

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

О. А. Макаров
І. Г. Ніколенко

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчально-методичний посібник

Електронний ресурс

Харків – 2024

УДК 517.31
М 15

Рецензенти:

С. Л. Гефтер – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

О. Л. Вишневецький – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 8 від 21 травня 2024 року)*

Макаров О. А.

М 15 Комплексні числа та функції комплексної змінної : навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] / О. А. Макаров, І. Г. Ніколенко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – (PDF 69 с.)

Навчально-методичний посібник з курсу «Вища математика» факультету комп'ютерних наук розроблений для студентів спеціальностей 122 – Комп'ютерні науки, 123 – Комп'ютерна інженерія, 125 – Кібербезпека та для студентів факультету математики і інформатики спеціальностей 111 – Математика, 113 – Прикладна математика з курсу «Комплексний аналіз». Наведені матеріали ознайомлюють студентів з методами комплексного аналізу.

УДК 517.31

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2024
© Макаров О. А., Ніколенко І. Г., 2024

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Макаров Олександр Анатолійович
Ніколенко Ірина Геннадіївна

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчально-методичний посібник

В авторській редакції

Підписано до розміщення 21.05.24 р. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 2,73. Обсяг 0,9 Мб. Зам. № 109/24.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Зміст

Вступ	4
1. Комплексні числа	4
1.1. Основні визначення, операції над комплексними числами	4
1.2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел	9
1.3. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа . . .	12
1.4. Корінь n -го степеня із комплексного числа	17
1.5. Розв'язки квадратних рівнянь $az^2 + bz + c = 0$ з дійсними коефіцієнтами $a(a \neq 0), b, c$ та комплексною змінною z	24
2. Функції комплексної змінної, диференціювання	26
2.1. Диференційованість функції комплексної змінної	26
2.2. Конформні відображення	31
3. Інтегрування функцій комплексної змінної	44
3.1. Обчислення інтегралів по замкненому контуру	53
4. Ряди Лорана та лишки	55
4.1. Ряди Лорана	55
4.2. Лишки функції	60
4.3. Обчислення невластних інтегралів за допомогою лишків	62
5. Контрольні питання	68
Література	69

Вступ

Мета даного навчально-методичного посібника — надати допомогу студентам 1–2 курсів при засвоєнні та самостійному вивчанні теми «Комплексні числа та функції комплексної змінної».

1. Комплексні числа

Історія комплексних чисел починається з XVI століття, коли італійські математики Кардано і Бомбеллі запровадили їх для розв’язування алгебраїчних рівнянь. Як відомо, квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

не має розв’язків у множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел, якщо його дискримінант

$$D = b^2 - 4ac < 0.$$

Знадобилося розширити множину дійсних чисел так, щоб будь-яке алгебраїчне рівняння завжди мало розв’язок. Для цього в XVI столітті було запроваджено символ $\sqrt{-1}$ як формальний розв’язок рівняння $x^2 + 1 = 0$. Це і дозволило розв’язувати всі алгебраїчні рівняння в множині комплексних чисел. Ейлер у XVIII столітті позначив символ $\sqrt{-1}$ буквою i (від лат. Imaginarius - уявний), оскільки комплексні числа тоді не вважалися справжніми. Тільки з початку XIX століття, коли була знайдена геометрична інтерпретація комплексних чисел, вони зайняли належне місце в математиці.

Слово «**комплексний**» означає складний.

1.1. Основні визначення, операції над комплексними числами

Означення 1.1. Комплексним числом z називається впорядкована пара дійсних чисел (x, y) . Перше із них x має назву **дійсної частини** числа z та позначається $\operatorname{Re} z$:

$$x = \operatorname{Re} z,$$

друге y — **уявною частиною** комплексного числа та позначається

$$y = \operatorname{Im} z.$$

Множина усіх комплексних чисел позначається $\mathbb{C}$.

Комплексне число $(x, 0)$ уявляє собою також дійсне число x , отже $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Дійсні числа є частинним випадком комплексних, а саме таких, у яких уявна частина дорівнює нулю.

Комплексне число $(0,1)$ позначається буквою i та має назву *уявної одиниці*.

Комплексні числа $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ називаються **рівними**, якщо рівні відповідно їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2).$$

Операції додавання та множення комплексних чисел запроваджуються наступним чином:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1.1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.2)$$

Розглянемо добуток уявної одиниці i та дійсного числа y :

$$(0,1)(y,0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y).$$

Отримаємо пару $(0, y)$. Її записують у вигляді iy . Це **суто уявне комплексне число**.

Далі $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$.

Означення 1.2. Вираз $x + iy$ має **назву алгебраїчної форми** комплексних чисел.

Розглянемо

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Це дійсне число -1 . Таким чином, $i^2 = -1$, тобто задовольняє рівнянню

$$z^2 = -1 \quad \text{або} \quad z^2 + 1 = 0.$$

Якщо додати та помножити комплексні числа (якщо врахувати рівність $i^2 = -1$), та узгодити з правилами додавання та множення сум дійсних чисел, отримаємо також результати (1.1) та (1.2), що і в означенні додавання та множення комплексних чисел:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Цим виправдовується законність таких дій.

Розглянемо рівняння $z^2 = -1$, тобто

$$(x + iy)(x + iy) = -1, \text{ де } x, y \in \mathbb{R}.$$

Із означення рівності комплексних чисел маємо, що

$$x^2 + 2ixy - y^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Тут $y \neq 0$, оскільки $x^2 = -1$ не має розв'язків в $\mathbb{R}$. Тому

$$x = 0, \quad y = \pm 1$$

та рівняння $z^2 = -1$ має розв'язки

$$(0, 1) = i \text{ та } (0, -1) = -i.$$

Можна сказати, що $\sqrt{-1}$ як комплексне число має два значення **i** та **-i**:

$$(\pm i)^2 = -1, \quad \sqrt{-1} = \pm i.$$

Операція віднімання комплексних чисел визначається як операція, обернена до додавання:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Приклади додавання, віднімання та множення комплексних чисел:

1. $(3 + 2i) + (6 - 7i) = (3 + 6) + (2 - 7)i = 9 - 5i.$
2. $(3 + 2i) - (6 - 7i) = (3 - 6) + (2 + 7)i = -3 + 9i.$
3. $(3 + 2i)(6 - 7i) = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 7i + 2i \cdot 6 - 2 \cdot 7i^2 =$
 $= 18 - 21i + 12i + 14 = 32 - 9i.$

Степені числа i

$$\begin{aligned} i^0 &= 1, \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^2 = -1, \\ &\dots \end{aligned}$$

У загальному випадку

$$i^{4n+k} = (i^4)^n i^k = i^k, \quad \text{де } n, k \in \mathbb{N}.$$

Неважко перевірити, що додавання та множення комплексних чисел задовольняє **переміщувальним** та **сполучним** властивостям (**комутативним** та **асоціативним**):

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1, & (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3), \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1, & (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3), \end{aligned}$$

а операції додавання і множення пов'язані **розподільним** (**дистрибутивним**) законом:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Для перевірки цих властивостей необхідно записати комплексні числа в алгебраїчній формі і виконати відповідно додавання і множення.

Означення 1.3. Комплексні числа $x + iy$ та $x - iy$, дійсні частини яких рівні, а уявні частини рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають **спряженими**.

Якщо $z = x + iy$, то комплексно спряжене до z позначається $\bar{z} = x - iy$. Мають місце наступні формули:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Нехай $z = x + iy$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2x = 2 \operatorname{Re} z, \\ z - \bar{z} &= 2yi = 2i \operatorname{Im} z, \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Із правил додавання та віднімання, зокрема, випливає, що:

- **сума двох спряжених комплексних чисел є число дійсне**, а
- **різниця – суто уявне**;
- **добуток двох комплексно спряжених чисел є число дійсне**.

Означення 1.4. Невід'ємне дійсне число $\sqrt{x^2 + y^2}$ називається **модулем** комплексного числа z і позначається $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отже,

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Операція ділення комплексних чисел визначається як операція, зворотна до множення:

якщо

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad z_2 \neq 0,$$

то

$$z = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow zz_2 = z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + x_2y = y_1. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 = |z_2|^2 \neq 0.$$

Розв'язуючи систему щодо x та y , отримуємо результат ділення.

Але на практиці зазвичай діють таким чином:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

що дає той же результат, в якому знаменник — дійсне число.

Таким чином, *щоб розділити одне комплексне число на інше, потрібно чисельник і знаменник дробу помножити на число, спряжене до знаменника.*

Отже, в множині $\mathbb{C}$ комплексних чисел визначені операції:

- додавання (і обернена до неї операція віднімання),
- множення (і обернена до неї операція ділення на $z \neq 0$).

Приклад 1.5. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{2+8i+3i-12}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i.$$

Із означення модуля комплексних чисел неважко перейти до таких **властивостей модуля:**

1. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, якщо $z_2 \neq 0$,
3. $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (при $n < 0$ передбачається, що $z \neq 0$),
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1.2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Точкова інтерпретація:

Комплексне число визначається як пара дійсних чисел, тому природно зобразити комплексне число $z = a + bi$ точкою M координатної площини з декартовими координатами $x = a, y = b$ (див. Рис.1).

Числу $z = 0$ відповідає початок координат $(0, 0)$.

Дійсне число a (або $a + 0 \cdot i$) зображується точкою $(a, 0)$ осі абсцис (дійсної осі). Чисто уявному числу bi (або $0 + bi$) відповідає точка з координатами $(0, b)$ на осі ординат (уявної осі).

Координатна площина при цьому називається *комплексною площиною*. Таким чином, встановлена взаємно-однозначна відповідність між множиною комплексних чисел та множиною точок комплексної площини.

Зауваження 1.6. Комплексні числа не можна порівнювати між собою за величиною, як і точки площини (див. Рис.1).

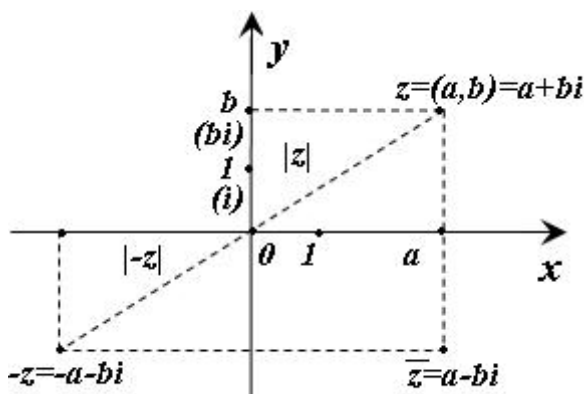


Рис. 1

Відзначимо, що **модуль** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ є відстанню від точки, яка зображує комплексне число z , до початку координат. Точки

$$z = a + bi \quad \text{та} \quad \bar{z} = a - bi \quad \text{симетричні відносно дійсної осі,}$$

$$z \quad \text{та} \quad -z \quad \text{симетричні відносно початку координат.}$$

Зазвичай замість координати b на уявній осі пишуть bi , а замість 1 на уявній осі пишуть i .

Приклади множин на комплексній площині.

1) $\text{Im}z > 0$ є верхня напівплощина (див. Рис.А),

$\text{Im}z < 0$ є нижня напівплощина, $\text{Re}z < 0$ — ліва напівплощина, $\text{Re}z > 0$ права напівплощина.

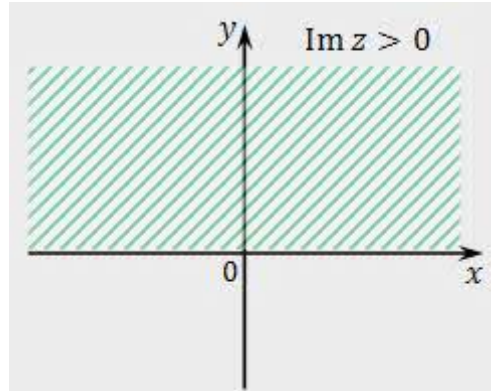


Рис. А

2) Множина точок z таких, що $|\operatorname{Re} z| < 2$ та $-1 < \operatorname{Im} z < 3$, є відкритий прямокутник $\{(x, y) : |x| < 2, -1 < y < 3\}$.

3) Множина точок z таких, що $|z - z_0| = R$, є коло радіуса R із центром в точці z_0 , оскільки рівність

$$|z - z_0| = R \quad \text{або} \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

означає, що відстань від точки z до точки z_0 дорівнює R (див. Рис. Б та Рис. В).

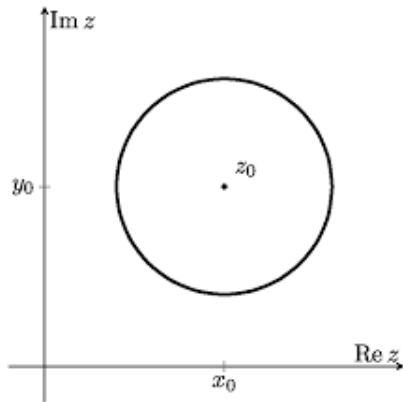


Рис. Б

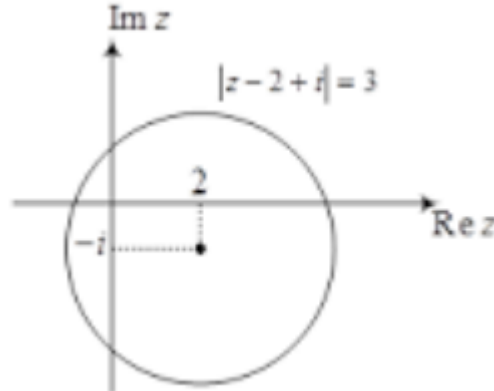


Рис. В

4) Множина точок, які задовольняють умові $R_1 < |z| < R_2$, є множина внутрішніх точок кільця, обмеженого концентричними колами з центром на початку координат радіусів R_1 та R_2 .

5) Множина точок z , які задовольняють умовам

$$1 \leq |z + 2 - 3i| \leq 2, \quad \text{тобто} \quad 1 \leq |z - (-2 - 3i)| \leq 2, \quad (\text{зазначено на Рис. 2}).$$

6) Множина точок z , що задовольняють умові

$$|z - z_1| = |z - z_2|,$$

тобто рівновіддалених від точок z_1 і z_2 , є пряма, яка перпендикулярна відрізка, що з'єднує точки z_1 та z_2 , і що проходить через його середину.

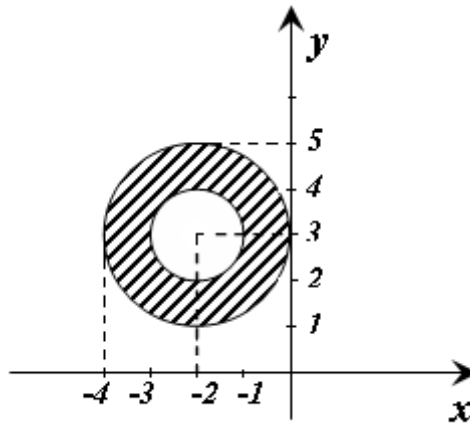


Рис. 2

Векторна інтерпретація.

Поряд із точковою інтерпретацією для комплексних чисел використовується векторна інтерпретація:

комплексне число $z = a + bi$ зображується вектором із початком в точці $z = 0$ та кінцем у точці $z = a + bi$ (Рис.3).

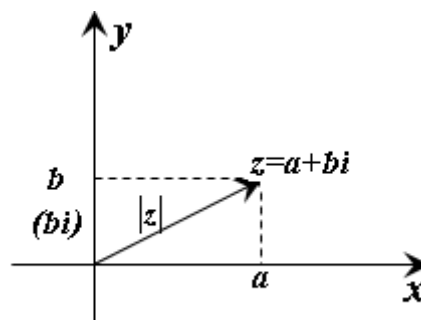


Рис. 3

Число $z = z_1 + z_2$ геометрично зображується як вектор, побудований за правилом додавання векторів z_1 та z_2 (діагональ паралелограму, Рис. 4).

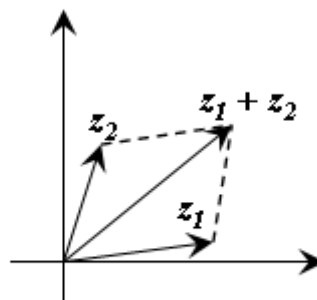


Рис. 4

Число $z = z_1 - z_2$ отримано додаванням векторів z_1 та $-z_2$. На Рис. 5 видно, що $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками z_1 та $-z_2$.

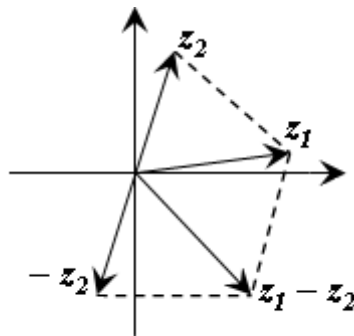


Рис. 5

1.3. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Нехай $M(x, y)$ — точка, яка відповідає комплексному числу $z = x + iy$ (див. рис. 6), $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = OM$, φ — кут між відрізком OM та додатним променем осі OX . Маємо, що

$\varphi > 0$, якщо кут φ вимірювати проти ходу годинникової стрілки;

$\varphi < 0$, якщо кут φ вимірювати за ходом годинникової стрілки.

Для числа $z = 0$ аргумент не визначено.

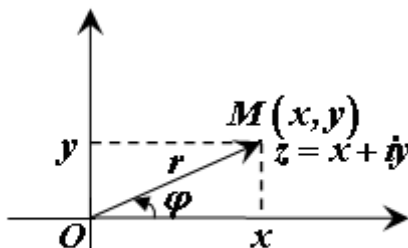


Рис. 6

Тоді $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$,

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.3)$$

де $r = |z|$, а кут φ визначається із системи:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (1.4)$$

У такій формі можна записати будь-яке комплексне число $z \neq 0$. Вона називається **тригонометричної формою комплексного числа**. Кут φ

можна знаходити також з рівняння

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

але воно має більше розв'язків, ніж система (1.4). Потрібні розв'язки вибираються з урахуванням знаків x та y .

Кут φ має назву **аргументу комплексного числа** і позначається **$\operatorname{Arg} z$** . Він визначений **неоднозначно** (з точністю до доданка $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Іноді **головним значенням аргументу** комплексного числа називається кут

$$\varphi \in (-\pi, \pi], \text{ а інколи } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Головне значення аргументу комплексного числа позначається **$\arg z$** . Тоді

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формула Ейлера має вигляд

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (1.5)$$

Із формул (1.3) та (1.5) отримуємо, що

$$z = |z|e^{i\varphi}. \quad (1.6)$$

Це **показникова форма комплексного числа**.

Зауваження 1.7. Тут $|e^{i\varphi}| = 1$, тобто точки $e^{i\varphi}$ лежать на колі радіуса 1. (див. Рис. Д).

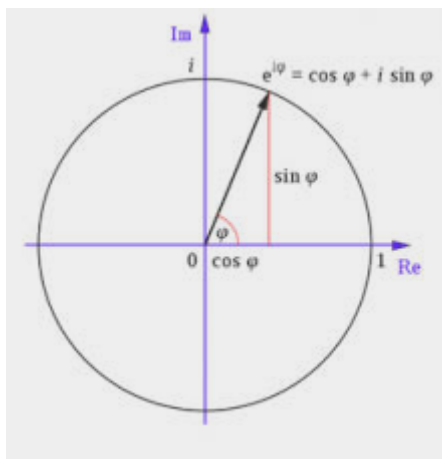


Рис. Д

Приклади.

$$1. \quad 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

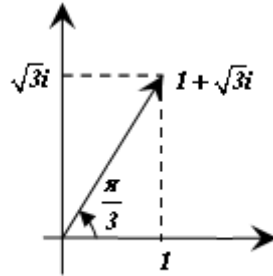


Рис. 7

$$2. \quad -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

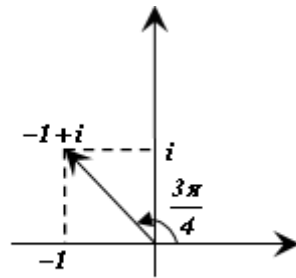


Рис. 8

$$3. \quad -3 - i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos -\frac{7\pi}{6} + i \sin -\frac{7\pi}{6} \right) = 2e^{-\frac{7\pi}{6}i}.$$

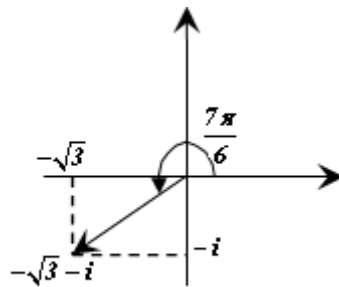


Рис. 9

Маємо $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}}$, але точка $-\sqrt{3}-i$ лежить в третій чверті, тому беремо

$$\text{не } \varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \text{а } \varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6};$$

$$\text{можна взяти також } \varphi = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

4. (див. Рис. 10).

$$\begin{aligned} -3 - 2i &= \sqrt{13} \left(-\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}i \right) = \\ &= \sqrt{13} \left[\cos \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) \right] = \sqrt{13} e^{i \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right)}. \end{aligned}$$

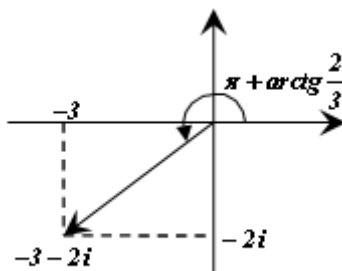


Рис. 10

Маємо $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$, $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, але брати його аргументом φ не можна, оскільки точка $-3 - 2i$ належить до третьої чверті, тому потрібно взяти $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.

5. (див. Рис. 11)

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Можна це комплексне число також записати у вигляді

$$\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2e^{i \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right)}.$$

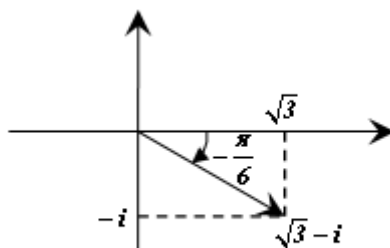


Рис. 11

Зауваження 1.8. Усюди в цих прикладах до вказаних аргументів комплексних чисел можна додати $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нехай $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, тоді

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

Таким чином, **при множенні комплексних чисел їх аргументи додаються, а при діленні — віднімаються.**

Це очевидно, якщо записати z_1 та z_2 в показниковій формі:

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$$

(та вважати відомими дії над $e^{i\varphi}$). Можна було б це перевірити безпосередньо для комплексних чисел в тригонометричній формі.

Комплексні числа в тригонометричній формі підносяться до натурального степеня за **формулою Муавра**:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тобто при піднесенні комплексного числа до натурального степеня n модуль числа підноситься до степеня n , а аргумент числа множиться на n .

Це очевидно, якщо записати z в показниковій формі $z = |z|e^{i\varphi}$, оскільки тоді

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

якщо вважати відомою властивість $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$. Формула Муавра легко доводиться і за методом математичної індукції, якщо записати z в тригонометричній формі, без переходу до показникової форми.

Приклад 1.9. Обчислити $(\sqrt{3} - i)^5$, записавши відповідь в алгебраїчній формі.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - i &= 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \quad (\text{див. вище приклад 5}). \\ (\sqrt{3} - i)^5 &= 2^5 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] = \\ &= 32 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} - \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \pi \right) \right] = \\ &= -32 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right] = -32 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right] = -16\sqrt{3} - 16i. \end{aligned}$$

1.4. Корінь n -го степеня із комплексного числа

Означення 1.10. Якщо $n \in \mathbb{N}$, то коренем n -го степеня із комплексного числа z називається таке комплексне число $w = \sqrt[n]{z}$, n -й степінь якого дорівнює z , тобто

$$\sqrt[n]{z} = w, \quad \text{якщо} \quad w^n = z.$$

Покладемо

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0, \\ w &= \rho(\cos \psi + i \sin \psi). \end{aligned}$$

Тоді рівність $w^n = z$ має вигляд $\rho^n(\cos \psi + i \sin \psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

$$\text{Звідси } \rho = \sqrt[n]{r}$$

(це арифметичний корінь, тобто невід'ємне дійсне число, оскільки $\rho = |w| \geq 0$ за визначенням модуля).

Далі $n\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, звідки

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При цих ψ різні значення $w = w_k$ виходять при $k = 0, 1, \dots, n-1$, а при інших k збігаються з будь-яким зі значень $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Отже, *існує рівно n різних значень кореня n -го степеня із комплексного числа $z \neq 0$, які обчислюються за формулою*

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned}$$

Тут $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|z|}$ — арифметичний корінь із невід'ємного числа (дійсне невід'ємне число), φ — аргумент комплексного числа $z \neq 0$.

Геометрично усі n значень w_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, кореня n -го степеня із комплексного числа z розташовуються (при $n > 2$) у вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ з центром на початку координат.

Таким чином, $\sqrt[n]{z}$ для $z \in \mathbb{C}$ є багатозначною функцією.

Але при $z = 0 = 0 + 0i$ в $\mathbb{C}$ за визначенням $\sqrt[n]{z} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), тобто має тільки одне значення.

Приклад 1.11. Знайти всі значення $\sqrt[3]{-1 + i}$.

Розв'язання. Розглянемо підкореневий вираз комплексного числа в триго-

нометричній формі (див. вище приклад 2 із розділу “Тригонометрична і показникова форми комплексного числа”):

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$\text{Тоді } \sqrt[3]{-1 + i} = \left\{ \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), k \in 0, 1, 2 \right\}.$$

Надаючи k послідовно значення $0, 1, 2$, отримаємо три різних значення w_0, w_1, w_2 для $\sqrt[3]{-1 + i}$, а саме:

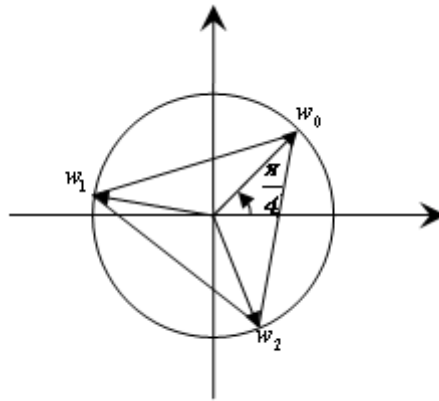


Рис. 12

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ w_1 &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \right], \\ w_2 &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Корені n -го степеня із 1 та -1 на комплексній площині (тобто на множині $\mathbb{C}$).

I) Знайдемо спочатку корінь n -го степеня на $\mathbb{C}$ із 1.

Оскільки $1 = 1 + 0 \cdot i$, $r = |1| = 1$, $\varphi = 0$, то

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1 + 0 \cdot i} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Це усі різні корені рівняння $z^n - 1 = 0$.

Вони розташовані (при $n > 2$) у вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса 1.

Тому рівняння $z^n - 1 = 0$ має назву *рівняння ділення кола* (одиничного).

Зауваження 1.12. При n непарному серед цих n коренів є один дійсний корінь, який дорівнює 1. Його отримують при $k = 0$.

При n парному серед цих n коренів є два дійсних кореня: 1 та -1 .

Приклади.

1. (див. Рис. 13)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1} &= \sqrt[3]{1+0 \cdot i} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} = e^{i\frac{2k\pi}{3}} = w_k, \quad k = 0, 1, 2 \right\} \\ w_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ w_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

2. (див. Рис. 14)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \sqrt[4]{1+0 \cdot i} = \left\{ \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} = e^{i\frac{k\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \right\} \\ w_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad w_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \\ w_2 &= \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi} = -1, \quad w_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.\end{aligned}$$

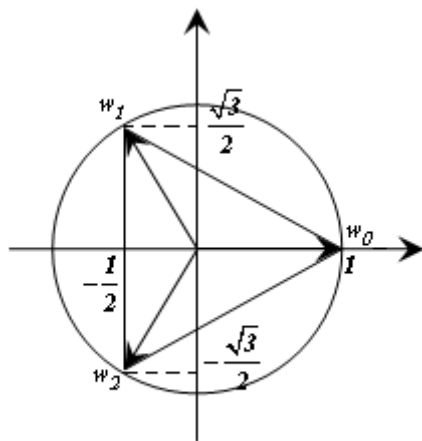


Рис. 13

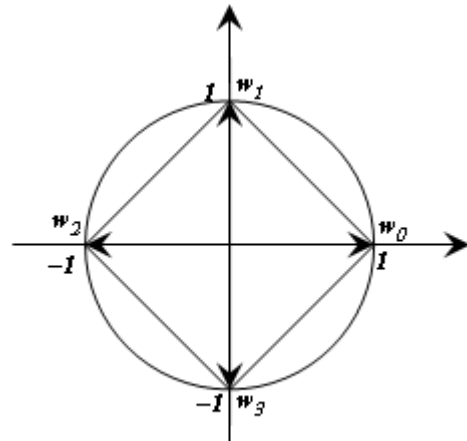


Рис. 14

II) Тепер знайдемо корінь n -го степеня на комплексній площині $\mathbb{C}$ із -1 .

Оскільки $-1 = -1 + 0 \cdot i$, $r = |1| = 1$, $\varphi = \pi$, то

$$\sqrt[n]{-1} = \left\{ \cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Приклад 1.13. Знайти всі значення $\sqrt[6]{-64}$.

Розв'язання. Тут $z = -64$, $z = |z| = 64$, $\sqrt[6]{|z|} = \sqrt[6]{64} = 2$, $\varphi = \pi$;

$$w_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right) \\ = 2 \left(\cos \frac{(1+2k)\pi}{6} + i \sin \frac{(1+2k)\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5 \quad (\text{див. Рис. 15}).$$

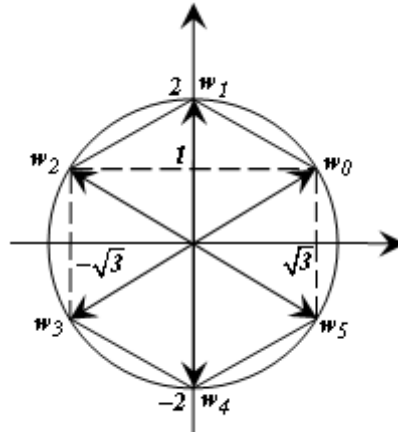


Рис. 15

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} + i, \quad w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i,$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$w_4 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} \right) = -2i, \quad w_5 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt{3} - i.$$

Корінь квадратний із комплексного числа

Нехай $z \neq 0$. Розглянемо

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \left\{ \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1 \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt{|z|} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + k\pi \right) \right], \quad k = 0, 1 \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt{|z|} e^{i(\frac{\varphi}{2} + k\pi)}, \quad k = 0, 1 \right\} = w_k, \end{aligned}$$

де $w_0 = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$,

$$w_1 = \sqrt{|z|} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right] = -\sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -w_0.$$

Отже, корінь квадратний на комплексній площині $\mathbb{C}$ із числа $z \neq 0$ має два значення протилежного знаку, тобто симетричні відносно початку координат:

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \pm \sqrt{|z|} e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad (1.7)$$

(тут $\sqrt{|z|} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ — арифметичний корінь).

Функції $\cos \frac{\varphi}{2}$ та $\sin \frac{\varphi}{2}$ можна знаходити за формулами

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)}, \quad \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)}.$$

Приклади.

1) Знайти та зобразити графічно обидва значення $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$.

Розв'язання. Маємо $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Тоді

$$|z| = \sqrt{4 + 12} = 4, \quad \sqrt{|z|} = 2, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3} \quad (\text{див. Рис. 16});$$

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i} = \pm 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ \pm 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \pm (\sqrt{3} - i) \quad (\text{див. Рис. 17}).$$

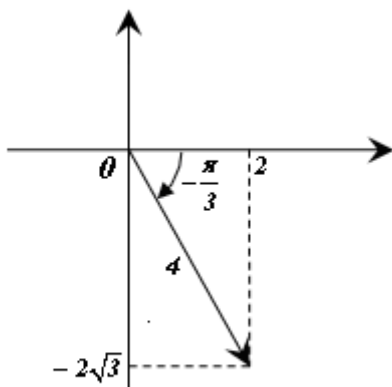


Рис. 16

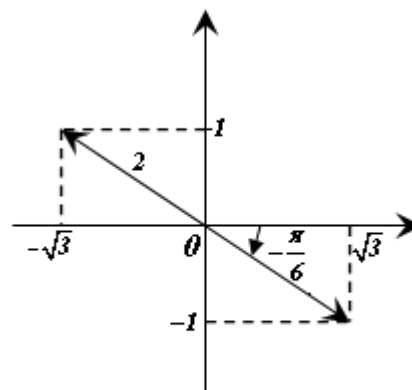


Рис. 17

Перевірка: $(\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i + i^2 = 2 - 2\sqrt{3}i.$

Відповідь: $\{\sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i\}.$

2) Знайти обидва значення $\sqrt{1 + 2\sqrt{2}i}$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Нехай $z = 1 + 2i$. Тоді

$$|z| = \sqrt{5}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Оскільки $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}},$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}},$$

$$\sqrt{1 + 2i} = \pm \sqrt[4]{5} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right).$$

2-й спосіб. Нехай $\sqrt{1 + 2i} = x + iy$, де $x, y \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 &= 1 + 2i, \\ x^2 + 2ixy - y^2 &= 1 + 2i, \\ \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ xy = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$x = 0$ не підходить. Із системи отримуємо, що

$$y = \frac{1}{x}, \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = 1,$$

звідки

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 1 &= 0, \\ x^2 &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Знак «-» не підходить, оскільки $x^2 \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}},$$

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{x} &= \pm \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}} = \pm \sqrt{\frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}} = \pm \sqrt{\frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

і отримуємо таку ж саме відповідь.

Зауваження 1.14. Точка осі Ox , яка відповідає дійсному числу $x \in \mathbb{R}$, являє собою на комплексній площині комплексне число

$$z = x + 0 \cdot i.$$

Тоді на $\mathbb{C}$ для таких чисел за формулою (1.3) отримуємо:

а) при $x > 0$

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|x|} (\cos 0 + i \sin 0) = \pm \sqrt{x}, \text{ де } \sqrt{x} - \text{арифметичний корінь};$$

б) при $x < 0$

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|x|} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{-x},$$

де $\sqrt{-x}$ – арифметичний корінь.

Наприклад:

а) $x = 4$, $z = 4 + 0 \cdot i$, $\sqrt{z} = \pm 2$;

б) $x = -4$, $z = -4 + 0 \cdot i$, $\sqrt{z} = \pm 2i$.

Дійсне число $0 \in \mathbb{R}$ являє собою на $\mathbb{C}$ комплексне число

$$z = 0 + 0 \cot i = (0, 0),$$

хоча зазвичай пишуть $z = 0$. При цьому, за означенням, $\sqrt{z} = \sqrt{0 + 0 \cdot i} = 0$. Отже, $\sqrt{z}$ на $\mathbb{C}$ має тільки при $z = 0$ одне значення, а за всіх інших $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\sqrt{z}$ має два значення.

1.5. Розв'язки квадратних рівнянь $az^2 + bz + c = 0$ з дійсними коефіцієнтами $a(a \neq 0), b, c$ та комплексною змінною z

Отримаємо формули для коренів цього рівняння. Помножимо обидві його частини на $4a$ та виділимо повний квадрат:

$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0, \\ (2az + b)^2 = b^2 - 4ac, \quad \text{тобто} \quad (2az + b)^2 = D,$$

де дискримінант $D = b^2 - 4ac$, $D \in \mathbb{R}$.

При $D = 0$ рівняння має кратний корінь $z = -\frac{b}{2a}$.

Нехай $D \neq 0$. Тоді треба застосувати квадратний корінь на комплексній площині $\mathbb{C}$ до дійсного числа D , тобто $2az + b = \sqrt{D + 0 \cdot i}$.

Відповідно до зауваження 1.5, де роль x тепер грає D ,

при $D > 0$ отримуємо $2az + b = \pm\sqrt{D}$ ($\sqrt{D}$ – арифметичний корінь),

при $D < 0$ $2az + b = \pm i\sqrt{-D}$ ($\sqrt{-D}$ – арифметичний корінь).

Таким чином, якщо $D > 0$ вихідне рівняння має два дійсних кореня

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

якщо $D < 0$ маємо два комплексно спряжених кореня $z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{D}}{2a}$.

Приклади. Розв'язати рівняння

1) $3z^2 + 2z + 1 = 0$.

Відповідь можна записати відразу за формулою, але зазвичай пишуть, не обчислюючи окремо дискримінант D :

$$z_{1,2} = \frac{-2 + \sqrt{4 - 12}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{-8}}{6} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i.$$

2) $z^2 + 3z + 3 = 0$.

Зазвичай D окремо не обчислюють, а пишуть

$$z_{1,2} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}; \\ z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3) $z^2 + z + 1 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогічно розв'язуються алгебраїчні рівняння з комплексними коефіцієнтами.

Приклад 1.15. *Розв'язати рівняння* $z^2 - 8z - 3iz + 13 + 13i = 0$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(8 + 3i + \sqrt{(8 + 3i)^2 - 4(13 + 13i)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(8 + 3i + \sqrt{64 + 48i - 9 - 52 - 52i} \right) = \frac{1}{2} \left(8 + 3i + \sqrt{3 - 4i} \right). \end{aligned}$$

Нехай $\sqrt{3 - 4i} = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Тоді

$$x^2 + 2ixy - y^2 = 3 - 4i, \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = -2, \end{cases}$$

$$y = -\frac{2}{x}, \quad x^2 - \frac{4}{x^2} = 3,$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0,$$

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

Рівняння $x^2 = -1$ не має розв'язків в $\mathbb{R}$. Залишається

$$x^2 = 4.$$

Тоді $x = \pm 2$, $y = \mp 1$,

$$\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i).$$

Таким чином,

$$z_1 = \frac{1}{2}(8 + 3i + 2 - i) = 5 + i, \quad z_2 = \frac{1}{2}(8 + 3i - 2 + i) = 3 + 2i.$$

(корені рівнянь з комплексними коефіцієнтами можуть бути не спряженими).

Наприкінці наведемо основну теорему алгебри

Теорема 1.16. *Будь-яке алгебраїчне рівняння з комплексними коефіцієнтами має хоча б один комплексний корінь.*

2. Функції комплексної змінної, диференціювання

2.1. Диференційованість функції комплексної змінної

Множина $G \subset \mathbb{C}$ називається областю, якщо вона відкрита і зв'язна; тобто будь-які дві точки із G можна з'єднати кривою, що належить цій множині.

Означення 2.1. *Функцією комплексної змінної (ФКЗ) називається відображення із множини $G \subset \mathbb{C}$ в множину $G_1 \subset \mathbb{C}$, тобто*

$$\forall z \in G \quad \exists! w \in G_1 : \quad w = f(z).$$

Задати комплексну функцію $w = f(z)$ еквівалентно заданню двох дійсних функцій від двох дійсних змінних

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w = u(x, y), \\ v = \operatorname{Im} w = v(x, y), \end{cases}$$

$$(f(z) = u(x, y) + iv(x, y)).$$

Функція $f(z)$ називається **неперервною в точці** z_0 , якщо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Зауваження 2.2. 1) Функція $f(x)$ буде неперервною в точці z_0 , якщо обидві функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ будуть неперервними в точці z_0 .

2) Властивості неперервних функцій залишаються тими ж, що і для функцій дійсної змінної.

Перейдемо до означення **похідної**.

Означення 2.3. *Похідною функції комплексної змінної (ФКЗ) називають вираз*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \left(f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} \right).$$

*Якщо похідна функції $f(z)$ існує в точці z_0 ($\exists f'(z_0)$), то функція $f(z)$ називається **диференційованою** в цій точці.*

Теорема 2.4. *Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — диференційована в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то*

$$\exists \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$$

і виконуються рівності

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}; \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x},$$

які називаються **рівняннями Коші-Рімана (Ейлера-Даламбера)**.

Доведення. Оскільки границя не залежить від того, як $\Delta z \rightarrow 0$, то візьмемо спочатку $\Delta z = \Delta x$. Тоді для функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Далі візьмемо $\Delta z = i\Delta y$. Тоді

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Отже,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Теорему доведено. □

Дорівнюючи дійсні та уявні частини, отримаємо **рівняння Коші-Рімана**.

Справедлива і **обернена теорема**.

Теорема 2.5. Якщо в точці (x_0, y_0) функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовані та задовольняють рівнянням Коші-Рімана, то функція $f(x)$ диференційована в точці z_0 .

Приклад 2.6. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

Ця функція диференційована в будь-якій точці і її похідна дорівнює $f'(z) = nz^{n-1}$ (доводиться так само, як і для дійсної змінної).

Приклад 2.7. $f(z) = \bar{z} = x - iy$

Ця функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x - iy$ не є диференційованою, оскільки не виконуються одне із рівнянь Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Властивості похідних

(такі ж, як і для функцій дійсної змінної):

$$1. (\lambda f(z) + \mu g(z))' = \lambda f'(z) + \mu g'(z),$$

2. $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$
3. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0,$
4. $(f(\varphi(z)))' = f'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z),$
5. якщо функція $f(z)$ має обернену функцію $g(w)$ та існує $f'(z) \neq 0$, то

$$\exists g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Означення 2.8. Якщо функція $f(z)$ диференційована в кожній точці області G , то вона називається аналітичною в області G .

Зауваження 2.9. 1) Для аналітичних функцій виконуються арифметичні властивості похідних; суперпозиція аналітичних функцій також є аналітичною функцією.

2) Аналітична функція має похідні будь-якого порядку (буде доведено пізніше).

3) Аналітичну функцію можна розвинути в степеневий ряд.

Приклади аналітичних функцій.

1) *многочлени* — аналітичні функції на всій площині $\mathbb{C}$;

2) *раціональні функції* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ при z , які не дорівнюють кореням знаменника;

3) *показникова функція* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ — аналітична на всій площині $\mathbb{C}$;

4) *гіперболічні функції* $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$

5) *тригонометричні функції*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Ці функції є аналітичними на всій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Похідні цих функцій обчислюються за тими самими формулами, що і для дійсного аргументу.

$$(e^z)' = e^z, \quad (z^n)' = nz^{n-1}, \\ (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad \dots$$

Теорема 2.10. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною функцією в області G , то функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ є гармонічними функціями, тобто задовольняють рівнянням

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{та} \quad \Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Доведення. Розглянемо рівняння Коші-Рімана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Якщо знайти частинну похідну першого рівняння по x , а другого — по y і додати їх, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Аналогічно, якщо знайти частинну похідну першого рівняння по y , а другого — по x та відняти їх, отримаємо рівняння Лапласа для $v(x, y)$.

Теорему доведено. □

Зауваження 2.11. Рівняння $\Delta u(x, y) = 0$ називається **рівнянням Лапласа** та часто зустрічається в різних застосуваннях.

Лема 2.12. Якщо $u(x, y)$ — гармонічна функція в області G , то існує гармонічна функція

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

така, що функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ буде аналітичною в області G , $(x_0, y_0) \in G$.

Дана лема впливає із формули Гріна.

Лема 2.13. Якщо $v(x, y)$ — гармонічна функція в області G , то існує гармонічна функція

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy$$

така, що функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ буде аналітичною в області G .

Функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ називаються **спряженими гармонічними функціями**. Вони визначаються з точністю до сталої.

Приклад 2.14. Знайти за функцією $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$ функцію $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, а також $f(z)$, $f'(z)$.

Розв'язання. Функція $u(x, y) = x^2 - y^2$ — гармонічна в $\mathbb{C}$:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Тоді за лемою

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_{(0,0)}^{(x, y)} 2y dx + 2x dy = 2 \int_{(0,0)}^{(x, y)} d(xy) = 2xy.$$

Отже, функція

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

аналітична на всій площині $\mathbb{C}$. Неважко бачити, що

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \quad (z = x + iy), \\ f'(z) &= 2z. \end{aligned}$$

Приклад 2.15. Знайти за функцією $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = y^2 - x^2$ спряжену функцію $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, а також $f(z)$, $f'(z)$.

Розв'язання. Функція $v(x, y) = y^2 - x^2$ — гармонічна в $\mathbb{C}$:

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Тоді

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy = \int_{(0,0)}^{(x, y)} 2y dx + 2x dy = 2 \int_{(0,0)}^{(x, y)} d(xy) = 2xy.$$

Отже, функція $f(z) = 2xy + i(y^2 - x^2)$ — аналітична на всій площині $\mathbb{C}$. Неважко бачити, що

$$\begin{aligned} f(z) &= -iz^2 \quad (z = x + iy), \\ f'(z) &= -2iz. \end{aligned}$$

Приклад 2.16. Знайти за функцією $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 6x^2y^2 - y^4 - x^4$ спряжену функцію $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, а також $f(z)$, $f'(z)$.

Розв'язання. Функція $v(x, y) = 6x^2y^2 - y^4 - x^4$ — гармонічна в $\mathbb{C}$:

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2 + 12x^2 - 12y^2 = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12xy^2 - 4x^3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 12x^2y - 4y^3.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (12x^2y - 4y^3)dx - (12xy^2 - 4x^3)dy = \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} 12x^2y dx + 4x^3 dy - 4y^3 dx - 12xy^2 dy = \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} d(4x^3y - 4xy^3) = 4x^3y - 4xy^3. \end{aligned}$$

Отже, $f(z) = 4xy(x^2 - y^2) + i(6x^2y^2 - y^4 - x^4)$.

Перевірити, що

$$\begin{aligned} f(z) &= -i \cdot z^4 \quad (z = x + iy), \\ f'(z) &= -4iz^3. \end{aligned}$$

2.2. Конформні відображення

Нехай $w = f(z)$ — аналітична функція і $f'(z) \neq 0$.

За означенням похідної

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

маємо, що

$$\begin{aligned} \Delta w &= f'(z_0)\Delta z + \bar{o}(\Delta z), \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad \text{тобто} \\ \Delta w &\approx f'(z_0)\Delta z, \quad \Delta z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

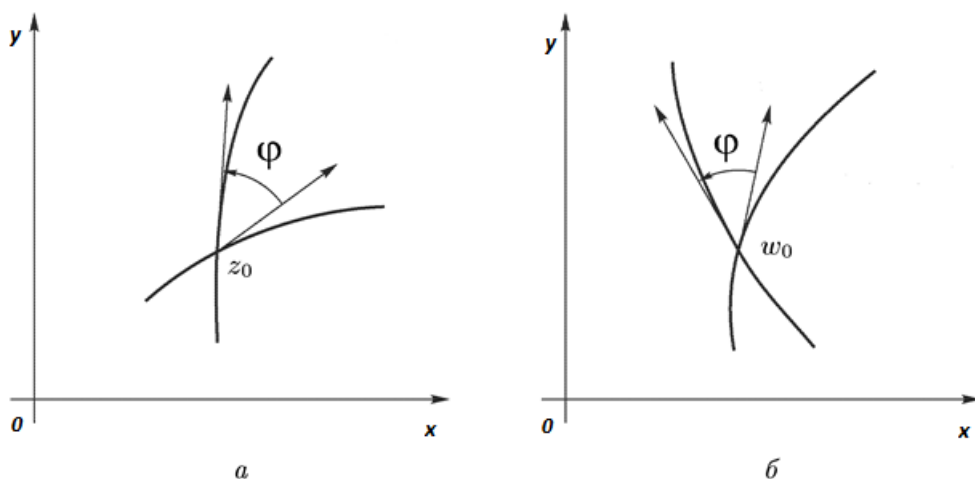
Якщо записати добуток в тригонометричній формі, прийнявши

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0), \\ \Delta z &= r(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0), \end{aligned}$$

то отримаємо

$$f'(z_0)\Delta z = r \cdot r_0(\cos(\varphi + \varphi_0) + i \sin(\varphi + \varphi_0)).$$

Таким чином, аналітична функція в околі z_0 діє як **розтягнення** при $r_0 > 1$ (**стиснення** при $r_0 < 1$) даного околу в r_0 раз та **поворот** його навколо точки $f(z_0)$ на кут φ_0 . При цьому **зберігаються кути** між гладкими кривими, які проходять через точку $w_0 = f(z_0)$:



Означення 2.17. Відображення, яке зберігає кути між кривими із локально сталим розтягненням (стисненням), називається **конформним**.

Ми побачили, що **аналітична функція з ненульовою похідною здійснює конформне відображення**.

Правильним є і зворотне твердження: **якщо є конформне відображення області на область, то існує аналітична функція, яка здійснює це відображення**.

Означення 2.18. Відображення $w = f(z) : D \rightarrow G$ називають **однолистним**, якщо дві різні точки області переходять у дві різні точки області G :

$$\forall z_1 \neq z_2 \Rightarrow w_1 \neq w_2.$$

Означення 2.19. Однолисте відображення $w = f(z)$ називають **конформним у точці z** довільної кривої, що проходить через цю точку, якщо $\exists f'(z) \neq 0$, тобто кут, на який повертається крива в точці z ($\arg f'(z)$), та коефіцієнт розтягнення ($|f'(z)|$) у цій точці не залежать від вигляду та напрямку кривої.

Означення 2.20. Відображення $w = f(z)$ називають **конформним в області**, якщо воно конформне в кожній точці цієї області.

При цьому для конформності в області достатньо, щоб функція $w = f(z)$ була там аналітичною, а її похідна не оберталася в нуль.

В різних застосуваннях часто використовують конформні відображення. Розглянемо приклади конформних відображень.

Лінійна функція

Лінійна функція $w = az + b$, де $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, визначена в $\mathbb{C}$, а якщо покласти $w(\infty) = \infty$, то — на розширеній комплексній площині $\bar{\mathbb{C}}$.

Ця функція є **однолисною** в $\mathbb{C}$, що випливає із рівності

$$w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2),$$

оскільки при $a \neq 0$ із умови $z_1 \neq z_2$ випливає $w_1 \neq w_2$.

Функція $w = az + b$ є аналітичною в $\mathbb{C}$ ($w'(z) = (az + b)' = a$).

Таким чином, **лінійне відображення є конформним на всій розширеній площині $\bar{\mathbb{C}}$** .

З'ясуємо **геометричний сенс лінійного відображення** на комплексній площині. Для цього розглянемо параметр a в показниковій формі:

$$a = |a|e^{i\alpha}$$

і розглянемо наступні окремі випадки відображення як складові:

- 1) $w_1 = |a| \cdot z$,
- 2) $w_2 = e^{i\alpha} \cdot w_1$,
- 3) $w = w_2 + b$.

Першому із цих відображень $w_1 = |a| \cdot z$ відповідає **зміна довжини радіуса-вектору** будь-якої точки в a раз, а саме:

розтягнення, якщо $|a| > 1$, або **стиснення** при $|a| < 1$. Це випливає із співвідношень

$$|w_1| = |a| \cdot |z|, \quad \arg w_1 = \arg z.$$

Для **другого** відображення $w_2 = e^{i\alpha} \cdot w_1$ із співвідношень

$$|w_2| = |e^{i\alpha}| \cdot |w_1| = |w_1|,$$

$$\arg w_2 = \arg w_1 + \alpha$$

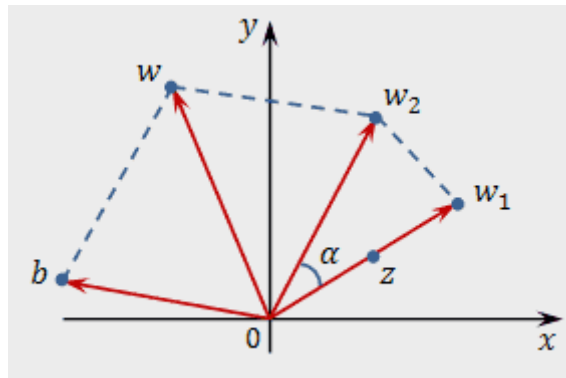
отримуємо, що воно визначає *перетворення повороту* — *радіус-вектор будь-якої точки w_1 повертається відносно початку координат на кут α за годинниковою стрілкою, якщо $\alpha > 0$, і проти — якщо $\alpha < 0$.*

Геометричний зміст **третього** відображення $w = w_2 + b$ ми отримуємо із геометричного змісту операції додавання комплексних чисел як векторів, або, що те ж саме, із співвідношень

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Re} b; \quad \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} b.$$

Відображення $w = w_2 + b$ є *паралельне перенесення радіус-вектору* будь-якої точки w_2 в напрямку вектору b на його величину.

На наведеному нижче рисунку проілюстровані операції, які відповідають усім розглянутим відображенням.



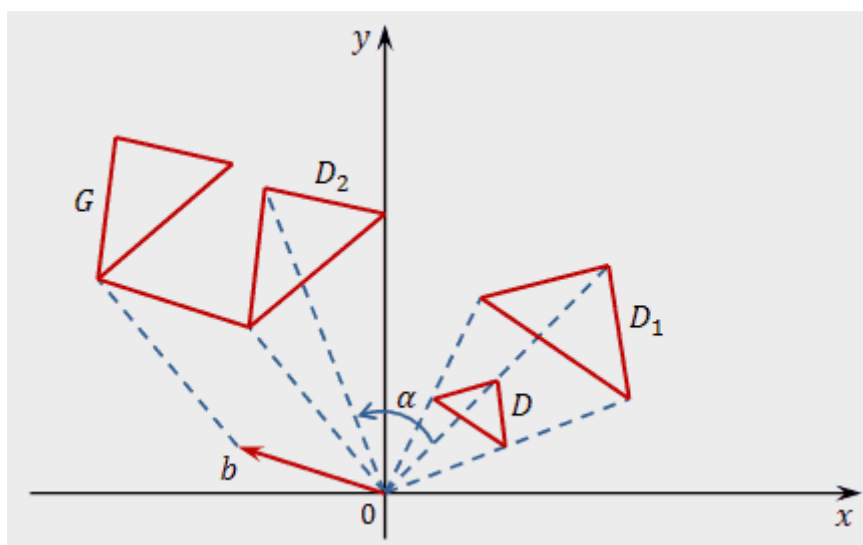
Якщо представити лінійне відображення $w = az + b$ як суперпозицію розглянутих відображень, можна сформулювати наступні **твердження**.

Твердження 2.21. Відображення $w = az + b$ геометрично зводиться до послідовного виконання над радіусом-вектором будь-якої точки z площини наступних операцій: **розтягненню (стисненню)** в $|a|$ раз, **повороту** на кут $\alpha = \arg a$ і **зміщенню (зсуву, паралельному перенесенню)** в напрямку вектору b на величину $|b|$.

Твердження 2.22. Відображення $w = az + b$ змінює лінійні розміри будь-якої фігури площини в $|a|$ раз (**гомотететія** — подібність з центром на початку координат і коефіцієнтом подібності $k = |a|$), повертає цю фігуру на кут $\alpha = \arg a$ навколо початку координат і зміщує її в напрямку вектору b на його величину.

Твердження 2.23. Лінійне відображення має **кругову властивість**, тобто відображає **кола** площини z в **кола** площини w (і навпаки, при

цьому центр кола відображається в центр її образу); **прямі** відображає в **прямі**.



Дробово-лінійна функція

Означення 2.24. *Дробово-лінійною функцією* називають функцію вигляду

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{де } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Вважаємо $c \neq 0$, оскільки при $c = 0$ отримуємо лінійну функцію, і $ad - bc \neq 0$, інакше, в силу пропорційності чисельника і знаменника одержимо, що $f(z) \equiv \text{const}$.

Будемо також позначати $w = \frac{az + b}{cz + d}$, де $w = f(z)$.

Функція визначена в $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Якщо покласти

$$f \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} f(z) = \infty \quad \text{та} \quad f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a}{c},$$

то отримаємо функцію, яка визначена на всій розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$.

Дробово-лінійне відображення є конформним на всій розширеній площині $\overline{\mathbb{C}}$.

Розглянемо **геометричні властивості** дрібно-лінійного відображення. Виділяючи цілу частину дробу, отримуємо

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{cz + d}{cz + d} - \frac{1}{c} \cdot \frac{ad}{cz + d} + \frac{b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{(cz + d)c}.$$

Отже,

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{(cz + d)c}.$$

Нехай $A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{bc - ad}{c}$. Тоді маємо

$$w = A + \frac{B}{cz + d},$$

із чого випливає, що дрібно-лінійне відображення є суперпозицією лінійного відображення і відображення вигляду $\frac{1}{z}$. Дійсно, можна записати ланцюжок складових

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= cz + d, \\ \tilde{\tilde{w}} &= \frac{1}{\tilde{w}}, \\ w &= A + B\tilde{\tilde{w}}.\end{aligned}$$

Спочатку розглянемо найпростіше дробово-лінійне відображення

$$w = \frac{1}{z}$$

($a = d = 0$, $b = c = 1$). Його також можна записати у вигляді більш простих для дослідження складових

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{\bar{z}}, \\ w &= \bar{w}_1.\end{aligned}$$

Особливість **першого** відображення $w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ полягає у співвідношеннях

$$|w_1| = \frac{1}{|\bar{z}|}, \quad \arg w_1 = -\arg \bar{z},$$

які, враховуючи, що

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{і} \quad \arg \bar{z} = -\arg z,$$

можна переписати у вигляді

$$|w_1| \cdot |z| = 1, \quad \arg w_1 = \arg z.$$

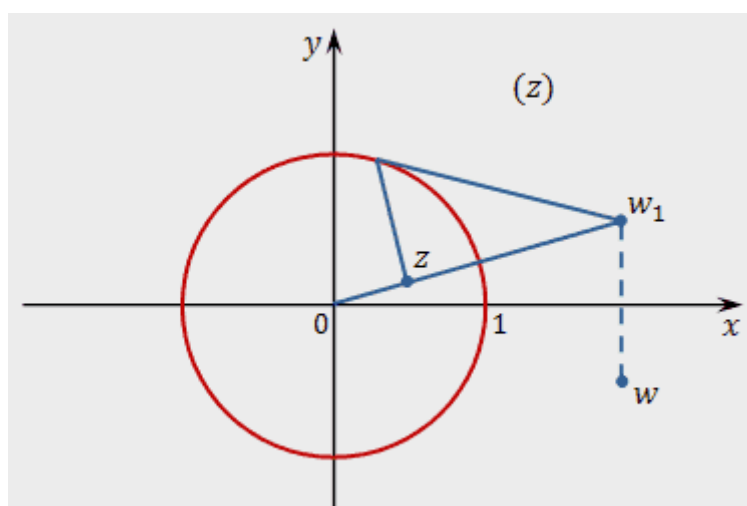
Геометрично ці співвідношення означають, що точки w_1 і z розташовані на одному промені, а добуток довжин їх радіусів-векторів дорівнює одиниці.

Точки, що мають таку властивість, називаються **точками, симетричними (або спряженими) відносно окружності одиничного радіуса з центром на початку координат**.

Функція $\frac{1}{\bar{z}}$ відображає будь-яку точку, яка лежить всередині одиничного круга, в точку, яка лежить поза одиничним кругом, оскільки із $|z| < 1$ випливає $|w_1| = \frac{1}{|z|} > 1$ і навпаки.

Отже, функція $\frac{1}{\bar{z}}$ переводить внутрішність одиничного кола в зовнішність, і навпаки.

Перетворення такого виду називається інверсією відносно одиничного кола.



Зауваження 2.25. Для побудови точки w_1 по заданій точці $z, |z| < 1$, потрібно спочатку провести промінь із центра кола $|z| = 1$, а потім до цього променю в точці відновити перпендикуляр і провести дотичну до кола в точці її перетину з перпендикуляром. Точкою перетину дотичної і променю буде w_1 . Очевидно, проводячи побудову в зворотному порядку, можна побудувати по точці, що лежить поза колом (на рисунку точка w_1), симетричну відносно кола точку z , яка буде розташована всередині круга.

Друга складова відображення $w = \frac{1}{\bar{z}}$ — це функція $w = \overline{w_1}$: геометрично це симетрія відносно дійсної осі (див. рисунок вище).

Результат наведених міркувань запишемо у вигляді наступних тверджень.

Твердження 2.26. Відображення $w = \frac{1}{z}$ геометрично зводиться до побудови **інверсії** відносно кола $|z| = 1$ і **симетрії** відносно дійсної осі.

Твердження 2.27. Дробово-лінійне відображення $w = \frac{az + b}{cz + d}$ геометрично зводиться до перетворень **розтягнення (стиснення)**, **повороту**, **зсуву** (лінійне відображення), **симетрії** відносно кола $|z| = 1$ і **симетрії** відносно дійсної осі.

Твердження 2.28. При дробово-лінійному відображенні **узагальнені кола (тобто кола або прямі)** переходять в узагальнені кола.

Доведення. Рівняння узагальненого кола має вигляд

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

при $A = 0$ отримуємо пряму.

Оскільки

$$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}, \quad \text{то} \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Підставивши ці рівності в рівняння кола, отримаємо

$$A \frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} + B \frac{u}{u^2 + v^2} - C \frac{v}{u^2 + v^2} + D = 0$$

або

$$A + Bu + Cv + D(u^2 + v^2) = 0,$$

тобто отримали рівняння **узагальненого кола**.

При цьому із формул вище для функції $w = \frac{1}{z}$ отримуємо:

— **якщо коло проходило через початок координат, то воно перейде в пряму** ($D = 0$),

— **і навпаки, пряма перейде в коло, яке пройде через початок координат** ($A = 0$).

Для відображення $w = \frac{1}{cz + d}$ роль точки $z = 0$, очевидно, грає $z = -\frac{d}{c}$.

Твердження доведено. □

Твердження 2.29. (кругова властивість дробово-лінійного відображення):

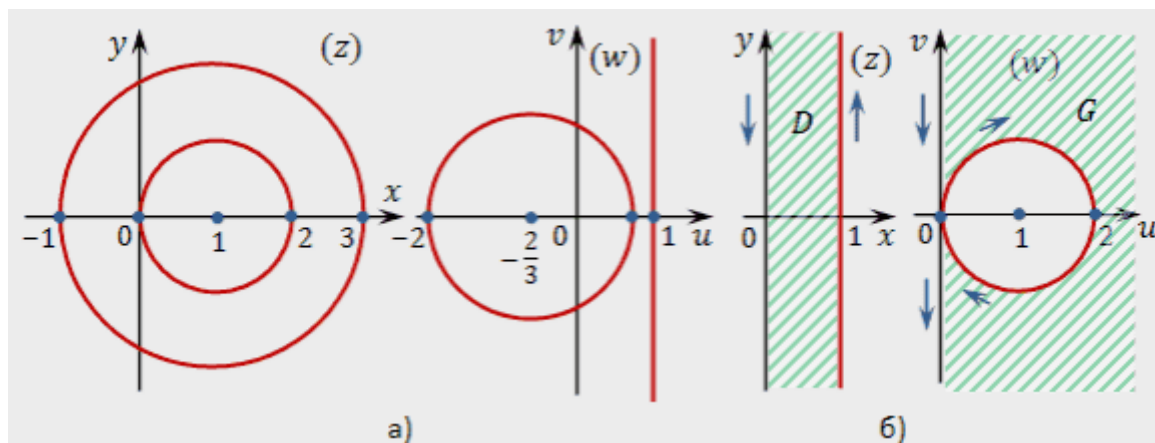
Кола і прямі, які не проходять через особливу точку $z = -\frac{d}{c}$, відображаються при дробово-лінійному відображенні в кола, а кола і прямі, які проходять через цю точку, — в прямі.

Приклад 2.30. Розглянемо відображення $w = \frac{2}{z}$.

Треба знайти образи

а) кіл $x^2 + y^2 - 2x = 0$ і $(x - 1)^2 + y^2 = 4$,

б) прямих $x = 0$, $x = 1$ і смуги $0 < \operatorname{Re} z < 1$:



Розв'язання. Для знаходження образу даної області треба:

1. Записати рівняння межі заданої області.
2. Знайти образ межі заданої області.
3. Вибрати довільну внутрішню точку заданої області і знайти її образ при заданому відображенні. Область, якій належить отримана точка, є шуканим образом заданої області.

Дробово-лінійне відображення $w = \frac{az + b}{cz + d}$ розглядається, як зазначено вище, при $c \neq 0$, тому можна записати

$$w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} \quad \text{або} \quad w = \frac{a_1z + b_1}{z + d_1},$$

тобто воно визначається трьома параметрами. Отже, для задання дробово-лінійного відображення достатньо задати три умови, наприклад, **відповідність трьох пар точок**. При цьому, оскільки відображення розглядається на $\overline{\mathbb{C}}$, одна із точок може бути **нескінченно віддаленою**.

Теорема 2.31. (умови, які визначають дробово-лінійне відображення):

Якими би не були три різні точки z_1, z_2, z_3 площини z і три різні точки w_1, w_2, w_3 площини w , існує єдине дробово-лінійне відображення $w = \frac{az + b}{cz + d}$ таке, що $w(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$.

При цьому справедливе співвідношення

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Зауваження 2.32. 1) Якщо одна із точок z_k або w_k ($k = 1, 2, 3$) є нескінченно віддалена точка, то в виписаній рівності відповідна різниця замінюється одиницею.

2) Будь-яке дробово-лінійне відображення, яке переводить точку z_1 в нуль і z_2 в нескінченно віддалену точку, має вид (що випливає із формули вище)

$$w = A \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Зауваження 2.33. Точки z і z^* називаються *симетричними відносно кола* $|z - z_0| = R$, якщо вони лежать на одному промені, який виходить із центра кола, і добуток їх відстаней від центра кола дорівнює квадрату її радіуса, тобто справедлива рівність

$$|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2.$$

Точкою, симетричною точці z_0 — центру кола, очевидно, є нескінченно віддалена точка.

Твердження 2.34. 1) Дробово-лінійне відображення переводить будь-які дві точки, симетричні відносно кола розширеної комплексної площини, в точки, симетричні відносно образу цього кола при даному відображенні. Ця властивість називається *властивістю збереження симетричних точок*.

2) Точки, симетричні межі області (кола або прямій), при дробово-лінійному відображенні переходять в точки, симетричні відносно її образа при цьому відображенні.

Приклад 2.35. $w = \frac{z - i}{z + i}$ — це аналітична функція при $z \neq -i$,

$$f'(z) = \left(\frac{z - i}{z + i} \right)' = \frac{z + i - (z - i)}{(z + i)^2} = \frac{2i}{(z + i)^2} \neq 0.$$

При $z = x \in \mathbb{R}$ маємо, що $\left| \frac{x - i}{x + i} \right| = 1$, тобто дійсна ось переходить на коло $|w| = 1$, а верхня напівплощина $\operatorname{Im} z > 0$ конформно переходить на круг $|w| < 1$.

Твердження 2.36. 1). *Будь-яке дробово-лінійне відображення напівплощини $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ має вигляд*

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad |z_0| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2). *Будь-яке дробово-лінійне відображення круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ має вигляд*

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad |z| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Елементарні аналітичні функції та їх обернені

1. $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) — *степенева функція*.

Оскільки у тригонометричній формі ми можемо записати за формулою Муавра

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то на всій комплексній площині це *не буде бієкцією*, тобто *відображення не є однолистним*. Але при

$$\varphi \in \left(\frac{2k\pi}{n}; \frac{2(k+1)\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1},$$

ця функція *вже буде бієкцією*, а це означає, що існує обернена функція

$$z = \sqrt[n]{w}.$$

Вона також буде аналітичною при $w \neq 0$ і також відображає комплексну площину без дійсної осі на сектор $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$.

При відображенні $f(z) = z^n$ збільшуються в n раз кути між будь-якими прямими, що проходять через початок координат. Тому відображенням $f(z) = z^n$ користуються, якщо потрібно збільшити кути при переході від прообразу до образу.

При відображенні $w = \sqrt[n]{z}$ зменшуються в n раз кути між будь-якими прямими, які проходять через початок координат. Тому відображенням $w = \sqrt[n]{z}$ користуються, коли треба зменшити кути при переході від прообразу до образу.

2. *Функція $f(z) = e^z$.*

Розглянемо в тригонометричному вигляді: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Оскільки $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, покладемо

$$z_2 = 2k\pi i,$$

$z_1 = z$ — будь-яке комплексне число. Тоді враховуючи тотожність

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1,$$

можна записати

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \cdot 1.$$

Ця рівність справедлива для будь-яких значень z і означає, що функція $f(z) = e^z$ є періодичною і її **період** дорівнює $T = 2\pi i$ — **суто уявне число**.

Аналога цій властивості **в дійсній області немає**: функція e^x — неперіодична в дійсній області і приймає тільки додатні значення. **В комплексній області $\mathbb{C}$ функція $f(z) = e^z$ може приймати будь-які значення за винятком 0.**

Із формули Ейлера отримуємо, що

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z = y = \operatorname{Im} z$$

звідки отримуємо, що e^z може приймати будь-які значення ($e^z \neq 0$), оскільки $\arg e^z = y$ — будь-яке число.

За періодичністю дана функція не є однолісною, тобто взаємно-однозначною. Але якщо взяти горизонтальну смугу

$$2k\pi i - \pi i < y \leq 2k\pi i + \pi i,$$

то отримаємо **бієкцію** на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, а це означає, що існує обернене відображення, яке теж є аналітичною функцією. Це обернене відображення позначається

$$z = \ln w = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi)$$

і при $k = 0$ отримаємо **головну гілку логарифма**, яка співпадає з класичним означенням логарифма. Як і в дійсному випадку

$$(\ln w)' = \frac{1}{w} \quad \text{при } w \neq 0.$$

3. $f(z) = z^\alpha$ — показникова функція.

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— також отримуємо нескінченну кількість гілок даної функції.

4. $f(z) = \operatorname{sh} z$.

У цієї функції також є обернена функція (*аресинус*), яку можна знайти при розв'язуванні рівняння

$$w = \frac{z^z - e^{-z}}{2}; \quad e^{2z} - 2we^z - 1 = 0; \quad e^z = w + \sqrt{w^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} z = \operatorname{arsh} w &= \ln \left(w + \sqrt{w^2 + 1} \right) = \\ &= \ln \left| w + \sqrt{w^2 + 1} \right| + i \left(\arg \left(w + \sqrt{w^2 + 1} \right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$(\operatorname{arsh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} \quad \text{при} \quad z \neq \pm i.$$

5. $f(z) = \sin z$.

У цієї функції дійсний період $T = 2\pi$. Тому, щоб отримати бієкцію, треба розглядати вертикальні смуги

$$2k\pi < x < 2k\pi + 2\pi.$$

Розв'язуючи рівняння $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$, отримаємо

$$z = -i \ln \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right) = \arg \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right) + 2k\pi - i \ln \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right).$$

Похідна цієї функції, як і у випадку дійсної функції, визначається за формулою

$$(\arcsin w)' = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} \quad \text{при} \quad w \neq \pm 1.$$

Аналогічно визначається $\arccos w$.

3. Інтегрування функцій комплексної змінної

Означення 3.1. Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — неперервна функція в області $G \subset \mathbb{C}$ і L — гладка (кусково-гладка) крива в G , яка задана рівнянням

$$L: z = z(t), \quad t \in [a; b].$$

Тоді *інтеграл від функції $f(z)$ вздовж кривої L* визначається таким чином:

$$\int_L F(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i(v(x, y) dx + u(x, y) dy),$$

тобто виражається через криволінійний інтеграл 2 роду.

Дане означення інтеграла виходить природним чином, оскільки

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

З урахуванням формул для криволінійного інтеграла 2 роду отримуємо, що

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt,$$

де $z(t)$, $t \in [a, b]$ — параметричне задання кривої L .

Зауваження 3.2. Для даного інтеграла виконуються всі властивості криволінійного інтеграла 2 роду:

- 1) *лінійність*,
- 2) *адитивність*,
- 3) *незалежність від параметрів*,
- 4) *зміна знаку при зміні орієнтації кривої.*

Приклад 3.3. Обчислити $\oint_{|z-z_0|=a} \frac{dz}{z-z_0}$.

Розв'язання.

Оскільки даний інтеграл розглядається за колом $|z - z_0| = a$ з центром в точці z_0 радіуса a , то на цьому колі маємо, що $z - z_0 = ae^{i\varphi}$, тобто $z = z_0 + ae^{i\varphi}$:

$$\oint_{|z-z_0|=a} \frac{dz}{z-z_0} = \left| \begin{array}{l} z = z_0 + ae^{i\varphi} \\ dz = ai \cdot e^{i\varphi} d\varphi \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{ae^{i\varphi} \cdot i d\varphi}{ae^{i\varphi}} = 2\pi.$$

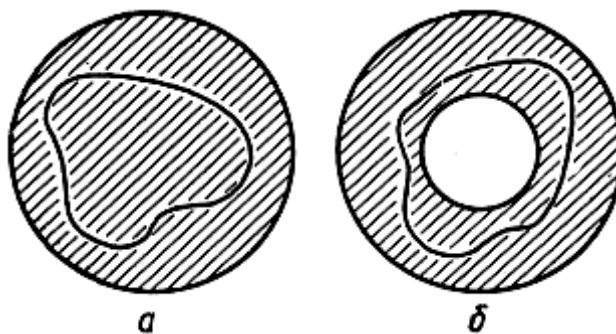
Отже, ми отримали, що *для будь-якої точки z_0 і для будь-якого радіусу a кола $|z - z_0| = a$ маємо, що*

$$\oint_{|z-z_0|=a} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i.$$

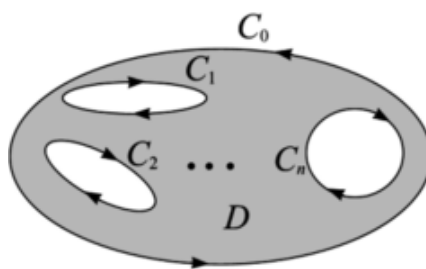
Нагадаємо, що *область D називається однозв'язною, якщо всередині будь-якого простого замкнутого контуру C виконується умова:*

$$C \subset D \Rightarrow G = \text{int}C \subset D.$$

На рис. а) зображена *однозв'язна* область,



на рис. б) область не є однозв'язною, вона є *двозв'язною*.



На рис. зображена *багатозв'язна $((n+1)$ -зв'язна) область*.

Теорема 3.4. (Теорема Коші.) *Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в однозв'язній області D , то для будь-якого замкнутого кусково-гладкого контуру $L \subset D$ виконується*

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned}
 f(z) dz &= (u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy), \\
 \text{то за } \textbf{формулою Гріна: } \oint_C P dx + Q dy &= \oint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 \oint f(z) dz &= \oint u dx - v dy + i \oint v dx + u dy = \\
 &= \iint_{D_1}^L \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{D_1}^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &\quad \text{за } \textbf{формулою Коші-Рімана} = 0.
 \end{aligned}$$

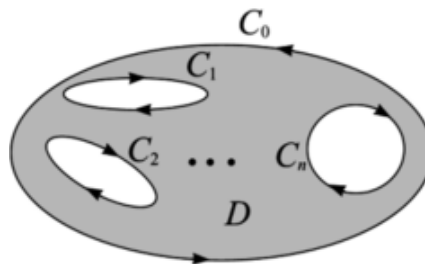
Теорему доведено. □

Наслідок 3.5. Якщо межа області D складається з декількох замкнених кривих (многозв'язна область), і вони орієнтовані так, що при обході вздовж цих кривих область залишається ліворуч та на $\overline{D}$ задана аналітична функція $f(z)$, то

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

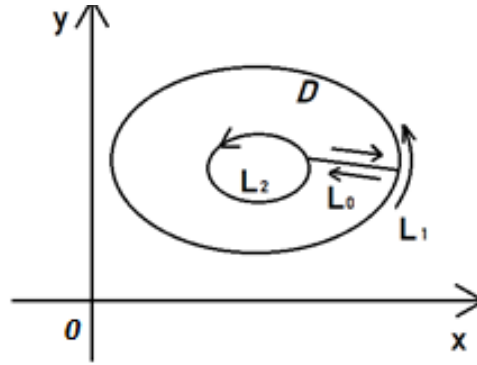
Зокрема, якщо маємо область, обмежену контурами C_i (див. рисунок нижче), при цьому контур C_0 пробігається в додатному напрямку, а інші контури C_i , $i = 1, \dots, n$ — в від'ємному напрямку, то в силу адитивності інтеграла

$$\begin{aligned}
 \oint_{(C_0)^+} f(z) dz + \sum_{i=1}^n \oint_{(C_i)^-} f(z) dz &= 0 \\
 \text{або} \\
 \oint_{(C_0)^+} f(z) dz &= \sum_{i=1}^n \oint_{(C_i)^+} f(z) dz.
 \end{aligned}$$



Доведення можна розглянути для двозв'язної області D . Якщо зробити розріз L_0 , який з'єднує криві L_1 і L_2 , то отримаємо однозв'язну область D^* з замкненою межею

$$(L_1)^+ \cup (L_0)^+ \cup (L_2)^- \cup (l_0)^-.$$



Тоді за теоремою Коші маємо, що

$$0 = \oint_{\partial D^*} f(z) dz = \int_{(L_1)^+} f(z) dz + \int_{(L_0)^+} f(z) dz + \int_{(L_2)^-} f(z) dz + \int_{(L_0)^-} f(z) dz$$

звідки отримуємо, що

$$\int_{(L_1)^+} f(z) dz = - \int_{(L_2)^-} f(z) dz = \int_{(L_2)^+} f(z) dz.$$

Із попередніх міркувань отримуємо наступне твердження.

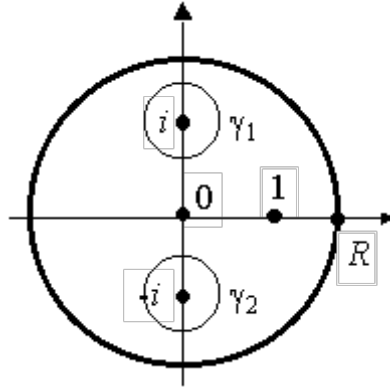
Наслідок 3.6. Якщо функція $f(z)$ — аналітична в області D , і точка z_0 належить області D з деяким своїм δ -околом, то

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z - z_0| = \delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.1)$$

Приклад 3.7. Для аналітичної функції $f(z)$ в $|z| \leq R$ ($R > 1$)

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^2 + 1} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z - i} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z + 1} dz,$$

де функції $f_1(z) = \frac{f(z)}{z + i}$, $f_2(z) = \frac{f(z)}{z - i}$ є аналітичними в областях, обмежених колами γ_1 (межа околу $z_1 = i$) та γ_2 (межа околу $z_2 = -i$) відповідно (γ_1 і γ_2 не перетинаються).



Теорема 3.8. (інтегральна формула Коші). Нехай функція $f(z)$ — аналітична в однозв'язній замкненій області $\bar{D}$, $z_0 \in D$. Тоді

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

де обхід вздовж межі D здійснюється в додатному напрямку.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

і додатково визначимо її в точці z_0 :

$$\varphi(z_0) = f'(z_0).$$

Тоді ця функція $\varphi(z)$ буде неперервною в області D і диференційованою на ній. Тому за теоремою Коші

$$\oint_{\partial D} \varphi(z) dz = 0,$$

тобто $\oint_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$

Звідки в силу лінійності інтеграла (по аналогії з Прикладом 3.3) маємо:

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\partial D} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot \oint_{|z - z_0| = \delta} \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

Отже,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Теорему доведено. □

Із інтегральної формули Коші отримуємо, що

1) визначення аналітичної функції на межі області однозначно визначає її всередині області;

2) якщо $f(z)$ — аналітична в однозв'язній замкненій області $\overline{D}$, $z_0 \in D$, то

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0),$$

де обхід вздовж межі D здійснюється в додатному напрямку.

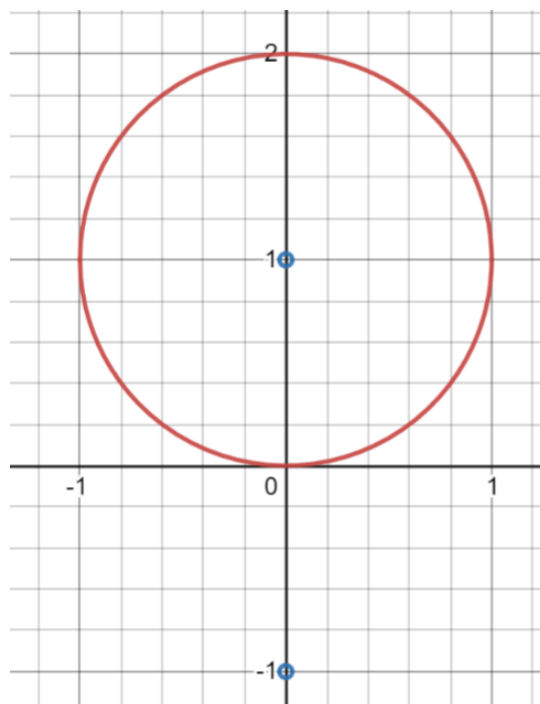
Приклад 3.9. Обчислити $\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$.

Розв'язання.

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)} dz.$$

Функція $f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$ є аналітично всередині круга $|z-i| \leq 1$.

Тоді, застосовуючи інтегральну формулу Коші $\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i$ для



функції $f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$ при $z_0 = i$, отримаємо

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{z}{z-i} dz = \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)} dz = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \cdot \frac{\sin i}{2i} = i\pi \operatorname{sh} 1$$

$$(\sin \varphi = i \operatorname{sh} \varphi, \quad \cos i\varphi = \operatorname{ch} \varphi).$$

Твердження 3.10. У аналітичній функції існують похідні будь-якого порядку.

Доведення. Дійсно, для цього скористаємося інтегральною формулою Коші, взявши контуром коло $|z - z_0| = \delta$. Тоді

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Продиференціюємо підінтегральну функцію по z_0 . Отримаємо

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz,$$

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz,$$

$$f'''(z_0) = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz,$$

.....

Аналогічно отримуємо, що

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.2)$$

Твердження доведено.

Твердження 3.11. Аналітичну функцію можна розвинути в ряд Тейлора.

Доведення.

Нехай $f(z)$ — аналітична функція в крузі $|z - z_0| < R$.
Виберемо $\rho \in (|z - z_0|, R)$. Тоді при $|\xi - z_0| = \rho$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

оскільки $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$.

Підставимо цей ряд в формулу Коші:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} f(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

$$\text{де } C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = [\text{за формулою (3.2)}] = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Твердження доведено.

Таким чином, ми довели, що **аналітичну в крузі $|z - z_0| < R$ функцію $f(z)$ можна розвинути в ряд Тейлора**, тобто $f(z)$ є аналітичною в сенсі старого визначення.

Приклади.

Функція $\ln(1 + z)$ є аналітичною в крузі $|z| < 1$ і справедлива рівність

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}.$$

Аналогічно — аналітичною функцією є **біном**

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} \cdot z^n \quad \text{при } |z| < 1.$$

Властивості аналітичних функцій

1 властивість:

Теорема 3.12. (Теорема Ліувілля.) Якщо функція $f(z)$ є аналітичною на всій площині $\mathbb{C}$ і обмежена, то

$$f(z) \equiv \text{const.}$$

Доведення. Для аналітичної функції $f(z)$ правильно, що

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

де C_R — коло радіуса R з центром в точці z .

Тоді, якщо $|f(z)| \leq M$, то

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} d\xi \leq \frac{M}{2\pi R^2} \oint_{C_R} d\xi = \frac{M \cdot 2\pi R}{2\pi R^2} = \frac{M}{R}.$$

Спрямовуючи R до нескінченності, отримуємо $f'(z) = 0$ і, отже, $f(z) \equiv \text{const.}$
Теорему доведено. $\square$

2 властивість:

Принцип максимуму модуля. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в $\bar{D}$ і не сталою, то максимум модуля функції $\left(\max_{\bar{D}} |f(z)|\right)$ досягається на межі ∂D .

Доведення. Припустимо, що $\max_{\bar{D}} |f(z)| = |f(z_0)|$, де z_0 внутрішня точка області D . Тоді формулу Коші можна записати так:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Звідси

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{|f(z)|}{\delta} dz \leq \frac{2\pi\delta}{2\pi\delta} \max |f(z)|,$$

причому рівність можлива лише в разі $|f(z)| = |f(z_0)|$ на всьому крузі, а це означає і по всьому δ -околу точки z_0 .

Властивість доведено. $\square$

3 властивість:

Якщо аналітична в області D функція $f(z)$ має нулі a_n , $n \in \mathbb{N}$ і

$$a_n \rightarrow a \in D,$$

то $f(z) \equiv 0$ в області D .

Наслідок 3.13. *Якщо дві аналітичні функції співпадають (збігаються) на дійсному відрізку, то вони рівні, тобто аналітичне продовження з дійсної осі визначається однозначно.*

3.1. Обчислення інтегралів по замкненому контуру

Будемо розглядати інтеграли вигляду

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz,$$

де функція $\varphi(z)$ аналітична в D , а $\psi(z)$ — багаточлен, який не має нулів на контурі Γ . Для обчислення інтегралів застосовуються такі теореми і наслідки з них.

При обчисленні інтегралів вигляду

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz$$

в залежності від характеру (кратності) нулів многочлена $\psi(z)$ в області, обмеженої контуром Γ , і їх розташування відносно контуру Γ можна виділити чотири випадки.

1. В області D немає нулів многочлена $\psi(z)$.

Тоді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ — аналітична функція в D і, застосовуючи основну теорему Коші, маємо, що

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

2. В області D розташований один простий нуль $z = a$ многочлена $\psi(z)$.

Тоді записуємо дріб у вигляді

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{f(z)}{z-a},$$

де $f(z)$ — аналітична функція в D . Застосовуючи інтегральну формулу Коші, отримуємо такий результат:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i \cdot f(a).$$

3. В області D розташований один кратний нуль $z = a$ многочлена $\psi(z)$ (кратності n).

Тоді записуємо дріб у вигляді

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{f(z)}{(z-a)^n},$$

де $f(z)$ — аналітична функція в $\overline{D}$. Застосовуючи формулу (3.2) для похідної

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz,$$

отримуємо такий результат:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a).$$

4. В області D розташовані два нуля многочлена $\psi(z)$: $z_1 = a$ і $z_2 = b$.

Тоді, використовуючи наслідок із теореми Коші, запишемо інтеграл у вигляді

$$\oint_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz,$$

де Γ_1 і Γ_2 — межі околів точок $z_1 = a$ і $z_2 = b$, які не перетинаються. Для кожного із отриманих інтегралів проводимо далі обчислення відповідно до пунктів **2** і **3**. Очевидно, можна розглянути і випадки більшого числа нулів $\psi(z)$ в області D .

4. Ряди Лорана та лишки

4.1. Ряди Лорана

Нагадаємо, що точка $f(z_0)$ називається **нулем функції** $f(z)$, якщо значення функції $f(z)$ в цій точці дорівнює нулю, тобто $f(z_0) = 0$.

У розвиненні функції $f(z)$ в ряд Тейлора в околі нуля

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

відсутній вільний член $C_0 = f(z_0) = 0$.

Якщо при цьому в розвиненні відсутні і доданки, які містять степені різниці $(z - z_0)$ до m -го степеню, тобто розвинення має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

або

$$f(z) = C_m (z - z_0)^m + C_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad C_m \neq 0,$$

то точка z_0 називається **нулем порядку m функції $f(z)$** . Нуль першого порядку називається **простим нулем функції $f(z)$** .

Нагадаємо, що **радіус збіжності** степеневого ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$ визначається за формулами

$$\text{Коші-Адамара: } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad \text{та} \quad \text{Д'аламбера: } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|.$$

Означення 4.1. Рядом Лорана називається ряд вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

або

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n.$$

Сукупність членів ряду з невід'ємними степенями

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$$

називається **правильною частиною ряду Лорана**,

а члени з від'ємними степенями утворюють **головну частину ряду Лорана**

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n \quad \text{або} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Знайдемо **область збіжності** ряду Лорана за формулою Коші-Адамара:

$$\begin{aligned} - \text{ряд } \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n & \text{ збігається в крузі } |z - z_0| < R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}, \\ - \text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} & \text{ збігається при } \frac{1}{|z - z_0|} < R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}, \end{aligned}$$

$$\text{тобто при } |z - z_0| > r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}.$$

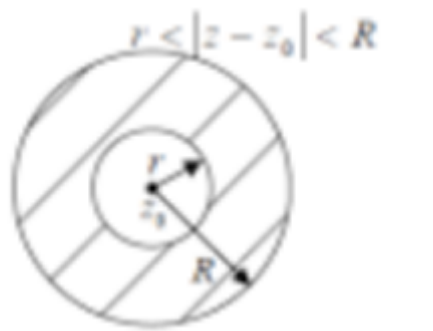
Отже, якщо $r < R$, то **область збіжності ряду Лорана** — це кільце

$$r < |z - z_0| < R.$$

Теорема 4.2. Нехай $0 \leq r < R \leq \infty$. Будь-яка аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$ функція $f(z)$ однозначно розвивається в ряд Лорана

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \\ \text{де } C_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho \in (r, R). \end{aligned}$$

Доведення.



Беремо будь-яку точку z із нашого кільця і проводимо два кола C_r та C_R радіусами r' та R' відповідно такими, щоб

$$r < r' < |z| < R' < R.$$

Застосуємо *інтегральну формулу Коші* до меншого з кілець, утворених цими колами:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (4.1)$$

У **першому** інтегралі функцію $\frac{1}{\xi - z}$ розвинемо у степеневий ряд (див. **Твердження 3.11**):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

причому цей ряд збігається рівномірно при $|\xi - z_0| = R'$.

Підставляючи даний ряд в перший інтеграл рівності (4.1), отримаємо

$$\oint_{C_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n.$$

У **другому** інтегралі рівності (4.1) для підінтегральної функції маємо, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = -\frac{1}{z - z_0 - (\xi - z_0)} = -\frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)} = \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

причому цей ряд рівномірно збігається при $|\xi - z_0| = r'$.

Підставляючи даний ряд в другий інтеграл рівності (4.1), отримаємо при $m = -n - 1$:

$$\oint_{C_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = - \sum_{m=-\infty}^{-1} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{m+1}} \cdot (z - z_0)^m.$$

Остаточно отримуємо ряд Лорана

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

де коефіцієнти визначаються за формулою

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Тут γ — будь-яке коло, що лежить всередині кільця.

Теорему доведено. □

Приклад 4.3. Розвинути в ряд Лорана функцію

$$f(z) = \frac{3}{2 + z - z^2} \quad \text{в кільці} \quad 1 < |z| < 2.$$

Розв'язання. Розвинемо спочатку задану функцію на найпростіші дробі

$$\frac{3}{2 + z - z^2} = \frac{3}{(2 - z)(1 + z)} = \frac{1}{2 - z} + \frac{1}{1 + z}.$$

$$\text{Отже, } f(z) = \frac{3}{2 + z - z^2} = \frac{1}{2 - z} + \frac{1}{1 + z}.$$

Оскільки маємо кільце $1 < |z| < 2$, то $\begin{cases} |z| > 1, \\ |z| < 2. \end{cases}$

Перший дріб $\frac{1}{2 - z}$ розглянемо при $|z| < 2$:

$$\frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \left[\text{при } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{при } |z| < 2,$$

$$\text{оскільки } \frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{при } |q| < 1.$$

Другий дріб $\frac{1}{1 + z}$ розглянемо при $1 < |z|$, тобто при $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$:

$$\frac{1}{1 + z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \left[\text{при } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} =$$

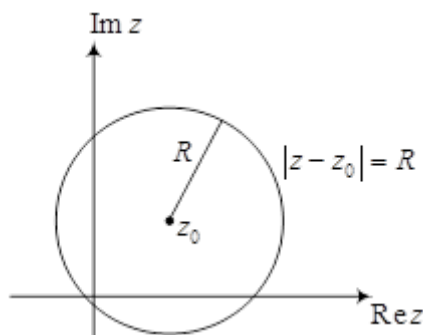
$$\begin{aligned} \text{оскільки } \frac{1}{1 + q} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n q^n \quad \text{при } |q| < 1 \\ &= [m = -n - 1] = \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^{-m-1} z^m, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Отже, ми отримали розвинення функції

$$f(z) = \frac{3}{2+z-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n+1} z^n \quad \text{в кільці} \quad 1 < |z| < 2.$$

Цю функцію можна розвинути в ряд Тейлора при $|z| < 1$ або в ряд Лорана при $|z| > 2$ (зробити **самостійно**).

Означення 4.4. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в кільці $0 < |z - z_0| < R$, тобто в проколотому околі точки z_0 , то кажуть, що точка є **ізолюваною особливою точкою** функції $f(z)$.



Класифікація ізолюваних особливих точок

1) Якщо в розвиненні функції $f(z)$ всі коефіцієнти головної частини ряду Лорана дорівнюють нулю, тобто $C_n = 0$, $\forall n < 0$, то в цьому випадку ряд Лорана перетворюється в ряд Тейлора з

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Така особливість функції $f(z)$ в точці z_0 має назву **усувної особливості**.

Наприклад, функція $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ в точці $z = 0$ має **усувну** особливість.

2) Якщо $C_n = 0$ при $n < -n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), а $C_{-n_0} \neq 0$, то в цьому випадку точка z_0 називається **полюсом кратності n_0** .

Наприклад, для функції $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ точка $z = 0$ — **полюс 1-го порядку**.

3) Якщо в розвиненні функції $f(z)$ в ряд Лорана маємо нескінченну кількість ненульових коефіцієнтів з від'ємними номерами, то така особливість називається **суттєвою**.

Наприклад, $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$, $z = 0$ — **суттєва** особливість.

Іноді можна зустріти наступну класифікацію:

- *Ізольована особлива точка* $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ функції $f(z)$ називається — **усувною особливою точкою**, якщо границя $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) < \infty$ (існує і скінченна);
- **полюсом**, якщо границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- **суттєво особливою точкою**, якщо границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує.

4.2. Лишки функції

Означення 4.5. Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції $f(z)$. **Лишком** («вычетом», від лат. *residuum*) функції $f(z)$ в точці z_0 називається

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\delta} f(z) dz.$$

Оскільки в розвиненні функції $f(z)$ в ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z - z_0)^n$

$$\text{коефіцієнти } C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

$$\text{то } C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad \text{тобто } \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}.$$

— Якщо в точці z_0 маємо **усувну** особливість, то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

— Якщо в точці z_0 маємо **полюс першого порядку (простий полюс)**, то $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$, де $\varphi(z)$ — аналітична функція в точці z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$. Тоді

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \varphi(z_0).$$

— Якщо в точці z_0 маємо **полюс m -го порядку**, то $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, де $\varphi(z)$ — аналітична функція в точці z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$. Тоді

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1} \varphi(z_0)}{dz^{m-1}}.$$

Наприклад, $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)' = \sin 0 = 0$.

— Якщо в точці z_0 маємо **суттєву особливість**, то знайти лишок можна тільки за означенням або із розвинення в ряд Лорана.

Теорема 4.6. (Теорема про лишки.) Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області $\overline{D}$, за винятком скінченної кількості особливих точок $\{a_k\}_{k=1}^n$, то

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Доведення. Якщо викинути із області D околи $U_\delta(a_k)$ всіх особливих точок $\{a_k\}_{k=1}^n$ функції $f(z)$, тобто множину

$$\bigcup_{k=1}^n U_\delta(a_k),$$

то отримаємо область, в якій функція $f(z)$ є аналітичною. Тому можна використувати теорему Коші:

$$\oint_{\partial D} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{|z-a_k|=\delta} f(z) dz = 0.$$

Оскільки $\operatorname{Res}_{z=a_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a_k|=\delta} f(z) dz$, то

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

□

Теорему доведено.

Приклад 4.7. Обчислити $\oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{1+z^3}$.

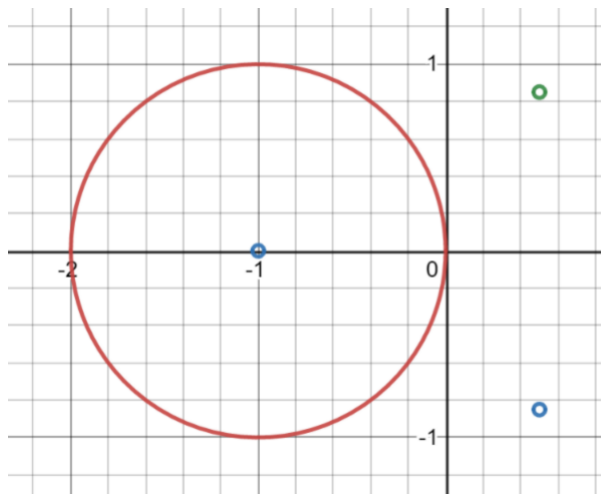
Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція має три особливі точки

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

а всередині нашого кола $|z+1|=1$ знаходиться тільки одна особлива точка

$$z_2 = -1,$$

то



$$\begin{aligned} \oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{1+z^3} &= \oint_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z^2-z+1)} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -1} (1+z) \frac{1}{(1+z)(z^2-z+1)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{z^2-z+1} \Big|_{z=-1} = \frac{2}{3}\pi i. \end{aligned}$$

4.3. Обчислення невластних інтегралів за допомогою лишків

Теорема 4.8. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в верхній напівплощині $\operatorname{Im} z > 0$, за винятком скінченної кількості особливих точок a_k ($k = 1, \dots, n$), та, крім цього,

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \quad \text{з} \quad \alpha > 1.$$

$$\text{Тоді} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Доведення. Опишемо напівколо C_R радіуса R з центром у нулі так, щоб усі особливі точки потрапили всередину отриманого напівкруга з межею $L = C_R \cup [-R, R]$. Тоді за **теоремою про лишки**

$$\oint_L f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z). \quad (4.2)$$

Отримаємо оцінку другого інтеграла суми. Оскільки $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}$, то

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| < \int_{C_R} |f(z)| dz \leq \frac{M}{R^\alpha} \int_{C_R} dz \leq \frac{M}{R^\alpha} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}} \quad [\text{при } R \rightarrow +\infty] \rightarrow 0.$$

Тому якщо в рівності

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)$$

спрямувати $R \rightarrow +\infty$, то отримаємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Теорему доведено. □

Приклад 4.9. Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Розв'язання. У функції $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ в верхній напівплощині $\operatorname{Im} z > 0$ знаходяться тільки дві особливі точки, які є нулями знаменника, тобто розв'язками рівняння $z^4 = -1$:

$$z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-1} = \left\{ e^{i \frac{\pi+2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \right\} :$$

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \text{та} \quad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Ще дві особливі точки $z_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}$ та $z_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$ знаходяться у нижній напівплощині $\operatorname{Im} z < 0$.

Виконуються всі умови Теорема 4.8 при $|f(z)| = \frac{1}{|1+z^4|} \leq \frac{1}{|z|^4}$ ($\alpha = 4 > 1$).

Знайдемо лишки функції в точках z_1 та z_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z-z_1}{1+z^4} = [\text{правило Лопітала}] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = \\ &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\pi i + \frac{\pi i}{4}} = -\frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{1+z^4} &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z-z_2}{1+z^4} = [\text{правило Лопітала}] = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{4z^3} = \\ &= \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{9\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-2\pi i - \frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Звідки за **Теоремою 4.8**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{1+z^4} \right) = \\ &= -2\pi i \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}}{4} = \pi \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2i} = \pi \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

оскільки за **формулою Ейлера** $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

Зауваження 4.10. Цей інтеграл можна обчислити також за допомогою B -функції Ейлера.

Теорема 4.11. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в верхній напівплощині $\operatorname{Im} z > 0$, за винятком скінченної кількості особливих точок a_k ($k = 1, \dots, n$), та, крім цього, виконана умова

$$f(Re^{i\varphi}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Тоді } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} (f(z)e^{iz}).$$

Доведення. Як і при доведенні Теорема 4.8 опишемо напівколо C_R радіуса R з центром в нулі так, щоб усі особливі точки потрапили всередину отриманого напівкруга з межею $L = C_R \cup [-R, R]$. Тоді **за теоремою про лишки**

$$\oint_L f(z)e^{iz} dz = \int_{-R}^R f(x)e^{ix} dx + \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} (f(z)e^{iz}). \quad (4.3)$$

Отримаємо оцінку другого інтеграла суми.

Оскільки $f(Re^{i\varphi}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$, то

$$\left| \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz \right| = \left| \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-R \sin \varphi} e^{iR \cos \varphi} \cdot iRe^{i\varphi} d\varphi \right| = [\text{ф. Ейлера}] =$$

$$= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) e^{-R \sin \varphi} e^{iR \cos \varphi} \cdot iRe^{i\varphi} d\varphi \right| \leq$$

за формулою Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $|e^{i\varphi}| = 1$

$$\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\varphi})| e^{-R \sin \varphi} R d\varphi < \varepsilon \int_0^\pi e^{-R \sin \varphi} R d\varphi = 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \varphi} R d\varphi <$$

$$\sin \varphi > \frac{2\varphi}{\pi} \quad \text{при} \quad \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$< 2\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\varphi \frac{2}{\pi}} d(R\varphi) = \pi\varepsilon (1 - e^{-R}) < \pi\varepsilon.$$

Отже, $\int_{C_R} f(z)e^{iz} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$.

Спрямовуючи в рівності (4.3) $R \rightarrow +\infty$, отримаємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} (f(z)e^{iz}).$$

Теорему доведено. □

Приклад 4.12. Обчислити інтеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x \, dx}{a^2 + x^2}$.

Розв'язання. За формулою Ейлера $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$ маємо, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x \, dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} \, dx}{a^2 + x^2}.$$

Функція $f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}$ задовольняє умовам **Теорему 4.11**, у верхній напівплощині має полюс в точці $z = ai$. Тому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2 + x^2} \, dx &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=ai} \frac{e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2} = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow ai} \frac{(z - ai)e^{i\lambda z}}{(z - ai)(z + ai)} = \\ &= 2\pi i \frac{e^{-\lambda a}}{2ai} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{a}. \end{aligned}$$

Це означає, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x \, dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} \, dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a}.$$

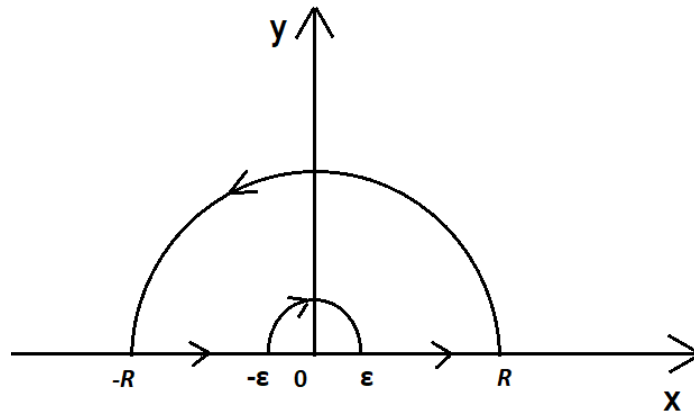
Зауваження 4.13. Якщо на дійсній осі функція $f(z)$ має особливості, то треба обирати спеціальний контур інтегрування, щоб обійти ці особливості.

Приклад 4.14. Обчислити інтеграл Діріхле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $\frac{\sin x}{x}$ є парною і **за формулою Ейлера**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} \, dx.$$

Функція $f(z) = \frac{1}{z}$ має полюс у нулі та $\frac{1}{z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Як контур інтегрування візьмемо наступний контур:



Тоді за теоремою Коші

$$\oint_L \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, \quad (4.4)$$

оскільки функція є аналітичною в області, обмеженої цим контуром.

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \left| \begin{array}{l} z = \varepsilon e^{i\varphi} \\ = \varepsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \\ \varphi \in [0, \pi] \end{array} \right| = \\ &= - \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon(\cos \varphi + i \sin \varphi)} i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -i \int_0^\pi d\varphi = -\pi i. \\ \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{див. доведення Теорема 4.11}). \end{aligned}$$

Спрямовуємо в рівності (4.4) $R \rightarrow +\infty$ та $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi.$$

Тому

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2}.$$

5. Контрольні питання

Частина 1.

1. Сформулювати означення комплексного числа.
2. Дати означення поняття добутку комплексних чисел.
3. Що таке модуль числа z ?
4. Що називається числом, спряженим до комплексного числа z ?
5. Записати вираз $z = -\sqrt{3} + i$ у тригонометричному вигляді.
6. Зобразити на площині множину $|z + i| < 1$.
7. Записати формулу Муавра.
8. Знайти $\sqrt{3 - 4i}$ і $\sqrt[3]{i}$.
9. Сформулювати основну теорему алгебри.

Частина 2.

1. Як визначається похідна $f(z)$?
2. Які умови існування похідної?
3. Яка функція $u(x, y)$ називається гармоничною?
4. Як знайти за дійсною частиною $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ її уявну частину?
5. Дати означення конформному відображенню.
6. Чи буде $f(z) = \sqrt{z}$ конформним відображенням множини $\operatorname{Re} z \geq 0$?
7. Чи буде аналітичною функція $f(z) = y + ix$?
8. Як визначається функція z^α при дійсному α ?
9. Яка основна властивість дробово-лінійної функції?
10. Яка обернена функція до функції $\operatorname{sh} z$?

Частина 3.

1. Дати означення інтегралу від комплексної функції вздовж кривої.
2. Знайти інтеграл $\int_0^i \frac{dz}{1+z}$.
3. Сформулювати теорему Коші. Навести приклад.
4. Зайти інтегральну формулу Коші.
5. Чому дорівнює $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz$?
6. Сформулювати теорему Ліувілля.
7. Сформулювати принцип максимуму модуля.
8. Ровинути в ряд Тейлора функцію $\frac{z}{4 - z^2}$.

Частина 4.

1. Дати означення ряду Лорана.
2. Чому дорівнює коефіцієнт ряду Лорана C_n ?
3. Розвинути в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{2 - z - z^2}$ в кільці $1 < |z| < 2$.
4. Дати означення лишку функції $f(z)$.
5. Знайти $\operatorname{Res}_0 \frac{\sin 2z}{z^2}$.
6. Сформулювати теорему про лишки.
7. Знайти $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1 - z^2}$.
8. Сформулювати теорему про знаходження $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ для аналітичної у верхній напівплощині функції $f(z)$.

Література

- [1] Тріщ Б.М., Основи вищої математики. Навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка., 2006. – 385 с.
- [2] Тріщ Б.М., Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі. Навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. – 403 с.
- [3] Комплексний аналіз. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. Для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / П. О. Наказной; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 292 кБ). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 483 с.
<https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/5461b586-8508-4758-b8b6-fdc5c54ae02a/content>
- [4] Комплексний аналіз: навчальний посібник / П. В. Слюсарчук, Т. В. Боярищева, М. С. Герич, О. О. Погоріляк, О. О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак. ISBN 978-617-7796-10-6 - Ужгород: «Шарк», 2020. – 174 с.
<https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/30613>