нескінченна, то інтеграл називається розбіжним, а функція $f(x)$ – не інтегровною на $[a, +\infty)$.

Аналогічно $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^C f(x) dx + \int_C^{+\infty} f(x) dx$, де C – довільне дійсне число. Цей інтеграл існує, або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа.

Приклади:

Обчислити невластний інтеграл, або встановити його розбіжність

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

За формулою маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Отже інтеграл збігається.

$$2) \int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e^0) = +\infty, \text{ отже інтеграл розбіжний.}$$

2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, b)$. Точку $x=b$ назовемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \rightarrow \infty$ при

$x \rightarrow b - 0$. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b - \varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$; тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \text{ її називають невластним інтегралом другого роду}$$

і позначають так: $\int_a^b f(x) dx$. Отже $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$. У цьому випадку

кажуть, що інтеграл існує, або збігається. Якщо ж границя не існує, або нескінченна, то інтеграл називається розбіжним. Аналогічно, якщо $x=a$ — особлива точка, то невластний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \text{ Якщо } a \text{ і } b \text{ — особливі точки, то за умови існування}$$

обох невластних інтегралів $\int_a^C f(x) dx$ і $\int_C^b f(x) dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ де } C \text{ — довільна точка інтервалу } (a, b).$$

Приклади:

Обчислити невластний інтеграл, або встановити його розбіжність

$$1) \int_1^2 \frac{3}{\sqrt{x-1}} dx$$

$x=1$ – особлива точка, то невластний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3}{\sqrt{x-1}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{3}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 3 \cdot (x-1)^{-1/2} dx = 3 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{(x-1)^{1/2}}{1/2} \right|_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= 6 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{x-1} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = 6 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}) = 6 \cdot 1 = 6 \end{aligned}$$

отже, інтеграл збігається.

$$2) \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$x=0$ – особлива точка

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_{\varepsilon}^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{1}{x} \right|_{\varepsilon}^1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \frac{1}{\varepsilon}) = \infty$$

Отже інтеграл розбіжний.

Приклади:

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіками функції

а) $y = x^2 + 3, x = 1, x = 2, y = 0$

б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1; x = 0, x = 2, y = 0$

в) $y = x^2, x - y + 6 = 0$

г) $y = \sqrt{x}, xy = 1, x = 4$

д) $y = \ln x, x = e, y = 0$

е) $y = 4 - x^2, y = x + 2$

є) $y = 3 - x^2, y = x^2 + 1$

ж) $y = x^2, y = 2x - x^2$

2. Обчислити невластний інтеграл, або встановити його розбіжність

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

б) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

в) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$

г) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Частина 2

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Розділ 4. Основні поняття теорії матриць

Тема1. Числові матриці

§1 Лінійні операції з матрицями

Багато математичних моделей різних економічних об'єктів подаються у простій, компактній і зрозумілій формі, а саме у матричній формі. Тому і знайомство з поняттям матриці і матрична алгебра мають важливе значення для економістів .

Означення:

Матриця – це прямокутна таблиця чисел, що складається з m -рядів і n -стовпчиків. Це і є розмір матриці ($m \cdot n$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, подвійний індекс (ij) означає, що елемент знаходиться у i -рядку і j -стовпчику. Матриці A і B називаються рівними, якщо вони одного розміру і мають однакові елементи на відповідних місцях (ij).

Матриця називається нульовою, якщо вона складається з одних тільки нулів.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпчиків, то така матриця називається квадратною і має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ тобто } m=n$$

У даному разі число n називається порядком матриці, а елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ - її головна діагональ.

Діагональною називають квадратну матрицю, у якій всі елементи, що знаходяться не на головній діагоналі дорівнюють 0 .

Одиничною називають діагональну матрицю, у якій всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Лінійні операції з матрицями

Означення:

Сумою (різницею) двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ розміру $m \cdot n$ називають матрицю $C = (c_{ij})$ розміру $m \cdot n$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Позначення суми і різниці $A+B=C$ ($A-B=C$).

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad A-B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Скласти і віднімати можна матриці тільки одного розміру.

Означення:

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на скаляр (на дійсне число α) називається матриця B ($B=\alpha A$), елементи якої дорівнюють $b_{ij}=\alpha \cdot a_{ij}$.

Матрицею $(-A)$ називають матрицю $(-I)A$. Це протилежна до A матриця.

Легко перевірити основні властивості розглянутих операцій:

1. $A+B=B+A$
2. $A+0=A$
3. $A+(-A)=0$
4. $(A+B)+C=A+(B+C)$
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

❖ Добуток матриць

Множити можна тільки узгоджені матриці, тобто коли кількість стовпчиків першого множника дорівнює кількості рядків другого матриці

$$A \cdot B = C$$

Якщо як і раніше

$$A=(a_{ij}), \text{ де } 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n, \text{ а матриця } B=(b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq s,$$

то

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Таким чином розмір отриманої матриці C_{m*s} у скороченому вигляді

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 15 \\ -3 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

У загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$, якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то такі матриці називають комутативними.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Треба бути уважним в роботі з матрицями.

$$\text{Так } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ не нульова, але } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ така, що $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = A$

Основні властивості добутку матриці:

1. $AE = EA = A$
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
6. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$

Якщо n – натуральне число, то $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$, де A – квадратна матриця.

$A^0 = E$ – за означенням, де A квадратна матриця. Як ми вже бачили із рівності $A^n = 0$ ще не витікає, що $A = 0$.

Транспонування матриці

Якщо в матриці $A = (m \cdot n)$ замінити всі рядки відповідними стовпчиками. Перший рядок – першим стовпчиком, другий рядок – другим стовпчиком і так далі. То ми отримаємо нову матрицю A^T , так звану транспоновану матрицю. Її розмір вже буде $(n \cdot m)$.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Хай матриця A – квадратна.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

§2 Визначники квадратних матриць

Означення:

Визначником квадратної матриці другого порядку називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Для матриць більш високого порядку введемо такі терміни.

Означення:

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A називають визначник матриці $(n-1)$ порядку, який із матриці A добувається видаленням i -того рядка та j -го стовпчика.

Приклад:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Тоді

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і так далі.

Означення:

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A n -го порядку називають мінор M_{ij} помножений на $(-1)^{i+j}$

Означення:

Визначником квадратної матриці A n -го порядку називають число

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Тобто можна розкривати визначник або по елементам якого-небудь рядка, або по елементам любого стовпчика.

Приклад:

Обчислимо визначник верхньої трикутної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

Згідно з означенням отримаєм

Так само із нижньою трикутною матрицею.

Основні властивості визначників

- ❖ При транспонуванні матриці її визначник не міняється
- ❖ Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю
- ❖ При перестановці двох паралельних рядів визначника його знак змінюється на протилежний
- ❖ Спільний множник усіх елементів деякого рядка можна винести за знак визначника
- ❖ Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помноженого на довільне число
- ❖ Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Якщо $C=A \cdot B$, то $\det C = \det A \cdot \det B$

§3. Елементарні перетворення матриці

- 1) Відкидання нульового рядка (стовпчика)
- 2) Множення всіх елементів матриці на будь-яке число не рівне «0»
- 3) Переставляння рядків місцями
- 4) Додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого паралельного рядка, помножених на будь-яке число
- 5) Транспонування матриці.

Приклад:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

При роботі з матрицями, при розв'язанні лінійних алгебраїчних рівнянь корисним є використання поняття «ранг матриці». В матриці довільного

розміру виділили « k » рядків і « k » стовпчиків. В місцях перетину цих ліній знаходяться елементи, які утворюють квадратну матрицю розміру $k \times k$.
це і є мінор k -го порядку матриці A .

Означення:

Рангом матриці A називається найвищий порядок ненульового мінору цієї матриці.

Позначається цей ранг: $r(A)$; r .

Із означення витікає, що $r(A) \leq \min(m, n)$, де m і n - це числа, що описують розмір матриці $(m \cdot n)$.

$r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли матриця A - нульова.

Для квадратної матриці порядку n $r(A) = n$, тоді, коли $\det A \neq 0$

Властивості рангу матриці

$$1. r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

$$2. r(A^T A) = r(A)$$

$$3. r(A \cdot B) \leq \min(r(A); r(B))$$

$$4. r(A \cdot B) = r(A), \text{ якщо } B - \text{квадратна, невироджена матриця.}$$

Завдання для самостійної роботи:

Знайти ранг матриці:

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$б) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$в) \begin{pmatrix} -0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$г) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Відповіді: а) 2; б) 2; в) 3; д) 3.

Знайомлясь з матрицями слід визначити такі важливі поняття, як обернена матриця.

§4. Обернена матриця та способи їх знаходжень

Означення:

Оберненою матрицею до квадратної матриці A називають таку матрицю A^{-1} , для якої $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E - одична матриця того ж розміру, що і матриця A .

Ми вкажемо два способи знаходження A^{-1} .

Перший спосіб:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} .

Означення:

Квадратну матрицю називають невинродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю.

Теорема:

Обернена матриця A^{-1} існує тільки тоді, коли вона невинроджена.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 20 \neq 0$$

$$A_{11} = 5 \quad A_{21} = -15 \quad A_{31} = -5$$

$$A_{12} = 3 \quad A_{22} = -9 \quad A_{32} = -7$$

$$A_{13} = 7 \quad A_{23} = -1 \quad A_{33} = -3$$

Таким чином

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -15 & -5 \\ 3 & -9 & -7 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{20} & \frac{-15}{20} & \frac{-5}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{-9}{20} & \frac{-7}{20} \\ \frac{7}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-3}{20} \end{pmatrix}$$

Другий спосіб знаходження: A^{-1}

Справа від основної матриці A через вертикальну риску записуємо одиничну матрицю відповідного порядку. І за допомогою елементарних перетворень приводимо ліву частину цієї розширеної матриці до одиничної матриці, причому всі дії, які ми проводимо з лівою половиною цієї розширеної матриці, автоматично проводимо і з правою частиною цієї розширеної матриці. Після приведення лівої половини до одиничної матриці у правій її половині утворюється обернена матриця.

Приклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

після множення першого рядка на **2** і **(-3)** і додавання до другого і третього

$$\text{рядків} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{переставили другий і третій рядки}$$

місцями

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{помножимо другий рядок на } \mathbf{3} \text{ і додамо його}$$

$$\text{до третього} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-3}{20} \end{array} \right) \rightarrow \text{помножимо третій рядок на } \mathbf{(-3)}$$

і додамо до першого; помножимо третій рядок на **(9)** і додамо до другого

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{9}{20} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{-9}{20} & \frac{-7}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{20} & \frac{-1}{20} & \frac{-3}{20} \end{array} \right) \rightarrow \text{помножимо другий рядок на } \mathbf{(2)} \text{ і додамо до}$$

$$\text{першого} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 5 & -15 & -5 \\ & & & \hline 1 & 0 & 0 & \frac{20}{3} & \frac{20}{-9} & \frac{20}{-7} \\ 0 & 1 & 0 & \hline & & & 20 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \hline & & & 7 & -1 & -3 \\ & & & \hline & & & 20 & 20 & 20 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

І ми отримали таку саму матрицю, A^{-1} що і першим способом. Цей другий спосіб має перевагу над першим, так як при збільшені розміри основної матриці не треба обчислювати велику кількість алгебраїчних доповнень A_{ij} .

Безпосередня перевірка підтверджує, що $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Властивості невироджених (неособливих) матриць:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$
- 2) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
- 3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- 4) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Другий спосіб обчислення оберненої матриці частіше використовується для матриць більш високих порядків (четвертого, п'ятого,...) через велику кількість алгебраїчних доповнень (A_{ij}).

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти обернену матрицю A^{-1} , де:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad б) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad в) A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$г) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad д) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix};$$

Відповіді:

$$\begin{aligned}
 a) \quad A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & 29 & 24 \end{pmatrix}; & б) \quad A^{-1} &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; & в) \quad A^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 г) \quad A^{-1} &= \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; & д) \quad A^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

n-вимірні вектори.

§5. Вектори та дії з ними

Означення:

n-вимірним вектором називають упорядковану сукупність ***n***-чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ і позначають вектор-рядок $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, або вектор-стовпчик

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Числа a_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) називають координатами вектора.

Для скорочення запису використовують вказані ***n***-вимірні вектори при деяких характеристиках товарів, наприклад. Вектор цін на різні види товарів і інші. Вектор, у якого всі координати дорівнюють нулю, називається нульовим $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Вектори $\vec{a} = \vec{b}$ називають рівними, якщо рівні відповідні координати векторів.

Сумою (різницею) двох ***n***-вимірних векторів $(\vec{a} + \vec{b})$ називається ***n***-вимірний вектор $\vec{c}$, координати якого: $c_i = a_i + b_i$ ($\tilde{c}_i = a_i - b_i$)

Добуток ***n***-вимірного вектора $\vec{a}$ на скаляр α це ***n***-вимірний вектор $\alpha \cdot \vec{a}$, координати якого $(\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n)$.

Означення:

Множину ***n***-вимірних векторів із дійсними координатами, які визначено вказані операції називають векторним простором і позначають R^n .

Якщо задана множина ***m*** векторів у $R^n: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, то її називають системою ***m*** векторів.

Означення:

Вектор $\vec{b}$ називають лінійною комбінацією векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ якщо існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, що $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_m = \vec{b}$

Означення:

Систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, називають лінійно залежною якщо існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, деякі з яких не рівні нулю, що $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}$.

Якщо із останнього рівняння витікає, що якщо тільки всі $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ дорівнюють нулю, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається лінійно незалежною.

Теорема :

Система векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ лінійно залежна тільки тоді, коли один із цих векторів є лінійною комбінацією інших.

Приклад:

Визначити лінійно залежні чи лінійно незалежні вектори

$$\vec{a}_1 = (1, -1, 2, 0); \quad \vec{a}_2 = (2, 1, -2, 3); \quad \vec{a}_3 = (-2, 0, 2, 2)$$

Треба перевірити, які значення коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ витікають із рівності $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$.

$$\text{Тобто } \alpha_1 = (1, -1, 2, 0) + \alpha_2 = (2, 1, -2, 3) + \alpha_3 = (-2, 0, 2, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

Ця векторна рівність еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи із стовпчиком правих частин за допомогою елементарних перетворень приведемо її до

еквівалентної.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Розв'язок цієї системи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Таким чином ми маємо лінійно незалежні вектори.

Означення:

Базисом векторного простору R^n називають довільну систему n лінійно незалежних векторів.

Векторний простір R^n називається n -вимірним, якщо в ньому є n лінійно незалежних векторів, а люба система із $n+1$ вектора лінійно залежна. Число n називається вимірністю простору.

Теорема:

Любий вектор в R^n можна записати як лінійну комбінацію базисних векторів.

Якщо базис в $R^n - \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$, то будь-який вектор $\vec{a} \in R^n$ можна записати як $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$, причому ці коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

А сам процес представлення вектора $\vec{a}$ називається розкладанням вектора у цьому базисі.

У векторному просторі R^n вводиться поняття скалярного добутку двох векторів, який позначається $(\vec{a}, \vec{b})$ і за означенням

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \text{ де } \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ і } \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Розкладемо вектор $\vec{b}$ в базисі $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, де $\vec{a}_1 = (1, -1, 2)$ $\vec{a}_2 = (2, 1, -1)$ $\vec{a}_3 = (0, 1, 2)$ $\vec{b} = (-1, -1, 1)$

Спочатку впевнімося у тому, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - лінійно незалежні.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}; \text{ вектори } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 - \text{ лінійно}$$

незалежні і вони утворюють базис.

Розкладемо вектор $\vec{b}$ у цьому базисі. Для визначення координат вектора $\vec{b}$ у цьому базисі запишемо матрицю, у якій додамо ще один

стовпчик координат вектора $\vec{b}$. І за допомогою елементарних перетворень приведемо ліву частину (до вертикальної риски) до одиничної матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ -1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2 \\ 0 & -5 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 4 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 4 & | & -1 \\ 0 & 0 & -11 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{11}{11} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{11} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \rightarrow$$

В правому стовпчику (після вертикальної риски) вказані координати вектора $\vec{b}$ у новому базисі $\vec{b} = \frac{3}{11} \vec{a}_1 - \frac{7}{11} \vec{a}_2 - \frac{1}{11} \vec{a}_3 = (-1, -1, 1)$.

Завдання для самостійних робіт:

а) Розкласти вектор $\vec{b}$ в новому базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, де $\vec{a}_1 = (1, 2, 0)$ $\vec{a}_2 = (2, 1, 1)$
 $\vec{a}_3 = (-1, 1, 0)$ $\vec{b} = (1, 2, 3)$

б) Розкласти вектор $\vec{b}$ в новому базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, де $\vec{a}_1 = (2, 2, 2)$ $\vec{a}_2 = (-1, 1, 0)$
 $\vec{a}_3 = (1, 3, 5)$

в) Розкласти вектор $\vec{b}$ в новому базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, де $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$ $\vec{a}_2 = (2, 3, 4)$
 $\vec{a}_3 = (2, 2, 2)$ $\vec{b} = (-1, 3, 4)$

Відповіді:

а) $\vec{b} = -2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$

б) $\vec{b} = \frac{5}{2}\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$

в) розкласти неможливо так, як вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно залежні.

А модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$

Означення:

Два вектори називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Прикладом такого ортонормованого базису можуть бути вектори

Матриця даної системи векторів:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 6 & 1 \\ 7 & -6 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & -12 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -12 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -12 & -8 \\ 0 & 2 & 5 & -12 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & -12 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці системи векторів - **3**, а значить і максимальна кількість лінійно незалежних векторів - **3**.

Розкладання вектора $\vec{b} = (2, 3, 4)$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, де $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$;

$$\vec{a}_2 = (2, 2, -1); \vec{a}_3 = (3, 0, 1).$$

Вказані три вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ дійсно можуть бути базисом у тривимірному просторі, так вони лінійно незалежні. Визначник, утворений цими трьома векторами не дорівнює нулю. Нам необхідно представити вектор $\vec{b}$, як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ - це координати вектора $\vec{b}$ у цьому базисі. Запишемо всі

вектори як вектори стовпчики:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

І за допомогою елементарних перетворень приведемо ліву частину цієї матриці до виду одиночної матриці. Тоді на місці вектора $\vec{b}$ будуть вказані коефіцієнти $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, тобто координати вектора $\vec{b}$ у цьому базисі.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\alpha_1 = -5, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 3);$$

$$\vec{b} = -5\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$$

Зробимо перевірку $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Розділ 5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та способи їх розв'язання

§1. Неоднорідні системи

Розглянемо систему лінійних рівнянь, що складається з m рівнянь з n

невідомими $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Числа при невідомих $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ називаються коефіцієнтами, а числа $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ вільними елементами. Розв'язком системи називають упорядковану систему чисел $(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n)$, які задовольняють кожному рівнянню системи при підстановці $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$.

Систему рівнянь називають сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок. Система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо вона має тільки один розв'язок і невизначеною, якщо вона має нескінчену кількість розв'язків. Матрицю складену з коефіцієнтів при невідомих називають основною матрицею системи

$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{nm} \end{pmatrix}$, а матрицю ще з одним стовпчиком вільних членів

розширеною матрицею системи.

$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{nm} & b_m \end{array} \right)$

Якщо позначити матриці-стовпчики $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$, то система рівнянь

може бути скорочено записана у виді $A \cdot X = B$. Це так звана матрична форма запису системи. Відповідь на питання сумісності систем дасть теорема Кронекера-Капеллі: система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи. Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система визначена і має єдиний розв'язок. Якщо ранг сумісної системи менший числа невідомих, то система рівнянь невизначена і має безліч розв'язків. Якщо ранг сумісної системи $r < n$, то r невідомих називають базисними, а інші $(n-r)$ – вільні невідомі і вони можуть приймати довільні значення, r базисних невідомих виражаються через них.

Лінійні алгебраїчні системи рівнянь та методи їх розв'язання

Ми розглянемо чотири методи розв'язання, два з яких відносяться до системи, де кількість рівнянь у системі дорівнює кількості невідомих, а ще два - до загального випадку, тобто коли кількість рівнянь може і не дорівнювати кількості невідомих.

Перший спосіб розв'язки – матричний.

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Кількість рівнянь у системі - n і кількість невідомих - n .

Всю цю систему можемо записати у вигляді: $AX=B$ (2), де A - квадратна матриця

Другий спосіб розв'язання систем за допомогою формул Крамера. Він також визнається за допомогою невідроджених матриць системи ($\det A \neq 0$). Де матриця A - це матриця, складена із коефіцієнтів при невідомих ($\Delta \neq 0$).

Суть метода у тому, що $x_k - k$ - невідома; $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, де Δ - основний визначник системи, а Δ_k - визначник, у якому порівняно з Δ змінився тільки один стовпчик, а саме k -стовпчик, тобто коефіцієнти при k - невідомій замінили на стовпчик вільних членів, тобто правих частин системи.

Приклад:

Візьмемо попередній приклад

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 26 \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \\ 26 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -25 & 17 \end{vmatrix} = 2(-3 \cdot 17 + 25 \cdot 2) = -2; \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 26 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 20 = -6; \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 20 \end{vmatrix} = -20 + 10 = -10; \quad \tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Відмітимо, що метод Крамера і математичний метод підходять тільки у випадку, коли кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь системи і пов'язані з великою кількістю обчислювальної роботи. Тому розглянемо іще два методи розв'язання алгебраїчних систем, в яких кількість невідомих буде n , а кількість рівнянь m . Перший з них – метод Гауса, або метод послідовного виключення невідомих. Основою цього метода є вже добре відомі елементарні перетворення системи рівнянь, за допомогою яких система зводиться до еквівалентної системи, з якої послідовно знаходять усі змінні.

Нагадаємо, що до елементарних перетворень системи лінійних рівнянь відносяться:

- ❖ переставляння місцями двох рівнянь системи
- ❖ множення рівняння системи на число не рівне нулю
- ❖ додавання до одного з рівнянь системи іншого, помноженого на довільне число.

Переставимо на перше місце рівня системи, у якого коефіцієнт при невідомій $\tilde{a}_1$ ($a_{11} \neq 0$). Помножимо це перше рівняння на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$, додамо до другого рівняння і отримаємо друге рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 дорівнює нулю. Аналогічно, помножимо перше рівняння на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$, додамо до третього рівня системи і так далі. Наша еквівалентна система прийме вид:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = 0$$

$$a_{33}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = 0$$

.....

$$a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = 0$$

А далі, аналогічно відносно невідомих $x_2, x_3, \dots, \tilde{a}_n$; або до трикутної зрізаної форми і починаючи з кінця випишуємо усі розв'язки системи.

Приклад:

Розв'язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \end{array}\right); 8\tilde{a}_3 = -16; \tilde{a}_3 = 2; -\tilde{a}_2 + 3\tilde{a}_3 = 5; \tilde{a}_2 = 1; x_1 + x_2 + x_3 = 4;$$

$$\tilde{a}_1 = 4 - \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3; \tilde{a}_1 = 1$$

У даному випадку система визначена і її розв'язок $\tilde{a}_1 = 1; \tilde{a}_2 = 1; \tilde{a}_3 = 2$.

Інший приклад:

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -9 \end{cases}$$

Знову запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -9 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ранг розширеної матриці і ранг матриці системи дорівнюють трьом. Система сумісна, але має нескінченну кількість розв'язків.

$$x_3 + x_4 = 5 \text{ тобто } x_3 = 5 - x_4; \quad x_2 + x_3 = 1; \quad x_2 = 1 - x_3 = -4 + x_4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \quad x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 + x_4; \quad x_1 = 2x_4 - 5$$

у даному випадку вільна невідома x_4 , а три інші виражаються через неї.

І останній – четвертий метод розв'язання систем лінійних рівнянь – метод Жордана-Гаусса, або метод повного виключення. Ви основі методу знову лежать елементарні перетворення матриць. Спочатку обирається рівняння (назвемо його ведучим) і невідому з коефіцієнтом при неї не рівним нулю за допомогою елементарних перетворень робим всі коефіцієнти при цій невідомій (крім ведучого рівняння) рівними нулю, крім того поділивши ведуче рівняння (обидві частини) на коефіцієнт при ведучій невідомій. Наступний крок – обираємо інше рівняння – і назвемо його ведучим і нову невідому і так далі, поки всі рівняння не будуть ведучими.

В кінці описуємо отримані розв'язки. При обранні ведучих невідомих обирають ту невідому в стовпчику коефіцієнтів якої є більше нулів.

Приклад:

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

x_3 і x_5 .

$$\begin{cases} \tilde{O}_1 - 5\tilde{O}_3 - 10\tilde{O}_5 = -5 \\ 2\tilde{O}_3 + \tilde{O}_4 + 11\tilde{O}_5 = 3 \\ \tilde{O}_2 + 2\tilde{O}_3 + 4\tilde{O}_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{O}_1 = -5 + 5\tilde{O}_3 + 10\tilde{O}_5 \\ \tilde{O}_2 = 3 - 2\tilde{O}_3 - 4\tilde{O}_5 \\ \tilde{O}_4 = 3 - 2\tilde{O}_3 - 11\tilde{O}_5 \end{cases}$$

§2. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система рівнянь називається однорідною, якщо всі праві частини рівнянь системи дорівнюють нулю, тобто вона має вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Така система сумісна і завжди є розв'язки.

Завжди справедлива теорема Кронекера-Капеллі, так як додавання до матриці системи одного нульового стовпчика вільних членів не може змінити ранг розширеної матриці $r(A) = r(A|B)$. Завжди є тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Легко перевірити, що якщо $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n)$ і $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n)$ два різних розв'язки систем, то їх сума $x' + x''$ також є розв'язок системи.

Означення:

Систему розв'язків однорідної системи називають фундаментальною, якщо вона є лінійно незалежною, а будь-який інший розв'язок системи є її лінійною комбінацією.

Якщо ранг матриці A - $r < n$. Тобто ранг A , системи лінійних однорідних рівнянь менший від числа невідомих, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї системи складається з $(n-r)$ розв'язків. Число $n-r$ є числом вільних невідомих у системі.

Приклад:

Розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Обчислимо ранг цієї системи

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 9 & 21 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} r(A)=2.$$

Так як кількість невідомих $n=4$, а $\text{rang}=2$, то $n-r=2$.

Фундаментальна система розв'язків складається з двох розв'язків.

Наша система рівносильна системі

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 10x_2 + 9x_3 + 21x_4 = 0 \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$x_2 = -\frac{9}{10}x_3 - \frac{21}{10}x_4 \text{ і } x_1 = \frac{22}{10}x_3 + \frac{8}{10}x_4.$$

Щоб знайти одну з фундаментальних систем візьмемо два вектори $(1;0)$ і $(0;1)$ і будемо вважати, що вільні невідомі x_3 і x_4 дорівнюють координатам цих векторів. Ці вектори лінійно незалежні.

$$\text{Тоді } \begin{cases} -\tilde{O}_3 = 1; \tilde{O}_4 = 0; \tilde{O}_1 = \frac{22}{10}; \tilde{O}_2 = -\frac{9}{10} \\ -\tilde{O}_3 = 0; \tilde{O}_4 = 1; \tilde{O}_1 = \frac{8}{10}; \tilde{O}_2 = -\frac{21}{10} \end{cases}$$

Таким чином розв'язки

$$x_1 = \frac{22}{10}; x_2 = -\frac{9}{10}; x_3 = 1; x_4 = 0 \text{ і } x_1 = \frac{8}{10}; x_2 = -\frac{21}{10}; x_3 = 0; x_4 = 1$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків. Є і інші фундаментальні системи розв'язків і приведена вище одна з них.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Грисенко М.В. Математика для економістів: методи й моделі, приклади й задачі: навчальний посібник для вузів. – Київ: Либідь, 2007. – 719 с.
2. Григоров А.В., Дідковська Б.В., Навродський В.О. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії. – К., Дельта, 2006.
3. Михайленко В.Г., Свіщова Є.В. Лінійна алгебра. Учбові завдання та методичні вказівки для студентів економічних спеціальностей. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2005.
4. Михайленко В.Г., Свіщова Е.В. Математичний аналіз. Учбові завдання й методичні вказівки для студентів економічних спеціальностей. Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2006.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
Частина 1. Математичний аналіз.....	4
РОЗДІЛ 1. Границя функції.....	4
Тема 1. Функції, границя функції.....	4
§1. Означення функції.....	4
§2. Означення границі функції.....	6
§3. Нескінченно малі функції. Їхні властивості.....	7
§4. Означення неперервності функції в точці та на проміжку.....	15
РОЗДІЛ 2. Диференціальні числення функції однієї змінної.....	16
Тема 2. Похідна та диференціал функції.....	16
§1. Означення похідної.....	16
§2. Деякі теореми диференціального числення.....	23
Тема 3. Дослідження функції та побудова графіків.....	27
§1. Зростання, спадання функції.....	27
§2. Локальний екстремум функції.....	29
§3. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перетину.....	32
§4. Асимптоти кривої.....	34
§5. Дослідження функції та побудова графіку.....	35
РОЗДІЛ 3. Інтеграли.....	38
Тема 4. Інтегральне числення.....	38
§1. Первісна функція та невизначений інтеграл.....	38
§2. Означення визначного інтегралу та основні його властивості.....	43
§3. Обчислення площі плоских фігур.....	49
§4. Невласні інтеграли.....	51
Частина 2. Лінійна алгебра.....	54
РОЗДІЛ 4. Основні поняття теорії матриць.....	54
Тема 1. Числові матриці.....	54
§1. Лінійні операції з матрицями.....	54
§2. Визначники квадратних матриць.....	58
§3. Елементарні перетворення матриць.....	59
§4. Обернена матриця, її знаходження.....	61
§5. Вектори та дії з ними.....	64
РОЗДІЛ 5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та способи їх розв'язання.....	70
§1. Неоднорідні системи.....	70
§2. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	76
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	78

Навчальне видання

Когут Євген Олександровіч
Масленнікова Олена Валеріївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *О. С. Чистякова*
Макет обкладинки *Є. О. Когут*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 3,85. Наклад 100 пр. Зам. № 4/22.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна