

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.9

№ 475, 2000, с. 273–281

Об обращении интегральных операторов одного класса

Н. В. Милых

Харьковский национальный университет, Украина

В работе изучается вопрос о решении интегральных уравнений с матричным ядром. Дан метод построения обратных операторов, основанный на использовании операторных тождеств.

Вопрос о разрешимости интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности, в пространстве функций, заданных в R^n решается, по сути, при помощи преобразования Фурье. Задача явной разрешимости таких уравнений для функций, определенных на конечном отрезке из R была предложена в работе [1]. В том случае, когда функции принадлежат евклидовому пространству E^r ($r = \dim E$), вопрос о разрешимости интегральных уравнений в общем виде (с ядром не обязательно зависящим от разности) не исследовался, за исключением частных случаев, например, [2].

В данной работе изучается специальный класс интегральных операторов, для которого предложена конкретная схема построения обратных операторов в духе идей Сахновича Л. А. [1]. При этом используются модельные операторы из работы Золотарева В. А. [3].

I. Пусть $a_t \geq 0$ — самосопряженная матрица (2×2) такая, что $\text{tr } a_t \equiv 1$. Рассмотрим гильбертово пространство

$$L_2^2(l, a_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), f_2(x)); \int_0^l f(t) a_t f^*(t) dt < \infty \right\},$$

со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^l f(t) a_t g^*(t) dt$, считая, что надлежащая факторизация по ядру метрики уже проведена. На элементах из $L_2^2(l, a_x)$ имеет смысл обратная матрица к a_t , которую обозначим через $a_t^{[-1]}$.

Аналогично соответствующему утверждению из [1] имеет место

Теорема 1. *Любой линейный ограниченный оператор S , действующий в $L_2^2(l, a_x)$, представим в виде*

$$Sf = \frac{d}{dx} \int_0^l f(t) a_t s(x, t) dt \cdot a_x^{[-1]}, \quad (1)$$

где $s(x, t)$ — матрица 2×2 , столбцы которой при каждом фиксированном x принадлежат $L^2_2(l, a_x)$.

Доказательство. Введем вектор-функции

$$g_1(x) = \begin{cases} (1, 0) & \text{при } t \leq x \\ (0, 0) & \text{при } t > x \end{cases}, \quad g_2(x) = \begin{cases} (0, 1) & \text{при } t \leq x \\ (0, 0) & \text{при } t > x \end{cases}.$$

Если $f \in L^2_2(l, a_x)$, то из ограниченности оператора S вытекает, что $Sf \in L^2_2(l, a_x)$.

Рассмотрим скалярные произведения:

$$(Sf, g_1) = \int_0^x (Sf \cdot a_t)_1 dt, \quad (Sf, g_2) = \int_0^x (Sf \cdot a_t)_2 dt. \quad (2)$$

С другой стороны, справедливы равенства

$$(Sf, g_1) = (f, S^*g_1), \quad (Sf, g_2) = (f, S^*g_2).$$

Так как S^*g_1 и S^*g_2 являются вектор-функциями двух переменных x и t , то

$$((S^*g_1)^*, (S^*g_2)^*) = s(x, t) \quad (3)$$

матрица размерности 2×2 . Тогда верно соотношение

$$\int_0^x Sf \cdot a_t dt = \int_0^l f(t) a_t s(x, t) dt, \quad (4)$$

продифференцировав которое по x , получим

$$Sf \cdot a_x = \frac{d}{dx} \int_0^l f(t) a_t s(x, t) dt. \quad (5)$$

Так как в нашем пространстве можно рассматривать $a_x^{[-1]}$, то домножив равенство (5) справа на $a_x^{[-1]}$, получим требуемое.

Из (3) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Матрица-функция $s(x, t)$ в представлении (1) может быть выбрана так, что столбцы $s(x, t)$ при каждом x принадлежат $L^2_2(l, a_x)$, причем

$$s(0, t) = 0, \quad \|s_i(x + \Delta x, t) - s_i(x, t)\|_{L^2_2(l, a_x)} \leq \|S\|^2 c |\Delta x|, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (6)$$

где s_i — столбцы $s(x, t)$, c — константа, $\|S\|$ — норма оператора S .

II. Зададим в $L^2_2(l, a_x)$ интегральный оператор

$$Af = i \int_x^l f(t) a_t J dt, \quad (7)$$

где $J = J^* = J^{-1}$. Тогда сопряженный оператор A^* определяется формулой

$$A^* f = -i \int_0^x f(t) a_t J dt. \quad (8)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого ограниченного оператора S (1) с ядром $s(x, t)$, удовлетворяющим соотношению

$$J a_t \frac{\partial}{\partial x} l(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} l(x, t) a_x J = 0, \quad (9)$$

$$l(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} s(x, t) \right) a_x^{[-1]},$$

имеет место равенство

$$(AS - SA^*)f = i \int_0^l f(t) a_t [\Phi_1(x) + \Phi_2(t)] dt, \quad (10)$$

где $\Phi_k(x)$ — вектор-столбцы из $L_2^2(l, a_x)$.

Доказательство. Из (1), (7) и (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} (AS - SA^*)f &= i \int_0^l f(t) a_t \int_x^l \frac{\partial}{\partial \xi} s(\xi, t) d\xi J dt + \\ &+ i \frac{d}{dx} \int_0^l \int_0^t f(\xi) a_\xi J d\xi a_t s(x, t) dt \cdot a_x^{[-1]} = \end{aligned} \quad (11)$$

$$= i \int_0^l f(t) a_t \left[\int_x^l \frac{\partial}{\partial \xi} s(\xi, t) d\xi J a_x + \int_t^l J a_\xi \frac{\partial}{\partial x} s(x, \xi) d\xi \right] dt \cdot a_x^{[-1]}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \left[\int_x^l \frac{\partial}{\partial \xi} s(\xi, t) d\xi J a_x + \int_t^l J a_\xi \frac{\partial}{\partial x} s(x, \xi) d\xi \right] a_x^{[-1]} = \\ &= \int_x^l \left(\frac{\partial}{\partial \xi} s(\xi, t) \right) a_\xi^{[-1]} a_\xi J d\xi + \int_t^l J a_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x} s(x, \xi) \right) a_x^{[-1]} d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим $l(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} s(x, t) \right) a_x^{[-1]}$, подставив в (12) $l(x, t)$, получим

$$\Phi(x, t) = \int_x^l l(\xi, t) a_\xi J d\xi + \int_t^l J a_\xi l(x, \xi) d\xi. \quad (13)$$

Вычислив частные производные по x и t от функции (13), приходим к уравнению (9), тогда $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi(x, t) = 0$, поэтому $\Phi(x, t)$ можем представить в виде

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x) + \Phi_2(t). \quad (14)$$

Подставив найденное выражение в (11), получаем утверждение теоремы.

Обозначим

$$N_1(x) = e_1 \Phi_1(x) = (\phi_{11}^1, \phi_{12}^1),$$

$$N_2(x) = e_2 \Phi_1(x) = (\phi_{21}^1, \phi_{22}^1),$$

$$M_1(x) = e_1 \Phi_2^*(x),$$

$$M_2(x) = e_2 \Phi_2^*(x),$$

(15)

где e_k , $k = \overline{1, 2}$ — стандартный базис в евклидовом пространстве E^2 . Тогда имеет место

$$\Phi_1(x) = e_1^* N_1(x) + e_2^* N_2(x),$$

$$\Phi_2(t) = \Phi_2(t) e_1^* e_1 + \Phi_2(t) e_2^* e_2 = M_1^*(t) e_1 + M_2^*(t) e_2.$$

Из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 2. Если существует ограниченный оператор T , обратный к S (1), то верно равенство

$$(TA - A^*T)f = i \int_0^l f(t) a_t \sum_{i=1}^4 V_i^*(t) R_i(x) dt, \quad (16)$$

$$S^*V_1 = e_1, \quad S^*V_2 = e_2, \quad S^*V_3 = M_1, \quad S^*V_4 = M_2, \quad (17)$$

$$SR_1 = N_1, \quad SR_2 = N_2, \quad SR_3 = e_1, \quad SR_4 = e_2, \quad (18)$$

где M_i , N_i ($i = \overline{1, 2}$) определяются по формулам (15).

III. Пусть $V_k(x)$, $R_k(x)$ ($k = \overline{1, 4}$) — некоторые функции из $L_2^2(l, a_x)$. Введем матрицу-функцию

$$Q(x, t) = \sum_{i=1}^4 V_i^*(t) R_i(x) \quad (19)$$

и оператор

$$Qf = \int_0^l f(t) a_t Q(x, t) dt. \quad (20)$$

Теорема 3. Если ограниченный оператор T , действующий в $L_2^2(l, a_x)$, удовлетворяет операторному уравнению

$$TA - A^*T = iQ, \quad (21)$$

то справедливо представление для оператора T ,

$$Tf = \frac{d}{dx} \int_0^l f(t) a_t F(x, t) dt \cdot a_x^{[-1]}, \quad (22)$$

где $F(x, t)$ находится из следующих соотношений:

$$F_1(x, t) = \int_0^x \int_0^t J a_\xi F(u, \xi) J a_u J d\xi du, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} J a_t \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, t) + \left(\frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t) \right) a_x J = \\ = J a_t \int_0^x \sum_{i=1}^4 V_i^*(t) R_i(u) a_u J du a_x J, \end{aligned} \tag{24}$$

$$F_1(0, t) = 0, \quad F_1(x, 0) = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Из ограниченности оператора T в силу теоремы 1 вытекает представление (22). При этом согласно (6) матрица-функция $F(x, t)$ может быть выбрана так, что

$$F(0, t) = 0, \quad \| F_i(x + \Delta x, t) - F_i(x, t) \|_{L_2^2(l, a_x)} \leq \| S \|^2 c |\Delta x|, \tag{26}$$

где $F_i, i = \overline{1, 2}$ — столбцы матрицы $F(x, t)$, c — константа. Значит, интеграл $\int_0^t J a_\xi F(x, \xi) J a_x J d\xi$ непрерывен по переменной x , т.е. имеет смысл повторный интеграл

$$F_1(x, t) = \int_0^x \int_0^t J a_\xi F(u, \xi) J a_u J d\xi du. \tag{27}$$

Легко видеть, что для оператора

$$T_1 f = \int_0^l f(t) a_t F_1(x, t) dt \tag{28}$$

справедливо равенство

$$T_1 = i A^{*2} T A. \tag{29}$$

Из (21) и (29) следует соотношение

$$T_1 A - A^* T_1 = i Q_1, \tag{30}$$

где

$$Q_1 f = i A^{*2} Q A f = \int_0^l f(t) a_t Q(x, t) dt, \tag{31}$$

$$Q_1(x, t) = \int_0^x \int_0^\xi \int_0^t J a_\eta Q(u, \eta) a_u J a_\xi J d\eta du d\xi. \tag{32}$$

Операторное равенство (30) означает, что

$$\int_0^t J a_\xi F_1(x, \xi) d\xi + \int_0^x F_1(u, t) a_u J du = Q_1(x, t). \quad (33)$$

Из (27) и (33) следует

$$\int_0^t J a_\xi \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, \xi) d\xi + F_1(x, t) a_x J = \frac{\partial}{\partial x} Q_1(x, t). \quad (34)$$

В силу (32) и (34) функция $F_1(x, t)$ абсолютно непрерывна по t при каждом x из $[0, l]$ и

$$J a_t \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} F_1(x, t) a_x J = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} Q_1(x, t). \quad (35)$$

Учитывая снова (27), имеем

$$F_1(0, t) = F_1(x, 0) = 0. \quad (36)$$

Из (19), (20) и (31), (32)

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} Q_1(x, t) = J a_t \int_0^x \sum_{i=1}^4 V_i^*(t) R_i(u) a_u J du a_x J. \quad (37)$$

IV. Изучим вопрос о разрешимости уравнения (24). Для этого рассмотрим следующий пример. Возьмем $a_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ такую, чтобы выполнялись условия сплетаемости [3]

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \gamma(x) J = i [J a_x, \sigma J] \\ [J a_x, \gamma(x) J] = 0 \\ \gamma(0) = \tilde{\gamma} \end{cases}, \quad (38)$$

причем будем считать $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} n & m \\ \bar{m} & p \end{pmatrix}$, $n, p \in R$, $m \in C$.

Систему (38) перепишем в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \gamma(x) = i (J a_x \sigma - \sigma a_x J) \\ \gamma(x) a_x = J a_x \gamma(x) J \\ \gamma(0) = \tilde{\gamma} \end{cases}, \quad (39)$$

подставляя значения J , σ в (39), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \gamma(x) = \begin{pmatrix} 2\alpha \text{Im } a_{12} & i(\beta a_{22} - \alpha a_{11}) \\ -i(\beta a_{22} - \alpha a_{11}) & -2\beta \text{Im } a_{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{11} a_{11} + \gamma_{12} a_{21} & \gamma_{11} a_{12} + \gamma_{12} a_{22} \\ \gamma_{21} a_{11} + \gamma_{22} a_{21} & \gamma_{21} a_{12} + \gamma_{22} a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{12} a_{21} + \gamma_{22} a_{22} & \gamma_{11} a_{21} + \gamma_{21} a_{22} \\ \gamma_{12} a_{11} + \gamma_{22} a_{12} & \gamma_{11} a_{11} + \gamma_{21} a_{12} \end{pmatrix} \\ \gamma(0) = \tilde{\gamma} \end{array} \right. \quad (40)$$

Обозначим $c(x) = \text{Im } a_{12}$, $r(x) = \text{Im } \gamma_{12}$, тогда (40) можно записать следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma'_{11} = 2\alpha c(x) \\ \gamma'_{22} = -2\beta c(x) \\ r' = \beta a_{22} - \alpha a_{11} \\ \gamma_{11} a_{11} = \gamma_{22} a_{22} \\ \gamma_{11} c(x) = -r(x) a_{22} \\ \gamma_{22} c(x) = -r(x) a_{11} \\ \gamma(0) = \tilde{\gamma} \end{array} \right. \quad (41)$$

2. Положим $c(x) \equiv 0$. Воспользовавшись тем, что $\text{tr } a_t \equiv 1$, получаем из (41)

$$a_x = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} a(x) & \\ a(x) & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $\frac{\beta}{\alpha+\beta} \geq 0$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$, $a(x)$ — любая вещественнозначная функция такая, что $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \geq a^2(x)$.

Покажем, что уравнение (24), (25) при полученной матрице a_x (42) имеет решение.

Пусть

$$N(x, t) = J \int_0^x \sum_{i=1}^4 V_i^*(t) R_i(u) a_u J du, \quad \Phi(x, t) = J F_1(x, t), \quad M(x) = a_x J, \quad (43)$$

домножив уравнение (24) слева на J и используя новые обозначения, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} M(t) \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) M(x) = M(t) N(x, t) M(x) \\ \Phi(0, t) = \Phi(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

Общее решение однородного уравнения

$$M(t) \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) M(x) = 0 \quad (45)$$

можно представить в виде

$$\Phi_0(x, t) = \leftarrow \int_0^t M(\xi) d\xi \quad G \quad \int_x^t M(\xi) d\xi \quad + C, \quad (46)$$

где выражения в (46) являются мультипликативными операторами [4].

Необходимо найти частное решение неоднородного уравнения (44). Будем искать матрицу $\Phi(x, t)$ такую, что

$$M(t) \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) M(t). \quad (47)$$

Обозначим $K(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t)$, тогда (47) - $MK = KM$.

Приведем матрицу $M(t)$ к жордановой форме [4] :

$$M = U \tilde{M} U^{-1}, \quad (48)$$

тогда

$$K = U K_{\tilde{M}} U^{-1}, \quad (49)$$

где $K_{\tilde{M}}$ — произвольная матрица, перестановочная с \tilde{M} . В нашем случае, легко видеть, что

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} & -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

тогда в качестве $K_{\tilde{M}}$ можно взять диагональную матрицу

$$K_{\tilde{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{d}(x, t) & 0 \\ 0 & \tilde{c}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Таким образом, из (48) и (50) следует, что матрица-функция

$$\Phi(x, t) = U \begin{pmatrix} d(x, t) & 0 \\ 0 & c(x, t) \end{pmatrix} U^{-1} \quad (52)$$

будет удовлетворять (47). Систему (44) приведем к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = M(t) N(x, t) M(x) [M(x) + M(t)]^{-1} \\ \Phi(0, t) = \Phi(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Для того, чтобы система (53) имела решение достаточно, чтобы следующая матрица была диагональной

$$P(x, t) = U^{-1} M(t) N(x, t) M(x) [M(x) + M(t)]^{-1} U. \quad (54)$$

Учитывая (43) и (48) имеем

$$P(x, t) = \tilde{M}(t) \int_0^x \sum_{i=1}^4 U^{-1} J V_i^*(t) R_i(\xi) U \tilde{M}(\xi) d\xi \tilde{M}(x) [\tilde{M}(x) + \tilde{M}(t)]^{-1}. \quad (55)$$

Если выбрать V_i , R_i следующим образом

$$V_i^1 \theta = V_i^2, \quad R_i^1 \theta = R_i^2, \quad \theta^2 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (56)$$

то матрица

$$\sum_{i=1}^4 U^{-1} J V_i^*(t) R_i(\xi) U \quad (57)$$

будет диагональной и, следовательно, $P(x, t)$ будет диагональна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахнович Л. А. Уравнения с разностным ядром // Успехи математических наук. - 1982. - Т. 35. - вып. 4. - С. 72-100.
2. Сахнович Л. А. Системы уравнений с разностным ядром // Украинский математический журнал. - 1980. - Т. 32, 1 - С. 61-68.
3. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Математический сборник. - 1990. - Т. 181, 7. - С. 965-994.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - 552 с.
5. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. - Харьков: Издательство ХГУ, 1971. - 160 с.

Вполне геодезические подмногообразия на поверхностях с группой вращения $SO(2) \times SO(2)$

В. С. Яскин

Харьковский национальный университет, Украина

В работе изучены вполне геодезические подмногообразия на поверхностях с группой вращения $SO(2) \times SO(2)$ в евклидовом пространстве и геодезические линии на поверхностях с группами вращения вида $SO(n_1) \times \dots \times SO(n_k)$.

В данной статье мы продолжаем исследование вполне геодезических подмногообразий на поверхностях вращения. Ю.А. Аминов на харьковском городском геометрическом семинаре докладывал о 2-мерных вполне геодезических поверхностях на гиперповерхностях вращения в евклидовом пространстве E^4 с одномерной осью вращения. Оказалось, что все такие вполне геодезические поверхности исчерпываются двумя типами поверхностей: меридиональными поверхностями и сферами критического радиуса. В [4] нами было получено обобщение данного утверждения на случай гиперповерхности вращения в евклидовом пространстве произвольной размерности. По поводу этих результатов были сделаны доклады на харьковском городском геометрическом семинаре, где В.Т. Лисща и Л.А. Масальцев предложили рассмотреть поверхности с другими группами вращения. В данной статье исследуются вполне геодезические поверхности на 3-мерных поверхностях с группой вращения $SO(2) \times SO(2)$:

$$\begin{cases} x_1 = f(t) \cos u, \\ x_2 = f(t) \sin u, \\ x_3 = g(t) \cos v, \\ x_4 = g(t) \sin v \end{cases} \quad (1)$$

в евклидовом пространстве E^4 , где $f(t)$ и $g(t)$ — положительные гладкие функции класса C^2 . Понятно, что данная поверхность F^3 получается вращением кривой $(f(t), g(t))$, лежащей в плоскости x_1, x_3 относительно осей x_2 и x_4 .

Также в этой статье исследуются геодезические линии на поверхностях с группами вращения $SO(n_1) \times \dots \times SO(n_k)$. Известно, что на классических

поверхностях вращения в E^3 выполняется уравнение Клеро: $R \cdot \cos \omega = \text{const}$, где R – расстояние от точки геодезической до оси вращения, ω – угол между геодезической и параллелью в данной точке. В [2] А.Д. Милкой данный результат обобщен на поверхности с группой вращения $SO(n)$ в пространствах постоянной кривизны. Покажем, что подобные уравнения для геодезических имеются и на рассматриваемых поверхностях вращения. В данной статье доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть F^m – m -мерная поверхность ($m = n_1 + \dots + n_k - k + 1$) с группой вращения $SO(n_1) \times \dots \times SO(n_k)$ ($n_1, \dots, n_k \geq 2$) в $(n_1 + \dots + n_k)$ -мерном евклидовом пространстве вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(t) \cdot \cos u_1^1 \cdot \cos u_1^2 \dots \cos u_1^{n_1-2} \cdot \cos u_1^{n_1-1}, \\ x_2 = f_1(t) \cdot \cos u_1^1 \cdot \cos u_1^2 \dots \cos u_1^{n_1-2} \cdot \sin u_1^{n_1-1}, \\ x_3 = f_1(t) \cdot \cos u_1^1 \cdot \cos u_1^2 \dots \sin u_1^{n_1-2}, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n_1-1} = f_1(t) \cdot \cos u_1^1 \cdot \sin u_1^2, \\ x_{n_1} = f_1(t) \cdot \sin u_1^1, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} = f_k(t) \cdot \cos u_k^1 \cdot \cos u_k^2 \dots \cos u_k^{n_k-2} \cdot \cos u_k^{n_k-1}, \\ x_{n_1+\dots+n_{k-1}+2} = f_k(t) \cdot \cos u_k^1 \cdot \cos u_k^2 \dots \cos u_k^{n_k-2} \cdot \sin u_k^{n_k-1}, \\ x_{n_1+\dots+n_{k-1}+3} = f_k(t) \cdot \cos u_k^1 \cdot \cos u_k^2 \dots \sin u_k^{n_k-2}, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n_1+\dots+n_k-1} = f_k(t) \cdot \cos u_k^1 \cdot \sin u_k^2, \\ x_{n_1+\dots+n_k} = f_k(t) \cdot \sin u_k^1, \end{array} \right.$$

где f_i ($i = \overline{1, k}$) – положительные функции класса C^2 . Тогда вдоль любой геодезической на F^m выполняются следующие уравнения:

$$f_j \cdot \cos \theta_j = c_j, \quad (j = \overline{1, k})$$

где θ_j – угол между касательной к геодезической и ее проекцией на сферу $S^{n_j-1} = \{t = \text{const}, u_i^l = \text{const}, l = \overline{1, k}; l \neq j; i = \overline{1, n_l-1}\}$, а c_1, \dots, c_k – постоянные.

Теорема 2. Пусть F^3 – гиперповерхность в евклидовом пространстве E^4 вида (1), где $f(t)$ и $g(t)$ – положительные гладкие функции класса C^2 , тогда

- 1) если $f(t) = \text{const}$ или $g(t) = \text{const}$, или $f(t)^2 + g(t)^2 = \text{const}$, то F^3 является пространством постоянной кривизны,
- 2) если $f(t) = \lambda g(t)$, где $\lambda = \text{const}$, то вполне геодезическими поверхностями на F^3 будут только поверхности $au + bv + c = 0$, где a, b, c – постоянные, $a^2 + b^2 \neq 0$,
- 3) в остальных случаях вполне геодезическими поверхностями на F^3 будут только поверхности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$.

Замечание. Если $f(t) = \text{const}$ или $g(t) = \text{const}$, то F^3 имеет плоскую метрику и получается вращением прямой, лежащей в плоскости x_1, x_3 и параллельной координатным осям. Если $f(t)^2 + g(t)^2 = \text{const}$, то F^3 является сферой S^3 и получается вращением окружности, лежащей в плоскости x_1, x_3 , с центром в начале координат. Если $f(t) = \lambda g(t)$, то F^3 получается вращением прямой, проходящей через начало координат.

Для доказательства теоремы 1 выделим отдельно случай поверхности с группой вращения $SO(2) \times \dots \times SO(2)$.

Лемма 1. На поверхностях $F^{k+1} \subset E^{2k}$ с группой вращения $SO(2) \times \dots \times SO(2)$ вида:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) \cos u^1, \\ x_2 = f_1(t) \sin u^1, \\ \dots\dots\dots \\ x_{2k-1} = f_k(t) \cos u^k, \\ x_{2k} = f_k(t) \sin u^k. \end{cases}$$

выполняются следующие уравнения:

$$f_i \cdot \cos \theta_i = c_i, \quad (i = \overline{1, k})$$

где $\theta_1, \dots, \theta_k$ – углы между касательной к геодезической и координатными линиями u^1, \dots, u^k соответственно, а c_1, \dots, c_k – константы.

Доказательство.

Нетрудно проверить, что метрика такой поверхности вращения F^{k+1} имеет вид:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^k f_i'^2(t) dt^2 + \sum_{i=1}^k f_i^2(t) (du^i)^2.$$

В силу регулярности поверхности все f_i' не могут одновременно обращаться в 0, поэтому будем считать, что

$$\sum_{i=1}^k f_i'^2(t) = 1,$$

и метрика поверхности вращения примет вид:

$$ds^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^k f_i^2(t) (du^i)^2.$$

Вычислим символы Кристоффеля для данной метрики. Будем считать, что t – нулевая координата, тогда:

$$\Gamma_{0i,i} = -\Gamma_{ii,0} = f_i f_i';$$

$$\Gamma_{0i}^i = \frac{f_i'}{f_i}; \quad \Gamma_{ii}^0 = -f_i f_i'.$$

Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

Запишем уравнения геодезических:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{ds^2} - \sum_{i=1}^k f_i f_i' \left(\frac{du^i}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 u^i}{ds^2} + 2 \frac{f_i'}{f_i} \frac{du^i}{ds} \frac{dt}{ds} &= 0, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно найти первый интеграл геодезических:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^i}{ds^2} \Big/ \frac{du^i}{ds} + 2 \frac{f_i'}{f_i} \frac{dt}{ds} &= 0, \quad i = \overline{1, k}, \\ \ln \frac{du^i}{ds} + \ln f_i^2 &= 0, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned}$$

Получаем:

$$\frac{du^i}{ds} f_i^2 = c_i, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

где c_i — постоянные. Пусть $\tau = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{du^1}{ds}, \dots, \frac{du^k}{ds} \right)$ — касательный вектор к геодезической, а $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица стоит на $(i+1)$ -м месте) — касательный вектор к координатной линии u^i . Заметим, что векторы τ, e_i — $(k+1)$ -мерные, лежат в касательном пространстве к F^{k+1} , а не в объемлющем евклидовом пространстве. Найдем скалярное произведение векторов τ и e_i в метрике F^{k+1} .

$$\langle \tau, e_i \rangle = f_i^2 \frac{du^i}{ds}$$

Как показано выше, это выражение равно постоянной c_i . С другой стороны,

$$\langle \tau, e_i \rangle = |\tau| |e_i| \cos \theta_i,$$

где $|\tau| = 1, |e_i| = f_i, \theta_i$ — угол между геодезической и координатной линией u^i . Из последних двух выражений получаем:

$$f_i \cdot \cos \theta_i = c_i,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что полученные уравнения дают возможность найти уравнения геодезических (в квадратурах) на поверхностях с группой вращения $SO(2) \times \dots \times SO(2)$. Из (3) можно получить:

$$du^i = \frac{c_i}{f_i^2} ds, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4)$$

Так как длина касательного вектора геодезической в натуральной параметризации равна 1, то

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \sum_{i=1}^k f_i^2 \left(\frac{du^i}{ds}\right)^2 = 1.$$

Если $\frac{dt}{ds} \neq 0$, то, учитывая (4), получим:

$$ds = \frac{dt}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{f_i^2}}}.$$

Тогда из (4) следует:

$$u^i = \int \frac{c_i dt}{f_i^2 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{f_i^2}}} + \tilde{c}_i$$

Если же геодезическая лежит в координатной плоскости $t = \text{const}$, тогда из (4) получаем:

$$u^i = \frac{c_i}{f_i^2} s + \tilde{c}_i, \quad i = \overline{1, k}.$$

Лемма 2. На рассматриваемой поверхности F^m с группой вращения $SO(n_1) \times \dots \times SO(n_k)$ поверхности вида

$$F^{k+1} = \{u_j^i = \text{const}; j = \overline{1, k}; i = \overline{2, n_j - 1}\}$$

с группой вращения $SO(2) \times \dots \times SO(2)$ являются вполне геодезическими.

Доказательство.

Нетрудно проверить, что метрика поверхности F^m записывается в виде:

$$ds^2 = dt^2 + \sum_{j=1}^k f_j^2 \sum_{i=1}^{n_j-1} \Lambda_{i|j}^2 (du_j^i)^2,$$

где $\Lambda_{i|j} = \prod_{l=1}^{i-1} \cos u_j^l$, при условии $\sum_{j=1}^k (f_j')^2 = 1$.

Можно выписать уравнения геодезических для данной метрики.

$$\frac{d^2 t}{ds^2} - \sum_{j=1}^k f_j f_j' \sum_{i=1}^{n_j-1} \Lambda_{i|j}^2 \left(\frac{du_j^i}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 u_l^i}{ds^2} + 2 \frac{f_l'}{f_l} \frac{du_l^i}{ds} \frac{dt}{ds} - 2 \sum_{j < i} \text{tg } u_j^i \frac{du_l^i}{ds} \frac{du_l^j}{ds} + \sum_{j > i} \frac{\Lambda_{j|l}^2}{\Lambda_{i|l}^2} \text{tg } u_j^i \left(\frac{du_l^i}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$l = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, n_l - 1}.$$

Как нетрудно увидеть, при $\{u_j^i = \text{const}; j = \overline{1, k}; i = \overline{2, n_j - 1}\}$ уравнения геодезических пространства F^m совпадают с уравнениями (2) геодезических его подмногообразия F^{k+1} . Значит, F^{k+1} является вполне геодезическим в F^m .

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим геодезическую γ в F^m , произвольную точку p на ней и касательный вектор τ в этой точке. Пусть τ_j ($j = \overline{1, k}$) – проекция вектора τ на сферу $S^{n_j-1} = \{t = \text{const}, u_j^i = \text{const}, l = \overline{1, k}; l \neq j; i = \overline{1, n_l - 1}\}$, τ_0 – касательный вектор к координатной линии t . На каждой сфере S^{n_j-1} существует единственная большая окружность, которой касается вектор τ_j . Можно выбрать так систему координат, чтобы эта окружность задавалась уравнениями $\{u_j^i = \text{const}; i = \overline{2, n_j - 1}\}$. Таким образом, в силу леммы 2, через точку p в направлении площадки, натянутой на векторы $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$ проходит единственная вполне геодезическая поверхность F^{k+1} . Вектор τ лежит в этой площадке, значит, γ полностью лежит в F^{k+1} . Проекцией геодезической γ на каждую сферу S^{n_j-1} будет как раз дуга соответствующей большой окружности. В силу леммы 1 получаем, что

$$f_j \cdot \cos \theta_j = c_j, \quad j = \overline{1, k},$$

где θ_j – угол между геодезической и ее проекцией на сферу S^{n_j-1} , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2

Сначала исследуем, когда F^3 является пространством постоянной кривизны K . В этом случае, как известно, в направлении любой площадки проходит вполне геодезическое подмногообразие.

Рассмотрим для удобства метрику F^3 в виде

$$ds^2 = (dy^1)^2 + f^2(y^1)(dy^2)^2 + g^2(y^1)(dy^3)^2,$$

где

$$f'^2(y^1) + g'^2(y^1) = 1. \tag{5}$$

Выпишем ненулевые символы Кристоффеля для данной метрики.

$$\Gamma_{12,2} = -\Gamma_{22,1} = ff'; \quad \Gamma_{13,3} = -\Gamma_{33,1} = gg';$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f}; \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{g'}{g}; \quad \Gamma_{22}^1 = -ff'; \quad \Gamma_{33}^1 = -gg'.$$

Вычислим компоненты тензора Римана, $R_{jqkl} = g_{ij}R^i_{qkl}$.

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial y^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial y^l} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p.$$

$$R_{1212} = -ff''; \quad R_{1313} = -gg''; \quad R_{2323} = -ff'gg'.$$

Для пространств постоянной кривизны имеем [1, с. 99]:

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}).$$

Отсюда получаем три уравнения:

$$-f'' = K \cdot f, \quad -g'' = K \cdot g, \quad -f'g' = K \cdot fg. \quad (6)$$

Если $K = 0$, то либо $f' = 0$, либо $g' = 0$, то есть или $f = \text{const}$, или $g = \text{const}$. Очевидно, функции f и g задают в плоскости x_1, x_3 прямую, параллельную одной из координатных осей. Обратное тоже верно, если $f = \text{const}$ или $g = \text{const}$, то F^3 имеет плоскую метрику.

Пусть $K \neq 0$. В силу равенства (5) положим $f' = \cos \omega(y^1)$, $g' = \sin \omega(y^1)$. Тогда

$$f'' = -\sin \omega \cdot \omega', \quad g'' = \cos \omega \cdot \omega'.$$

Из уравнений (6) получаем $f''' = -K \cdot f'$, $g''' = -K \cdot g'$, то есть

$$-\cos \omega \cdot \omega'^2 - \sin \omega \cdot \omega'' = -K \cos \omega,$$

$$-\sin \omega \cdot \omega'^2 + \cos \omega \cdot \omega'' = -K \sin \omega.$$

Первое равенство домножим на $\cos \omega$, второе на $\sin \omega$ и сложим. Получим:

$$\omega'^2 = K, \quad \omega = \sqrt{K}y^1.$$

Отсюда следует, что

$$f' = \cos \sqrt{K}y^1, \quad g' = \sin \sqrt{K}y^1,$$

то есть

$$f = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}y^1 + c_1, \quad g = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}y^1 + c_2.$$

В силу последнего из уравнений (6) получаем, что $c_1 = c_2 = 0$, значит,

$$f^2 + g^2 = \frac{1}{K}.$$

Получили, что функции f и g задают в плоскости x_1, x_3 окружность с центром в начале координат. Очевидно и обратное, если $f^2 + g^2 = 1/K$, то F^3 является сферой.

Дальше будем считать, что кривизна F^3 не постоянна. Для нахождения вполне геодезических поверхностей на F^3 воспользуемся следующей теоремой Риччи [3, с. 218]: если пространство M допускает вполне геодезическую гиперповерхность F , то нормали к этой гиперповерхности представляют собой совокупность главных направлений Риччи пространства M .

Найдем компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = -\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g}; \quad R_{22} = -ff'' - ff' \frac{g'}{g}; \quad R_{33} = -gg'' - gg' \frac{f'}{f}.$$

Остальные $R_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Найдем главные направления тензора Риччи пространства F^3 . Главные кривизны Риччи находятся из уравнения: $\det(R - \lambda G) = 0$, где R и G — диагональные матрицы тензора Риччи и метрического тензора соответственно. Значит, $\lambda_i = R_{ii}/g_{ii}$, то есть

$$\lambda_1 = -\frac{f''}{f} - \frac{g''}{g}; \quad \lambda_2 = -\frac{f''}{f} - \frac{f'g'}{fg}; \quad \lambda_3 = -\frac{g''}{g} - \frac{f'g'}{fg}.$$

Если все λ_i различны, то главные направления Риччи совпадают с направлениями координатных линий. Проверим, являются ли координатные поверхности вполне геодезическими.

Рассмотрим поверхность $y^1 = \text{const}$, нормалью к ней будет $n = (1, 0, 0)$. (Здесь и далее рассматриваемую 2-мерную поверхность будем обозначать F^2). Воспользуемся тем, что для вполне геодезических поверхностей вторая квадратичная форма тождественно равна нулю. Найдем коэффициенты второй квадратичной формы для поверхности F^2 [3, с. 194]:

$$L_{ij} = g_{\alpha\beta} y_{,ij}^\alpha n^\beta + \Gamma_{\mu\nu,\beta} y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu n^\beta,$$

где $y_{,ij}^\alpha$ — ковариантная производная относительно связности поверхности F^2 , $\Gamma_{\mu\nu,\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ — коэффициенты связности и компоненты метрического тензора объемлющего пространства F^3 , n^β — координаты единичного вектора нормали. В дальнейшем для нас будет несущественно то, что в формуле берется нормаль единичной длины; мы будем находить коэффициенты второй квадратичной формы с точностью до множителя, равного длине нормали. Возьмем в качестве параметров на F^2 : $u^1 = y^2$, $u^2 = y^3$. Тогда коэффициентами второй квадратичной формы будут:

$$L_{ij} = y_{,ij}^1 + \Gamma_{\mu\nu,1} y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu = -ff' y_{,i}^2 y_{,j}^2 - gg' y_{,i}^3 y_{,j}^3$$

(ковариантные производные от y^1 равны нулю в силу того, что $y^1 = \text{const}$)

$$L_{11} = -ff'; \quad L_{22} = -gg'.$$

Приравняв нулю полученные коэффициенты, получаем, что $f' = g' = 0$, это противоречит тому, что $f'^2 + g'^2 = 1$. Значит, поверхности $y^1 = \text{const}$ не являются вполне геодезическими.

Рассмотрим теперь координатные поверхности $y^2 = \text{const}$. Нормали к ним: $n = (0, 1, 0)$. Взяв на F^2 локальные координаты $u^1 = y^1$, $u^2 = y^3$, найдем коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L_{ij} = f^2 y_{,ij}^2 + \Gamma_{\mu\nu,2} y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu = \Gamma_{12,2} y_{,i}^1 y_{,j}^2 + \Gamma_{21,2} y_{,i}^2 y_{,j}^1 = 0.$$

Получилось, что поверхности $y^2 = \text{const}$ являются вполне геодезическими, аналогично $y^3 = \text{const}$.

Итак, мы рассмотрели случай, когда все λ_i различны. Посмотрим, что будет, если некоторые из них совпадают. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, тогда нормали к вполне геодезической поверхности будут иметь вид: $n = (n^1, n^2, 0)$. Пусть поверхность $F^2 \subset F^3$ задана в следующем виде: $y^i = y^i(u^1, u^2)$. Условие ортогональности нормали и касательных векторов запишется так:

$$g_{\alpha\alpha} y_{,i}^{\alpha} n^{\alpha} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

или в нашем случае:

$$n^1 y_{,i}^1 + n^2 f^2 y_{,i}^2 = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Получили два уравнения с двумя неизвестными: n^1 и n^2 . Система разрешима, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} y_{,1}^1 & y_{,1}^2 \\ y_{,2}^1 & y_{,2}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\text{rang} \begin{pmatrix} y_{,1}^1 & y_{,1}^2 & y_{,1}^3 \\ y_{,2}^1 & y_{,2}^2 & y_{,2}^3 \end{pmatrix} = 2$, то понятно, что есть ненулевой минор.

Пусть это будет $\begin{vmatrix} y_{,1}^2 & y_{,1}^3 \\ y_{,2}^2 & y_{,2}^3 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда в качестве параметров на F^2 можно взять: $u^1 = y^2$, $u^2 = y^3$, а y^1 считать функцией от них: $y^1 = \varphi(u^1, u^2)$. (Совершенно аналогично рассматривается случай, когда ненулевым является другой минор). Теперь y^1 и y^2 подставим в уравнение (8), получим:

$$\begin{cases} n^1 y_{,1}^1 + n^2 f^2 = 0, \\ n^1 y_{,2}^1 = 0. \end{cases}$$

n^1 не может равняться нулю, так как в противном случае и $n^2 = 0$, чего не может быть. Значит, $y_{,2}^1 = 0$, то есть $y^1 = \varphi(u^1)$. Возьмем: $n^1 = f^2$, $n^2 = -\varphi'$. Найдем коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L_{ij} = n^1 y_{,ij}^1 + n^2 f^2 y_{,ij}^2 + n^1 \Gamma_{\mu\nu,1} y_{,i}^{\mu} y_{,j}^{\nu} + n^2 \Gamma_{\mu\nu,2} y_{,i}^{\mu} y_{,j}^{\nu} =$$

$$= n^1 \left[y_{,ij}^1 - f f' y_{,i}^2 y_{,j}^2 - g g' y_{,i}^3 y_{,j}^3 \right] + n^2 \left[f^2 y_{,ij}^2 + f f' (y_{,i}^1 y_{,j}^2 + y_{,i}^2 y_{,j}^1) \right],$$

откуда получаем, что $L_{22} = f^2 [y_{,22}^1 - g g'] - \varphi' f^2 y_{,22}^2$. Посчитаем ковариантные производные по формуле:

$$y_{,ij}^k = y_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^p y_{,p}^k,$$

где $y_{ij}^k = \frac{\partial^2 y^k}{\partial u^i \partial u^j}$, а $\tilde{\Gamma}_{ij}^p$ - символы Кристоффеля для поверхности F^2 .

$$y_{,22}^1 = -\tilde{\Gamma}_{22}^1 \varphi', \quad y_{,22}^2 = -\tilde{\Gamma}_{22}^2.$$

Значит, $L_{22} = -f^2 g g'$, приравняв нулю, получим, что $g' = 0$. Как показано выше, в этом случае поверхность вращения локально изометрична евклидовому пространству. Аналогично можно рассмотреть случай $\lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2$.

Пусть теперь $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f} + \frac{f' g'}{f g} &= \frac{g''}{g} + \frac{f' g'}{f g}, \\ \frac{f''}{f} &= \frac{g''}{g}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу условия (5) положим: $f' = \cos \omega(y^1)$, тогда: $f'' = -\omega' \sin \omega$,
 $g' = \sin \omega(y^1)$, $g'' = \omega' \cos \omega$.

Подставляя это в (9), получим:

$$\frac{-\omega' \sin \omega}{f} = \frac{\omega' \cos \omega}{g}. \quad (10)$$

В случае, если $\omega' \neq 0$, разделим (10) на ω' , получим:

$$-\frac{g'}{f} = \frac{f'}{g},$$

$$f' f + g' g = 0,$$

$$f^2 + g^2 = c.$$

Отсюда следует, что объемлющее пространство - сфера. Значит, $\omega' = 0$, то есть $\omega = \text{const}$, тогда получаем: $\begin{cases} f = y^1 \cos \omega + c_1 \\ g = y^1 \sin \omega + c_2 \end{cases}$. Значит, функции f и g - линейно зависимы.

Если $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$, то нормаль к F^2 имеет вид: $n = (0, n^2, n^3)$. Условие ортогональности в этом случае примет вид:

$$n^2 f^2 y_{,i}^2 + n^3 g^2 y_{,i}^3 = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

Так как система разрешима, то

$$\begin{vmatrix} y_{,1}^2 & y_{,1}^3 \\ y_{,2}^2 & y_{,2}^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмем на F^2 локальные координаты: $u^1 = y^1$, $u^2 = y^2$, а y^3 будем считать функцией от них: $y^3 = \varphi(u^1, u^2)$. Тогда условие (11) выглядит:

$$\begin{cases} n^3 y_{,1}^3 = 0, \\ n^2 f^2 + n^3 g^2 y_{,2}^3 = 0. \end{cases}$$

Так как $n_3 \neq 0$, то $y_{,1}^3 = 0$, значит $y^3 = \varphi(u^2)$. Возьмем $n^2 = g^2 \varphi'$, $n^3 = -f^2$. Найдем коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L_{ij} = n^2 f^2 y_{,ij}^2 + n^3 g^2 y_{,ij}^3 + n^2 \Gamma_{\mu\nu,2} y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu + n^3 \Gamma_{\mu\nu,3} y_{,i}^\mu y_{,j}^\nu = \\ = n^2 \left[f^2 y_{,ij}^2 + f f' (y_{,i}^1 y_{,j}^2 + y_{,i}^2 y_{,j}^1) \right] + n^3 \left[g^2 y_{,ij}^3 + g g' (y_{,i}^1 y_{,j}^3 + y_{,i}^3 y_{,j}^1) \right],$$

Откуда $L_{11} = g^2 \varphi' f^2 y_{,11}^2 - f^2 g^2 y_{,11}^3 = f g^2 (\varphi' y_{,11}^2 - y_{,11}^3)$.

Нетрудно проверить, что $y_{,11}^2 = -\tilde{\Gamma}_{11}^2$, $y_{,11}^3 = -\tilde{\Gamma}_{11}^2 \varphi'$, значит $L_{11} = 0$.

$$L_{12} = g^2 \varphi' \left[f^2 y_{,12}^2 + f f' \right] - f^2 \left[g^2 y_{,12}^3 + g g' \varphi' \right].$$

Из того, что $y_{,12}^2 = -\tilde{\Gamma}_{12}^2$, $y_{,12}^3 = -\tilde{\Gamma}_{12}^2 \varphi'$, получаем:

$$L_{12} = g^2 \varphi' f f' - f^2 g g' \varphi' = \varphi' f g [f' g - g' f].$$

Приравняв нулю L_{12} , получим:

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}, \text{ то есть } \ln |f| = \ln |g| + \tilde{k},$$

откуда следует, что $f = k \cdot g$, где $k - \text{const}$. Найдем теперь L_{22} :

$$L_{22} = g^2 \varphi' f^2 y_{,22}^2 - f^2 g^2 y_{,22}^3 = f^2 g^2 \left[y_{,22}^2 \varphi' - y_{,22}^3 \right].$$

Так как $y_{,22}^2 = -\tilde{\Gamma}_{22}^2$, $y_{,22}^3 = \varphi'' - \tilde{\Gamma}_{22}^2 \varphi'$, то $L_{22} = -f^2 g^2 \varphi''$.

Если $L_{22} = 0$, то $\varphi'' = 0$, значит $\varphi = c_1 y^2 + c_2$.

Итак, если $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$, вполне геодезическими поверхностями будут $a y^2 + b y^3 + c = 0$ только в случае $f = k \cdot g$.

Осталось рассмотреть случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Как показано выше, равенство $\lambda_2 = \lambda_3$ влечет
$$\begin{cases} f = y^1 \cos \omega + c_1, \\ g = y^1 \sin \omega + c_2. \end{cases}$$

Из того, что $\lambda_1 = \lambda_2$, следует:

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = \frac{f''}{f} + \frac{f' g'}{f g},$$

$$\frac{g''}{g} = \frac{f' g'}{f g},$$

$$\frac{g''}{g'} = \frac{f'}{f}, \quad (\text{при } g' \neq 0)$$

$$\ln |g'| = \ln |f| + \tilde{k}_1,$$

$$g' = k_1 f.$$

Как видно, $g' = 0$ тоже удовлетворяет уравнению. Аналогично, из равенства $\lambda_1 = \lambda_3$ следует: $f' = k_2 g$. Получаем, что $\begin{cases} \cos \omega = k_2(y^1 \sin \omega + c_2), \\ \sin \omega = k_1(y^1 \cos \omega + c_1). \end{cases}$ Так как это верно для любых y^1 , то $\begin{cases} k_2 \sin \omega = 0, \\ k_1 \cos \omega = 0. \end{cases}$ k_1 и k_2 не могут одновременно равняться нулю, в силу того, что $f'^2 + g'^2 = 1$. Значит, либо $k_1 = \sin \omega = 0$, либо $k_2 = \cos \omega = 0$. В первом случае получаем, что $g = c_2$, во втором, что $f = c_1$. В обоих случаях, как показано выше, F^3 локально изометрично евклидовому пространству. Теорема доказана.

Замечание 1. Как показано в теореме, торы $t = \text{const}$ не являются вполне геодезическими, однако среди них есть минимальные. Можно найти главные кривизны торов $t = \text{const}$, они равны $k_1 = \frac{f'}{f}$ и $k_2 = \frac{g'}{g}$. Получается, что средняя кривизна T^2 равна $H = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$. Значит, тор является минимальным, если

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = 0,$$

то есть минимальными являются торы, на которых функция $f \cdot g$ имеет критические точки. Это и понятно, величина $f \cdot g$ как раз является площадью тора $t = \text{const}$.

Замечание 2. На поверхности с группой вращения $SO(n)$ любая геодезическая проектируется вдоль координатной линии t на геодезическую на сфере $t = \text{const}$ [2]. В случае группы вращения $SO(2) \times SO(2)$ это, вообще говоря, не верно, как видно из уравнений геодезических линий (замечание теоремы 1). (Здесь под проекцией мы будем понимать ортогональную проекцию на тор $t = \text{const}$ вдоль координатной линии t .) Более того, можно найти геодезическую кривизну проекции геодезической. Если геодезическая в натуральной параметризации задается радиус-вектором $(t(s), u(s), v(s))$, то кривизна проекции равна

$$k_g(s) = \frac{a b c_1 c_2 \frac{d}{ds} \left(\ln \frac{f^2}{g^2} \right)}{f^2 g^2 \left(a^2 \frac{c_1^2}{f^4} + b^2 \frac{c_2^2}{g^4} \right)^{3/2}},$$

где c_1, c_2 — постоянные вдоль данной геодезической из уравнений Клеро, a, b — значения функций f и g на торе $t = \text{const}$. Видно, что геодезическая может проектироваться в прямую линию на торе $t = \text{const}$, только когда вдоль этой геодезической c_1 или c_2 равны нулю (то есть геодезическая линия лежит в координатной поверхности $u = \text{const}$ или $v = \text{const}$), или когда на поверхности F^3 выполняется тождество $f = \lambda g$, где $\lambda = \text{const}$. В какие кривые на торе могут еще проектироваться геодезические? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть T^2 – тор Клиффорда в E^4 :

$$\begin{cases} x_1 = a \cos u, \\ x_2 = a \sin u, \\ x_3 = b \cos v, \\ x_4 = b \sin v, \end{cases}$$

l – произвольная кривая на этом торе, которая не параллельна осям u и v ни в одной точке. Тогда найдется поверхность вращения $F^3 \subset E^4$ вида (1), такая, что тор T^2 лежит в одном из сечений $t = \text{const}$, и кривая l является проекцией какой-то геодезической $\gamma \subset F^3$.

Доказательство.

Пусть кривая l на торе T^2 задается в виде $(u(t), v(t))$. Рассмотрим поверхность вращения вида (1), у которой тор T^2 лежит в одном из сечений $t = \text{const}$. Если l является проекцией геодезической, то, как показано выше, при $\frac{dt}{ds} \neq 0$ можно выписать первый интеграл геодезических линий на F^3 .

$$u' = \frac{c_1}{f^2 \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{f^2} - \frac{c_2^2}{g^2}}}, \quad v' = \frac{c_2}{g^2 \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{f^2} - \frac{c_2^2}{g^2}}}. \quad (12)$$

Так как кривая l не параллельна координатным осям ни в одной точке, то u' и v' не обращаются в ноль ни в одной точке. Решим систему (12) относительно f и g . Для этого разделим почленно одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{u' f^2}{c_1} = \frac{v' g^2}{c_2}, \quad \text{то есть} \quad f^2 = \frac{u' c_1}{v' c_2} g^2. \quad (13)$$

Если $\frac{u'}{v'} = \text{const}$ (то есть проекция является прямой линией), то видно, что $\frac{f}{g} = \text{const}$. Но в этом случае в силу теоремы 2 любая геодезическая проектируется в прямую линию на торе. Так что случай $\frac{f}{g} = \text{const}$ дальше рассматривать не будем. Подставим теперь f^2 во второе уравнение системы (12).

$$\frac{v'}{c_2} g^2 \sqrt{1 - \frac{u' c_1 c_2}{v' g^2} - \frac{c_2^2}{g^2}} = 1.$$

Возведя в квадрат, получим:

$$\frac{v'^2}{c_2^2} g^4 - (u' v' \frac{c_1}{c_2} + v'^2) g^2 - 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно g^2 , его дискриминант равен:

$$D = (u' v' \frac{c_1}{c_2} + v'^2)^2 + 4 \frac{v'^2}{c_2^2} \geq 0,$$

а так как $v' \neq 0$, то $D > 0$. Корни всегда есть, причем разных знаков. Положительный корень и будет g^2 . f^2 находим из уравнения (13). Таким образом для нашей кривой l можно найти такие f и g , что заданная кривая на торе будет проекцией какой-то геодезической на F^3 . Что и требовалось доказать.

Предложение 2. Если геодезическая на поверхности вращения F^3 вида (1) проектируется в замкнутую кривую на торе $t = \text{const}$, то эта кривая должна быть не гомотопной 0.

Доказательство.

Прежде всего покажем, что проекция геодезической является регулярной кривой класса C^1 . Пусть $(t(s), u(s), v(s))$ – радиус-вектор геодезической, тогда ее проекция задается функциями $(u(s), v(s))$. Если бы в какой-то точке проекции выполнялось $u' = v' = 0$, то в соответствующей точке геодезической касательная была бы параллельна координатной линии t . А, значит, рассматриваемая геодезическая совпадала бы с координатной линией t и проектировалась в точку.

Итак, проекция является гладкой кривой. Пусть она является петлей, гомотопной 0. Если развернуть тор на плоскость, то эта кривая останется замкнутой. Так как она гладкая, то найдутся точки, в которых касательная к этой кривой параллельна координатным осям. В силу теоремы 2, это невозможно.

В заключение хочу выразить благодарность Ю.А. Аминову за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурого Ю.Д., Залгаллер Ю.Д. Введение в риманову геометрию. – СПб.: Наука, 1994. – 318 с.
2. Милка А.Д. Об одном признаке сферы // Украинский геометрический сборник. – 1970. – 9. – С. 78–84
3. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1948. – 316 с.
4. Яскин В.С. Вполне геодезические подмногообразия на гиперповерхностях вращения евклидова пространства // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1999. – 6, 1/2 – С. 182–188.

Грассманов образ многомерных поверхностей с
плоской нормальной связностью

В. Т. Лисица

Харьковский национальный университет, Украина

Статья посвящена изучению грассманова образа поверхностей с плоской нормальной связностью. Доказана теорема: Если F^l – поверхность с нулевой секционной кривизной, с плоской нормальной связностью и с постоянным индексом дефектности в евклидовом пространстве E^{l+p} , то грассманов образ $\Gamma(F^l)$ несет плоскую метрику.

В случае невырожденного грассманова образа эта теорема следует из результатов работ Муто, Феруса, Педита.

Известно, что сферический образ поверхностей $F^2 \subset E^3$ является удобным объектом для изучения внешней и внутренней геометрии поверхностей в классической дифференциальной геометрии. Это предопределило возросший интерес к изучению грассманова образа многомерных поверхностей F^l в евклидовом пространстве E^{l+p} , который является естественным обобщением сферического изображения поверхностей $F^2 \subset E^3$. Объемлющим пространством для грассманова образа поверхности является грассманово многообразие $G(l, l+p)$.

Определение 1. Многообразием Грассмана $G(l, l+p)$ называется множество l -мерных плоскостей $(l+p)$ -мерного евклидова пространства E^{l+p} , проходящих через начало координат $O \in E^{l+p}$.

На многообразии $G(l, l+p)$ вводится структура риманова многообразия [1]. Отметим, что каждой l -мерной плоскости в E^{l+p} , проходящей через начало координат O , однозначно соответствует ортогональная ей p -мерная плоскость, проходящая через O . Таким образом, наряду с многообразием $G(l, l+p)$ можно рассматривать $G(p, l+p)$. Пространства $G(l, l+p)$ и $G(p, l+p)$ изометричны [2, 3].

Определение 2. Пусть F^l – регулярная поверхность в E^{l+p} . В каждой точке $x \in F^l$ построим касательную плоскость к поверхности F^l . Перенесем все эти плоскости параллельно в начало координат $O \in E^{l+p}$. Они образуют некоторое подмножество $\Gamma(F^l)$ в $G(l, l+p)$. Подмножество $\Gamma(F^l)$ называется грассмановым образом поверхности F^l , а построенное отображение Γ – грассмановым отображением.

В последние годы грассманов образ $\Gamma(F^l)$ изучался в двух направлениях:

- 1) Внутренняя геометрия грассманова образа;
- 2) Внешняя геометрия грассманова образа.

В данной работе излагаются результаты, анонсированные в [4,5]. Необходимо отметить, что все работы в этом направлении посвящены изучению грассманова образа вполне определенных классов поверхностей. Обстоятельный обзор результатов по данной теме см. в статье Борисенко А.А., Николаевского Ю.А. [6]. Одним из классов поверхностей являются поверхности с плоской нормальной связностью. Интерес к этим поверхностям обусловлен тем, что они по своим внешне геометрическим свойствам близки к гиперповерхностям [7,8,9]. Поверхности F^l с плоской нормальной связностью в пространствах постоянной кривизны совпадают с поверхностями с l полями главных направлений [8,9].

Определение 3. Поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ называется поверхностью с l полями главных направлений, если ее главные направления относительно всех нормалей совпадают.

В [10] было доказано, что грассманов образ поверхности $F^2 \subset E^4$ с плоской метрикой и с плоской нормальной связностью несет плоскую метрику. Отметим, что этот результат следует из работы Ю.А.Аминова [11]. В работе У.Мито [13] рассматривались поверхности $F^m \subset E^n$, грассманов образ которых невырожден. Было доказано, что если $2m \leq n$, то кривизна грассманова многообразия $G(m; n - m)$ по площадкам, касательным к грассманову образу $\Gamma(F^n)$ равна 0 тогда и только тогда, когда F^n - поверхность с нулевой секционной кривизной и с плоской нормальной связностью. В работе [20] были выведены достаточные условия, при которых подмногообразия, касающиеся максимальных плоских торов в симметрических пространствах имеют нулевую секционную кривизну. К таким подмногообразиям относится грассманов образ поверхностей $F^n \subset E^m$, упомянутых в работе [13]. В предлагаемой работе изучается грассманов образ поверхностей $F^l \subset E^{l+p}$ с плоской нормальной связностью и с плоской метрикой и с вырожденным грассмановым образом.

Напомним необходимые сведения и результаты.

Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ - поверхность класса C^2 , точка $Q \in F^l$, $\nu(Q)$ - размерность подпространства касательного пространства $T_Q F^l$, образованного векторами $X \in T_Q F^l$ такими, что $A^\sigma(X, Y) = 0$ ($\sigma = 1, \dots, p$) для всех $Y \in T_Q F^l$, где A^σ - матрица второй фундаментальной формы поверхности, соответствующая нормали n_σ . Число $\nu(Q)$ называется внешним нуль-индексом (индексом дефектности) поверхности F^l в точке Q в смысле Черна-Кейпера, направление $X \in T_Q F^l$ - направлением сильной параболичности [12]. Если в некоторой окрестности $U(Q) \subset F^l$ индекс $\nu(Q) = k = const$, то, как легко проверить, грассманов образ $\Gamma(F^l)$ является регулярным $(l - k)$ -мерным подмногообразием в $G(l, l + p)$.

Основным результатом данной статьи является

Теорема. Если F^l - поверхность с нулевой секционной кривизной, с плоской нормальной связностью и с постоянным индексом дефектности в евклидовом пространстве E^{l+p} , то грассманов образ $\Gamma(F^l)$ несет плоскую метрику.

Отметим, что в случае невырожденного грассманова образа аналогичная теорема следует из результатов работ [13],[20]. В [14] Ю.А.Аминовым доказана

Лемма (о голономности главных направлений). Если на поверхности F^l отрицательной кривизны в евклидовом пространстве E^m в каждой точке существуют l главных направлений, то они голономны.

Некоторый аналог сформулированной леммы справедлив и в случае поверхностей F^l нулевой секционной кривизны с плоской нормальной связностью. А именно, верна

Лемма. Если на поверхности F^l нулевой секционной кривизны с постоянным индексом дефектности $\nu = l - r$ в евклидовом пространстве E^{l+p} в каждой точке существуют l главных направлений, то F^l представляет собой поверхность, составленную из двух семейств ортогональных подмногообразий, на каждом из которых в качестве координатных линий могут быть выбраны линии кривизны поверхности F^l .

Доказательство. Как и в работе [14] обозначим через $X_i (i = 1, \dots, l)$ - l единичных векторных полей, имеющих главные направления, через λ_{p_i} - нормальную кривизну поверхности F^l в направлении X_i , соответствующую нормали n_p , $\gamma_i^2 = \sum_p \lambda_{p_i}^2$. Пусть теперь $[X_i, X_j]$ - скобка Ли векторных полей X_i и X_j , ρ - проекция $[X_i, X_j]$ на некоторое главное направление $X_k, k \neq i, j$. В [14] выведено соотношение:

$$\rho (K_{ij} - \gamma_i^2 \gamma_j^2) = \rho [(K_{ij} - \gamma_i^2) K_{kj} + (K_{ij} - \gamma_j^2) K_{kj}] \quad (1)$$

где K_{ij} - секционная кривизна поверхности F^l . Так как по условию леммы $K_{ij} = 0$, то соотношение (1) принимает вид:

$$\rho \gamma_i^2 \gamma_j^2 = 0 \quad (2)$$

Разобьем теперь множество главных направлений на два класса: 1) главные направления X_i , для которых выполняется неравенство $\gamma_i^2 \neq 0 (i = 1, \dots, r)$; 2) главные направления X_f , для которых выполняется равенство $\gamma_f^2 = 0 (f = r + 1, \dots, l)$.

Пусть X_i и X_j принадлежат первому классу, тогда из (2) следует, что $\rho = 0$, значит скобка Ли векторных полей X_i и X_j разлагается только по этим же векторам. Следовательно, векторные поля первого класса голономны. Векторные поля X_f второго класса являются направлениями сильной параболичности поверхности F^l . Они образуют интегрируемое распределение на F^l [15]. Тогда в этом распределении можно выбрать $(l - r)$ взаимно ортогональных голономных векторных полей. Таким образом, мы имеем два взаимно ортогональных интегрируемых распределения на поверхности F^l . На интегральных

подмногообразиях этих распределений в качестве координатных линий можно выбрать линии кривизны поверхности F^l . Лемма доказана.

Замечание: Если индекс дефектности поверхности F^l равен нулю, то тогда все линии кривизны данной поверхности голономны и в этом случае выполняется лемма, доказанная в [14] для поверхностей отрицательной кривизны, но теперь уже для поверхностей нулевой секционной кривизны.

Доказательство теоремы. В силу доказанной леммы через каждую точку Q поверхности F^l проходят два взаимно ортогональных подмногообразия: $F^r(Q)$, касающееся главных направлений, для которых $\gamma_i^2 \neq 0$, и $F^{l-r}(Q)$, которое является $(l-r)$ -мерной плоскостью и касается главных направлений, для которых $\gamma_f^2 = 0$. Выберем на поверхности F^l какое-либо подмногообразие $F^r(Q)$. В качестве координатных линий на $F^r(Q)$ можно выбрать линии кривизны поверхности F^l . Через каждую точку $P \in F^r(Q) \subset F^l$ проходит подмногообразие $F^{l-r}(P)$. Пусть $\rho = \rho(u_1, \dots, u_r)$ - уравнение подмногообразия $F^r(Q) \subset E^{l+p}$. Обозначим через e_1, \dots, e_{l-r} - единичные взаимно ортогональные векторы, являющиеся базисом для $F^{l-r}(P)$. Тогда уравнение поверхности F^l можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{l-r}) \\ &= \rho(u_1, \dots, u_r) + v_1 e_1(u_1, \dots, u_r) + \dots + v_{l-r} e_{l-r}(u_1, \dots, u_r) \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что поверхность F^l является $(l-r)$ -сильно параболической, так как индекс дефектности $\nu = (l-r)$. Поэтому касательные плоскости к поверхности F^l вдоль подмногообразий $F^{l-r}(P)$ стационарны. Значит грассманов образ поверхности F^l определяется нормальными плоскостями, построенными вдоль $F^r(Q)$, и тогда грассманов образ $\Gamma(F^l)$ представляет собой подмногообразие $M^r \subset G(l, l+p)$ размерности r . При грассмановом отображении Γ соответствующее отображение Γ_* , которое переводит касательные плоскости $T_Q F^l$ в касательные плоскости $T_{\Gamma(Q)}(\Gamma(F^l))$, имеет своим ядром подпространство, натянутое на e_1, \dots, e_{l-r} . Метрика многообразия $\Gamma(F^l)$ имеет вид [13]:

$$G_{ij} = \sum_{\mu=1}^p L_{ik}^\mu g^{kr} L_{rj}^\mu, \quad (4)$$

где g^{kr} - элементы матрицы, обратной к матрице метрического тензора. Отметим, что формула (4) в [13] доказана для случая поверхности F^l с невырожденным грассмановым образом. Но если потребовать, чтобы индекс вырождения ν имел постоянное значение, то тогда $\Gamma(F^l)$ будет многообразием размерности $(l-\nu)$ и его метрика будет иметь вид (4). Доказательство формулы (4) в этом случае будет таким же, как и в [13]. Конечно, здесь предполагается, что функции L_{ij}^μ и g_{ij} рассматриваются вдоль $F^r(Q)$. Вообще говоря, на поверхности F^l , заданной уравнением (3), функции L_{ij}^μ и g_{ij} зависят как от u_1, \dots, u_r , так и от v_1, \dots, v_{l-r} . Но вдоль $F^r(Q)$ необходимо положить $v_f = 0, (f = 1, \dots, l-r)$, и тогда L_{ij}^μ и g_{ij} будут зависеть только от u_1, \dots, u_r .

Кроме того, так как вдоль $F^r(Q)$ все координатные векторы имеют главное направление, то $L_{ij}^\mu = 0, g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. В нашем случае $G_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $G_{ii} = \sum_{\mu=1}^p (L_{ii}^\mu)^2 g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} \sum_{\mu=1}^p (L_{ii}^\mu)^2$.

Найдем теперь $\frac{\partial G_{ii}}{\partial x_k}$ при $i \neq k$:

$$\frac{\partial G_{ii}}{\partial x_k} = -\frac{1}{g_{ii}^2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \sum_{\mu=1}^p (L_{ii}^\mu)^2 + \frac{2}{g_{ii}} \sum_{\mu=1}^p L_{ii}^\mu \frac{\partial L_{ii}^\mu}{\partial x_k} \quad (5)$$

Вычислим $\frac{\partial L_{ii}^\mu}{\partial x_k}$, воспользовавшись уравнениями Кодацци: $L_{ij,k}^\mu - L_{ik,j}^\mu$ [16]. С учетом того, что вдоль $F^r(Q)$ $g_{ij} = 0, L_{ij}^\mu = 0$ при $i \neq j$, находим $\frac{\partial L_{ii}^\mu}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \left(\frac{L_{ii}^\mu}{g_{ii}} + \frac{L_{kk}^\mu}{g_{kk}} \right)$. Подставим полученное выражение для $\frac{\partial L_{ii}^\mu}{\partial x_k}$ в (5), тогда:

$$\frac{\partial G_{ii}}{\partial x_k} = -\frac{1}{g_{ii}^2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \sum_{\mu=1}^p (L_{ii}^\mu)^2 + \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \sum_{\mu=1}^p L_{ii}^\mu \left(\frac{L_{ii}^\mu}{g_{ii}} + \frac{L_{kk}^\mu}{g_{kk}} \right) = \frac{1}{g_{kk}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \sum_{\mu=1}^p L_{ii}^\mu L_{kk}^\mu.$$

Так как поверхность F^l имеет нулевую секционную кривизну, то по формуле Гаусса $R_{ikik} = \sum_{\mu=1}^p L_{ii}^\mu L_{kk}^\mu = 0$, следовательно $\frac{\partial G_{ii}}{\partial x_k} = 0$ при $i \neq k$. Но это означает, что можно ввести новые параметры таким образом, что $G_{ii} = a_i = const$, т.е. грассманов образ $\Gamma(F^l)$ несет плоскую метрику, что и требовалось доказать.

В работе [17] Ю.А.Аминовым, Т.С.Тарасовой для $F^2 \subset E^4$, а в [21] В.А.Горькавым для $F^l \subset E^{l+p}$ доказана

Теорема. Кривая $\Gamma^1 \subset G(l, l+p)$ является вырожденным грассмановым образом некоторой поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ тогда и только тогда, когда Γ^1 - асимптотическая линия на поверхности $G(l, l+p) \subset S^N \subset E^{N+1}$. При этом поверхность F^l состоит из $l-1$ -мерных плоскостей.

Отметим, что в этом случае поверхность $F^l \subset E^{l+p}$ является поверхностью с плоской нормальной связностью и несет плоскую метрику. Ортогональные траектории плоских образующих поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ переходят в асимптотическую линию поверхности $G(l, l+p) \subset S^N \subset E^{N+1}$. Оказывается, что и в общем случае главное направление поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ при отображении Грассмана переходит в асимптотическое направление многообразия $G(l, l+p) \subset S^{N-1}, (N = C_{l+p}^p - 1)$.

Теорема 2. Если X_1 - главное направление на поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ в точке $Q \in F^l$, то при индуцированном отображении Грассмана $\Gamma_*(F^l)$ оно переходит в асимптотическое направление поверхности $G(l, l+p) \subset S^{N-1}$ в точке $\Gamma(Q) \in \Gamma(F^l)$.

Доказательство. Введем на поверхности F^l в точке Q римановы нормальные координаты так, чтобы направление X_1 было одним из координатных векторов [18]. Так как X_1 - главное направление на поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, то в точке Q для коэффициентов вторых квадратичных форм выполняются равенства:

$$L_{1i}^\sigma = 0, (i = 2, \dots, l; \sigma = 1, \dots, p) \quad (6)$$

В работе [19] для направлений, касательных к грассманову образу поверхности $F^l \subset E^{l+p}$ выведены формулы для вторых квадратичных форм поверхности $G(l, l+p) \subset S^{N-1}$. Они имеют вид:

$$\Phi_{ij}^{\tau\sigma} = 2 \left(L_{ir}^\tau L_{js}^\sigma + L_{is}^\tau L_{jr}^\sigma - L_{jr}^\tau L_{is}^\sigma - L_{js}^\tau L_{ir}^\sigma \right) dx^r dx^s.$$

Учитывая выбор системы координат на F^l и принимая во внимание (6), приходим к тому, что направление, касательное к образу вектора \mathbf{X}_1 , является асимптотическим на поверхности $G(l, l+p) \subset S^{N-1}$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wong Y. C. Differential geometry of Grassman manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. USA., - 1967. - V. 57. - P. 589-594.
2. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.: Наука, - 1977. - 488 с.
3. Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций. - М.:Наука, - 1975. - 348 с.
4. Лисица В. Т. О грассмановом образе поверхностей с плоской нормальной связностью // Всеросс. школа-коллоквиум по стохаст. метод. геом. и анал., Москва, - 1994. - С. 70-71.
5. Лисица В.Т. Грассманов образ поверхностей $F^l \subset E^{l+p}$ с плоской нормальной связностью // Междунар. конф. по геом. "в целом", Тез. докл., Черкассы, - 1995. - С. 47-48.
6. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий. // УМН. - 1991. - Т. 46, 2. - С. 41-83.
7. Акивис М. А. О строении многомерных поверхностей, несущих сеть линий кривизны // ДАН СССР. - 1963. - Т. 149, 6. - С. 1247-1249.
8. Акивис М. А., Чакмазян А. В. О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью // ДАН Арм.ССР. - 1976. - Т. 62, 2. - С. 75-81.
9. Chen B.-Y. Geometry of Submanifolds. - New York, - 1973. - 248 p.
10. Thas C. On submanifolds with flat normal connection in a conformally flat space // Kodai Math. J. - 1983. - V. 6. - P. 51-56.

11. Аминов Ю. А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением // Укр. геом. сб. – 1988. – Вып. 31. – С. 3–14.
12. Борисенко А. А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. – 1981. – Т. 116, 3. – С. 440–457.
13. Muto Y. The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space // J. Math. Soc. Japan. – 1978. – V. 30, 1. – P. 85–100.
14. Аминов Ю.А. Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство. // Мат. сб. – 1980. – Т. 111, 3. – С. 402–433.
15. Maltz R. The nullity spaces of curvature-like tensors. // J. Diff. Geom. – 1972. – 3–4. – P. 519–525.
16. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. – М.:ГИИЛ, – 1948.– 316 с.
17. Аминов Ю. А., Тарасова Т. С. Определение поверхности в E^4 по вырожденному грасманову образу // Укр. геом. сб. – 1983. – Вып. 26. – С. 6–13.
18. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, – 1971. – 344 с.
19. Савельев В. М. К теории кривизны грасманова образа подмногообразий в евклидовом пространстве // МАГ. – 1994. – Т. 1, 3–4. – С. 520–528.
20. Ferus D., Pedit F. Curved Flats in Symmetric Spaces. – Berlin, – Juli 1995. – Sfb Preprint No. 174. – 10 p.
21. Горькавый В. А. Восстановление подмногообразий евклидова пространства по вырожденному в линию грасманову образу // Матем. заметки – 1996. – Вып. 5. – С. 681–691.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 519.6

№ 475, 2000, с. 303–312

Стабилизация линейных полностью управляемых систем при наличии ограничений на управление

Л. И. Гулик, А. П. Маринич

Харьковский национальный университет, Украина

В работе показано, что для полностью управляемой системы вида

$$\dot{x} = Cx + u, \quad u \in K,$$

где K – выпуклый замкнутый конус, задача стабилизации (задача конструирования регулятора) может быть решена с любой наперед заданной степенью устойчивости, а следовательно, и для управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r,$$

где существует $u_0 \in U : f(0, u_0) = 0$, найдется достаточно малая окрестность начала координат, из любой точки которой задача конструирования регулятора разрешима с любой наперед заданной степенью устойчивости.

Введение

Работа посвящена задаче стабилизации линейной полностью управляемой системы, являющейся системой первого приближения для управляемой системы общего вида, при наличии ограничений на управление, т.е. задаче построения позиционного управления, приводящего линейную полностью управляемую систему в положение равновесия. Для линейной полностью управляемой системы строится функция Ляпунова, а затем в виде вычислительной процедуры находится позиционное управление, приводящее систему в положение равновесия.

В работе разработана процедура построения позиционного управления, которое обеспечивает любую наперед заданную степень устойчивости положения равновесия полностью управляемой системы. Затем приводятся результаты ряда вычислительных экспериментов по конструированию регуляторов в механических системах.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $A \subset \mathbb{R}^n$. Будем использовать следующие стандартные обозначения: x^i – i -тая компонента вектора x , $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение векторов x и y , $|x|$ – норма вектора x , A, clA – замыкание множества A , bdA

– граница множества A , coA – выпуклая оболочка множества A , S – единичный замкнутый шар в \mathbb{R}^n . Если $K \subset \mathbb{R}^n$ – конус, то через K^* обозначается его сопряженный, т.е. $K^* = \{x^* | \langle x^*, x \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$. Если C – линейный оператор, то C^* – его сопряженный.

1. Постановка задачи конструирования регулятора

Напомним общую постановку задачи, приведенную в работе [1]. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, дифференцируемая по первому аргументу, причем $|\nabla_x f(x, u)| \leq l$ для всех $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$. Предполагается, что для некоторого вектора $u_0 \in U$ выполнено равенство $f(0, u_0) = 0$ и что $f(x, U)$ – выпуклое множество при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Задача конструирования регулятора состоит в следующем: найти функцию $u: \mathbb{R}^n \rightarrow U$, определенную в некоторой окрестности начала координат, такую, что $u(0) = u_0$, и положение равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \quad (2)$$

асимптотически устойчиво.

Функция $u(x)$ не предполагается непрерывной и поэтому асимптотическая устойчивость положения равновесия уравнения (2) понимается в смысле определения, данного А.Ф.Филипповым [2]. Напомним это определение.

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольная локально ограниченная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Положим

$$\Phi(x) = \bigcap_{\eta > 0} clco \varphi(x + \eta S).$$

Положение равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения $\dot{x} = \varphi(x)$ называется асимптотически устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого $x_0 \in \delta S$ каждое обобщенное решение дифференциального уравнения, т.е. решение дифференциального включения $\dot{x} \in \Phi(x)$ с начальным условием $x(0) = x_0$, при $t \in [0, \infty)$ существует и удовлетворяет условиям $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \in [0, \infty)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Под решением дифференциального включения понимается любая локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая включению $\dot{x} \in \Phi(x)$ при почти всех $t \in [0, \infty)$.

2. Схема решения задачи конструирования регулятора

Сначала рассматривается линейная полностью управляемая система

$$\dot{x} = Cx + u, \quad u \in K, \quad (3)$$

где $C = \nabla_x f(0, u_0) - (n \times n)$ - матрица, а K - выпуклый замкнутый конус, натянутый на множество $f(0, U)$. Для полностью управляемой системы (3) приведены необходимые и достаточные условия, гарантирующие для произвольного $\delta \in (0, 1)$ существование в \mathbb{R}^n таких нормы $V(x)$ и числа $\tau > 0$, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется вектор $u \in K$, для которого выполнено неравенство

$$V(x + \tau(Cx + u)) \leq \delta V(x).$$

Затем строится $u(x)$ такая, что норма $V(x)$ оказывается функцией Ляпунова для дифференциального уравнения (3). Этим устанавливается асимптотическая устойчивость положения равновесия $x = 0$ данного уравнения с любой наперед заданной степенью устойчивости.

3. Конструирование регулятора для системы первого приближения

Приведем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи конструирования регулятора для системы первого приближения в случае управляемой системы (3).

Теорема 1 [1]. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) задача конструирования регулятора для системы (3) разрешима;
- 2) матрица C^* не имеет в конусе K^* собственных векторов, соответствующих неотрицательным собственным числам, и нетривиальных инвариантных подпространств, отвечающих собственным числам с неотрицательной действительной частью;
- 3) существуют числа $\tau > 0$, $\delta \in (0, 1)$ и норма $V(x)$ в пространстве \mathbb{R}^n такие, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется вектор $u \in K$, для которого выполняется неравенство $V(x + \tau(Cx + u)) \leq \delta V(x)$.

Мы будем говорить, что задача конструирования регулятора разрешима для системы (3) с любой наперед заданной степенью устойчивости, если она разрешима и для любого $\gamma_1 > 0$ и для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ для каждой траектории $x(\cdot)$ системы (3) с начальным условием $x(0) = x_0$ существует $a = a(x_0) > 0$ такое, что выполнено

$$|x(t)| \leq a|x_0|e^{-\gamma_1 t}, \quad t \geq t_0.$$

В случае полностью управляемой системы (3), различные критерии управляемости которой приведены в работах [3], [4] и [5], справедливы следующие необходимые и достаточные условия разрешимости задачи конструирования регулятора.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) задача конструирования регулятора для полностью управляемой системы (3) разрешима с любой наперед заданной степенью устойчивости;
- 2) матрица C^* не имеет в конусе K^* вещественных собственных векторов и не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, содержащихся в $K^* \cap (-K^*)$, отвечающих комплексным собственным значениям;

3) $\forall \delta \in (0, 1)$ существуют число $\tau > 0$ и норма $V(x)$ в пространстве \mathbf{R}^n такие, что

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \exists u \in \mathbf{K} : V(x + \tau(Cx + u)) \leq \delta V(x).$$

Для получения необходимых и достаточных условий разрешимости задачи конструирования регулятора для полностью управляемой системы (3) исследуем структуру многозначного отображения $x \rightarrow Cx + \mathbf{K}$. Приведем следующие обозначения из работы [1]:

J – максимальное инвариантное подпространство линейного оператора C^* , содержащееся в подпространстве $\mathbf{K}^* \cap (-\mathbf{K}^*)$;

I – ортогональное дополнение к J .

В силу полной управляемости системы (3)

$$J = \{0\} \iff I = \mathbf{R}^n.$$

Обозначим через λ_0 максимальное вещественное собственное число линейного оператора C^* , отвечающее собственному вектору, лежащему в конусе \mathbf{K}^* . Поскольку система (3) полностью управляема, то таких собственных векторов нет и, следовательно, можно положить $\lambda_0 = -\infty$.

Для всякого действительного λ определим выпуклые конусы:

$$L_k(\lambda) = -co \bigcap_{i=0}^k (C - \lambda E)^{-i} \mathbf{K}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Очевидно, что $L_k(\lambda) \subset L_m(\lambda)$ при $k < m$.

Доказательство теоремы 2. Пусть задача конструирования регулятора разрешима, а условие 2) не выполняется.

Возможны два варианта. Первый, – матрица C^* имеет в конусе \mathbf{K}^* собственные вектора, соответствующие неотрицательным собственным числам, и нетривиальные инвариантные подпространства, содержащиеся в $\mathbf{K}^* \cap (-\mathbf{K}^*)$, отвечающие собственным числам с неотрицательной действительной частью.

Это означает, что дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^*(t) = -C^* x^*(t)$$

имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее включению $x^*(t) \in \mathbf{K}^*$, $t \geq 0$, для которого при всех $\beta > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} |x^*(t)| = 0.$$

Пусть $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Поскольку задача конструирования регулятора разрешима с любой наперед заданной степенью устойчивости, то существует траектория полностью управляемой системы (3) $x(\cdot)$, удовлетворяющая неравенству:

$$|x(t)| \leq a |x_0| e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Пусть $u(\cdot)$ – управление, соответствующее этой траектории. Легко доказать, что

$$\begin{aligned} \langle x(t), x^*(t) \rangle &= \langle x_0, x^*(0) \rangle + \int_0^t \frac{d}{ds} \langle x(s), x^*(s) \rangle ds = \\ &= \langle x_0, x^*(0) \rangle + \int_0^t \langle u(s), x^*(s) \rangle ds \geq \langle x_0, x^*(0) \rangle, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$|\langle x(t), x^*(t) \rangle| \leq |x(t)| \cdot |x^*(t)| \leq a|x_0|e^{-\gamma t}|x^*(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, $\langle x_0, x^*(0) \rangle \leq 0$, что ввиду произвольности x_0 означает равенство $x^*(0) = 0$. В силу единственности решения задачи Коши $x^*(t) \equiv 0$, что противоречит нетривиальности решения $x^*(\cdot)$.

Второй случай, когда матрица C^* имеет в конусе K^* собственные вектора, соответствующие отрицательным собственным числам, и нетривиальные инвариантные подпространства, содержащиеся в $K^* \cap (-K^*)$, отвечающие собственным числам с отрицательной действительной частью

Это означает, что дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^*(t) = -C^*x^*(t)$$

имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее включению $x^*(t) \in K^*$, $t \geq 0$, для которого при всех $\beta > \beta_0$ выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} |x^*(t)| = 0.$$

Пусть $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Поскольку задача конструирования регулятора разрешима с любой наперед заданной степенью устойчивости, то существует траектория полностью управляемой системы (3) $x(\cdot)$, удовлетворяющая неравенству:

$$|x(t)| \leq a|x_0|e^{-\gamma t}, \quad t \geq t_0.$$

Пусть $u(\cdot)$ – управление, соответствующее этой траектории. Легко доказать, что

$$\begin{aligned} \langle x(t), x^*(t) \rangle &= \langle x_0, x^*(0) \rangle + \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \langle x(s), x^*(s) \rangle ds = \\ &= \langle x_0, x^*(0) \rangle + \int_{t_0}^t \langle u(s), x^*(s) \rangle ds \geq \langle x_0, x^*(0) \rangle, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$|\langle x(t), x^*(t) \rangle| \leq |x(t)| \cdot |x^*(t)| \leq a|x_0|e^{-\gamma t}|x^*(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, $\langle x_0, x^*(0) \rangle \leq 0$, что ввиду произвольности x_0 означает равенство $x^*(0) = 0$. В силу единственности решения задачи Коши $x^*(t) \equiv 0$, что противоречит нетривиальности решения $x^*(\cdot)$.

Таким образом, условие 2) выполняется.

Пусть теперь выполнено условие 2). Покажем, что это влечет условие 3). Условие 2) означает, что $\lambda_0 = -\infty$. Рассмотрим произвольное $\lambda \in (-\infty, 0)$. Обозначим через Σ — многогранник, содержащий единичный шар с центром в нуле. Пусть $x_i^\Sigma, i = \overline{0, m}$ — вершины этого многогранника. В силу теоремы 2 из [1]

$$\exists k_i \in N : x_i^\Sigma \in L_{k_i}(\lambda), \quad i = \overline{0, m},$$

причем $x_i^\Sigma \notin L_k(\lambda)$ при $k < k_i$. Поскольку

$$L_k(\lambda) = -co \bigcup_{i=0}^k (C - \lambda E)^{-i} K, \quad k = \overline{0, \infty},$$

то включение $x_i^\Sigma \in L_{k_i}(\lambda)$ означает, что найдется конечная совокупность ненулевых векторов $y_{i,0}, \dots, y_{i,k_i} \in I$, удовлетворяющих соотношениям

$$y_{i,0} \in -K,$$

$$\lambda y_{i,1} \in C y_{i,1} + K,$$

...

$$y_{i,k_i-1} + \lambda y_{i,k_i} \in C y_{i,k_i} + K,$$

$$x_i^\Sigma = y_{i,k_i} + y_{i,0}.$$

Возьмем некоторое $\alpha > 1$ и зафиксируем его. Из точек $y_{i,j}, j = \overline{0, k_i}, i = \overline{0, m}$ образуем новый многогранник M с вершинами $z_{i,j}$ по следующему правилу:

$$z_{i,0} = y_{i,0}, \quad i = \overline{0, m},$$

$$z_{i,j} = (\alpha/|\lambda|)^{k_i-j} y_{i,j}, \quad j = \overline{1, k_i}, \quad i = \overline{0, m}.$$

Покажем, что его функция Минковского, т.е. функция

$$V(x) = \inf \left\{ \beta > 0 : \frac{1}{\beta} x \in M \right\}$$

и является искомой нормой. Выберем некоторое $\delta \in (0, 1)$ и зафиксируем его. Для вершины $z_{i,0} \in M$, будем выбирать управление вида

$$u_{i,0} = -\frac{|C z_{i,0}|}{\delta} z_{i,0}$$

и заметим, что $u_{i,0} \in K$, так как $y_{i,0} \in -K$. Тогда

$$z_{i,0} + \frac{\delta}{|C z_{i,0}|} (C z_{i,0} + u_{i,0}) = \frac{\delta C z_{i,0}}{|C z_{i,0}|} \in \delta S, \quad i = \overline{0, m}.$$

Для вершин $z_{i,1} \in M$ будем полагать $u_{i,1} = \lambda z_{i,1} - Cz_{i,1} \in K$. Очевидно, что

$$z_{i,1} + \frac{1}{|\lambda|}(Cz_{i,1} + u_{i,1}) = 0 \in \delta S, \quad i = \overline{0, m}.$$

Из вершин $z_{i,j}$ будем управлять следующим образом:

$$u_{i,j} = \frac{1}{\alpha}|\lambda|z_{i,j-1} + \lambda z_{i,j} - Cz_{i,j} \in K,$$

где

$$\lambda \leq -\frac{\alpha^{k_i-j+1} |y_{i,j-1}|}{\delta}, \quad \forall i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{2, k_i}.$$

Легко видеть, что

$$z_{i,j} + \frac{1}{|\lambda|}(Cz_{i,j} + u_{i,j}) = \frac{1}{\alpha}z_{i,j-1} \in \delta S, \quad j = \overline{2, k_i}, \quad i = \overline{0, m}.$$

Так как многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, то

$$\forall \delta \in (0, 1) \forall x \in bdM \exists \tau_1 > 0 \exists u \in K : x + \tau_1(Cx + u) \in \delta S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x + \tau_1(Cx + u)) \leq \delta V(x), \quad \forall \delta \in (0, 1).$$

Наконец, пусть выполнено условие 3). Покажем, что выполнено условие 1), причем нулевое положение равновесия (3) асимптотически устойчиво с любой наперед заданной степенью устойчивости. Условие 3) эквивалентно условию

$$\frac{V(x + \tau(Cx + u)) - V(x)}{\tau} \leq -\frac{1 - \delta}{\tau} V(x).$$

Так как $\frac{1-\delta}{\tau} > 0$, то

$$\dot{V}(x)|_{x \in Cx+K} \leq -\gamma_1 V(x), \quad \gamma_1 = \frac{1 - \delta}{\tau} > 0.$$

Это означает, что функция $V(x)$ является функцией Ляпунова для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Cx + u(x). \tag{6}$$

Следовательно, нулевое положение равновесия уравнения (6) асимптотически устойчиво. Более того, для любой наперед заданной точности $\gamma_1 > 0$, выбирая в качестве δ и τ следующие величины $\delta = \max \left\{ \frac{|Cz_{i,0}|}{\gamma_1 + |Cz_{i,0}|}, i = \overline{0, m} \right\} \in$

$(0, 1)$ и $\tau = \min \left\{ \frac{1}{|\lambda|}, \frac{\delta}{|Cz_{i,0}|}, i = \overline{0, m} \right\}$, мы обеспечиваем выполнение неравенства

$$\dot{V}(x)|_{x \in Cx+K} \leq -\gamma_1 V(x).$$

Таким образом, согласно теореме 1 [2, с.116], полностью управляемая система (3) асимптотически устойчива с любой наперед заданной степенью устойчивости.

Теорема доказана.

Замечание: Применяя достаточные условия разрешимости задачи конструирования регулятора для управляемой системы общего вида (1), приведенные в теореме 4 из [1], и используя теорему 2, легко показать, что существует достаточно малая окрестность начала координат такая, что для любой точки этой окрестности задача конструирования регулятора разрешима с любой наперед заданной степенью устойчивости.

4. Вычислительные эксперименты.

Используя теорему 2, а также методику вычислительных алгоритмов работы [1], продемонстрируем возможность выбора стабилизирующего управления для одной механической системы вида

$$\dot{x}^1 = x^2,$$

$$\dot{x}^2 = -x^1 + u, \quad (7)$$

$$0 \leq u \leq 1.$$

Используя теорему 2, не составляет труда показать, что в рассматриваемой задаче, которая описывает движение математического маятника под воздействием односторонней силы, задача конструирования регулятора разрешима с любой наперед заданной степенью устойчивости.

Согласно теореме 2 выберем, для определенности, $\gamma = 10$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Далее определим величины δ , λ и τ из следующих соотношений:

$$\delta = \max \left\{ \frac{|Cz_{i,0}|}{\gamma_1 + |Cz_{i,0}|}, i = \overline{0, m} \right\},$$

$$\lambda \leq -\alpha^{k_i-j+1} \sqrt{\frac{\alpha^{k_i-j} |y_{i,j-1}|}{\delta}}, \quad \forall i = \overline{0, m}, j = \overline{2, k_i},$$

$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{|\lambda|}, \frac{\delta}{|Cz_{i,0}|}, i = \overline{0, m} \right\},$$

которые, в силу теоремы 2, обеспечивают заданную степень устойчивости. Затем точки $z_{i,j}$, $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, k_i}$ нормируем и строим выпуклую оболочку. Дальнейшие вычисления проводятся согласно алгоритмов, рассмотренных в [1].

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда $\gamma = 20$, $x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ и $\gamma = 30$, $x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Результаты численных экспериментов приведены ниже. Из них, в частности, вытекает, что при увеличении степени устойчивости также увеличивается величина $|\lambda|$.

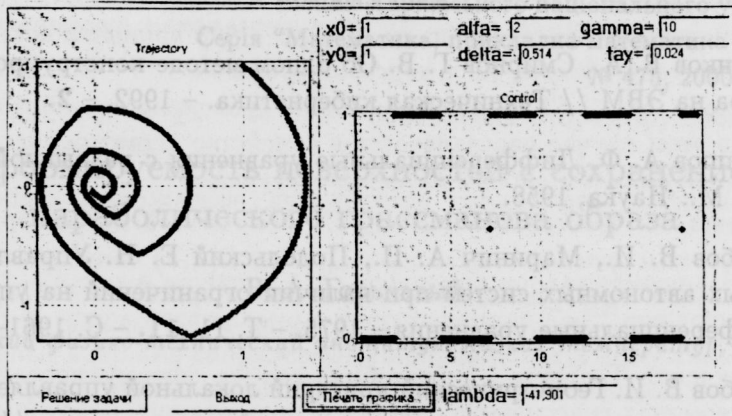


Рис. 1: Результаты работы программы при $\gamma = 10$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

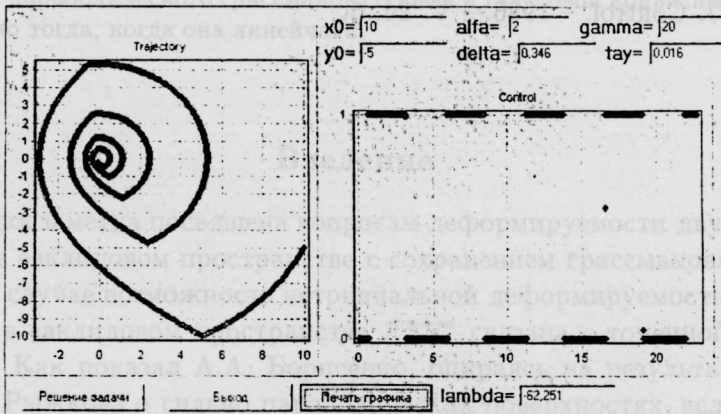


Рис. 2: Результаты работы программы при $\gamma = 20$, $x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

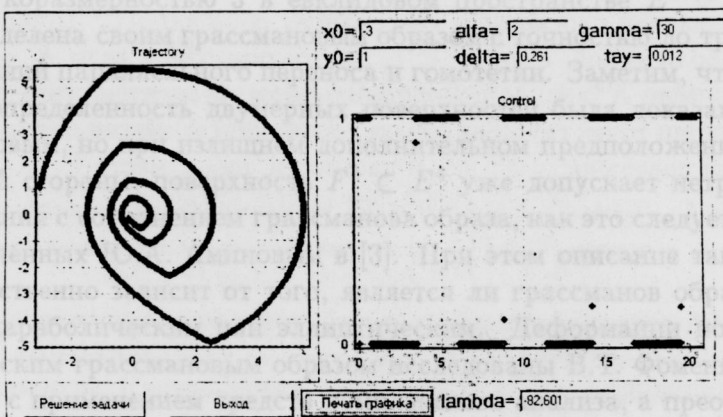


Рис. 3: Результаты работы программы при $\gamma = 30$, $x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушенков В. А., Смирнов Г. В. Об одном методе конструирования регулятора на ЭВМ // Техническая кибернетика. – 1992. – 2.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1958.
3. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, 11. – С. 1961–1979.
4. Коробов В. И. Геометрический критерий локальной управляемости динамических систем при наличии ограничений на управление // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, 9. – С. 1592–1599.
5. Aubin J.-P., Frankowska G., Olech G. Controllability of convex processes // SIAM J. Control. – 1986. – V. 24, 6.

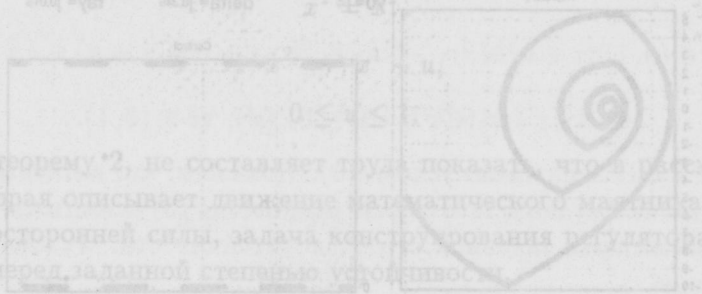


Рис. 2: Результаты работы программы при $\gamma = 20$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

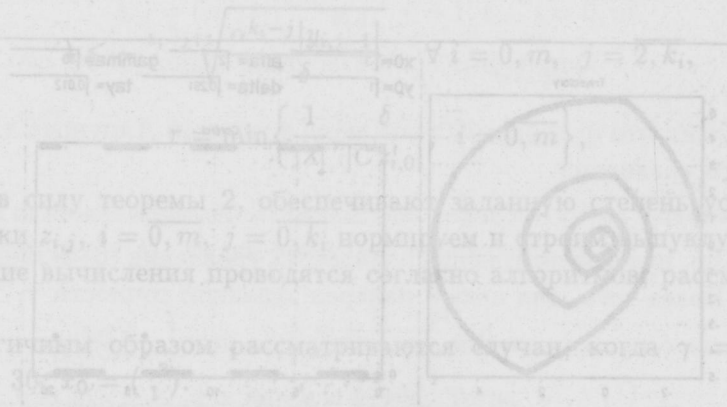


Рис. 3: Результаты работы программы при $\gamma = 30$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Деформируемость поверхностей с сохранением
параболического грассманава образа

В. А. Горькавий

Харьковский физико-технический институт низких температур, Украина

Исследуется существование нетривиальных деформаций поверхности F^2 в E^4 с сохранением грассманава образа и гауссовой кривизны. Доказано, что поверхность F^2 в E^4 допускает нетривиальные деформации с сохранением параболического грассманава образа и гауссовой кривизны тогда и только тогда, когда она линейчатая.

Введение

Настоящая заметка посвящена вопросам деформируемости двумерных поверхностей в евклидовом пространстве с сохранением грассманава образа.

В общем случае возможность нетривиальной деформируемости подмногообразия F^n в евклидовом пространстве E^{n+m} связана с точечной коразмерностью F^n . Как показал А.А. Борисенко, опираясь на результаты Э. Картана и В.В. Рыжкова о сильно параболических поверхностях, если точечная коразмерность F^n всюду больше $n(n-1)/2 + 1$, то F^n однозначно определено своим грассмановым образом с точностью до параллельного переноса и гомотетии [1]. Отсюда в двумерном случае получаем, что поверхность F^2 с точечной коразмерностью 3 в евклидовом пространстве E^{m+2} , $m \geq 3$, однозначно определена своим грассмановым образом с точностью до тривиальных преобразований параллельного переноса и гомотетии. Заметим, что такая однозначная определенность двумерных поверхностей была доказана также и Ю.А. Аминовым, но при излишнем дополнительном предположении [2].

С другой стороны, поверхность $F^2 \subset E^4$ уже допускает нетривиальные преобразования с сохранением грассманава образа, как это следует из результатов, полученных Ю.А. Аминовым в [3]. При этом описание таких деформаций существенно зависит от того, является ли грассманов образ гиперболическим, параболическим или эллиптическим. Деформации поверхностей с эллиптическим грассмановым образом исследованы В.Т. Фоменко (см., например, [4]) с применением средств комплексного анализа, а преобразования поверхностей с гиперболическим грассмановым образом (как преобразования Петерсона сопряженных сетей) описаны, например, В.В. Рыжковым в [5].

В настоящей заметке рассматривается следующий вопрос: *существуют ли нетривиальные преобразования $F^2 \subset E^4$, при которых сохраняется не только грасманов образ, но и гауссова кривизна F^2 ?* Основное внимание будет уделено $F^2 \subset E^4$ с параболическим грасмановым образом (поверхность F^2 в этом случае расслаивается в семейство асимптотических линий). Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и параболическим грасмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ допускает (локально) нетривиальные преобразования с сохранением грасманова образа и гауссовой кривизны тогда и только тогда, когда F^2 является линейчатой.*

Утверждение Теоремы 1 может быть так-же сформулировано исключительно в терминах грасманова образа с использованием некоторых стандартных структур на многообразии Грассмана.

1. Поверхности с параболическим грасмановым образом

Рассмотрим регулярное двумерное подмногообразие F^2 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 . Будем считать, что F^2 имеет достаточно высокий порядок гладкости C^r . Сопоставим каждой точке $P \in F^2$ двумерное векторное подпространство в E^4 , проходящее через начало координат параллельно нормальной плоскости $N_P F^2$. Построенное отображение \mathcal{G} поверхности F^2 в грасманово многообразии $G(2, 4)$ двумерных подпространств евклидова пространства E^4 называется *грасмановым*, а образ $\Gamma \subset G(2, 4)$ – *грасмановым образом поверхности F^2* .

Ю.А. Аминовым в [3] была предложена следующая классификация точек грасманова образа. Предположим, что в точке $P \in F^2$ точечная коразмерность F^2 равна 2. Тогда в окрестности соответствующей точки $P^* \in \Gamma$ грасманов образ является регулярным двумерным подмногообразием. Обозначим через \bar{K} секционную кривизну грасманова многообразия $G(2, 4)$ в точке P^* вдоль касательной плоскости к грасманову образу $Tr \cdot \Gamma$. Точка P^* называется гиперболической, если $\bar{K} < 1$, параболической – если $\bar{K} = 1$, и эллиптической – если $\bar{K} > 1$. А.А. Борисенко было установлено, что приведенной классификации точек гауссова образа соответствует афинная классификация точек самой поверхности F^2 [6]. В частности, имеет место

Лемма 1. *Пусть в точке $P \in F^2$ точечная коразмерность поверхности равна 2, и пусть $P^* \in \Gamma^2$ – соответствующая точка на грасмановом образе.*

Точка P^ является гиперболической тогда и только тогда, когда в касательном пространстве $Tr F^2$ существуют неколлинеарные взаимно сопряженные направления X и Y (т.е. $L(X, Y) = 0$).*

Точка $P^ \in \Gamma^2$ является параболической тогда и только тогда, когда в $Tr F^2$ существует асимптотическое направление Z (т.е. $L(Z, Z) = 0$).*

Точка $P^* \in \Gamma^2$ является эллиптической тогда и только тогда, когда в $\text{Tr}F^2$ существуют неколлинеарные взаимно комплексно сопряженные направления U и V (т.е. $L(U + iV, U - iV) = L(U, U) + L(V, V) = 0$).

Здесь через $L : TF^2 \times TF^2 \rightarrow NF^2$ обозначена вторая фундаментальная форма поверхности F^2 .

Приведенное утверждение дополняется следующим легко доказуемым фактом.

Лемма 2. Пусть в точке $P \in F^2$ точечная коразмерность F^2 равна 2. Предположим, что в касательном пространстве $\text{Tr}F^2$ существуют либо неколлинеарные взаимно сопряженные направления X и Y , либо асимптотическое направление Z . Тогда эти направления определены однозначно (с точностью до умножения на ненулевые константы).

Рассмотрим теперь поверхность $F^2 \subset E^4$ с постоянной точечной коразмерностью 2. Тогда грассманов образ $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ этой поверхности является регулярным двумерным подмногообразием. Предположим, что грассманов образ Γ^2 – параболический, т.е. состоит из параболических точек. Вследствие Лемм 1 и 2, в каждой точке на F^2 в касательном пространстве существует и однозначно определена прямая асимптотических направлений. Сама F^2 однозначным образом расслаивается на асимптотические кривые α_v , касающиеся асимптотических направлений. Введем на F^2 локальные координаты u, v так, чтобы асимптотические кривые α_v были координатными линиями $v = \text{const}$; будем называть такие координаты полуасимптотическими.

Допускает ли рассматриваемая поверхность F^2 преобразования, при которых грассманов образ Γ^2 сохраняется? Если F^2 задается радиус-вектором $\vec{x} = \vec{r}(u, v)$ относительно введенных выше полуасимптотических координат u, v , то любая поверхность \tilde{F}^2 в E^4 с тем же грассмановым образом Γ^2 задается радиус вектором $\vec{x} = \vec{\rho}(u, v)$ таким, что имеют место соотношения

$$\partial_u \vec{\rho} = a(u, v) \partial_u \vec{r} + c(u, v) \partial_v \vec{r}, \quad (1.1)$$

$$\partial_v \vec{\rho} = b(u, v) \partial_u \vec{r} + d(u, v) \partial_v \vec{r}. \quad (1.2)$$

Используя деривационные формулы Вейнгартена для F^2 , запишем условие совместности уравнений (1.1)-(1.2):

$$\partial_v a + a\Gamma_{12}^1 + c\Gamma_{22}^1 = \partial_u b + b\Gamma_{11}^1 + d\Gamma_{12}^1, \quad (2.1)$$

$$\partial_v c + a\Gamma_{12}^2 + c\Gamma_{22}^2 = \partial_u d + b\Gamma_{11}^2 + d\Gamma_{12}^2, \quad (2.2)$$

$$b \cdot L(\partial_u \vec{r}, \partial_u \vec{r}) + d \cdot L(\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}) = a \cdot L(\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}) + c \cdot L(\partial_v \vec{r}, \partial_v \vec{r}), \quad (2.3)$$

где Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля поверхности F^2 . Координатные линии $v = \text{const}$ являются асимптотическими, поэтому $L(\partial_u \vec{r}, \partial_u \vec{r}) = 0$. Но с другой стороны, точечная коразмерность F^2 равна 2, поэтому нормальные вектора

$L(\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r})$ и $L(\partial_v \vec{r}, \partial_u \vec{r})$ нигде не коллинеарны, в следствие чего из (2.3) получаем $d = a$ и $c = 0$. Уравнения (1.1)-(1.2) принимают тогда вид

$$\partial_u \vec{\rho} = a(u, v) \partial_u \vec{r}, \quad (3.1)$$

$$\partial_v \vec{\rho} = b(u, v) \partial_u \vec{r} + a(u, v) \partial_v \vec{r}, \quad (3.2)$$

а условия их совместности будут записываться как

$$\partial_u a = \partial_u b + b \Gamma_{11}^1, \quad (4.1)$$

$$\partial_u a = -b \Gamma_{11}^2. \quad (4.2)$$

В свою очередь, рассматривая (4.1)-(4.2) как систему уравнений для $a(u, v)$, и записывая условие ее интегрируемости, получаем следующее параболическое дифференциальное уравнение второго порядка для $b(u, v)$:

$$\partial_{uu} b + \partial_u b \Gamma_{11}^1 + \partial_v b \Gamma_{11}^2 + b(\partial_u \Gamma_{11}^1 + \partial_v \Gamma_{11}^2) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, если \tilde{F}^2 имеет тот-же грассманов образ, что и F^2 , то радиус-векторы поверхностей связаны соотношениями (3.1)-(3.2), где функции $a(u, v)$ и $b(u, v)$ удовлетворяют (4.1)-(4.2) и (5). Обратно, возьмем произвольное решение $b(u, v)$ уравнения (5) и подставим его в (4.1)-(4.2) – мы получим совместную систему дифференциальных уравнений, решение которой $a(u, v)$ определяется заданием начального значения $a(u_0, v_0)$. Подставив найденные функции $a(u, v)$ и $b(u, v)$ в (3.1)-(3.2), получим снова совместную систему дифференциальных уравнений, решение которой $\vec{\rho}(u, v)$ определяется заданием начального значения $\vec{\rho}(u_0, v_0)$. Так построенный радиус-вектор $\vec{\rho}(u, v)$ будет задавать в E^4 поверхность \tilde{F}^2 , имеющую тот-же грассманов образ, что и F^2 (при этом регулярность \tilde{F}^2 эквивалентна тому, что $a(u, v)$ не обращается в ноль).

Легко видеть, что выбор $\vec{\rho}(u_0, v_0)$ соответствует параллельному переносу поверхности в E^4 . Решение $b(u, v) \equiv 0$ и $a(u, v) \equiv a(u_0, v_0)$ соответствует преобразованию гомотетии в E^4 с коэффициентом $a(u_0, v_0)$. Ненулевыми решениям $b(u, v)$ будут соответствовать нетривиальные преобразования F^2 с сохранением грассманова образа.

Таким образом, поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и параболическим грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ допускает (локально) нетривиальные преобразования с сохранением Γ^2 , которые описываются ненулевыми решениями $b(u, v)$ параболического уравнения (5) (сравн. [3]).

Можно ли наложить на F^2 какие-либо дополнительные условия, которые вместе с неизменяемостью грассманова образа гарантировали бы отсутствие таких нетривиальных преобразований?

2. Жесткость $F^2 \subset E^4$ с параболическим грассмановым образом

Выясним предварительно как связаны основные геометрические характеристики рассматриваемых поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2 \subset E^4$. Обозначим

$$I = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2,$$

$$L = (L_{11}^1 du^2 + 2L_{12}^1 dudv + L_{22}^1 dv^2)\tilde{n}_1 + (L_{11}^2 du^2 + 2L_{12}^2 dudv + L_{22}^2 dv^2)\tilde{n}_2$$

первую и вторую фундаментальные формы поверхности F^2 , а через

$$\tilde{I} = \tilde{g}_{11}du^2 + 2\tilde{g}_{12}dudv + \tilde{g}_{22}dv^2,$$

$$\tilde{L} = (\tilde{L}_{11}^1 du^2 + 2\tilde{L}_{12}^1 dudv + \tilde{L}_{22}^1 dv^2)\tilde{n}_1 + (\tilde{L}_{11}^2 du^2 + 2\tilde{L}_{12}^2 dudv + \tilde{L}_{22}^2 dv^2)\tilde{n}_2$$

первую и вторую фундаментальные формы поверхности \tilde{F}^2 . Здесь \tilde{n}_1, \tilde{n}_2 — нормальные векторные поля, образующие ортонормированный базис в нормальном пространстве к F^2 ; т.к. нормальные пространства к F^2 и \tilde{F}^2 в соответствующих точках параллельны, то \tilde{n}_1, \tilde{n}_2 будут и нормальными к \tilde{F}^2 .

Из (3.1)-(3.2) легко получить, что

$$\tilde{g}_{11} = a^2 g_{11}, \quad \tilde{g}_{12} = abg_{11} + a^2 g_{12}, \quad \tilde{g}_{22} = b^2 g_{11} + 2abg_{12} + a^2 g_{22}, \quad (6.1)$$

$$\tilde{L}_{11}^\sigma = aL_{11}^\sigma = 0, \quad \tilde{L}_{12}^\sigma = aL_{12}^\sigma, \quad \tilde{L}_{22}^\sigma = bL_{12}^\sigma + aL_{22}^\sigma. \quad (6.2)$$

Если теперь дополнительно потребовать, чтобы соответствие $\tilde{F}^2 \rightarrow F^2$ по параллельности нормальных плоскостей (по равенству полуасимптотических координат u, v) было *изометрией*, то из (6) легко получить, что $a^2 \equiv 1$ и $b \equiv 0$, т.е. F^2 и \tilde{F}^2 необходимо совмещаются параллельным переносом и (возможно) центральной симметрией в E^4 . Иначе говоря, *поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и параболическим грассмановым образом не допускает изометрических преобразований с сохранением грассманова образа, отличных от параллельного переноса и центральной симметрии*. Это подтверждает глубокие общие результаты А.А. Борисенко об изометричных подмногообразиях $F^n \subset E^{n+m}$ с совпадающим грассмановым образом, полученные в [7].

Аналогичная ситуация возникает в случае, когда соответствие $\tilde{F}^2 \rightarrow F^2$ по параллельности нормальных плоскостей (по равенству полуасимптотических координат u, v) является *конформным* отображением. Действительно, предположим, что $\tilde{I} = e^{2\Phi(u,v)}I$. Тогда из (6.1) получаем,

$$\begin{aligned} e^{2\Phi(u,v)}g_{11} &= a^2 g_{11}, \\ e^{2\Phi(u,v)}g_{12} &= abg_{11} + a^2 g_{12}, \\ e^{2\Phi(u,v)}g_{22} &= b^2 g_{11} + 2abg_{12} + a^2 g_{22}. \end{aligned}$$

Решением этих уравнений будут $a^2 = e^{2\Phi(u,v)}$ и $b \equiv 0$. Из условий (4.1)-(4.2), которые накладываются на функции a и b , получаем, что $\Phi(u, v) \equiv \Phi_0 = \text{const}$.

Следовательно, как легко видеть, \tilde{F}^2 и F^2 совмещаются гомотетией с коэффициентом e^{Φ_0} , параллельным переносом и, возможно, центральной симметрией. Таким образом, поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и параболическим грассмановым образом не допускает конформных преобразований с сохранением грассманова образа, отличных от гомотетии, параллельного переноса и центральной симметрии.

Как мы видим, добавление условий изометричности или конформности является слишком жестким. Гораздо более интересная ситуация возникает в случае, когда мы потребуем выполнения следующего более слабого дополнительного условия: в точках поверхностей F^2 и \tilde{F}^2 , соответствующих по параллельности нормальных плоскостей (по равенству полуасимптотических координат u, v), совпадают их гауссовы кривизны. Будут ли F^2 и \tilde{F}^2 совмещаться параллельным переносом и центральной симметрией?

Теорема 1. *Поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и параболическим грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ допускает (локально) нетривиальные преобразования с сохранением грассманова образа и гауссовой кривизны тогда и только тогда, когда F^2 является линейчатой.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что гауссова кривизна K поверхности F^2 не равна нулю. Действительно, так как $II(\partial_u, \partial_u) = 0$, то, вследствие формулы Гаусса, $K = 0$ тогда и только тогда, когда $II(\partial_u, \partial_v) = 0$. Но это невозможно, так как нормальные вектора $II(\partial_u, \partial_v)$ и $II(\partial_v, \partial_v)$ линейно независимы, что было отмечено ранее в связи с предположением о точечной коразмерности F^2 .

Далее, из (6.1)-(6.2) легко получить, используя формулу Гаусса, что гауссова кривизна \tilde{K} поверхности \tilde{F}^2 связана с гауссовой кривизной K поверхности F^2 соотношением

$$\tilde{K} = \frac{1}{a^2} \cdot K,$$

поэтому равенство $K = \tilde{K}$ имеет место тогда и только тогда, когда либо $a(u, v) \equiv 1$, либо $a(u, v) \equiv -1$. Но тогда из (4.1)-(4.2) следует, что функция $b(u, v)$ должна удовлетворять двум соотношениям

$$\partial_u b + b\Gamma_{11}^1 = 0, \quad (7.1)$$

$$b\Gamma_{11}^2 = 0. \quad (7.2)$$

С локальной точки зрения возникают два различных подслучая: $\Gamma_{11}^2 \neq 0$ и $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$. В первом из них, более общем, когда Γ_{11}^2 не обращается в ноль, единственным решением системы (7.1)-(7.2) является функция $b(u, v) \equiv 0$, а значит поверхности F^2 и \tilde{F}^2 совмещаются параллельным переносом и, возможно, центральной симметрией (при $a(u, v) \equiv -1$).

Во втором же подслучае, более частном, когда $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$, равенство (7.2) выполняется автоматически, поэтому для функции b остается одно лишь условие (7.1). Каждому ненулевому решению $b(u, v)$ дифференциального уравнения (7.1) будет тогда соответствовать нетривиальное преобразование поверхности

F^2 , при котором сохраняются одновременно и грассманов образ, и гауссова кривизна.

Каков геометрический смысл условия $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$? Так как

$$\partial_{uu}\vec{r} = \Gamma_{11}^1\partial_u\vec{r} + \Gamma_{11}^2\partial_v\vec{r},$$

то легко видеть, что Γ_{11}^2 обращается в ноль в точке (u_1, v_1) тогда и только тогда, когда кривизна кривой $\vec{r}(u, v_1)$ в E^4 (эквивалентно – геодезическая кривизна асимптотической линии $v = v_1$ на F^2) равна нулю в точке u_1 . Как следствие, выполнение тождества $\Gamma_{11}^2 \equiv 0$ эквивалентно тому, что асимптотические линии $v = const$ на F^2 являются геодезическими, т.е. поверхность F^2 – линейчатая. Теорема доказана.

3. Деформации линейчатых поверхностей

Укажем наглядное описание деформаций линейчатых поверхностей F^2 в E^4 с точечной коразмерностью 2, при которых сохраняются грассманов образ и гауссова кривизна. Пусть поверхность F^2 в E^4 задана радиус-вектором

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\xi}(v) \cdot \varphi(u, v) + \vec{\eta}(v),$$

здесь (u, v) – полуасимптотические координаты. В этом случае уравнение (7.1) для функции $b(u, v)$ примет форму

$$\partial_u b \cdot \partial_u \varphi + b \cdot \partial_{uu} \varphi = 0.$$

Очевидно, что решение этого уравнения имеет вид

$$b(u, v) = \frac{\psi(v)}{\partial_u \varphi},$$

где функция $\psi(v)$ – произвольна; $\partial_u \varphi$ не обращается в ноль в виду регулярности поверхности F^2 . Подставив найденную функцию $b(u, v)$ в (3.1)-(3.2), легко получить, что поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^4$ с тем же грассмановым образом и той же гауссовой кривизной, что и у F^2 , задается радиус-вектором

$$\begin{aligned} \vec{\rho}(u, v) &= \pm \vec{r}(u, v) + \int \vec{\xi}(v) \psi(v) dv = \\ &= \pm \vec{\xi}(v) \cdot \varphi(u, v) + \vec{\eta}_1(v). \end{aligned}$$

Таким образом, при деформации F^2 преобразуется направляющая кривая, тогда как направления прямолинейных образующих не изменяются.

4. Жесткость в терминах грассманаова образа

Было бы естественным сформулировать условия, обеспечивающие жесткость или деформируемость рассматриваемых поверхностей, в терминах грассманаова образа. Это можно сделать следующим образом.

Грассманоово многообразии $G(2, 4)$ стандартным образом вкладывается с помощью плюккеровых координат в пятимерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^5$ (см. [8]). В каждой точке $z \in G(2, 4)$ асимптотические вектора подмногообразия $G(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{R}P^5$ образуют трехмерный конус C_z в касательном пространстве $T_z G(2, 4)$ (см. [9]). Можно показать, что точечная коразмерность поверхности $F^2 \subset E^4$ в точке P равна 2 тогда и только тогда, когда касательное пространство к грассманоову образу $T_P \Gamma$ в соответствующей точке P^* не принадлежит конусу C_{P^*} . Так же не составляет труда показать, что точка P^* является гиперболической, параболической либо эллиптической, если касательное пространство $T_P \Gamma$ соответственно пересекает конус C_{P^*} по двум различным прямым, касается C_{P^*} вдоль некоторой прямой либо пересекает C_{P^*} только в самой точке P^* .

Таким образом, если грассманоов образ Γ^2 поверхности F^2 является параболическим, то он однозначным образом расслаивается на кривые α_v^* , являющиеся асимптотическими для $G(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{R}P^5$. Прообразами этих линий при грассманоовом отображении являются в точности асимптотические линии α_v на самой поверхности $F^2 \subset E^4$.

Когда α_v представляют собой прямые, т.е. когда F^2 – линейчатая поверхность? Для ответа на этот вопрос удобно использовать следующую конструкцию. Рассмотрим множество всех подпространств E^2 в E^4 , ортогональных фиксированному одномерному подпространству $l^1 \subset E^4$. Легко видеть, что это множество есть ни что иное, как грассманоово многообразие $G(2, 3)$, вложенное в $G(2, 4)$; изменяя l^1 мы получаем семейство многообразий $G(2, 3)$, вложенных в $G(2, 4)$ (о таких стандартных вложениях см. [8], [10]). Для поля асимптотических конусов $(C_z, z \in G(2, 4))$ построенные $G(2, 3) \hookrightarrow G(2, 4)$ будут двумерными интегральными подмногообразиями.

Возвращаясь к поставленному вопросу, не сложно заметить, что если F^2 – линейчатая, т.е. каждая линия α_v на F^2 – прямая, то каждая из линий α_v^* на грассманоовом образе Γ^2 лежит на каком-либо $G(2, 3) \hookrightarrow G(2, 4)$: при движении вдоль α_v нормальная плоскость $N F^2$ всегда ортогональна α_v .

Верно и обратное утверждение. Действительно, не уменьшая общности предположим, что введенные на F^2 полуасимптотические координаты (u, v) – ортогональны. Зафиксируем $v = v_0$. Предположим, что кривая $\alpha_{v_0}^*$ грассманоова образа лежит на некотором $G(2, 3) \hookrightarrow G(2, 4)$. Это значит, что нормали \vec{n}_1, \vec{n}_2 к F^2 при $v = v_0$ ортогональны некоторому постоянному вектору \vec{e} :

$$\langle \vec{n}_1(u, v_0), \vec{e} \rangle = 0, \quad \langle \vec{n}_2(u, v_0), \vec{e} \rangle = 0.$$

Дифференцируя эти равенства по координате u с помощью дериационных формул Вейнгартена, и принимая во внимание асимптотичность линии α_{v_0} и

ортогональность координат (u, v) , получаем

$$\langle \partial_v \vec{r}(u, v_0), \vec{e} \rangle = 0,$$

а значит $\partial_u \vec{r}(u, v_0) = \lambda(u, v_0) \cdot \vec{e}$, откуда непосредственно уже следует, что линия α_{v_0} , задаваемая радиус-вектором $\vec{r}(u, v_0)$, — прямая с направляющим вектором \vec{e} . Следовательно, F^2 — действительно линейчатая.

Таким образом, Теорему 1 можно сформулировать исключительно в терминах гауссова образа.

Теорема 2. Поверхность $F^2 \subset E^4$ с параболическим грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ допускает (локально) нетривиальные преобразования с сохранением грассманова образа и гауссовой кривизны тогда и только тогда, когда Γ^2 расслаивается на кривые α_v^* , каждая из которых лежит на каком-либо $G(2, 3) \hookrightarrow G(2, 4)$.

Замечание. Поверхности $F^2 \subset E^{m+2}$, $m \geq 3$, с постоянной точечной координатностью 2 допускают аналогичную классификацию точек грассманова образа и соответствующую аффинную классификацию точек на самой поверхности. Подобно $F^2 \subset E^4$, такие поверхности так же могут быть нетривиально деформированы с сохранением параболического грассманова образа и гауссовой кривизны, и для них будут иметь место результаты, аналогичные доказанным в настоящей заметке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А. Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу // Математические заметки. — 1992. — Т. 51, 1. — С. 8–15.
2. Аминов Ю.А. Восстановление двумерной поверхности в n -мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Математические заметки. — 1984. — Т. 36, 2. — С. 223–228.
3. Аминов Ю.А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Математический сборник. — 1982. — Т. 117, 2. — С. 147–160.
4. Фоменко В.Т., Бикчантаев И.А. Применение обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях к исследованию G -деформаций двумерных поверхностей в E^4 // Математический сборник. — 1988. — Т. 136, 4. — С. 561–573.
5. Рыжков В.В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях // Труды ММО. — 1958. — Т. 7. — С. 179–227.
6. Борисенко А. А. Аффинная классификация точек многомерных поверхностей // Сибирский мат. журнал. — 1990. — Т. 31, 3. — С. 19–29.

7. Борисенко А.А. Об изометричных подмногообразиях произвольной размерности в евклидовом пространстве с совпадающим грассмановым образом // Математические заметки. – 1992. – Т. 52, 4. – С. 29–34.
8. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, В. 2. – С. 41–83.
9. Горькавый В.А. Восстановление подмногообразия евклидова пространства по вырожденному в линию грассманову образу // Математические заметки. – 1996. – Т. 5, 5. – С. 681–691.
10. Горькавый В.А. Теоремы редукции в задаче восстановления подмногообразий евклидова пространства по заданому грассманову образу // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1997. – Т. 4, 3. – С. 309–333.

Вісник Харківського національного університету
 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
 УДК 517.977.1+517.935.4 № 475, 2000, с. 323-329

Управляемость треугольных систем, неэквивалентных каноническим системам

В. И. Коробов, С. С. Павличков

Харьковский национальный университет, Украина
Szczecin University, Poland

Доказана полная управляемость класса систем треугольного вида, для которых в общем случае не существует локально диффеоморфного в каждой точке отображения траекторий на траектории канонических систем. Рассмотренный класс треугольных систем является более широким по сравнению с аналогичными классами, исследовавшимися ранее. Рассмотрен один пример.

1. Введение и формулировка основного результата

Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_{i+1}(t)), \\ i = 1, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) \end{cases} \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ - фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}^1$ - управление. Этот класс систем, называемый нами "треугольными" системами, впервые исследовался в работе [1], где с помощью отображения траекторий системы (1) на траектории канонической системы (т. е. системы вида $\dot{z}_i = z_{i+1}$, $\dot{z}_n = u$) доказывалась их управляемость и стабилизируемость. К управлению такими системами сводится, например, задача управления движением твердого тела - см. [2]. В дальнейшем такие системы рассматривались в различных задачах: задача стабилизации каскадов систем - [3], задачи асимптотического отслеживания и сходимости параметрических оценок - [4], приведение системы (1) к каноническому виду без замены управления - [5], управляемость в случае интегродифференциальных систем Вольтерра - [6] и т. д. Однако при этом всегда требуется как сюръективность, так и инъективность функций $f_i(t, x_1, \dots, x_i, \cdot)$ (обычно требуют $|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}| \geq a > 0$ или более того $f_i(t, x) = x_{i+1} + \phi_i(t, x_1, \dots, x_i)$) что позволяет, например, построить глобально диффеоморфное отображение траекторий системы (1) на траектории канонической системы. Цель данной

работы - снять эти ограничения (точнее, мы пока снимаем только требование инъективности) для задачи управляемости.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) При каждом $i = 1, \dots, n$ функция f_i принадлежит классу $C^1([t_0, T] \times \mathbf{R}^{i+1}; \mathbf{R}^1)$.

(ii) При каждом $i = 1, \dots, n$ и любых $(t, x_1, \dots, x_i) \in [t_0, T] \times \mathbf{R}^i$ образ отображения $f_i(t, x_1, \dots, x_i, \cdot)$ есть все \mathbf{R}^1 .

Теорема 1. При сделанных предположениях (i), (ii) система (1) полностью управляема.

Нам понадобится следующая лемма, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 1. Пусть для k -мерной линейной системы

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = \sum_{j=1}^{i+1} \alpha_{ij}(t) z_j(t), \\ i = 1, \dots, k-1; \\ \dot{z}_k(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_{kj}(t) z_j(t) + \alpha_{k, k+1}(t) v(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \quad (2)$$

(v - управление, $\alpha_{ij}(\cdot) \in L_\infty([t_0, T]; \mathbf{R}^1)$, $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, i+1$) существует отрезок $[a, b] \subset [t_0, T]$, $a < b$, такой, что $\alpha_{ij}(\cdot) \in C([a, b]; \mathbf{R}^1)$ ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, i+1$) и $|\alpha_{i, i+1}(t)| > 0$, $i = 1, \dots, k$ при всех $t \in [a, b]$. Тогда система (2) полностью управляема на отрезке $[t_0, T]$ (в классе управлений из $C^1([t_0, T]; \mathbf{R}^1)$).

При каждом $k = 1, \dots, n$ рассмотрим k -мерную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_{i+1}(t)), \\ i = 1, \dots, k-1; \\ \dot{x}_k(t) = f_k(t, x_1(t), \dots, x_k(t), v(t)) \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \quad (3)$$

Пусть $t \mapsto x(t, \tau, x^0, v(\cdot)) = (x_1(t, \tau, x^0, v(\cdot)), \dots, x_k(t, \tau, x^0, v(\cdot)))^T$ - траектория системы (3), выходящая в момент времени $\tau \in [t_0, T]$ из заданной точки $x^0 \in \mathbf{R}^k$ и отвечающая заданному управлению $v(\cdot) \in L_\infty([t_0, T]; \mathbf{R}^1)$. Ясно, что теорема 1 будет доказана, если доказать следующее утверждение.

Теорема 2. При любых $k = 1, \dots, n$, $x^0 \in \mathbf{R}^k$, $x^T \in \mathbf{R}^k$ существуют отрезок $[a, b] \in [t_0, T]$ ($a < b$) и управление $v(\cdot) \in L_\infty([t_0, T]; \mathbf{R}^1) \cap C([a, b]; \mathbf{R}^1)$ такие, что

$$x(T, t_0, x^0, v(\cdot)) = x^T \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(t, x_1(t, t_0, x^0, v(\cdot)), \dots, x_{i+1}(t, t_0, x^0, v(\cdot))) \right| > 0 \quad \text{при всех } t \in [a, b] \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, k-1;$$

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial v}(t, x(t, t_0, x^0, v(\cdot)), v(t)) \right| > 0 \text{ при всех } t \in [a, b]. \quad (6)$$

Отсюда при $k = n$, применяя лемму 1, мы получим еще и управляемость системы (1) "по первому приближению" (в смысле утверждения теоремы 2) помимо глобальной.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_2) \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где функция f определена следующим образом:

$$f(y) = \begin{cases} (y+1)^3 & \text{при } y < -1 \\ 0 & \text{при } y \in [-1, 1] \\ (y-1)^3 & \text{при } y > 1 \end{cases}$$

Легко убедиться, что не существует замены координат и управления $z = \Phi(x)$, $v = \Psi(x, u)$, отображающей траектории системы (7) на траектории канонической системы

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

и являющейся, по крайней мере, локальным диффеоморфизмом в каждой точке $(x, u) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1$. Действительно, предположим, что такая замена существует. Рассмотрим для системы (7) процесс $u(\cdot) = u_0 := 0$, $x(\cdot) = (x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = (x_{10}, x_{20}) := 0$ и пусть $z(t) = (z_1(t), z_2(t)) = \Phi(x(t)) \equiv (z_{10}, z_{20})$, $v(t) = \Psi(x(t), u(t)) \equiv v_0$ — соответствующий процесс для системы (8). Тогда $z_{20} = v_0 = 0$. Обозначим: $v_1(t) = \frac{6}{T^2} - \frac{12}{T^3}t$, $v_2(t) = -\frac{2}{T} + \frac{6}{T^2}t$, $t \in [0, T]$. Легко проверить, что управления $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ подобраны так, что они переводят $0 \in \mathbf{R}^2$ в базисные векторы $e_1 = (1, 0)^T$ и $e_2 = (0, 1)^T$ соответственно в силу канонической системы (8) за время $[0, T]$. Для каждого $(\mu_1, \mu_2)^T \in \mathbf{R}^2$ обозначим $v_{(\mu_1, \mu_2)}(t) := v_0 + \mu_1 v_1(t) + \mu_2 v_2(t)$, $t \in [0, T]$ и пусть $z_{(\mu_1, \mu_2)}(\cdot)$ — траектория системы (8) с управлением $v_{(\mu_1, \mu_2)}(\cdot)$ такая, что $z_{(\mu_1, \mu_2)}(0) = (z_{10}, z_{20})^T$. Так как $(\Phi(\cdot), \Psi(\cdot, \cdot))$, а значит и $\Phi(\cdot)$, — локальный диффеоморфизм в некоторой окрестности точки $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = 0$, то в этой окрестности однозначно определены $x_{(\mu_1, \mu_2)}(\cdot)$ и $u_{(\mu_1, \mu_2)}(\cdot)$ с помощью соотношений $z_{(\mu_1, \mu_2)}(t) = \Phi(x_{(\mu_1, \mu_2)}(t))$, $v_{(\mu_1, \mu_2)}(t) = \Psi(x_{(\mu_1, \mu_2)}(t), u_{(\mu_1, \mu_2)}(t))$. По построению, $z_{(\mu_1, \mu_2)}(T) = (z_{10}, z_{20})^T + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = (z_{10} + \mu_1, \mu_2)^T$. Но при малых μ_1, μ_2 управление $u_{(\mu_1, \mu_2)}(\cdot)$, а значит и $x_{(\mu_1, \mu_2)}(\cdot)$ близки к тождественному нулю по норме $C([0, T]; \mathbf{R}^1)$; поэтому при малых μ_1, μ_2 получаем: $x_{1(\mu_1, \mu_2)}(t) = x_{1(\mu_1, \mu_2)}(0) = 0$, ($t \in [0, T]$). Итак, при достаточно малых μ_1, μ_2 имеем: $x_{1(\mu_1, \mu_2)}(\cdot) \equiv 0$, следовательно в нуле ранг отображения $(\mu_1, \mu_2) \mapsto x_{(\mu_1, \mu_2)}(T)$ не больше единицы, в то время как ранг отображения

$(\mu_1, \mu_2) \mapsto z_{(\mu_1, \mu_2)}(T) = (z_{10} + \mu_1, \mu_2)$ равен двум, что противоречит локальной диффеоморфности $(\Phi(\cdot), \Psi(\cdot, \cdot))$ в окрестности нуля. Заметим также, что под эквивалентностью управляемых систем мы понимаем, естественно, существование глобально диффеоморфной замены координат и управлений. Но так как для системы (7) нет даже локально диффеоморфной (всюду) замены, то нет и глобальной. Тем не менее система (7) удовлетворяет условиям (i) и (ii) и потому полностью управляема, а также "управляема по первому приближению" в смысле теоремы 2. Отметим, что можно было взять f и немонотонной: если положить $f(y) := ((y-1)^5 + |y-1|^5) \sin(y-1)$, то все сказанное выше сохраняет силу.

2. Доказательство теоремы 2

Для произвольных $r > 0$ и $x \in \mathbf{R}^k$ символом $B_r(x)$ будем обозначать открытый шар $\{y \in \mathbf{R}^k \mid |y-x| < r\}$.

Доказательство проведем индукцией по $k = 1, \dots, n$. Пусть $k = 1$. Зафиксируем произвольную точку $t_1 \in]t_0, T[$. Выберем любые $x^0 \in \mathbf{R}^1$, $x^T \in \mathbf{R}^1$ и $x^1 \in \mathbf{R}^1$ и для любого числа $\xi \in \mathbf{R}^1$ подберем функцию $x_\xi(\cdot) \in C^1([t_0, T]; \mathbf{R}^1)$, удовлетворяющую условиям $x_\xi(t_0) = x^0$, $x_\xi(T) = x^T$, $x_\xi(t_1) = x^1$, $\dot{x}_\xi(t_1) = \xi$. Тогда из условия (ii) получаем существование чисел $\xi_1 \in \mathbf{R}^1$ и $v^1 \in \mathbf{R}^1$ таких, что $\xi_1 = f_1(t_1, x^1, v^1)$ и $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t_1, x^1, v^1) \neq 0$. Отсюда по теореме о неявной функции получаем существование $\delta > 0$ и функции $v(\cdot) \in C([t_1 - \delta, t_1 + \delta]; \mathbf{R}^1)$ таких, что $\dot{x}_{\xi_1}(t) = f_1(t, x_{\xi_1}(t), v(t))$ и $|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_{\xi_1}(t), v(t))| > 0$ при всех $t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ ($v(t_1) = v^1$). Нам остается доопределить управление $v(\cdot)$ на множестве $[t_0, t_1 - \delta] \cup]t_1 + \delta, T]$ так, чтобы соотношение $\dot{x}_{\xi_1}(t) = f_1(t, x_{\xi_1}(t), v(t))$ выполнялось на всем $[t_0, T]$. Это легко сделать, немного изменив доказательство хорошо известной леммы об измеримом выборе. А именно: пользуясь условием (ii) и компактностью множества $\{(t, \dot{x}_{\xi_1}(t)) \in [t_0, T] \times \mathbf{R}^1 \mid t \in [t_0, T]\}$, из семейства множеств $\Omega_q := [-q, q] \subset \mathbf{R}^1$ ($q \in \mathbf{N}$) выбираем Ω_{q_0} такое, что $\dot{x}_{\xi_1}(t) \in f_1(t, x_{\xi_1}(t), \Omega_{q_0})$ при всех $t \in [t_0, T]$; затем при каждом $t \in [t_0, t_1 - \delta] \cup]t_1 + \delta, T]$ полагаем $v(t) := \min\{v \in \Omega_{q_0} \mid \dot{x}_{\xi_1}(t) = f_1(t, x_{\xi_1}(t), v)\}$ (так как множество прообразов замкнуто, то минимум корректно определен). После чего получаем измеримость множества $\{t \in [t_0, T] \mid v(t) \leq \alpha\}$ при каждом $\alpha \in \mathbf{R}^1$, а значит и измеримость функции $v(t)$ (ее ограниченность следует из ограниченности множества Ω_{q_0}). При $k = 1$ теорема 2 доказана: в качестве $[a, b]$ берем $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$.

Пусть теорема 2 верна для системы (3) порядка $k \in \{1, \dots, n\}$. Выберем любые $x^0 \in \mathbf{R}^k$, $x^T \in \mathbf{R}^k$ и пусть $v(\cdot) \in C([a, b]; \mathbf{R}^1) \cap L_\infty([t_0, T]; \mathbf{R}^1)$ - управление, обеспечивающее условия (4)-(6) ($t_0 \leq a < b \leq T$). Вводя обозначения $x = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbf{R}^k$, $f(t, x, v) := (f_1(t, x_1, x_2), \dots, f_k(t, x_1, \dots, x_k, v))^T$, запишем систему (3) в векторном виде: $\dot{x} = f(t, x, v)$. Зафиксируем любое $t_1 \in]a, b[$ и обозначим $x^1 := x(t_1, t_0, x^0, v(\cdot)) \in \mathbf{R}^k$, $v^1 := v(t_1) \in \mathbf{R}^1$. Индуктивный переход основан на следующем утверждении.

Утверждение 1. Для любых $v^0 \in \mathbf{R}^1$, $v^T \in \mathbf{R}^1$, $\xi \in \mathbf{R}^1$ существует управление $\hat{v}_\xi(\cdot) \in C^1([t_0, T]; \mathbf{R}^k)$, удовлетворяющее условиям $\hat{v}_\xi(t_0) = v^0$, $\hat{v}_\xi(t_1) = v^1$, $\hat{v}_\xi(T) = v^T$, $\frac{d}{dt}\hat{v}_\xi(t_1) = \xi$, $x(t_1, t_0, x^0, \hat{v}_\xi(\cdot)) = x^1$, $x(T, t_0, x^0, \hat{v}_\xi(\cdot)) = x^T$.

Действительно, если утверждение 1 верно, то в силу условия (ii) существуют $\xi_1 \in \mathbf{R}^1$ и $u^1 \in \mathbf{R}^1$ такие, что $\xi_1 = f_{k+1}(t_1, x^1, v^1, u^1) \in \mathbf{R}^1$ и $\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+2}}(t_1, x^1, v^1, u^1) \neq 0$. Далее, дословно повторяя рассуждения, проделанные при $k = 1$, строим $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, T]; \mathbf{R}^1) \cup C([t_1 - \delta, t_1 + \delta]; \mathbf{R}^1)$, где $\delta > 0$ - достаточно мало, $u(t_1) = u^1$, такое, что $\frac{d}{dt}\hat{v}_{\xi_1}(t) = f_{k+1}(t, x(t, t_0, x^0, \hat{v}_{\xi_1}(\cdot)), \hat{v}_{\xi_1}(t), u(t))$, при всех $t \in [t_0, T]$. Так как, по индуктивному предположению $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(t_1, x^1, v^1) \neq 0$, $i = 1, \dots, k$, то по непрерывности получаем, что и система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, v) \\ \dot{v} = f_{k+1}(t, x, v, u) \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \quad (9)$$

с построенным управлением $u(\cdot)$ удовлетворяет всем утверждениям (4)-(6) теоремы 2, а в качестве отрезка $[a, b]$ берется замыкание некоторой окрестности точки t_1 .

Перейдем к доказательству утверждения 1. Покажем, как строится управление $\hat{v}_\xi(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, на $[t_1, T]$ построения аналогичны. Выберем любые $v^0 \in \mathbf{R}^1$ и $\xi \in \mathbf{R}^k$. Из индуктивного предположения и из леммы 1 следует, что система в вариациях

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x^0, v(\cdot)), v(t))z + \frac{\partial f}{\partial v}(t, x(t, t_0, x^0, v(\cdot)), v(t))w, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (10)$$

вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$ (в классе $C^1([t_0, t_1]; \mathbf{R}^1)$). Пусть $w_i(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]; \mathbf{R}^1)$ - управления, переводящие $0 \in \mathbf{R}^k$ в базисные векторы $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^k$ (единица на i -м месте) в силу системы (10) за время $[t_0, t_1]$. При каждом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T \in \mathbf{R}^k$ обозначим $v_\lambda(t) = v(t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j w_j(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и для каждого $\lambda \in \mathbf{R}^k$ такого, что траектория $t \mapsto x(t, t_0, x^0, v_\lambda(\cdot))$ определена при всех $t \in [t_0, t_1]$, обозначим $F(\lambda) = x(t_1, t_0, x^0, v_\lambda(\cdot))$. Повторяя (с незначительными видоизменениями) доказательство известной теоремы о дифференцировании решений системы дифференциальных уравнений по параметру, получаем, что отображение $\lambda \mapsto F(\lambda)$ определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности нуля и (по выбору $w_i(\cdot)$) $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0) = I$, где I - единичная матрица. Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $F(\cdot)$ - диффеоморфизм некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ на $B_{\varepsilon_0}(x^1)$. Для любого $\sigma > 0$ (σ достаточно мало) построим управления $w_{i,\sigma}(\cdot)$ ($i = 1, \dots, k$) и $v_{\sigma,\xi}(\cdot)$, удовлетворяющие условиям

$$w_{i,\sigma}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]; \mathbf{R}^1), \quad i = 1, \dots, k; \quad v_{\sigma,\xi}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]; \mathbf{R}^1)$$

$$w_{i,\sigma}(t_0) = 0, \quad w_{i,\sigma}(t_1) = 0, \quad \dot{w}_{i,\sigma}(t_1) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\begin{aligned}
v_{\sigma,\xi}(t_0) &= v^0, \quad v_{\sigma,\xi}(t_1) = v^1, \quad \dot{v}_{\sigma,\xi}(t_1) = \xi \\
\|w_{i,\sigma}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1];\mathbf{R}^1)} &\leq \|w_i(\cdot)\|_{C([t_0,t_1];\mathbf{R}^1)} + 1 \\
\|v_{\sigma,\xi}(\cdot)\|_{C([t_0,t_1];\mathbf{R}^1)} &\leq \|v(\cdot)\|_{L_\infty([t_0,T];\mathbf{R}^1)} + 1 + |v^0| \\
w_{i,\sigma}(t) &= w_i(t) \text{ при всех } t \in [t_0 + \sigma, t_1 - \sigma] \\
|v_{\sigma,\xi}(t) - v(t)| &< \sigma \text{ при всех } t \in [t_0, t_1] \setminus E_\sigma
\end{aligned}$$

где $E_\sigma = [t_0, t_0 + \sigma] \cup [t_1 - \sigma, t_1] \cup \Delta_\sigma$ и $\Delta_\sigma \subset [t_0 + \sigma, t_1 - \sigma]$ - измеримое множество такое, что $\text{mes} \Delta_\sigma < \sigma$. При любых $\lambda \in B_{\varepsilon_0}(0)$ и $\sigma > 0$ (σ достаточно мало) введем управление $v_{\sigma,\xi,\lambda}(\cdot)$, полагая $v_{\sigma,\xi,\lambda}(t) := v_{\sigma,\xi}(t) + \sum_{j=1}^k \lambda_j w_{j,\sigma}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

По построению, каждое $v_{\sigma,\xi,\lambda}(\cdot)$ принадлежит $C^1([t_0, t_1]; \mathbf{R}^1)$ и удовлетворяет всем требуемым краевым условиям: $v_{\sigma,\xi,\lambda}(t_0) = v^0$, $v_{\sigma,\xi,\lambda}(t_1) = v^1$, $\dot{v}_{\sigma,\xi,\lambda}(t_1) = \xi$. Остается показать, что какое-то из управлений $v_{\sigma,\xi,\lambda}(\cdot)$ переводит точку x^0 в точку x^1 в силу системы (3) за время $[t_0, t_1]$. Для этого воспользуемся следующей леммой, которую приводим без доказательства.

Лемма 2. Для любого $\rho > 0$ существует $\sigma_0(\rho) > 0$ такое, что для всех $\sigma \in]0, \sigma_0(\rho)]$ и $\lambda \in F^{-1}(\overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)})$ траектория $t \mapsto x(t, t_0, x^0, v_{\sigma,\xi,\lambda}(\cdot))$ определена на всем $[t_0, t_1]$ и $|x(t_1, t_0, x^0, v_{\sigma,\xi,\lambda}(\cdot)) - F(\lambda)| < \rho$.

Докажем, что из леммы 2 следует утверждение 1. В лемме 2 положим $\rho := \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда, так как, по построению, $F(\cdot)$ - диффеоморфизм $F^{-1}(\overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)})$ на $\overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)}$, то можно определить непрерывное отображение $\Phi(\cdot) : \overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)} \rightarrow \mathbf{R}^k$, полагая $\Phi(y) := x(t_1, t_0, x^0, v_{\sigma,\xi,F^{-1}(y)}(\cdot))$ при всех $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)}$, где $0 < \sigma \leq \sigma_0(\rho) = \sigma_0(\frac{\varepsilon_0}{2})$. Тогда, по утверждению леммы 2 имеем: $|\Phi(y) - y| < \rho = \frac{\varepsilon_0}{2}$, откуда следует, что отображение $y \mapsto x^1 - \Phi(y) + y$ переводит замкнутый шар $\overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)}$ в себя, а значит, по теореме Брауера, имеет неподвижную точку. Таким образом, существует $y^* \in \overline{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x^1)}$ такое, что $y^* = x^1 - \Phi(y^*) + y^*$, то есть $x^1 = \Phi(y^*)$. По построению, управление $\hat{v}(\cdot) := v_{\sigma,\xi,F^{-1}(y^*)}(\cdot)$ является искомым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В. И. Управляемость устойчивость некоторых нелинейных систем // Диф. уравнения, - 1973. - 7. - С. 1120-1123.
2. Ковалев А. М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем.- Киев: Наукова думка, 1980. - 174 с.
3. Sontag E. D. Feedback stabilization of nonlinear systems // in Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control (М. А. Kaashoek et. al. eds.) - Birkhauser: Cambridge, MA, - 1990. - P. 61-81.

Автомодельное решение уравнений динамики цилиндрических ударных волн

Е. А. Миллер, С. А. Пославский

Харьковский национальный университет, Украина

Исследуются специальные решения уравнений динамики ударных волн, имеющие вид простых волн. Полученное автомодельное решение в случае цилиндрических ударных волн описывает движение сходящейся волны с изменяющейся вдоль фронта интенсивностью в сужающейся спиралевидной полости. Решение не обладает осевой симметрией, но кумулятивный эффект достигается такой же, как и в осесимметричном случае.

В теоретических исследованиях по газовой динамике большое внимание уделяется течениям с ударными волнами (УВ). Известно несколько точных решений такого типа, среди которых ставшее классическим решение Седова задачи о сильном взрыве и решение Гудерлея-Ландау-Станюковича задачи о сходящейся ударной волне [1, 2]. Как правило, аналитические решения с ударными волнами получены для одномерных автомодельных течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами. Неодномерные разрывные течения изучаются обычно с привлечением приближенных методов. Так, в задачах о сходящихся УВ хорошо зарекомендовал себя метод Честера-Чизнелла-Уизема [3]. Данная работа посвящена исследованию в рамках этого метода специальных решений уравнений динамики УВ, имеющих вид простых волн.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую распространение фронта цилиндрической УВ по однородному покоящемуся газу [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin \theta}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos \theta}{M} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \theta}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \theta}{A} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y — прямоугольные декартовы координаты, $M = D/a_0$ — число Маха УВ, D — скорость движения фронта УВ, a_0 — невозмущенная скорость звука, θ — угол между нормалью к фронту и осью абсцисс,

$$A = A_0 \exp \left(- \int \frac{M \lambda(M)}{M^2 - 1} dM \right),$$

$$\lambda(M) = \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu}\right) \left(1 + 2\mu + \frac{1}{M^2}\right),$$

$$\mu^2 = \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)},$$

$A_0 > 0$ — постоянная, γ — показатель адиабаты газа.

Инварианты Римана для системы (1) имеют вид [3]:

$$\theta \pm \omega(M) = \text{const} \quad \text{на характеристиках} \quad C_{\pm}: \quad dy/dx = \text{tg}(\theta \pm m),$$

где

$$\omega(M) = \int_1^M \frac{dM}{Ac}, \quad c(M) = \sqrt{-\frac{M}{AA'}}, \quad \text{tg}m = \frac{Ac}{M} = \sqrt{-\frac{A}{MA'}},$$

m — угол между нормалью к фронту УВ и характеристикой.

Рассмотрим решение системы (1) в виде простой волны. Пусть один из инвариантов Римана, например $\theta - \omega(M)$, постоянен во всем течении. Тогда характеристики семейства C_+ являются прямыми и их уравнения могут быть записаны в виде:

$$y - \text{tg}(\theta + m)x = f(M),$$

где $f(M)$ — произвольная функция. Вдоль этих характеристик значения всех зависимых переменных M, θ, A, c сохраняются.

Рассмотрим очень сильную УВ. В этом случае $M \rightarrow \infty$ и поэтому $\omega(M) \sim n^{1/2} \ln M$ и $\text{tg}m = 1/\sqrt{n}$, где $n = 1 + 2/\gamma + \sqrt{2\gamma/(\gamma - 1)}$ (например, $n = 5,073$ для $\gamma = 7/5$).

Таким образом, во всей области течения выполняется соотношение

$$\theta - \sqrt{n} \ln M = C.$$

Пусть в некоторый начальный момент времени $t = 0$ форма фронта УВ описывается зависимостью $y = Y(x)$. Рассмотрим прямолинейную характеристику семейства C_+ , проходящую через точку $(x_0, Y(x_0))$. В силу условия $\text{tg}\theta = -1/Y'(x_0)$ ее уравнение может быть также записано в виде

$$y - Y(x_0) = \frac{Y'(x_0) - \sqrt{n}}{Y'(x_0)\sqrt{n} + 1}(x - x_0). \quad (2)$$

Теперь можно выписать решение в виде простой волны:

$$\theta(x, y) = \text{arctg} \left(-\frac{1}{Y'(x_0)} \right),$$

$$M(x, y) = \exp \left(\frac{\theta(x, y) - C}{\sqrt{n}} \right), \quad (3)$$

в котором зависимость x_0 от x, y неявно определяется формулой (2). Область существования такого решения требует отдельного исследования в каждом конкретном случае.

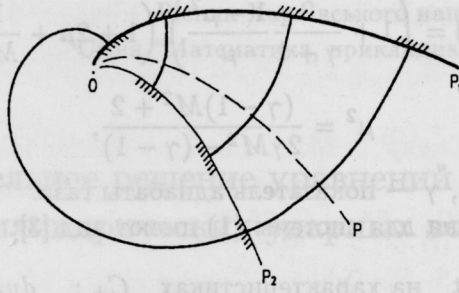


Рис. 1: Движение спиралевидной УВ

Рассмотрим центрированную простую волну. Пусть все характеристики семейства C_+ пересекаются в начале координат. Поскольку нормали к фронту УВ всюду образуют с характеристиками одинаковый угол m , то фронт УВ представляет собой в любой момент времени участок логарифмической спирали, уравнение которой в полярных координатах r, φ имеет вид

$$r = G \exp(\varphi/\sqrt{n}),$$

где G — некоторая постоянная.

В рассматриваемом случае решение (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi - m, \\ M &= \exp\left(\frac{\theta - C}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку фронт УВ оказывается незамкнутой линией, полученное решение приобретает физический смысл только при наличии в плоскости течения твердых стенок. Введем дополнительно условие ортогональности фронта к поверхностям этих стенок. Тогда решение (4) можно интерпретировать как движение сходящейся спиралевидной волны в плоскости, содержащей твердую стенку OP_1 , также имеющую форму логарифмической спирали $r = K \exp(-\varphi\sqrt{n})$ (рис.1).

В каждый момент времени фронт УВ пересекает твердую стенку в двух точках. Проведем прямые через начало координат и эти точки. Угол δ между этими прямыми остается постоянным во все моменты времени и равным $2\pi n/(n+1)$.

Пусть в некоторый момент времени фронт УВ пересекает стенку в точке $(r_{ст}, \varphi_{ст})$, где $\varphi_{ст} = -\ln(r_{ст}/K)/\sqrt{n}$. Уравнение фронта в данный момент имеет вид

$$r = r_{ст} \exp\left(\frac{\varphi - \varphi_{ст}}{\sqrt{n}}\right), \quad \varphi_{ст} \leq \varphi \leq \delta + \varphi_{ст},$$

а число Маха УВ меняется вдоль фронта по закону

$$M = \frac{r}{r_{ст}} \exp\left(\frac{\varphi_{ст} - m - C}{\sqrt{n}}\right).$$

Ограничивая область распространения УВ двумя твердыми стенками OP_1 и OP_2 , задаваемыми уравнениями $r = K \exp(-\varphi\sqrt{n})$ и $r = K \exp(-(\varphi + \epsilon)\sqrt{n})$ соответственно, можно трактовать решение (4) как движение фронта в спиралевидном канале (рис.1). Сделав полный виток в этом канале, УВ усиливается в $\exp(2\pi/\sqrt{n})$ раз. Зависимость числа Маха УВ от расстояния r до начала координат вдоль любого луча OP (рис.1), например, вдоль стенки, имеет степенной вид:

$$M \sim \left(\frac{K}{r}\right)^{1/n},$$

что согласуется с решением Гудерлея в осесимметричном случае.

Полученное частное решение уравнений динамики цилиндрических УВ имеет автономный характер, но, в отличие от известных решений, не обладает осевой симметрией. Оно описывает движение сходящейся УВ с изменяющейся вдоль фронта интенсивностью в сужающейся спиралевидной полости. Достижимый кумулятивный эффект (т.е. рост интенсивности УВ с приближением ее к центру) здесь точно такой же, как и в осесимметричном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 430 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

Об асимптотическом поведении решений вырожденных линейных дифференциальных уравнений

А. Л. Пивень

Харьковский национальный университет, Украина

Рассматривается дифференциальное уравнение $\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0$, где A_j – линейные замкнутые операторы в гильбертовом пространстве. Операторы A_j могут иметь нетривиальные ядра. Устанавливаются условия, при которых решения этого уравнения допускают асимптотическое представление в виде ряда по элементарным решениям при $t \rightarrow \infty$. Результаты применяются к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0, \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь A_j – замкнутые линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве X , с областями определения D_j соответственно. В предположении обратимости оператора A_n в работах [1], [2] найдены условия, при которых решения уравнения (1) допускают асимптотическое представление в виде ряда по элементарным решениям при $t \rightarrow \infty$. В отличие от [1], [2], мы не предполагаем обратимость оператора A_n и остальных операторов A_j . В связи с этим уравнение (1) называется *вырожденным* [3]. Единственность решения и полнота элементарных решений для вырожденного уравнения (1) была рассмотрена в [3]. В данной работе исследуется асимптотическое представление решений вырожденного уравнения (1) в виде ряда по элементарным решениям при $t \rightarrow \infty$.

Будем пользоваться определением решения уравнения (1), данным в [3]: $u(t) \in C^n\{(0, \infty), X\} \cap C^{n-1}\{[0, \infty), X\}$, $A_j u(t) \in C^j\{(0, \infty), X\} \cap C^{j-1}\{[0, \infty), X\}$, $j = 1, \dots, n$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1). Множество всех решений $u(t)$ уравнения (1), для которых функции $u(t)$, $A_j u(t)$, $j = 0, \dots, n-1$ имеют конечный экспоненциальный тип, меньший α , обозначим через U_α .

С уравнением (1) связываем операторный пучок $P(\lambda) = \sum_{j=0}^n \lambda^j A_j$, определенный на $D = \bigcap_{j=0}^n D_j \neq \{0\}$. Предположим, что пучок $P(\lambda)$ имеет регулярную точку λ_0 , т.е. существует резольвентный оператор $R(\lambda_0) = P^{-1}(\lambda_0) \in L(X, X)$, где через $L(X, Y)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, отображающих гильбертово пространство X в гильбертово пространство Y .

Также предположим, что операторы $A_j R(\lambda_0)$, $j = 1, \dots, n$ вполне непрерывны. Тогда из результатов [4] и соотношения

$$P(\lambda) = \left(\sum_{j=1}^n (\lambda^j - \lambda_0^j) A_j R(\lambda_0) + E \right) P(\lambda_0)$$

следует, что спектр пучка $P(\lambda)$ состоит не более чем из счетного числа собственных чисел конечной кратности и резольвента $R(\lambda)$ является мероморфной оператор-функцией.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(H). Для некоторых $\alpha, \gamma > 0$, $\beta \geq \alpha$ множество $\Sigma_{\alpha, \gamma}^{\beta} = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha, \operatorname{Re} \lambda \geq -\gamma |\operatorname{Im} \lambda| + \beta\}$ состоит из регулярных точек пучка $P(\lambda)$ и на этом множестве справедлива оценка $\|R(\lambda)\| = O(e^{\sigma|\lambda|})$, $\sigma \geq 0$.

Рассмотрим последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных чисел пучка $P(\lambda)$ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$. Для собственного числа λ_k рассмотрим каноническую систему $\{u_k^h(t)\}_{h=1}^{p_k}$ элементарных решений уравнения (1) (см., например, [1]). Пусть $\hat{u}(\lambda)$ – преобразование Лапласа решения $u(t) \in U_{\alpha}$. Для всех регулярных точек λ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha$ справедлива формула связи преобразования Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ с резольвентой $R(\lambda)$:

$$\hat{u}(\lambda) = R(\lambda) \sum_{j=1}^n A_j \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-1-s} u^{(s)}(0).$$

С учетом этого соотношения, функция $\hat{u}(\lambda)$ продолжается как мероморфная функция в полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$. Для продолженной функции сохраним обозначение $\hat{u}(\lambda)$. Ее полюсы совпадают с полюсами функции $R(\lambda) \sum_{j=1}^n A_j \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-1-s} u^{(s)}(0)$ из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$ и являются собственными числами пучка $P(\lambda)$. Обозначим через Γ_k ($k = 1, 2, \dots$) окружность с центром в точке λ_k и достаточно малого радиуса. Тогда существуют коэффициенты $c_{k,h}$ ($h = 1, \dots, p_k$) такие, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t} \hat{u}(\lambda) d\lambda = \sum_{h=1}^{p_k} c_{k,h} u_k^h(t), \quad t > 0.$$

(ср. [1]). Как и в [1], ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t} \hat{u}(\lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{p_k} c_{k,h} u_k^h(t) \quad (2)$$

назовем *формальным рядом Фурье решения* $u(t)$, который, вообще говоря, расходится. Укажем условия, при которых этот ряд служит асимптотическим представлением решения $u(t) \in U_{\alpha}$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема. *Предположим, что выполнено условие (H) и операторы $A_j R(\lambda_0)$ ($j = 1, \dots, n$) вполне непрерывны для некоторой регулярной точки λ_0 пучка $P(\lambda)$. Пусть $u_b(t)$ — частичная сумма ряда Фурье (2), в которой участвуют все элементарные решения, отвечающие собственным числам пучка $P(\lambda)$ из полосы $-b \leq \operatorname{Re} \lambda < \alpha$ ($b > 0$). Тогда для любого $t_0 > \sigma(1 + \frac{1}{\gamma})$ существует $M > 0$ такое, что справедлива оценка*

$$\|u(t) - u_b(t)\| \leq M e^{-bt} \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{j-1} \|A_j u^{(s)}(0)\|, \quad t \geq t_0. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in U_{\alpha}$. Выберем такое $b_0 > 0$, что полоса $-b_0 \leq \operatorname{Re} \lambda < -b$ состоит из регулярных точек пучка $P(\lambda)$. Обозначим $f_t(\lambda) = e^{\lambda t} \hat{u}(\lambda)$. Справедлива формула обращения преобразования Лапласа $\hat{u}(\lambda)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} \lambda = \alpha} f_t(\lambda) d\lambda, \quad t > 0.$$

В силу теоремы о вычетах имеем

$$u(t) = u_b(t) - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_l f_t(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k^+} f_t(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k^-} f_t(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k^+} f_t(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k^-} f_t(\lambda) d\lambda \right), \quad t > 0. \quad (4)$$

(см. рис. 1). Рассмотрим углы Λ^+ , Λ^- , которые представляют собой множество $\Sigma_{\alpha, \gamma}^{\beta}$ (см. рис. 1). Из условия (H) следует, что в углах Λ^+ , Λ^- справедлива оценка

$$\|f_t(\lambda)\| \leq C(t) e^{\sigma_1 |\lambda|}, \quad \sigma_1 > 0, \quad t > 0, \quad C(t) > 0.$$

Обозначим через $\partial\Lambda^+$, $\partial\Lambda^-$ границы углов Λ^+ , Λ^- соответственно. Так как $f_t(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \partial\Lambda^+ \cup \partial\Lambda^-$, $t > \sigma(1 + \frac{1}{\gamma})$, то согласно принципу Фрагмена-Линделефа при тех же значениях t имеем $f_t(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Поэтому при $t > \sigma(1 + \frac{1}{\gamma})$ два последних интеграла в (4) стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Следовательно,

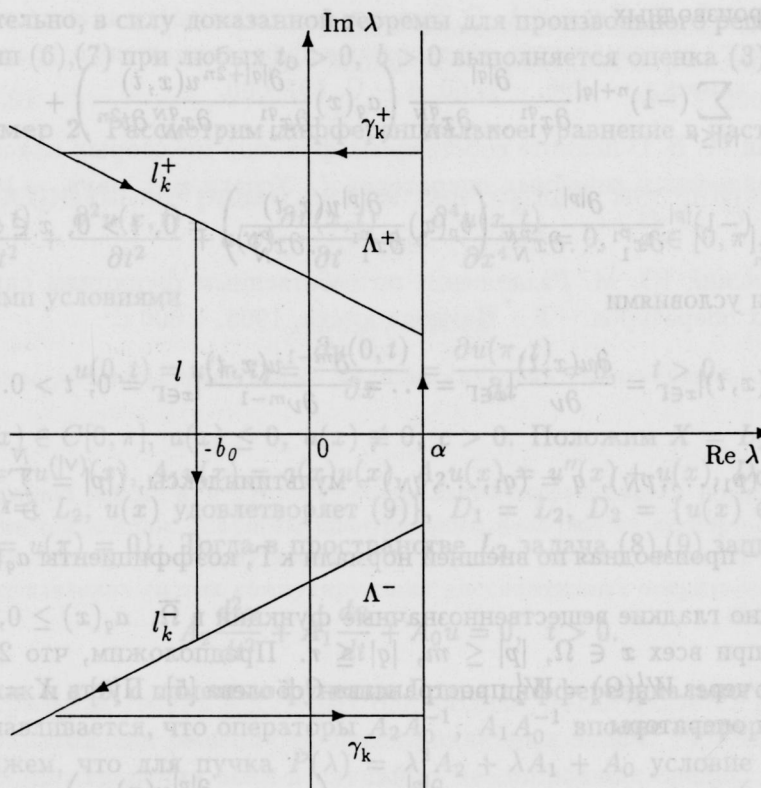


Рис. 1

$$u(t) = u_b(t) - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_l f_t(\lambda) d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k^+} f_t(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k^-} f_t(\lambda) d\lambda \right), \quad t > \sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (5)$$

В силу условия (H) для любого $t_0 > \sigma(1 + \frac{1}{\gamma})$ найдется положительная постоянная M такая, что при $t \geq t_0$ нормы всех интегралов в (5) не превосходят $Me^{-bt} \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{j-1} \|A_j u^{(s)}(0)\|$. Таким образом, из соотношения (5) следует оценка (3). Теорема доказана.

В качестве приложений полученных результатов рассмотрим следующие две задачи для уравнений в частных производных.

Пример 1. Пусть Ω – ограниченная область пространства R^N с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим дифференциальное уравнение в

частных производных

$$\sum_{|q| \leq r} (-1)^{n+|q|} \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_N^{q_N}} \left(a_q(x) \frac{\partial^{|q|+2n} u(x, t)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_N^{q_N} \partial t^{2n}} \right) +$$

$$+ \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_N^{p_N}} \left(b_p(x) \frac{\partial^{|p|} u(x, t)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_N^{p_N}} \right) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega; \quad (6)$$

с краевыми условиями

$$u(x, t)|_{x \in \Gamma} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} |_{x \in \Gamma} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial \nu^{m-1}} |_{x \in \Gamma} = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Здесь $p = (p_1, \dots, p_N)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$ – мультииндексы, $(|p| = \sum_{j=1}^N p_j, |q| = \sum_{j=1}^N q_j)$, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – производная по внешней нормали к Γ , коэффициенты $a_q(x)$, $b_p(x)$ – достаточно гладкие вещественнозначные функции в $\bar{\Omega}$, $a_q(x) \geq 0$, $b_p(x) \geq \delta$ ($\delta > 0$) при всех $x \in \Omega$, $|p| \leq m$, $|q| \leq r$. Предположим, что $2m > 2r$. Обозначим через $W_2^l(\Omega) = W_2^l$ пространство Соболева [5]. Пусть $X = L_2(\Omega) = L_2$. Введем операторы

$$A_0 u = \sum_{|p| \leq m} (-1)^{|p|} \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_N^{p_N}} \left(b_p(x) \frac{\partial^{|p|} u(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_N^{p_N}} \right),$$

$$A_{2n} u = \sum_{|q| \leq r} (-1)^{n+|q|} \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_N^{q_N}} \left(a_q(x) \frac{\partial^{|q|} u(x)}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_N^{q_N}} \right)$$

с областями определения $D_0 = \{u(x) \in W_2^{2m} : u(x) \text{ удовлетворяет (7)}\}$, $D_{2n} = \{u(x) \in L_2, A_{2n} u \in L_2\}$. Тогда в пространстве L_2 задача (6), (7) записывается в виде

$$A_{2n} \frac{d^{2n} u(t)}{dt^{2n}} + A_0 u(t) = 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

Известно, что существует $A_0^{-1} \in L(L_2, W_2^{2m})$ [5]. Понятно, что $A_{2n} A_0^{-1} \in L(L_2, W_2^{2m-2r})$, а в силу компактности вложения W_2^{2m-2r} в L_2 получаем, что $A_{2n} A_0^{-1}$ является вполне непрерывным в L_2 оператором.

Покажем, что для пучка $P(\lambda) = \lambda^{2n} A_{2n} + A_0$ выполнено условие (H). В качестве α можно взять любое положительное число. Положим $\beta = 2\alpha$, $\gamma = tg \frac{\pi}{4n}$. В силу сделанных выше предположений на коэффициенты операторов A_{2n} , A_0 имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (P(\lambda)u, u) &= (-1)^n \operatorname{Re} \lambda^{2n} ((-1)^n A_{2n} u, u) + \operatorname{Re} (A_0 u, u) \geq \\ &\geq \operatorname{Re} (A_0 u, u) \geq \delta \|u\|^2, \quad u \in D_0, \quad \lambda \in \Sigma_{\alpha, \gamma}^{\beta}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу доказанной теоремы для произвольного решения $u(t) \in U_\alpha$ задачи (6),(7) при любых $t_0 > 0$, $b > 0$ выполняется оценка (3).

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad x \in [0, \pi], t > 0 \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \quad (9)$$

Здесь $a(x) \in C[0, \pi]$, $a(x) \leq 0$, $a(x) \not\equiv 0$, $c > 0$. Положим $X = L_2[0, \pi] = L_2$, $A_0 u(x) = cu^{(IV)}(x)$, $A_1 u(x) = a(x)u(x)$, $A_2 u(x) = u''(x) + u(x)$, $D_0 = \{u(x) \in L_2 : u^{(IV)} \in L_2, u(x) \text{ удовлетворяет (9)}\}$, $D_1 = L_2$, $D_2 = \{u(x) \in L_2 : u'' \in L_2, u(0) = u(\pi) = 0\}$. Тогда в пространстве L_2 задача (8),(9) записывается в виде

$$A_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + A_1 \frac{du}{dt} + A_0 u = 0, \quad t > 0.$$

Так же как и в [3] с помощью функции Грина дифференциального оператора A_0 устанавливается, что операторы $A_2 A_0^{-1}$, $A_1 A_0^{-1}$ вполне непрерывны.

Покажем, что для пучка $P(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$ условие (H) выполнено. Пусть $m = \min_{x \in [0, \pi]} a(x)$. Выберем произвольное $\alpha \in \left(0, -\frac{4c}{\pi^4 m}\right)$ и положим $\beta = 2\alpha, \gamma = 1$. Тогда при всех $u \in D_0$ имеем $(A_2 u, u) \leq 0$, $(A_1 u, u) \geq m \|u\|^2$, $(A_0 u, u) \geq \frac{4c}{\pi^4} \|u\|^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (P(\lambda)u, u) &= (A_2 u, u) \operatorname{Re} \lambda^2 + (A_1 u, u) \operatorname{Re} \lambda + (A_0 u, u) \geq \\ &\geq (A_1 u, u) \operatorname{Re} \lambda + (A_0 u, u) \geq \\ &\geq \left(\alpha m + \frac{4c}{\pi^4}\right) \|u\|^2 = \varepsilon \|u\|^2, \quad u \in D_0, \lambda \in \Sigma_{\alpha, \gamma}^\beta, \varepsilon = \alpha m + \frac{4c}{\pi^4} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу доказанной теоремы для произвольного решения $u(t) \in U_\alpha$ задачи (8), (9) при любых $t_0 > 0$, $b > 0$ выполняется оценка (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкалик А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды сем. им. И. Г. Петровского. - 1989. - 14. - С. 140-224.
2. Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure and Appl. Math. - 1963. - V. 16, 2. - P. 121-239.

3. Власенко Л. А., Руткас А. Г. Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, 4. – С. 597–600.
4. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, 4. – С. 15–41.
5. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

Спектральные разложения векторных неоднородных
случайных полей

Е. Б. Ахпезер

Харьковский государственный политехнический университет, Украина

В данной работе при помощи спектральной теории систем коммутирующих операторов получены спектральные разложения векторных эволюционно представимых полей. Построены в частности спектральные представления систем коммутирующих диссипативных операторов.

Спектральная теория векторных однородных полей является математическим аппаратом для решения многих прикладных задач: теория турбулентности, распространения волн в случайно-неоднородных средах, осциллятор в случайном поле и другие [1,2]. Корреляционно-спектральная теория неоднородных векторных случайных полей фактически отсутствует. В настоящей работе предлагается один из подходов, основанный на спектральной теории систем коммутирующих несамосопряженных операторов и теории операторных узлов [3,4].

Рассмотрим эволюционно представимое векторное поле

$$\vec{z}(x_1, x_2) = (z_1(x_1, x_2), z_2(x_1, x_2)), \quad (1)$$

где $z_n(x_1, x_2)$ $n = 1, 2$ имеют вид:

$$z_1(x_1, x_2) = \exp(iA_1x_1 + iA_2x_2)z_0^{(1)}, \quad z_2(x_1, x_2) = \exp(iA_3x_1 + iA_4x_2)z_0^{(2)}.$$

Далее A_k ($k = 1, \dots, 4$) — коммутирующие ($A_kA_s = A_sA_k$, для $k \neq s$), ограниченные линейные операторы [4].

Пусть система операторов A_k ($k = 1, \dots, 4$) унитарно эквивалентна системе операторов \hat{A}_k ($k = 1, \dots, 4$), действующих в модельном пространстве $L^2(D)$, где $D = [0, 1] \times [0, 1]$. При переходе к унитарно эквивалентной системе операторов, корреляционная матрица исходного векторного случайного поля не изменится. В работах Золотарёва В.А. были построены модельные представления унитарно эквивалентные исходной системе операторов.

Так, в случае бесконечно кратного спектра в одной вещественной точке (вольтерровы операторы) модельные представления имеют вид [4], в которых

$m = 1, 3$ и $s = 2, 4$:

$$\hat{A}_m f(t_1, t_2) = \bar{\gamma}_m f(t_1, t_2) + i \int_{t_1}^1 f(\tau, t_2) \sigma_m d\tau, \quad (2)$$

$$\hat{A}_s f(t_1, t_2) = \bar{\gamma}_s f(t_1, t_2) + i \int_{t_2}^1 f(t_1, \tau) \sigma_s d\tau,$$

где $\sigma_k = 2\text{Im}(\hat{A}_k)$, а в соответствующих формулах из [4] $\alpha_1(t_1)$ и $\alpha_2(t_2)$ положены равными 0, $\gamma_1 = 0$ и $\sigma_1 = 1$.

Включая \hat{A}_k ($k = 1, \dots, 4$) в операторный узел и рассматривая соответствующую открытую линейную ассоцированную систему, получаем:

Теорема 1. Пусть операторы \hat{A}_k ($k = 1, \dots, 4$) имеют вид (2), тогда для векторного эволюционно представимого поля (1) справедливо представление:

$$z_n(x_1, x_2) = \int_D \int f_n(t_1, t_2, x_1, x_2) \mu(dt_1, dt_2), \quad n = 1, 2,$$

где функции $f_n(t_1, t_2, x_1, x_2)$ можно определить из системы интегрально-дифференциальных уравнений

$$i \frac{\partial f_n(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial x_1} + i \int_0^{t_1} f_n(\tau, t_2, x_1, x_2) d\tau = 0,$$

$$i \frac{\partial f_n(t_1, t_2, x_1, x_2)}{\partial x_2} + i \int_0^{t_2} f_n(t_1, \tau, x_1, x_2) d\tau = 0,$$

$$f_n(t_1, t_2, 0, x_2) = f_n^{(2)}(t_1, t_2, x_2),$$

$$f_n(t_1, t_2, x_1, 0) = f_n^{(1)}(t_1, t_2, x_1),$$

$$f_n^{(1)}(t_1, t_2, 0) = f_n^{(2)}(t_1, t_2, 0) = f_0^{(n)}(t_1, t_2) \in L_D^2,$$

а $\mu(D)$ — стохастическая мера, определяемая следующим образом

$$\mu(D)(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & (t_1, t_2) \in D, \\ 0, & (t_1, t_2) \notin D. \end{cases}$$

Пусть теперь операторы A_k ($k = 1, \dots, 4$) — коммутирующие диссипативные ограниченные линейные операторы, неэрмитовы пространства которых конечномерны, $\dim 2\text{Im}(A_k)H = r_k < \infty$. Применяя дважды спектральное разложение нестационарных случайных процессов [3], приходим к следующему результату:

Теорема 2. Пусть A_k ($k = 1, \dots, 4$) — коммутирующие диссипативные операторы, размерность r_k неэрмитовых пространств которых конечномерна, $\dim 2\text{Im}(A_k H) = r_k < \infty$. Тогда для векторного эволюционно представимого поля (1) справедливо представление

$$z_n(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{p,n}^{(s)}(x_1) \xi_{s,n}(x_2) q_p^{(k)}, \quad (3)$$

где $M \left[q_p^{(n)} \overline{q_p^{(n)}} \right] = \delta_{ps}$, а последовательности $\xi_{s,n}(x_2)$ и $\xi_{p,n}^{(s)}(x_1)$ определяются из систем рекуррентных уравнений, в которых при $n = 1$ полагаем $(m, l) = (2, 1)$, а при $n = 2$ полагаем $(m, l) = (4, 3)$:

$$i \frac{d\xi_{s,n}(x_2)}{dx_2} + \lambda_s^{(m)} \xi_{s,n}(x_2) = \sum_{j=1}^{r_m} u_{s,j}^{(2)}(x_2) \sqrt{\omega_j^{(m)}} M q_j^{(m)} \overline{z_s^{(n)}}$$

$$i \frac{d\xi_{p,n}^{(s)}(x_1)}{dx_1} + \lambda_p^{(l)} \xi_{p,n}^{(s)}(x_1) = \sum_{j=1}^{r_l} u_{p,j}^{(2,s)}(x_1) \sqrt{\omega_j^{(l)}} M q_j^{(l)} \overline{q_p^{(l)}}$$

$$\xi_{k,n}(0) = \langle z_0^{(n)}, z_s^{(n)} \rangle = M z_0^{(n)} \overline{z_s^{(n)}}, \quad \xi_{p,n}^{(s)}(0) = \langle z_s^{(n)}, q_p^{(l)} \rangle = M z_s^{(n)} \overline{q_p^{(l)}}$$

$$u_{p+1,j}^{(n,s)}(x_1) = u_{p,j}^{(n,s)}(x_1) - i \sqrt{\omega_j^{(l)}} M q_p \overline{q_p^{(l)}} \xi_{p,n}^{(s)}(x_1), \quad u_{1,j}^{(n,s)}(x_1) = 0$$

$$u_{s+1,j}^{(m)}(x_2) = u_{s,j}^{(m)}(x_2) - i \sqrt{\omega_j^{(m)}} M z_s^{(n)} \overline{q_s^{(m)}} \xi_{s,n}(x_2), \quad u_{1,j}^{(m)}(x_2) = 0$$

где $\lambda_j^{(k)}$ — собственные числа оператора A_k ,

$\omega_j^{(k)}$ — собственные числа оператора $2 \text{Im}(A_k)$, $\omega_j^{(k)} \geq 0$,

$q_j^{(k)}$ — ортонормированный базис в пространстве $2 \text{Im}(A_k H)$.

Рассмотрим случай, когда операторы A_k ($k = 1, \dots, 4$) векторного эволюционно представимого поля $\vec{z}(x_1, x_2)$ имеют общую цепочку инвариантных подпространств: $H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$, причём $\lim_{p \rightarrow \infty} H_p = 0$.

Операторы A_k действуют в $H_{p-1} \ominus H_p$ как умножение на $\lambda_p^{(k)}$, таким образом $z_n(x_1, x_2)$ можно представить в следующем виде:

$$z_1(x_1, x_2) = \exp(iA_1 x_1 + iA_2 x_2) z_0^{(1)} = \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^{(1)}(x_1, x_2) z_p^{(1)},$$

$$z_2(x_1, x_2) = \exp(iA_3 x_1 + iA_4 x_2) z_0^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} \xi_p^{(2)}(x_1, x_2) z_p^{(2)},$$

$$M \left[z_j^{(n)} \overline{z_p^{(n)}} \right] = \delta_{pj} = \begin{cases} 1, & p = j, \\ 0, & p \neq j, \end{cases} \quad z_p^{(k)} \in H_{p-1} \ominus \hat{H}_p,$$

функции $\xi_p^{(n)}(x_1, x_2)$ ($n = 1, 2$) определяются из системы:

$$i \frac{\partial \xi_p^{(1)}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda_p^{(1)} \xi_p^{(1)}(x_1, x_2) = (\sigma_1 U_p, \psi_p^{(1)}),$$

$$i \frac{\partial \xi_p^{(1)}(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda_p^{(2)} \xi_p^{(1)}(x_1, x_2) = (\sigma_2 U_p, \psi_p^{(1)}),$$

$$i \frac{\partial \xi_p^{(2)}(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda_p^{(3)} \xi_p^{(2)}(x_1, x_2) = (\sigma_3 U_p, \psi_p^{(2)}),$$

$$i \frac{\partial \xi_p^{(2)}(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda_p^{(4)} \xi_p^{(2)}(x_1, x_2) = (\sigma_4 U_p, \psi_p^{(2)}),$$

$$U_{p+1}(x_1, x_2) = U_p(x_1, x_2) - i \xi_p^{(n)}(x_1, x_2) \psi_p^{(n)}, \quad U_1(x_1, x_2) \equiv 0,$$

Здесь обозначено $\{\psi_p^{(n)}\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательности каналовых элементов, причём $\psi_p^{(n)} = \varphi_p z_p^{(n)}$. Включим операторы A_k ($k = 1, \dots, 4$) в узел $\Delta = \{A_k (k = 1, \dots, 4), H, \varphi, E, \sigma_k, \gamma_k, \tilde{\gamma}_k\}$ [4].

Пусть Δ_p^{\perp} — проекция узла Δ на подпространство: $H_0^{\perp} = H_{p-1} \ominus H_p$, тогда Δ можно представить в виде произведения Δ_p^{\perp} :

$$\Delta = \Delta_1^{\perp} \vee \Delta_2^{\perp} \vee \dots$$

Рассмотрим открытую систему G , ассоциированную с узлом Δ . В системе дифференциальных уравнений, которые определяют отображения “входного сигнала” на внутреннее состояние открытой системы, положим $U_n(x_1, x_2) \equiv 0$, тогда

$$i \frac{\partial}{\partial x_1} z_1(x_1, x_2) + A_1 z_1(x_1, x_2) = 0;$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_2} z_1(x_1, x_2) + A_2 z_1(x_1, x_2) = 0;$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_1} z_2(x_1, x_2) + A_3 z_2(x_1, x_2) = 0; \quad (4)$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_2} z_2(x_1, x_2) + A_4 z_2(x_1, x_2) = 0;$$

$$z_n(x_1, x_2)|_{\gamma} = z_0^{(n)}(x_1, x_2).$$

Из уравнений (4), очевидно следует, что

$$z_1(x_1, x_2) = \exp(iA_1 x_1 + iA_2 x_2) z_0^{(1)},$$

$$z_2(x_1, x_2) = \exp(iA_3 x_1 + iA_4 x_2) z_0^{(2)}.$$

Если обозначить G_p^\perp — открытую систему, ассоциированную с узлом Δ_p^\perp , тогда можно представить открытую систему G в виде сцепления элементарных открытых систем:

$$G = G_1^\perp \vee G_2^\perp \vee \dots$$

Внутреннее состояние открытой системы G равно сумме внутренних состояний систем G_p^\perp . Если учесть, что “вход” открытой системы G_p^\perp — это выход открытой системы G_{p-1}^\perp и то, что “вход” G_1^\perp есть 0, то мы получим требуемое утверждение.

Рассмотрим пример:

Пусть $\{\lambda_p^{(k)}\}_{p=1}^\infty$ — последовательности комплексных чисел и $\sum_{p=1}^\infty \lambda_p^{(k)} < \infty$, $\lambda_p^{(k)} = \alpha_p^{(k)} + i(\beta_p^{(k)})^2/2$. Пусть далее H — совокупность последовательностей $f = \{f_{p,q}, p, q = 1, 2, \dots\}$ таких, что $\sum_{p,q} |f_{p,q}|^2 < \infty$. Определим в H скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle_H = \sum_{p,q=1}^\infty f_{p,q} \cdot \overline{g_{p,q}}$$

Если определить операторы \hat{A}_k следующим образом:

$$(\hat{A}_1 z_1)(p, q) = \lambda_p^{(1)} z_1(p, q) + i \sum_{r=p+1}^\infty z_1(r, q) (\beta_r^{(1)})^2,$$

$$(\hat{A}_2 z_1)(p, q) = \lambda_p^{(2)} z_1(p, q) + i \sum_{r=p+1}^\infty z_1(r, q) (\beta_r^{(2)})^2,$$

$$(\hat{A}_3 z_2)(p, q) = \lambda_p^{(3)} z_2(p, q) + i \sum_{r=p+1}^\infty z_2(r, q) (\beta_r^{(3)})^2, \tag{1}$$

$$(\hat{A}_4 z_2)(p, q) = \lambda_p^{(4)} z_2(p, q) + i \sum_{r=p+1}^\infty z_2(r, q) (\beta_r^{(4)})^2,$$

то нетрудно проверить, что \hat{A}_k ($k = 1, \dots, 4$) удовлетворяют нашим требованиям. Будем считать, что компоненты элемента f из H следуют в том же порядке, что и H_k , которые состоят из совокупности всех элементов из H , где первые k компонент нулевые. Набор H_k образует цепочку инвариантных подпространств $H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$. Так как все операторы \hat{A}_k ($k = 1, \dots, 4$) — диссипативные, то

$$z_1(p, q, x_1, x_2) = \exp(iA_1 x_1 + iA_2 x_2) z_0^{(1)}(p, q), \quad z_0^{(1)} \in H,$$

$$z_2(p, q, x_1, x_2) = \exp(iA_3 x_1 + iA_4 x_2) z_0^{(2)}(p, q), \quad z_0^{(2)} \in H$$

могут быть записаны в виде:

$$z_n(p, q, x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^{(n)}(x_1, x_2) z_s^{(n)}(p, q), \quad n = 1, 2,$$

где

$$\sum_{p, q=1}^{\infty} z_s^{(n)}(p, q) \overline{z_j^{(n)}(p, q)} = \delta_{s,j} = \begin{cases} 1, & s = j, \\ 0, & s \neq j, \end{cases} \quad z_s^{(n)} \in H_{s-1} \ominus H_s.$$

а функции $\xi_s^{(n)}(x_1, x_2)$ можно определить из системы дифференциальных уравнений, аналогичной системе (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965. — Т. 1. — 639 с. — Т. 2. — 720 с.
2. Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д., Калинин Н. И. Асимптотический метод в теории стохастических линейных динамических систем. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 182 с.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Харьков: издательство Харьковского Университета, 1971. — 160 с.
4. Золотарёв В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН АрмССР. — 1976. — Т. 12., 3. — С. 136–140.