

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Науково-навчальний інститут "Фізико-технічний факультет"
Кафедра фізики ядра та високих енергій імені О.І. Ахієзера

Пояснювальна записка

до дипломного проєкту (роботи)

МАГІСТРА

на тему

укр. Фазовий контроль: неадіабатична динаміка кубітів

англ. Phase control: nonadiabatic dynamics of qubits

Виконала студентка 2-го курсу навчання

спеціальності 105 прикладна фізика та
наноматеріали

освітньо-наукова програма: Експеримен-
тальна ядерна фізика та фізика плазми

Кофман П.О. _____
(особистий підпис)

Керівник

Шевченко С.М. _____
(особистий підпис)

Рецензент

Ільїнська О.О. _____
(особистий підпис)

м. Харків — 2023

АНОТАЦІЯ

Метою цієї роботи є опис динаміки дворівневої квантової системи під впливом лінійного збурення у часі. У роботі отримано повну аналітичну залежність хвильової функції в залежності від часу для суперпозиційного початкового стану. Також отримана і описана можливість керувати кубітом за допомогою зміни початкової фази. Результати, отримані в роботі, є потенційно важливими для удосконалення вже існуючих методів роботи квантових систем. На базі цього процесу можна побудувати квантові гейти, на основі яких будуються квантові комп'ютери.

ABSTRACT

The purpose of this work is to describe the dynamics of a two-level quantum system under the influence of a linear perturbation in time. In this work, a full analytical dependence of the wave function on time for the superpositional initial state is obtained. The ability to control the qubit by changing the initial phase of the wave function was also obtained and described. The results obtained in the work are potentially important for the improvement of already existing methods of operation of quantum systems. On the basis of this process, quantum gates can be developed, on the basis of which quantum computers are built.

ЗМІСТ

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	10
1.1 Неадіабатичний перетин енергетичних рівнів	10
1.2 Безперехідна динаміка квантової системи	12
1.3 Когерентне руйнування тунелювання	13
РОЗДІЛ 2 ДВОРІВНЕВІ СИСТЕМИ ПІД ДІЄЮ ЛІНІЙНОГО ЗБУ-	
РЕННЯ. ДИНАМІКА ХВИЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ	15
2.1 Опис дворівневої системи	15
2.2 Використання підходу Майорани для отримання хви-	
льової функції	16
2.3 Порівняння асимптотичної хвильової функції із аналі-	
тичним результатом	18
2.4 Кількісна оцінка границь чинності	19
2.5 Суперпозиційний початковий стан	20
2.6 Чинність асимптотичної динаміки близько нуля	22
РОЗДІЛ 3 АДІАБАТИЧНО-ІМПУЛЬСНА МОДЕЛЬ	24
3.1 Адіабатична еволюція	24
3.2 Константний сигнал	25
3.3 Лінійний сигнал	26
3.4 Імпульсний тип переходу	27
РОЗДІЛ 4 КВАНТОВИЙ ФАЗОВИЙ КОНТРОЛЬ	29
4.1 Залежність імовірності заселення енергетичного рівня	
від початкової фази хвильової функції	29
4.2 Конструктивна і деструктивна інтерференція	30
4.3 Повернення у початковий стан після неадіабатичного	
проходження наближення рівнів	33
4.4 Когерентне руйнування тунелювання	33
4.5 Отримання обраного стану кубіту	35
4.6 Фазова залежність в адіабатичному базисі	36
4.7 Різні початковий і кінцевий час	39
4.8 Аналіз інтервалу можливих значень в альтернативних	
координатах	41
4.9 Загальний випадок сигналу	41

ВИСНОВКИ	44
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	48

ВСТУП

Через кілька років після відкриття рівняння Шредінгера було розв'язано проблему переходів між двома енергетичними рівнями [1–5], і тепер розв'язок відомий як формула Ландау – Зенера – Штюкельберга – Майорани (ЛЗШМ). Ми повертаємось до цієї важливої проблеми з огляду на сучасний інтерес до неадіабатичних переходів [6–10]. Хоча вони всюдиснують у фізиці, ми хотіли б навести два конкретних приклади. Переходи ЛЗШМ можна використовувати для реалізації нових квантових логічних вентилів, які є альтернативою звичайним вентилям на основі резонансних збуджень [11–13]. Переходи ЛЗШМ також важливі для молекулярної динаміки, де модель ЛЗШМ забезпечує один із зручних підходів у поєднанні з так званим алгоритмом стрибків на поверхні [14, 15], який дозволяє описувати фотохімічні реакції [16], двовимірне рівняння Дірака для графену [15], крипторомні магніторецепції [17], серед інших явищ.

Внесок цих чотирьох авторів обговорювався в новітній літературі з детальними висновками. Для їх опису див. [10], а також ми наводимо тут кілька останніх посилань: щодо підходу Ландау див. [6]; підхід Зенера – див. [11] і посилання в ньому; для підходу Штюкельберга див. [12, 13]; і для підходу Майорани див. [18, 19]. Усі ці чотири підходи дають точно таку ж формулу ЛЗШМ для ймовірності переходу [10, 20]. Але чи можемо ми вивести *повну*, включаючи фазу, хвильову функцію за допомогою цих підходів? Відповідь негативна для підходу Ландау та для підходу Штюкельберга [12]. Добре відомо, що підхід Зенера дійсно забезпечує повну хвильову функцію [21]. Однак це питання не було повністю розглянуто в літературі щодо підходу Майорани, див. [18, 22, 23]. Зокрема, нещодавно було зазначено, що внесок Майорани в проблему був недооцінений [18, 20].

Автор [18] обговорює з сучасної точки зору кілька робіт Майорани, пов'язаних з фізикою конденсованих середовищ, і серед них статті, що цікавлять нас: [1]. Звертаючись до цього, [18] повторно виводить формулу ЛЗШМ; однак не знаходить повної хвилі функції, включаючи фазу, після проходження квазі-перетину енергетичних рівнів. Повну асимптотичну хвильову функцію було знайдено в [22] за підходом Майорани. Автори [22] вивчали як пряме, так і зворотнє проходження наближення рівнів, у роботі знайдено асимптотичні хвильові функції та введено метод матриці перехо-

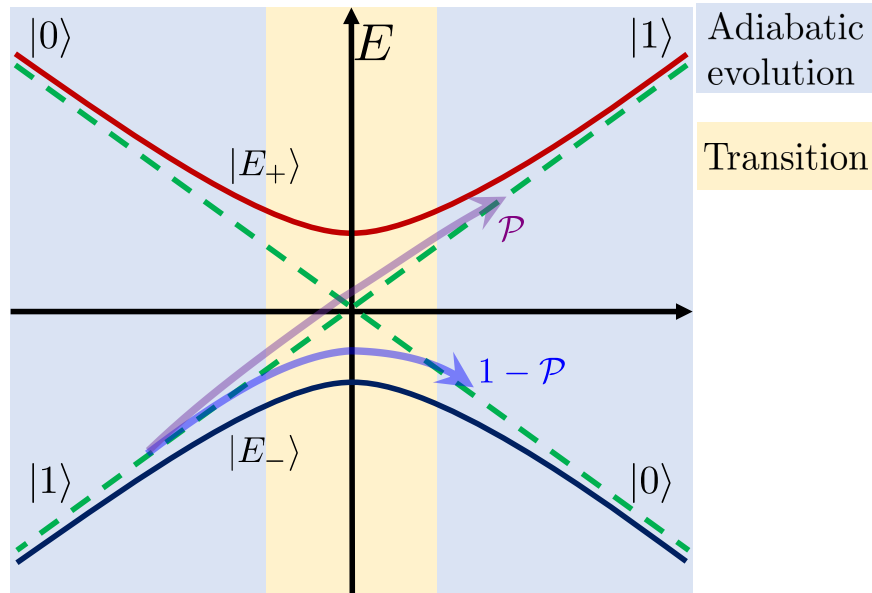


Рис. 1. Дворівнева система та адіабатично-імпульсна модель. Апроксимація полягає в припущенні, що еволюція описується чергуванням стадій. Під час адіабатичних стадій система перебуває або в основному стані $|E_- \rangle$, або в збудженому стані $|E_+ \rangle$. Імпульсний перехід (з імовірністю $\mathcal{P}$) відбувається в точці мінімального розщеплення енергетичного рівня. У цій роботі обґрунтовується адіабатично-імпульсна модель завдяки підходу рішення проблеми методом Майорани.

ду (або адіабатично-імпульсну модель) для опису еволюції.

Однак кілька важливих питань залишилися без відповіді. Наприклад: *“цікаво поміркувати над амбітною програмою, де можна зробити висновок про залежність станів залежних від часу рівнів енергії”* [18]. Чи дає підхід Майорани правильний опис динаміки? І не тільки асимптотичну поведінку на нескінченності. Дотримуючись [1, 18, 22], ми детально досліджуємо підхід Майорани. Ми не лише показуємо, як отримати асимптотичну ймовірність переходу на нескінченності, але також представляємо та описуємо адіабатично-імпульсну модель та досліджуємо динаміку поблизу наближення рівнів.

Рівні енергії схематично показано на Рис. 1. Розглянемо дворівневу систему зі станами $|0 \rangle$ і $|1 \rangle$. Якщо почати, скажімо, ліворуч в основному стані (більш загально, у суперпозиційному стані), яка ймовірність переходу досягти збудженого стану праворуч? Якою буде повна хвильова функція далеко від квазі-перетину рівня праворуч? Відповідь на це останнє запитання допомогла б обґрунтувати *адіабатично-імпульсна модель*. Ця модель припускає, що перехідна область вважається нескінченно тонкою, тоді як

в інших місцях еволюція моделюється як адіабатична.

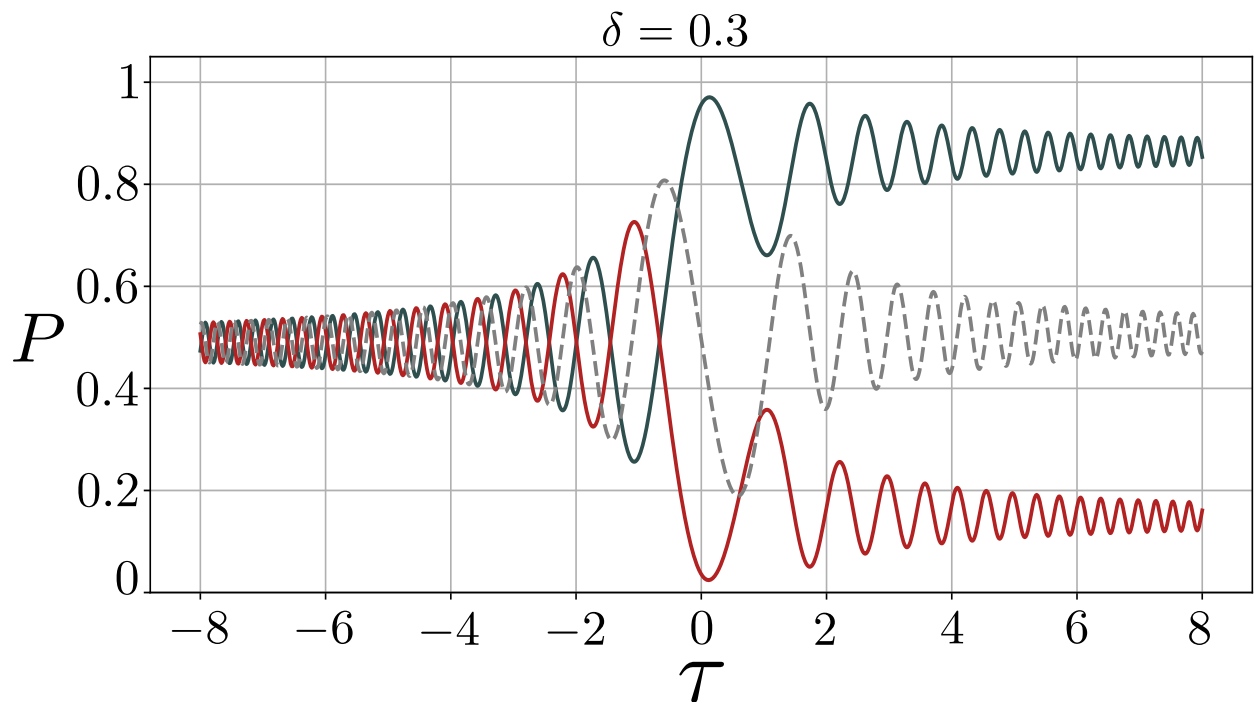


Рис. 2. Залежність імовірності заселення енергетичного рівня від часу. На рисунку наведено три залежності заселення енергетичного рівня від часу із однаковою початковою імовірністю заселення і різними початковими фазами хвильової функції. Цей графік показує внесок інтерференції у фінальну заселеність енергетичного рівня.

Для квантових обчислень важливо мати різні відомості про те, як керувати квантовими системами, переводячи їх у бажані стани, див. [24–27]. Можливість передбачити поведінку системи відкриває можливість використовувати її як квантові логічні гейти або вдосконалювати вже наявні гейти, щоб зробити процес швидшим або помилки меншими чи легшим для експериментальної реалізації.

Для квантових обчислень важлива динаміка, яка забезпечує збереження незмінного стану. Це можливо реалізувати за допомогою адіабатично-повільного руху [28]. Тоді виникає питання: чи можливий такий самий результат у швидких процесах? Відповідь – так [29, 30]. Існує велика кількість параметрів, за допомогою яких ми можемо керувати системою. Одним з них є вид збудження. Якщо сигнал є періодичним, існують спеціальні значення частоти та амплітуди, які забезпечують потрапляння в основний стан [31–34]. Оскільки це відбувається в результаті деструктивної інтерференції [35–39], це явище відоме як Когерентне руйнування тунелювання (Coherent

destruction of tunneling, CDT).

В іншому контексті проблема керування квантовою системою була сформульована таким чином, як скорегувати задане збудження так, щоб система залишалася в одному з базових станів. Така безперехідна динаміка була вивчена в [40] спочатку для загального випадку. Далі автор розглядає як окремий випадок дворівневу систему з лінійним збудженням. Цей останній випадок відповідає переходам Ландау – Зенера – Штюкельберга – Майорани (ЛЗШМ) [1–5, 10, 11].

Головною ідеєю цієї роботи є отримання не тільки модуля хвильової функції, як в оригінальній роботі Майорани [1], а і фази хвильової функції за методом перевалу. Також необхідно оцінити похибки отриманого результату, отримані з асимптотичністю методу. Похибка оцінюється шляхом порівняння результату Зенера [2] із нашим. Вміння вирішувати таким методом задачі відкриває нові можливості для опису квантових систем із не тільки лінійним збуренням.

Ми вивчаємо питання, подібні до тих, що були в [31, 40]: як скерувати систему до певного стану? чи можемо ми залишатися в тому самому стані, що й до переходу (це безперехідна еволюція)? що необхідно для отримання основного стану (який є CDT)? У нашому випадку ми розглядаємо найпростіший лінійний рух, але, починаючи з загального стану – суперпозиційного, використовуємо як параметр, яким можна керувати, початкову різницю фаз між компонентами спінора. У нашому підході, розглядаючи фазу як керуючий параметр, ми дотримуємося [41]. Те, що ми маємо на увазі, показано на Рис. 2. Хоча деталі будуть пояснені далі, цей рисунок показує динаміку кубіта, для трьох початкових суперпозиційних станів, з однаковою початковою ймовірністю заселення, але з трьома різними різницями фаз між компонентами хвильової функції. Три відповідні криві показують, що змінюючи початкову фазу хвильової функції можна отримати різні фінальні стани системи.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Неадіабатичний перетин енергетичних рівнів

Задача про імовірність заселення енергетичних рівнів дворівневої системи під впливом лінійного збурення після проходження точки квазі-перетину рівнів була розглянута вперше у 1932 році [1–3, 5]. У всіх роботах було отримано кінцеву імовірність заселення для процесу, початковим станом якого є основний. У цьому підрозділі ми привернемо увагу до роботи Кларенса Зенера [2]. Автор досліджував перетин полярного і гомополярного станів молекули. Енергетичне зміщення для електронних станів було повільною змінною положення ядер. Завдання було зведено до отримання відповіді на наступне запитання: Яка ймовірність збудження, якщо починати з основного стану ліворуч і лінійно рухатися праворуч при проходженні уникнутого перетину? Енергетичні рівні системи розглянуті в цій роботі, схематично наведені на Рис.1.1. Для описання системи вирішується рівняння Шредін-

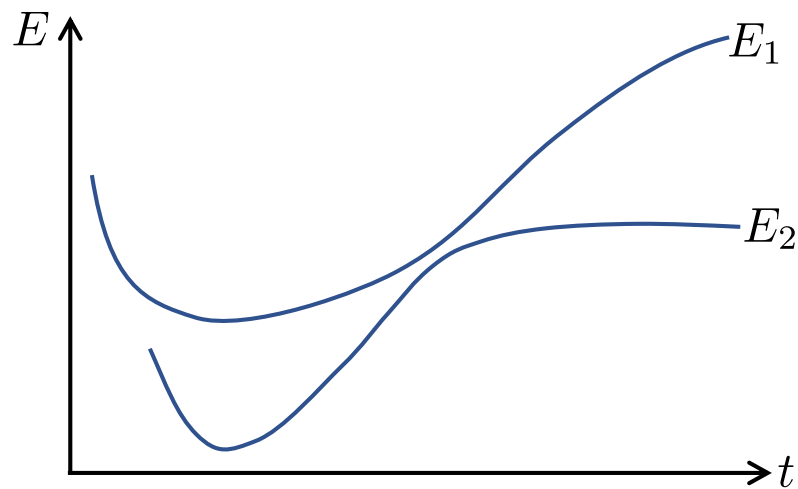


Рис. 1.1: Схематичне зображення енергетичних рівнів, розглянутих у задачі перетину полярного і гомополярного станів молекули. Таке розташування рівнів відповідає задачі про дворівневої системи із лінійним збуренням.

гера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle. \quad (1.1)$$

У випадку дворівневої системи хвильова функція є спінором

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

З використанням цього і наступними позначеннями:

$$\delta = \frac{\Delta^2}{4v\hbar}, \quad (1.3)$$

і

$$\tau = t\sqrt{\frac{v}{2\hbar}}, \quad (1.4)$$

рівняння Шредінгера переписується у вигляді двох незалежних диференціальних рівнянь для кожної компоненти спіну

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = \alpha(i - \tau^2 - 2\delta) \\ \frac{d^2\beta}{d\tau^2} = \beta(-i - \tau^2 - 2\delta) \end{cases}. \quad (1.5)$$

Із заміною $z = \tau\sqrt{2}\exp\frac{i\pi}{4}$ рівняння стають рівняннями Вебера

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dz^2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\tau^2}{2} - i\delta\right)\alpha = 0 \\ \frac{d^2\beta}{dz^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\tau^2}{2} - i\delta\right)\beta = 0 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Із визначення випливає, що рішенням рівняння Вебера є лінійна комбінація спеціальних функцій параболічного циліндра $D_\nu(z)$

$$\begin{cases} \alpha = A_+ D_{-i\delta-1}(z) + A_- D_{-i\delta-1}(-z) \\ \beta = B_+ D_{-i\delta}(z) + B_- D_{-i\delta}(-z) \end{cases}. \quad (1.7)$$

Між коефіцієнтами $A_\pm$ і $B_\pm$ є відповідний зв'язок

$$B_\pm = \pm \frac{A_\pm}{\sqrt{\delta}} \exp\left\{-\frac{i\pi}{4}\right\}, \quad (1.8)$$

вони визначаються із початкових умов.

Головним результатом є імовірність переходу із основного стану у збуджений після переходу. Імовірність отримується із асимптотичних виразів для (1.7) і дорівнює

$$\mathcal{P} = \exp(-2\pi\delta). \quad (1.9)$$

Ця величина має назву імовірність Ландау – Зенера – Штюкельберга – Майорани.

Підхід Зенера дає повну аналітичну залежність компонент спінора від часу. Незручністю результату полягає в тому, що він дається у вигляді спеціальних функцій. Для аналізу результату необхідно використовувати чисельні розрахунки, або знаходити асимптотичні залежності. Метод Зенера повну аналітична залежність, що є великою перевагою. Однак, його знаходження є застосовним лише для такого типу сигналу (лінійного). У випадку іншого сигналу цей метод є незастосовним.

1.2 Безперехідна динаміка квантової системи

Однією із важливих задач для квантових розрахунків є дослідження можливість без-перехідної динаміки. Зазвичай безперехідною динаміка є у повільних, тобто адіабатичних, процесах. Однак для швидких процесів існують близькі гамільтоніани до початкових систем, що гарантують відсутність переходу з одного енергетичного рівня на інший для будь-якої динаміки за швидкістю. Така задача була розглянута у роботі сера Майкла Беррі [40].

Ідея полягає у тому, що якщо ми маємо систему, яка описується стаціонарним рівнянням Шредингера

$$\hat{H}_0(t) |n(t)\rangle = E_n(t) |n(t)\rangle, \quad (1.10)$$

то перехід на наступний рівень є імовірним. Однак існує близький гамільтоніан, при якому система гарантовано залишається в основному стані. Хвильова функція будується наступним чином

$$|\psi_t(t)\rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(t') - \int_0^t dt' \langle n(t') | \partial_{t'} n(t') \rangle \right\} |n(t)\rangle. \quad (1.11)$$

За такою побудовою гамільтоніан буде складатися із двох доданків

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + H_1(t). \quad (1.12)$$

Перший доданок є початковим гамільтоніаном системи

$$\hat{H}_0(t) = \sum_n |n\rangle E_n \langle n|. \quad (1.13)$$

Другий доданок має наступну структуру

$$H_1(t) = i\hbar \sum_n (|\partial_t n\rangle \langle n| - \langle n|\partial_t n\rangle |n\rangle \langle n|). \quad (1.14)$$

Саме $H_1(t)$ є причиною виникнення безперехідної динаміки квантової системи.

У задачі про ЛЗШМ переходи гамільтоніан має наступний вигляд

$$H(t) = \frac{1}{2}g\mu_B\vec{\sigma}\vec{H}, \quad (1.15)$$

де $\vec{\sigma}$ є матрицями Паулі і магнітне поле залежить від часу лінійно

$$\vec{H} = (H_{\min}, 0, Vt). \quad (1.16)$$

Якщо ж гамільтоніан буде мати нелінійний доданок за часом, що побудований як у (1.14), тоді в незалежності від швидкості процесу після проходження квазі-перетину рівнів система буде залишатись в основному стані.

У такому випадку магнітне поле набуває наступного вигляду

$$\vec{H}(t) = \left(H_{\min}, -\frac{\varepsilon H_{\min} V}{H_{\min}^2 + V^2 t^2}, Vt \right). \quad (1.17)$$

Таким чином забезпечується діабатична еволюція дворівневої системи із лінійним збуренням, у результаті якої система залишається в основному стані, як і на початку. Це досягається за рахунок додаткового не лінійного за часом магнітного поля, спрямованого вздовж осі Y.

1.3 Когерентне руйнування тунелювання

При додаванні певного сигналу до дворівневої системи спостерігається різноманітна динаміка. Для квантового контролю є важливим знання, як отримувати певні стани кубітів. Одним із таких станів є основний і збуджений стани. Задача, що описує отримання основного стану дворівневої системи відома як Когерентне руйнування тунелювання (Coherent destruction of tunneling, CDT). Когерентне руйнування тунелювання дворівневої системи під впливом періодичного збудження було введено і розглянуто у [31] у 1991 році. У 2008 році Каянума та ін. [37] у своїй роботі описав аналітично, які параметри системи мають бути обрані для досягнення CDT.

Дворівнева система із станами $|1\rangle$ і $|2\rangle$ під впливом залежного від часу сигналу описується наступним гамільтоніаном

$$H_1(t) = \frac{E(t)}{2} (|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2|) + \gamma (|1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1|), \quad (1.18)$$

де γ є постійним тунельним матричним елементом. Сигнал розглядається як періодичний за часом

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t). \quad (1.19)$$

Для знаходження динаміки вирішується рівняння Шредінгера, що перепи-
сується у наступному вигляді

$$i \frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{E(t)}{2} \alpha(t) + \gamma \beta(t), \quad (1.20)$$

$$i \frac{d}{dt} \beta(t) = -\frac{E(t)}{2} \beta(t) + \gamma \alpha(t). \quad (1.21)$$

Результатом роботи є залежність компонент спінора від часу

$$\alpha(t) = \exp \left[i \frac{E_0}{2\omega} \sin(\omega t) \right] \cos \left(\frac{\Delta}{N} J_0 \left(\frac{E_0}{\omega} \right) t \right), \quad (1.22)$$

$$\beta(t) = i \exp \left[i \frac{E_0}{2\omega} \cos(\omega t) \right] \sin \left(\frac{\Delta}{N} J_0 \left(\frac{E_0}{\omega} \right) t \right). \quad (1.23)$$

Компоненти спінора залежать від косинуса, аргументом якого є функція Бесселя нульового порядку. Якщо аргумент косинуса дорівнює нулю, відбувається когерентне руйнування тунелювання, тобто під впливом такого сигналу система гарантовано переходить в основний стан. Це відбувається, коли відношення амплітуди сигналу і частоти E_0/ω дорівнює нулям функції Бесселя.

Таким чином показано, що за певних умов сигналу стан кубіта переходить в основний, що є важливим результатом для квантових розрахунків. Це підтверджується кількістю робіт, що описують подібні задачі.

РОЗДІЛ 2

ДВОРІВНЕВІ СИСТЕМИ ПІД ДІЄЮ ЛІНІЙНОГО ЗБУРЕННЯ. ДИНАМІКА ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ

2.1 Опис дворівневої системи

У своїй роботі [1] Еttore Майорана досліджував дві пов'язані проблеми. Перша частина описує проблему орієнтованого атомного пучка, що проходить через точку із магнітним полем, що зануляється. Друга половина статті присвячена частинці зі спіном $1/2$ у лінійно залежному від часу магнітному полі. Майорана розглядав задачу про орієнтацію спіну в динамічному магнітному полі з компонентами $H_x \sim -\Delta$, $H_y = 0$ і $H_z \sim -vt$, де Δ і v – постійні величини. Еволюція у часі дворівневої системи під впливом лінійного збудження описується рівнянням Шредінгера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = -\frac{1}{2} (\Delta \sigma_x + vt \sigma_z) |\psi\rangle, \quad (2.1)$$

де σ_i є матрицями Паулі.

Для хвильової функції у формі

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

це можна переписати як систему двох пов'язаних диференціальних рівнянь. Введемо безрозмірний час τ і параметр адіабатичності δ :

$$\tau = \sqrt{\frac{v}{2\hbar}} t, \quad \delta = \frac{\Delta^2}{4v\hbar}. \quad (2.3)$$

Зробивши заміну

$$\alpha = f \exp\left(\frac{i}{2}\tau^2\right), \quad \beta = g \exp\left(-\frac{i}{2}\tau^2\right), \quad (2.4)$$

ми отримуємо

$$\begin{cases} \dot{f} &= i\sqrt{2\delta}g \exp(-i\tau^2) \\ \dot{g} &= i\sqrt{2\delta}f \exp(i\tau^2) \end{cases}. \quad (2.5)$$

Ці рівняння можна записати, як два незалежних рівняння для функцій f

і g

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + 2i\tau \frac{df}{d\tau} + 2\delta f = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 g}{d\tau^2} - 2i\tau \frac{dg}{d\tau} + 2\delta g = 0. \quad (2.7)$$

Для отримання цих рівнянь в однорідній формі використовується підстановка (2.4). У цій формі перетворення Лапласа спрощує рівняння.

2.2 Використання підходу Майорани для отримання хвильової функції

Слідуючи Майорані, рівняння для $f(\tau)$ у (2.6) можна розв'язати за допомогою двостороннього перетворення Лапласа,

$$\mathcal{L}[f(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = F(s). \quad (2.8)$$

Тут $F(s)$ використавши перетворення Лапласа функції $f(\tau)$. Тоді використав це у рівнянні (2.6), використавши теорему про похідну початкової функції, $\mathcal{L}[\tau f(\tau)] = -F'(s)$, отримуємо

$$s^2 F(s) - 2i [F(s) + sF'(s)] + 2\delta F(s) = 0. \quad (2.9)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння першого порядку дає

$$F(s) = C_\delta \exp\left(-\frac{is^2}{4}\right) s^{-1-i\delta}. \quad (2.10)$$

Тут константа інтегрування C_δ може бути визначена з початкової умови. І тоді ми можемо знайти $f(\tau)$ за допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{s\tau} F(s) ds, \quad (2.11)$$

де γ — дійсне число, так що контур інтегрування знаходиться в області збіжності $F(s)$. Деталі інтегрування описані у [19].

Результати інтегрування дають асимптотичне рішення рівняння Шредингера для часу менше і більше нуля, де нульовою точкою вважається

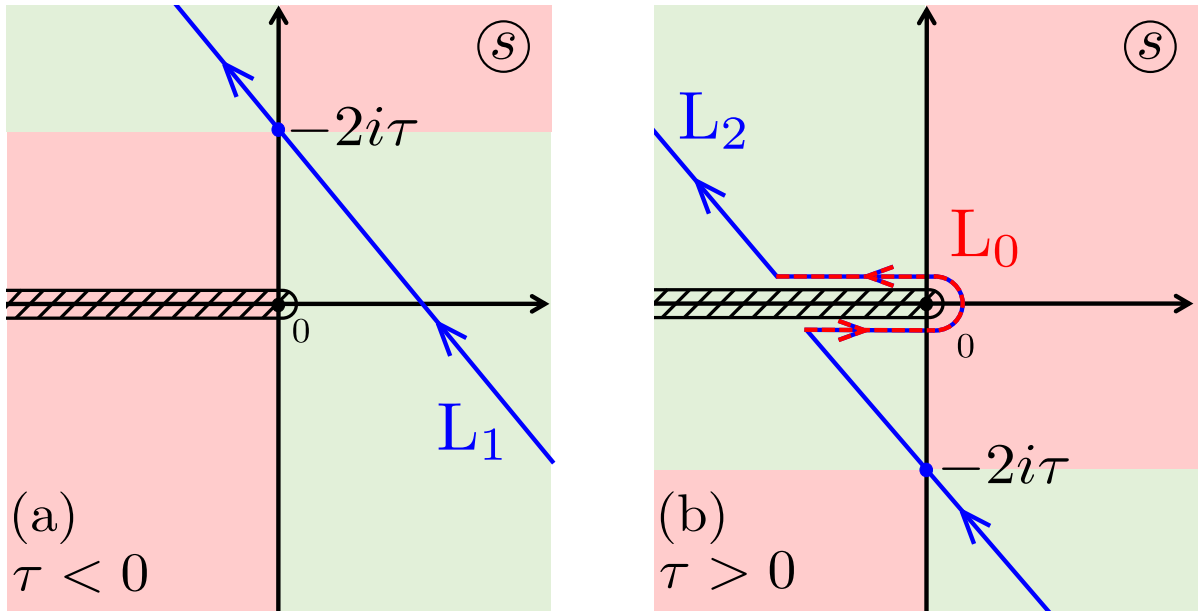


Рис. 2.1: Контури інтегрування $L_{1,2}$ в рівнянні. (2.11) Області, де можна застосувати метод перевалу, показано зеленим кольором. Контур L_1 в (a) відповідає $\tau < 0$, а L_2 в (b) відповідає $\tau > 0$. Контур L_0 є частиною контуру L_2 , яка частково розташована в рожевій області. Інтегрування вздовж цього контуру слід виконувати окремо від інтеграла, обчисленого в рамках методу сідлової точки, обидва з яких роблять свій внесок в інтеграл у рівнянні.

момент наближення рівнів:

$$\tau < 0 : \begin{cases} \alpha(\tau) = C_\delta \sqrt{4\pi} (-2i\tau)^{-i\delta-1} \exp\left(-i\frac{\tau^2}{2} + i\frac{3\pi}{4}\right), \\ \beta(\tau) = C_\delta \sqrt{\frac{2\pi}{\delta}} (-2i\tau)^{-i\delta} \exp\left(-i\frac{\tau^2}{2} + \frac{i\pi}{4}\right), \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\tau > 0 : \begin{cases} \alpha(\tau) = C_\delta \sqrt{4\pi} (-2i\tau)^{-i\delta-1} \exp\left(-i\frac{\tau^2}{2} + i\frac{3\pi}{4}\right) + C_\delta \frac{2\pi i}{\Gamma(i\delta+1)} \tau^{i\delta} \exp\left(\frac{i\tau^2}{2}\right), \\ \beta(\tau) = C_\delta \sqrt{\frac{2\pi}{\delta}} (-2i\tau)^{-i\delta} \exp\left(-i\frac{\tau^2}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) + C_\delta \sqrt{\frac{\delta}{2}} \frac{2\pi i}{\Gamma(i\delta+1)} \tau^{i\delta-1} \exp\left(\frac{i\tau^2}{2}\right). \end{cases} \quad (2.13)$$

Тепер ми розглянемо початкову умову далеко від наближення рівнів,

на $\tau \rightarrow -\infty$, і отримаємо із формул (2.12, 2.13)

$$\begin{cases} |\alpha|^2 = 0 \\ |\beta|^2 = 1 \end{cases} . \quad (2.14)$$

Для виконання умови нормування ми беремо константу інтегрування

$$C_\delta = \sqrt{\frac{\delta}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\pi\delta}{2}\right), \quad (2.15)$$

де ми використали $i^{i\delta} = e^{-\pi\delta/2}$. Необхідно зауважити, що початкова умова (2.14) залишає фазу невизначеною, тому заміна $C_\delta \rightarrow C_\delta e^{i\vartheta}$ з будь-якою фазою ϑ призводить до того самого початкового стану для імовірності заселення рівнів.

2.3 Порівняння асимптотичної хвильової функції із аналітичним результатом

Для опису динаміки квантових систем необхідно знати поведінку хвильової функції у будь-який час. Майорана отримав лише ймовірність переходу з основного стану в збуджений. Ми розширюємо метод Майорани і отримуємо динаміку хвильової функції. Проте цей метод є асимптотичним, і очікується, що він не працюватиме належним чином при малих абсолютних значеннях безрозмірного часу τ . Чи забезпечує це правильну поведінку за кінцевих значень часу? Даваймо дослідимо це та розглянемо цю динаміку, побудувавши графік заселеності енергетичного рівня, заданий формулами (2.12, 2.13), як функції часу.

На Рис. 2.2 ми показуємо заселення двох рівнів для асимптотичного результату – підходу Майорани (2.12, 2.13), і точного результату – підходу Зенера (1.7). Рис. 2.2 показує, що асимптотичний розв'язок правильно описує динаміку при $|\tau| \gtrsim 1$; і це означає, що підхід Майорани дає правильні результати навіть за відносно невеликі проміжки часу. Таким чином, підхід Майорани *правильно описує не тільки асимптотичні значення на нескінченності, а й перехідну динаміку*. Лише в самому околі нуля, коли $|\tau| \lesssim 1$, асимптотичний розв'язок не описує динаміку хвильової функції правильно. Як показано на Рис. 2.2, ця область, показана жовтим фоновим кольором, досить вузька. Ці результати є оригінальними.

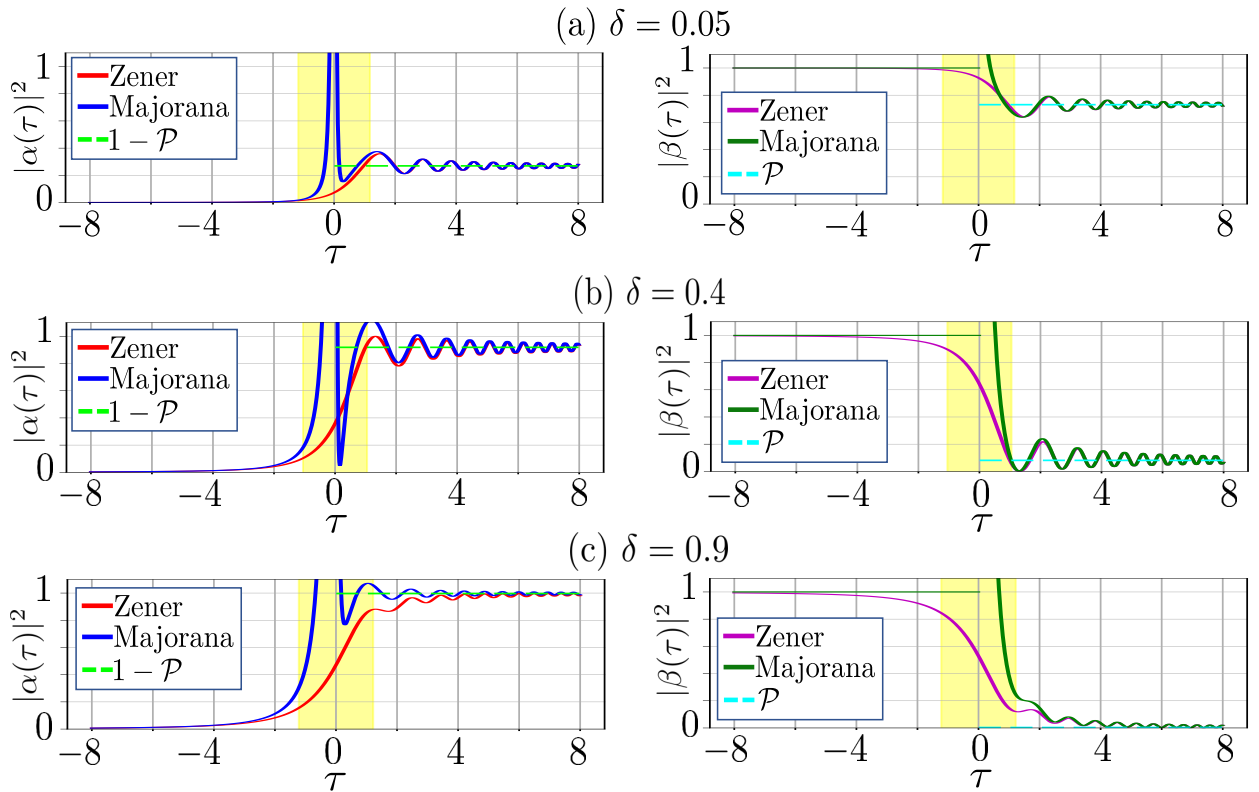


Рис. 2.2: Порівняння динаміки ймовірності заселеності від часу τ , отриманої методом Майорани (синя і зелена криві) і методом Зенера (червона і фіолетова криві). Ліві панелі показують динаміку першого компонента спінора $\alpha(\tau)$, тоді як праві панелі показують другий компонент $\beta(\tau)$ для трьох різних значень параметра адіабатичності δ . Жовті області показують область, де підхід Майорани не дає правильного результату, оскільки цей метод є асимптотичним. Яскраво-зелені горизонтальні пунктирні лінії показують ймовірність ЛЗШМ. Це показує, що далеко від перехідної області обидва результати, отримані Зенером і Майораною, асимптотично наближаються до цього значення.

2.4 Кількісна оцінка границь чинності

Кількісно визначимо область, де наш розв'язок за методом Майорани, (2.12, 2.13), значно відхиляється від точного розв'язку. Як бачимо з Рис. 2.2, цей проміжок часу відповідає так званому стрибковому часу [10, 42]. Час стрибка можна визначити через похідну в нульовий час, $P'(0)$, наступним чином для формул за підходом Зенера

$$\tau_{\text{jump}} = \frac{1 - \mathcal{P}}{P'(0)}, \quad (2.16)$$

де $\mathcal{P}$ – ймовірність ЛЗШМ, а $P(\tau)$ – залежна від часу ймовірність переходу з нижнього рівня на верхній. Ми отримуємо цю ймовірність як $P(\tau) =$

$|\alpha(\tau)|^2$ з (1.7), використовуючи початкову умову (2.14)

$$P(\tau) = \delta \exp\left(-\frac{\pi\delta}{4}\right) |D_{-i\delta-1}(-z)|^2. \quad (2.17)$$

Звідси випливає, що час стрибку, в залежності від адіабатичного параметру, δ дорівнює

$$\tau_{\text{jump}}(\delta) = \frac{\sqrt{1-\mathcal{P}}}{\sqrt{2\delta \cos \chi(\delta)}}, \quad (2.18)$$

де

$$\chi(\delta) = \frac{\pi}{4} + \text{Arg} \left[\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{i\delta}{2} \right) \right] - \text{Arg} \left[\Gamma \left(1 - \frac{i\delta}{2} \right) \right]. \quad (2.19)$$

Базуючись на цій формулі, ми можемо аналітично оцінити область, де наш метод не дає правильного результату: ширина області жовтого фону на Рис. 2.2 відповідає τ_{jump} , визначеному формулою (2.18).

2.5 Суперпозиційний початковий стан

Коли в розділі 2.2 ми розв'язали рівняння еволюції за Майораною, ми отримали конкретну початкову умову (2.14). У випадку, коли нас цікавить будь-яка інша початкова умова, це рішення недійсне. Це тому, що цей підхід дає частинний розв'язок рівняння (2.6). Щоб знайти загальний розв'язок, потрібно отримати другий частинний розв'язок, лінійно незалежний від першого. Це можна отримати, розв'язавши рівняння (2.7) аналогічно тому, як ми робили в розділі 2.2. Назвемо ці два рішення $|\psi_1\rangle$ і $|\psi_2\rangle$, де

$$|\psi_{1,2}\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Замість того щоб розв'язувати рівняння (2.7), ми зазначаємо, що це збігається з рівнянням (2.6) шляхом заміни α_2 на β_1 і β_2 на α_1 і взяттям їх комплексного спряження з відповідним вибором гілки в квадратному корені. У методі перевалу гілка залежить від кута нахилу контуру інтегрування. У двох часткових рішеннях нахили різні, тому гілки також обрано різними.

Тоді загальний розв'язок є лінійною комбінацією цих двох розв'язків,

$|\psi(\tau)\rangle = Q_1 |\psi_1(\tau)\rangle + Q_2 |\psi_2(\tau)\rangle$. Якщо розглядати заданий початковий стан

$$|\psi(\tau_i)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

тоді константи дорівнюють $Q_1 = \beta_i$ і $Q_2 = \alpha_i$. Підводячи підсумок, загальне рішення є наступним

$$|\psi(\tau)\rangle = \beta_i |\psi_1(\tau)\rangle + \alpha_i |\psi_2(\tau)\rangle, \quad (2.22)$$

де $|\psi_1(\tau)\rangle$ дається у (2.12, 2.13) і $|\psi_2(\tau)\rangle$ отримане із $|\psi_1(\tau)\rangle$ шляхом обміну α та β і комплексним спряженням із врахуванням гілки комплексного кореня.

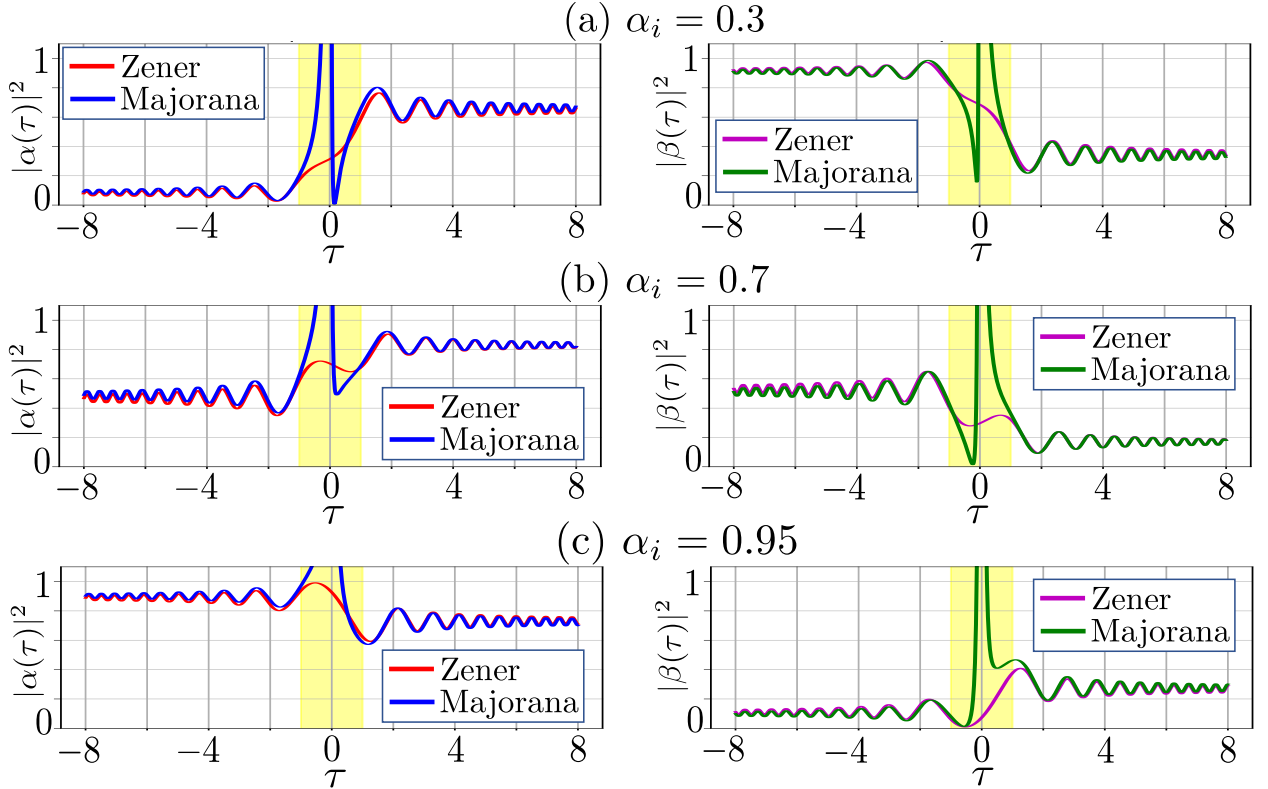


Рис. 2.3: Еволюція в часі ймовірності заселеності енергетичних рівнів, для різних початкових суперпозиційних станів. Подібно до Рис. 2.2, ми представляємо порівняння динаміки, отриманої за допомогою методу Майорани та методу Зенера, тепер для трьох різних початкових станів, з $\alpha_i = 0, 3; 0, 7$ і $0, 95$; $\beta_i = \sqrt{1 - \alpha_i^2}$. Параметр адіабатичності дорівнює $\delta = 0, 1$.

Результати розрахунків для суперпозиційних початкових станів наведено на Рис. 2.3. Там ми розглядаємо три початкові стани, коли ймовірність ψ_1 -стану, який є $|\alpha_i|^2$, дорівнює близько 0, 1 (верхня панель), 0, 5 (середня

панель) і 0,9 (нижня панель). Верхня панель описує невелике відхилення від рішення Майорани $|\psi_1\rangle$, що описує динаміку для основного початкового стану, представленого на Рис. 2.2.

2.6 Чинність асимптотичної динаміки близько нуля

Рисунок 2.4 показує чинність наших результатів, отриманих для основного (а) та суперпозиційного стану (b) у рамках підходу Майорани. Це кількісно визначається як відносна різниця між нашим асимптотичним рішенням і точним, отриманим у рамках підходу Зенера. Для ілюстрації ми вибираємо однаково заповнену суперпозицію в початковий момент часу. Якщо $|\alpha_i|^2 < 0,5$, фігура стає перекошеною вліво; якщо $|\alpha_i|^2 > 0,5$, тоді зміщення відбувається вправо. Крім того, ми малюємо пунктирні сині лінії, що показують час стрибка (2.16), що дає хорошу оцінку того, де асимптотичний розв'язок узгоджується з точним (за межами області між синіми кривими). Зверніть увагу, що час стрибка не є симетричним навколо точки $\tau = 0$. Загалом він асиметричний, а зсув пов'язаний зі значенням параметра адіабатичності δ .

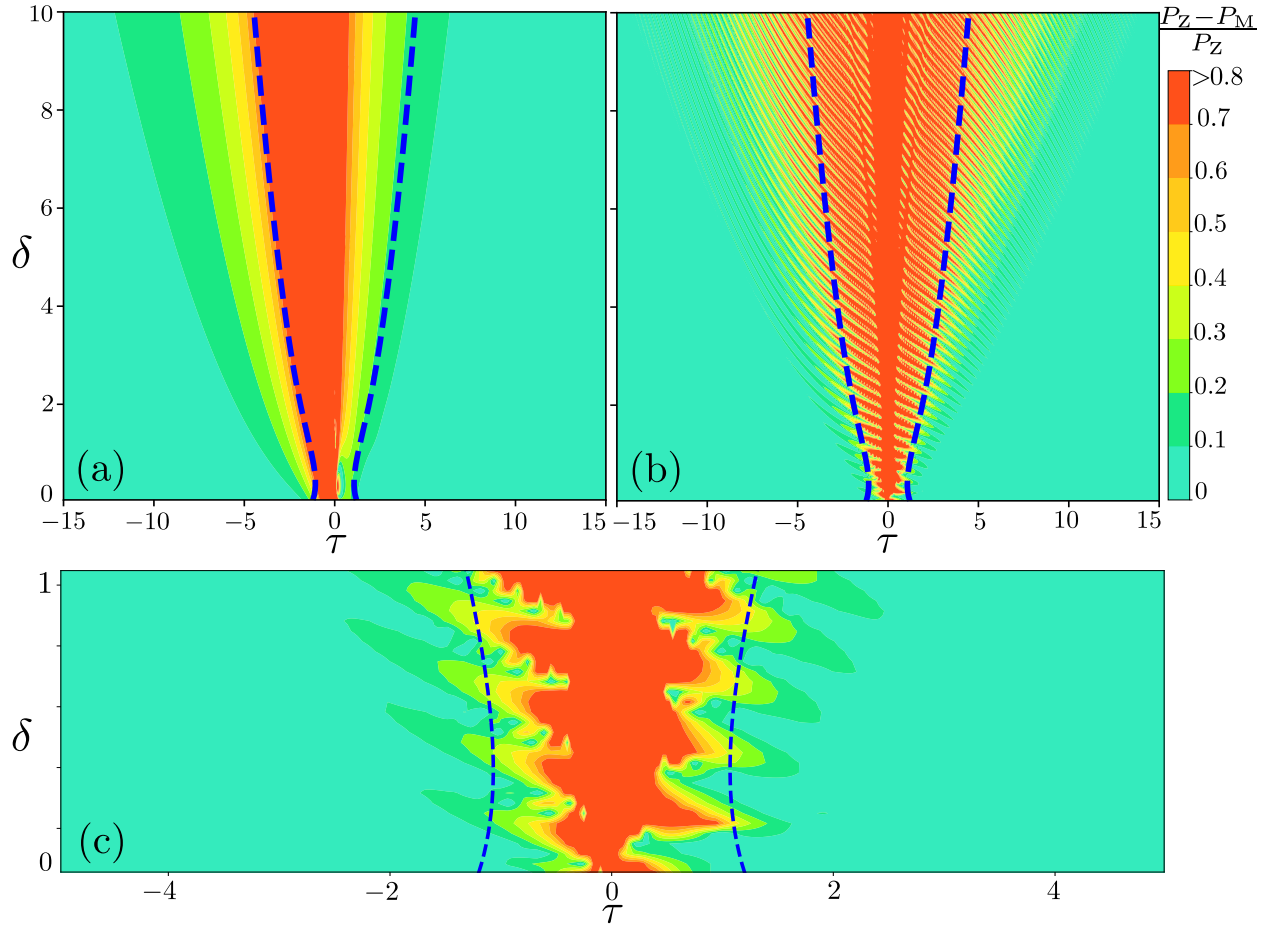


Рис. 2.4: Чинність підходу Майорани. Відхилення ймовірності за підходом Майорани від аналітичного розв'язку кількісно визначається як різниця ймовірності зайнятості верхнього рівня, розрахованої за асимптотичним методом Майорани і за точним результатом Зенера. Початковою умовою вважається основний стан із $\alpha_i = 0$ (a) і стан суперпозиції (b) з $\alpha_i = 0, 7$. Тут P_Z — це ймовірність Зенера, яка визначається як $|\alpha(\tau)|^2$ з рівняння (1.7). Тоді P_M — це наш результат у рамках підходу Майорани, який надається $|\alpha(\tau)|^2$ із рівняння (2.22). Пунктирні сині криві показують час стрибка τ_{jump} , (2.16). На панелі (c) показано збільшене зображення залежності (b) у неадиабатичному діапазоні параметра адиабатичності.

РОЗДІЛ 3

АДІАБАТИЧНО-ІМПУЛЬСНА МОДЕЛЬ

3.1 Адіабатична еволюція

Повільний процес є адіабатичним. У таких процесах перехід із одного енергетичного рівня на інший не відбувається. Для опису такої еволюції будемо вирішувати стаціонарне рівняння Шредінгера у адіабатичному базисі. Адіабатичний базис – це базис власних значень енергії гамільтоніана $|E_{\pm}\rangle$. До цього ми розглядали динаміку у діабатычному базисі – базисі логічних нуля та одиниці $|0\rangle, |1\rangle$. На Рис. 1 показано схематичний зв'язок цих базисів. Аналітично вони пов'язані наступним чином

$$|E_{\pm}\rangle = \gamma_{\mp} |0\rangle \mp \gamma_{\pm} |1\rangle, \quad (3.1)$$

де

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\varepsilon(t)}{\Delta E(t)}}. \quad (3.2)$$

Матриця переходу із діабатычного базису в адіабатичний є наступною

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \gamma_{-} & -\gamma_{+} \\ \gamma_{+} & \gamma_{-} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Адіабатична еволюція описується наступною матрицею в адіабатичному базисі

$$U_{\text{ad}}(t_i, t_f) = \begin{pmatrix} \exp(-i\zeta) & 0 \\ 0 & \exp(i\zeta) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

де ζ відповідає накопиченій фазі хвильової функції під час процесу і дорівнює

$$\zeta(t_i, t_f) = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2} dt. \quad (3.5)$$

3.2 Константний сигнал

Розглянемо випадок стаціонарного сигналу $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, тоді еволюція буде описуватись наступною матрицею

$$U_{\text{ad}}(t_i, t_f) = \begin{pmatrix} \exp[-i\omega t_{\text{wait}}] & 0 \\ 0 & \exp[i\omega t_{\text{wait}}] \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

де ми використовуємо наступні позначення

$$t_{\text{wait}} = t_f - t_i; \quad (3.7)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_0^2}}{2\hbar}. \quad (3.8)$$

Матриця $\mathcal{M}$ є унітарною, тому адіабатична еволюція в діабатычному базисі описується матрицею

$$U_{\text{ad}}^{\text{diab}}(t_i, t_f) = \mathcal{M}^T U_{\text{ad}}(t_i, t_f) \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \gamma_-^2 e^{-i\omega t_{\text{wait}}} + \gamma_+^2 e^{i\omega t_{\text{wait}}} & \gamma_- \gamma_+ (\exp[i\omega t_{\text{wait}}] - \exp[-i\omega t_{\text{wait}}]) \\ \gamma_- \gamma_+ (\exp[i\omega t_{\text{wait}}] - \exp[-i\omega t_{\text{wait}}]) & \gamma_+^2 \exp[-i\omega t_{\text{wait}}] + \gamma_-^2 \exp[i\omega t_{\text{wait}}] \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Той самий результат можна отримати шляхом прямого розв'язання рівняння Шредінгера у діабатычному базисі.

Якщо еволюція знаходиться далеко від області перетину енергетичних рівнів, $|\varepsilon_0| \gg \Delta$, адіабатична еволюція буде

$$\varepsilon_0 < 0 : U_{\text{ad}}^{\text{diab}}(t_i, t_f) = \begin{pmatrix} \exp[-i\omega t_{\text{wait}}] & 0 \\ 0 & \exp[i\omega t_{\text{wait}}] \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_0 > 0 : U_{\text{ad}}^{\text{diab}}(t_i, t_f) = \begin{pmatrix} \exp[i\omega t_{\text{wait}}] & 0 \\ 0 & \exp[-i\omega t_{\text{wait}}] \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Це показує, що (для різних знаків ε_0) повороти навкруги осі z відбуваються в різних напрямках, і візуалізація представлена на Рис. 3.1.

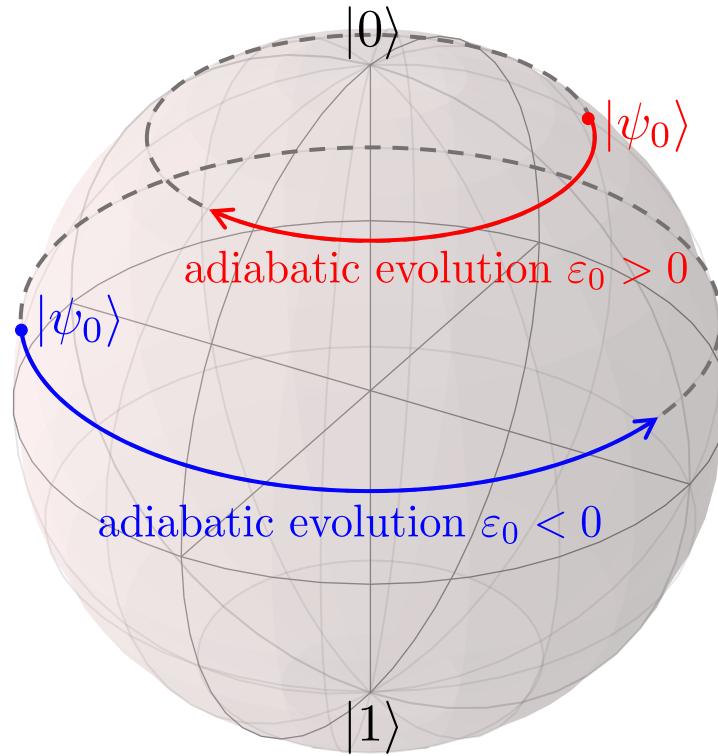


Рис. 3.1: Адіабатична еволюція на сфері Блоха. Дві адіабатичні еволюції показані на сфері Блоха. Червона еволюція демонструє, що коли збудження є постійним і $\varepsilon_0 > 0$, еволюція відповідає обертанню навколо осі- z у негативному напрямку. Якщо збудження $\varepsilon_0 < 0$, обертання відбувається в позитивному напрямку. Цей випадок показано синім кольором.

3.3 Лінійний сигнал

Динаміка з початковим часом $-t_i$ і кінцевим часом t_f може бути описана наближенням адіабатичного імпульсу [19]. Відповідно до цього динаміку можна розділити на три різні стадії: адіабатичну еволюцію, перехід і адіабатичну еволюцію знов:

$$|\psi_f\rangle = U_{\text{ad}}(t_f, 0) N U_{\text{ad}}(0, -t_i) |\psi_i\rangle, \quad (3.12)$$

де $|\psi_{i,f}\rangle$ є початковою та кінцевою хвильовими функціями, U_{ad} описує адіабатичну еволюцію, а N описує перехід ЛЗШМ. Схематичне розділення на стадії продемонстроване на Рис. 1. Матриця адіабатичної еволюції до переходу є

$$U_{\text{ad}}(0, -t_i) = \begin{pmatrix} \exp(-i\zeta) & 0 \\ 0 & \exp(i\zeta) \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

і після переходу адіабатично-еволюційна матриця дорівнює

$$U_{\text{ad}}(t_f, 0) = \begin{pmatrix} \exp(i\zeta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\zeta) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Тут фаза ζ та її асимптотичні вирази для великих значень часу, тобто в

$$t = \pm \tau_a \sqrt{2\hbar/v} \quad (3.15)$$

із $\tau_a \gg 1$ буде дорівнювати

$$\zeta(\pm\tau_a) = \frac{1}{2\hbar} \int_0^{\pm\tau_a} \sqrt{\Delta^2 + 2\hbar v \tau^2} d\tau \approx \quad (3.16)$$

$$\approx \pm \left[\frac{\tau_a^2}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \ln \delta + \delta \ln \sqrt{2}\tau_a \right]. \quad (3.17)$$

3.4 Імпульсний тип переходу

Неадіабатичний перехід описується матрицею, яка в теорії розсіювання асоціюється з матрицею розсіювання [43]. (Зверніть увагу на аналогію з інтерферометром Маха-Цендера [10, 11, 44–47].) Компоненти матриці переходу пов'язані з амплітудами відповідних станів системи в енергетичному просторі. Діагональні елементи відповідають квадратному кореню з коефіцієнта відбиття R , а недіагональні елементи відповідають квадратному кореню з коефіцієнта пропускання T і його комплексно спряженого:

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{T} \\ -(\sqrt{T})^* & \sqrt{R} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

З рівнянь (2.12, 2.13) ми отримуємо елементи матриці імпульсного переходу

$$R = \mathcal{P} \quad \text{і} \quad T = (1 - \mathcal{P}) \exp(i2\varphi_S), \quad (3.19)$$

де φ_S є фазою Стокса

$$\varphi_S = \frac{\pi}{4} + \text{Arg}[\Gamma(1 - i\delta)] + \delta(\ln \delta - 1). \quad (3.20)$$

Далі ми будемо використовувати формалізм, введений у цьому розділі, щоб описати динаміку системи, починаючи зі суперпозиційного стану. Використовуючи результати цього розділу, можна описати не лише одиничне проходження, але й випадок багаторазового проходження за допомогою адіабатично-імпульсного наближення.

РОЗДІЛ 4

КВАНТОВИЙ ФАЗОВИЙ КОНТРОЛЬ

4.1 Залежність імовірності заселення енергетичного рівня від початкової фази хвильової функції

Розглянемо залежність кінцевої ймовірності заселення від початкової фази хвильової функції. Для цього візьмемо хвильову функцію у вигляді

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Потім, беручи α_i дійсне за початкову умову, ми вводимо різницю фаз у β_i :

$$\beta_i = \sqrt{1 - \alpha_i^2} \exp(i\phi_i). \quad (4.2)$$

Однопрохідна еволюція описується ермітовою матрицею

$$\tilde{N} = U_{\text{ad}}(0, \tau_f) N U_{\text{ad}}(-\tau_i, 0). \quad (4.3)$$

Взявши для простоти $\tau_f = \tau_i = \tau_a$, отримаємо компоненти цієї матриці

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} \\ \tilde{N}_{21} & \tilde{N}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{T} e^{2i\zeta(\tau_a)} \\ -\sqrt{T}^* e^{-2i\zeta(\tau_a)} & \sqrt{R} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Більш загальний випадок, $\tau_f \neq \tau_i$, розглянуто у Підрозділі 4.7.

Хвильова функція після переходу визначена в (3.12). Тоді перший компонент спінора дорівнює

$$\alpha_f = \alpha_i \tilde{N}_{11} + \sqrt{1 - \alpha_i^2} e^{i\phi_i} \tilde{N}_{12}. \quad (4.5)$$

Кінцева ймовірність зайняття нижнього рівня є наступною $|\alpha_f|^2 = P_{|0\rangle}$. Тоді, використовуючи (3.17, 3.20), ми можемо записати пряму залежність ймовірності зайнятості від параметрів системи

$$\begin{aligned} P_{|0\rangle} &= \alpha_i^2 e^{-2\pi\delta} + (1 - \alpha_i^2)(1 - e^{-2\pi\delta}) \\ &+ 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} e^{-\pi\delta} \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}} \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де

$$\theta(\delta, \tau_a, \phi_i) = \frac{\pi}{4} + \text{Arg}[\Gamma(1 - i\delta)] + \tau_a^2 + 2\delta \ln(\sqrt{2}\tau_a) + \phi_i. \quad (4.7)$$

Важливо зауважити, що кінцева ймовірність зайнятості не залежить від кінцевого часу, для деталей див. Підрозділ 4.7. Отже, якщо ми використовуємо позначення, що початковий час $-\tau_i < 0$, кінцевий результат буде таким же, як (4.6), з $\tau_a \rightarrow \tau_i$.

4.2 Конструктивна і деструктивна інтерференція

Фінальна ймовірність залежить від таких параметрів системи: параметр адіабатичності δ , початкова заселеність нижнього енергетичного рівня α_i , початкова фаза хвильової функції ϕ_i , і початковий час τ_i . Ми зацікавлені в дослідженні внеску третього доданку в (4.6). Цей член є результатом інтерференції, і (для зручності) ми будемо позначати його як α_{int}^2

$$\alpha_{\text{int}}^2 = 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} e^{-\pi\delta} \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}} \cos \theta. \quad (4.8)$$

Завдяки значенню α_{int}^2 можна отримати різні значення кінцевої ймовірності. Рисунок 4.1 демонструє внесок цього інтерференційного члена. Якщо початкова ймовірність фіксована, а різниця фаз між компонентами хвильової функції варіюється, можна отримати кінцеві ймовірності в широкому діапазоні.

Залежність від α_i пропорційна фактору $2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2}$, тому існує максимум при $\alpha_i = 1/\sqrt{2}$.

Залежність від τ_i і $\Delta\phi_i$ здійснюється через аргумент $\cos \theta$. Оскільки параметри ϕ_i і τ_i обидва роблять внесок у кінцевий результат як накопичена фаза під час процесу в (4.6), то їхній внесок аналогічний. Фаза перед переходом є сумою початкової фази ϕ_i і фази, яка була зібрана під час адіабатичної еволюції до переходу. Адіабатична фаза еволюції пов'язана з початковим часом. Залежно від цього існують мінімальне та максимальне значення цього інтерференційного члена, які відповідають $\cos \theta = \pm 1$. Максимальне значення – випадок конструктивної інтерференції. Мінімальне значення – випадок деструктивної інтерференції. Ці випадки відбуватимуться

ться, якщо початковий фазовий зсув є відповідно

$$\phi_1^{\text{destr}} = \phi_{i0} + \frac{\pi}{2}, \quad (4.9)$$

і

$$\phi_1^{\text{constr}} = \phi_{i0} - \frac{\pi}{2}, \quad (4.10)$$

де ϕ_{i0} відповідає нульовому вкладу інтерференційного фактору і дорівнює

$$\phi_{i0} = 2\pi n + \frac{\pi}{4} - \text{Arg} [\Gamma(1 - i\delta)] - \tau_i^2 - 2\delta \ln(\sqrt{2}\tau_i), \quad (4.11)$$

де n ціле число.

Ми можемо отримати будь-яке значення інтерференційного члена між значеннями конструктивної та деструктивної інтерференції. Мінімальне і максимальне значення ймовірності зайнятості такі

$$P_{|0\rangle\text{max/min}} = \left(\alpha_i e^{-\pi\delta} \pm \sqrt{1 - \alpha_i^2} \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}} \right)^2. \quad (4.12)$$

Ширина цієї області (між деструктивною і конструктивною інтерференцією) становить

$$\Delta P(\alpha_i, \delta) = 4\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} e^{-\pi\delta} \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}}. \quad (4.13)$$

Ширина набуває максимального значення за умови $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2}}$, і дорівнює

$$\Delta P(\delta)_{\text{max}} = 2e^{-\pi\delta} \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}}. \quad (4.14)$$

Крім того, шириною можна керувати змінюючи параметр адіабатичності δ . Зокрема, якщо $\delta = \ln \sqrt{2}/\pi$, то ширина набуває максимального значення

$$\Delta P(\alpha_i)_{\text{max}} = 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2}. \quad (4.15)$$

Якщо ми візьмемо

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \delta = \frac{\ln \sqrt{2}}{\pi} \quad (4.16)$$

в той же час, ширина становитиме 1, що означає, що можна отримати будь-яку остаточну ймовірність.

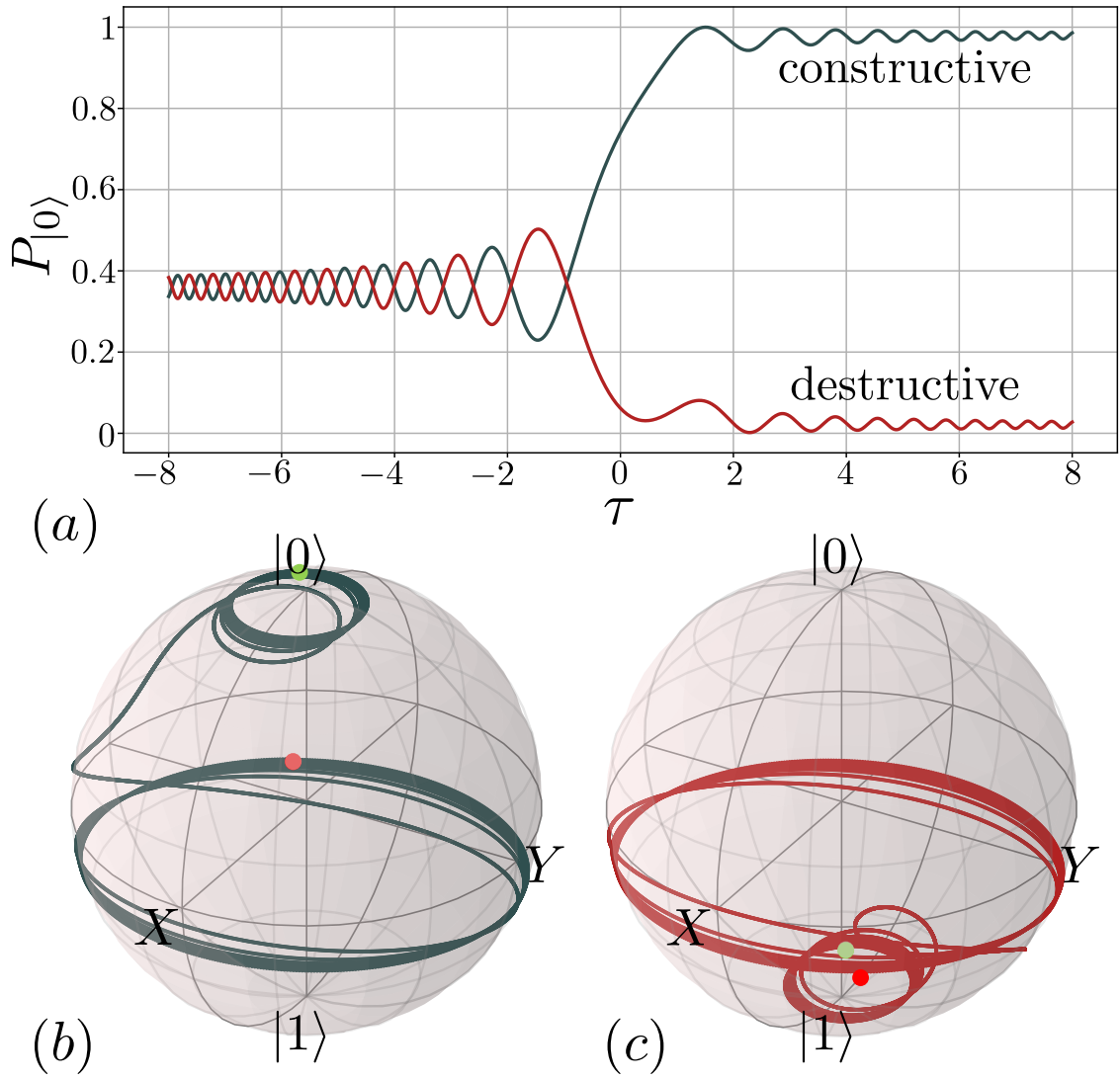


Рис. 4.1: Залежність кінцевої ймовірності заселеності нижнього енергетичного рівня від початкової фази показана на цьому рисунку. Якщо значення (4.8) є максимальним, остаточна ймовірність заселення також є максимальною та відповідає випадку конструктивної інтерференції. З іншого боку, якщо (4.8) є мінімальним, остаточна ймовірність заселення також є мінімальною, і це є випадком руйнівної інтерференції. (a) показує часову залежність обох цих ймовірностей зайнятості. (b) показує динаміку на сфері Блоха для випадку конструктивної інтерференції, показаного на вкладці (a). (c) показує динаміку на сфері Блоха для випадку деструктивної інтерференції, показаного на вкладці (a). Початкова ймовірність заселення $P_{|0\rangle_i} = 0,36$, а параметр адіабатичності $\delta = \ln 2/2\pi$. Червоні і зелені точки на вкладках (a) і (b) показують початковий і кінцевий стан відповідно на сфері Блоха.

Рисунок 4.2 демонструє залежність ширини між конструктивною та деструктивною інтерференцією від параметра адіабатичності у двох випадках початкової ймовірності заселення. Темно-зелена лінія показує ма-

ксимальне значення (4.8), а темно-червона лінія — мінімальне значення. Вплив інтерференційного члена залежить від параметра адіабатичності. При $\delta \gg 1$ і $\delta \ll 1$ вплив інтерференційного члена є близьким до нуля. Значення параметра , відповідають швидким процесам, які не є адіабатичними.

4.3 Повернення у початковий стан після неадіабатичного проходження наближення рівнів

Умову для того, щоб залишатися в тому самому стані, що й початковий, після переходу можна знайти з (4.6), якщо нам потрібно $P_{|0\rangle} = \alpha_i^2$. Це дає нам значення $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{(2\alpha_i^2 - 1) \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}}}{2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2 e^{-\pi\delta}}}. \quad (4.17)$$

Ця умова може бути виконана, коли значення $|\cos \theta| \leq 1$, що вимагає

$$\delta \leq \delta_{\text{st}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{(2\alpha_i^2 - 1)}. \quad (4.18)$$

Тоді різниця фаз між α_i і β_i дорівнює

$$\phi_i = \arccos \frac{(2\alpha_i^2 - 1) \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}}}{2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2 e^{-\pi\delta}}} + \phi_{i0} - \frac{\pi}{2}. \quad (4.19)$$

На Рис. 4.2 область, де може бути збереження початкової ймовірності заселення, показана світло-блакитним фоном. У діабатичному базисі це відповідає здебільшого малим значенням параметра адіабатичності δ . Мале δ відповідає швидким процесам.

4.4 Когерентне руйнування тунелювання

Як ми зазначили у вступі, отримання основного стану є важливим для квантових розрахунків. На Рис. 4.2 ми позначили точки, коли можна отримати основний стан. Якщо кінцева ймовірність зайнятості дорівнює нулю, це означає, що кінцевий стан дорівнює $|1\rangle$. Це відповідає випадку когерентного руйнування тунелювання (CDT). У протилежному випадку, якщо остаточна ймовірність зайнятості дорівнює одиниці, стан $|0\rangle$. За аналогією ми називаємо цей випадок когерентним конструюванням тунелювання

(CCT). Ці випадки присутні для будь-якої початкової ймовірності зайнятості та відповідають мінімуму та максимуму ймовірностей зайнятості деструктивної та конструктивної інтерференції. З (4.12) можна знайти значення параметра адіабатичності для цих випадків

$$\delta_{\text{CDT}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{1 - \alpha_i^2}, \quad (4.20)$$

$$\delta_{\text{CCT}} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\alpha_i}. \quad (4.21)$$

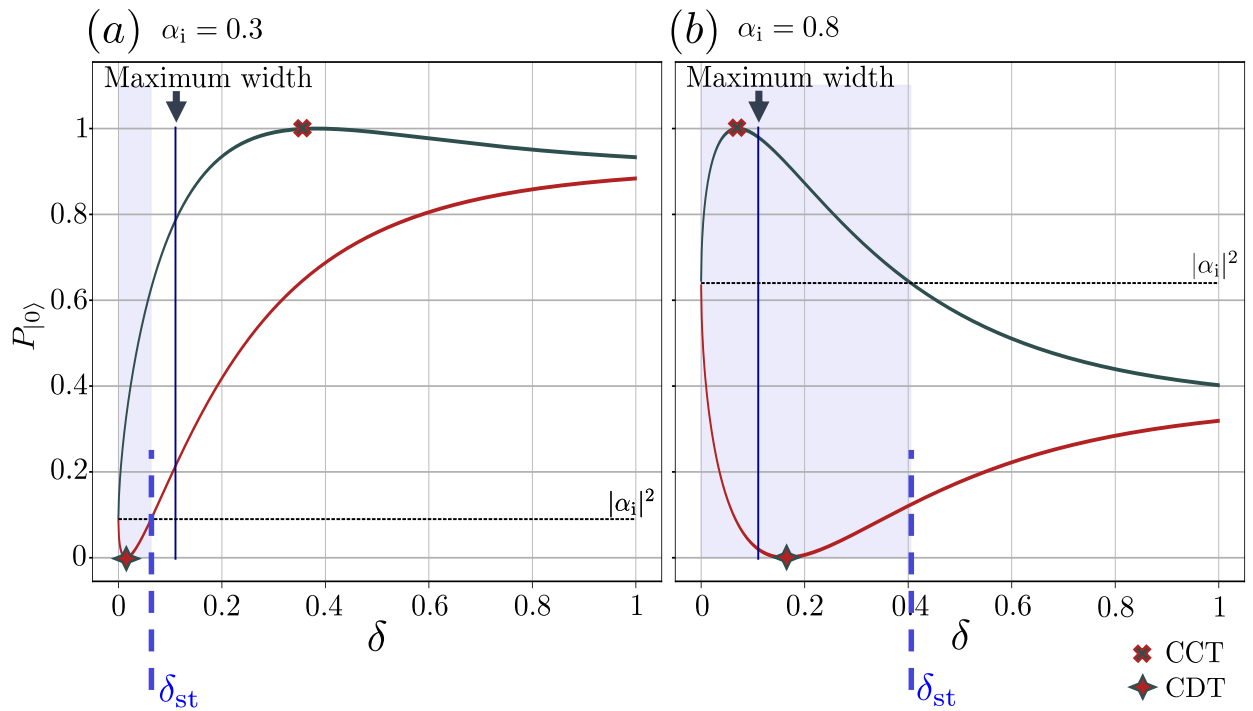


Рис. 4.2: Візуалізація різниці (або ширини) між конструктивною та деструктивною інтерференцією в залежності ймовірності зайнятості від параметрів адіабатичності. Вкладка (а) відповідає випадку, коли $\alpha_i = 0,3$ і (b) $\alpha_i = 0,8$. Темно-зелена крива показує конструктивний випадок, а темно-червона — деструктивну інтерференцію. Світло-блакитна область показує значення параметра адіабатичності, де можливе збереження ймовірності заселення, тобто при $\delta < \delta_{\text{st}}$. Точка, яка відповідає когерентному руйнуванню тунелювання (CDT), позначена зіркою, а точка когерентного конструювання тунелювання (CCT) позначена хрестом. Значення параметра адіабатичності в цих випадках відповідають рівнянням (4.20, 4.21) відповідно.

Результати цього підрозділу є несподіваними, оскільки в результаті ймовірність зайнятості може повернутися до початкового значення лише за

допомогою фазового контролю. CDT і SST для одноразового проходу з лінійним збудженням існують для будь-якої початкової ймовірності заселення. Ці результати є важливими для розробки і удосконалення квантових гейтів.

4.5 Отримання обраного стану кубіту

Тепер ми розглянемо, як контролювати кубіти, змінюючи їх фазу. Ідея полягає в адіабатичній еволюції при постійному збудженні $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. Якщо ми застосовуємо постійний сигнал, еволюція хвильової функції полягає в зміні фази. На сфері Блоха це відповідає обертанню навколо осі z . Фаза, яка з'явиться після цієї еволюції протягом часу t_{wait} , є

$$\phi_{\text{ad}} = \pm 2 \frac{\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_0^2}}{2\hbar} t_{\text{wait}}. \quad (4.22)$$

Знак фази залежить від знака збудження ε_0 , подробиці дивіться в розділі 3. Це означає, що використовуючи цей тип збудження, ми можемо змінити фазу хвильової функції без зміни ймовірності заселення. Ми можемо використовувати його як контроль фази для підготовки особливого початкового стану перед переходом ЛЗШМ.

Як описувалося в попередньому розділі, для будь-якої початкової ймовірності заселення існує можливість отримання основного і збудженого станів. Це означає, що шляхом зміни параметра адіабатичності та початкової фази можна отримати будь-який потрібний нам стан.

Якщо початковий стан близький до основного, для отримання збудженого стану необхідний нескінченний параметр адіабатичності. Щоб подолати цю складність, рішенням є застосування кількох проходжень. Це означає, що ми можемо застосувати два або більше переходів ЛЗШМ для отримання кінцевої ймовірності заселення з експериментально реалізованими параметрами.

Для ілюстрації Рис. 4.3 демонструє два проходи. Перше проходження починається з початковою ймовірністю зайнятості $P_{|0\rangle_i} = 0,01$. Цей стан близький до основного стану $|1\rangle$. Після першого переходу ЛЗШМ (ліва вкладка) з параметром адіабатичності $\delta = \ln \sqrt{2}/\pi$ остаточна ймовірність зайнятості може бути $P_{|0\rangle_f} \approx 0.5 \pm 0.1$. Застосовуючи другий перехід ЛЗШМ з тим же параметром адіабатичності до одного з можливих кінцевих станів

після першого переходу, ми отримуємо, що кінцева ймовірність заселення лежить в діапазоні між 0 і 1. Таким чином, зміна фази хвильової функції після першого переходу за рахунок адіабатичної еволюції із константним сигналом дає нам можливість вибрати кінцевий стан після другого переходу.

Цей процес можна було б перефразувати у адіабатичному базисі, який є базисом рівнів власної енергії. Усі ці формули можна отримати за допомогою зв'язку між діабатычним та адіабатичним базисом, подробиці див. у Розділі 3. Приклад подвійного проходу в адіабатичному базисі показано на Рис. 4.5.

Після одного проходу LZSM можна отримати будь-який кінцевий стан, використовуючи в якості регульованих параметрів початкову фазу та параметр адіабатичності. Багатопрохідна динаміка зі скінченними параметрами адіабатичності може бути застосована у випадках, коли для отримання деяких кінцевих етапів необхідний нескінченний параметр адіабатичності для одного проходу.

4.6 Фазова залежність в адіабатичному базисі

Матрицею, яка описує перехід від діабатычного базису до адіабатичного є (3.3). Використовуючи це співвідношення та припускаючи, що ми далеко від області квазі-перетину, ми отримуємо матрицю переходу в адіабатичному базисі

$$\tilde{N}^{\text{ad}} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{T}\right)^* e^{-2i\zeta(\tau_a)} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} e^{2i\zeta(\tau_a)} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Хвильова функція в адіабатичному базисі є

$$\varphi = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Тоді, якщо b_{1i} і b_{2i} є початковими компонентами спінора, кінцеві компоненти стануть

$$b_{1f} = \sqrt{1 - \mathcal{P}} \exp[-i(2\zeta(\tau_a + \varphi_S))] b_{1i} - \sqrt{\mathcal{P}} b_{2i}, \quad (4.25)$$

$$b_{1f} = \sqrt{\mathcal{P}} b_{1i} + \sqrt{1 - \mathcal{P}} \exp[i(2\zeta(\tau_a + \varphi_S))] b_{2i}. \quad (4.26)$$

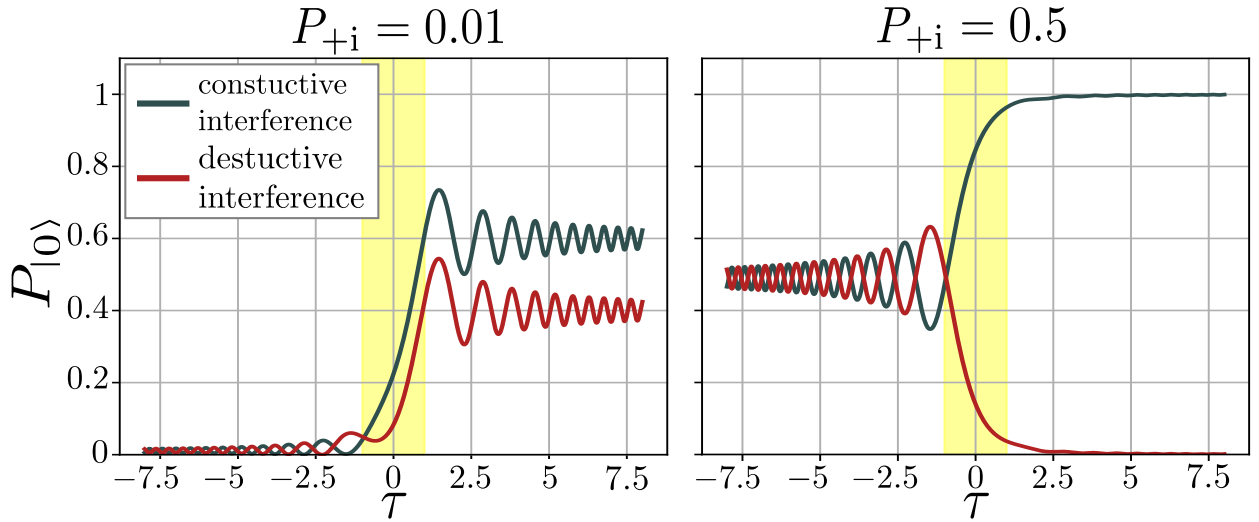


Рис. 4.3: Багатопрохідна динаміка. Показано динаміку для двох переходів у діабатичному базисі. Ліва вкладка показує динаміку першого переходу ЛЗШМ з $\delta = \ln \sqrt{2}/\pi$, починаючи з початкової ймовірності заповнення $P_{|0>}_i = 0,01$. Кінцеві стани знаходяться між темно-зеленою кривою (конструктивна інтерференція) і темно-червоною кривою (деструктивна інтерференція). Права вкладка показує друге проходження з тим самим δ , що й перший, починаючи з одного з можливих завершальних етапів після одного переходу. Після другого переходу остаточну ймовірність заселення можна вибрати між 0 і 1, використовуючи як керуючий параметр фазу хвильової функції перед другим переходом. Жовта область показує час, що за адіабатично-імпульсною моделлю асоціюється із часом стрибка.

Тоді ймовірність заселеності верхнього енергетичного рівня стає

$$P_+ = |b_{1f}|^2 = (1 - \mathcal{P})b_{1i}^2 + \mathcal{P}b_{2i}^2 + 2\sqrt{\mathcal{P}(1 - \mathcal{P})}b_{1i}b_{2i} \cos \theta, \quad (4.27)$$

де θ визначено в (4.7), а початкові компоненти спінора задовольняють співвідношенню $b_{2i} = \sqrt{1 - b_{1i}^2}e^{i\phi_1}$. На рис. 4.4 показані залежності динаміки ймовірності заселення нижнього рівня у адіабатичному базисі від часу для різних початкових умов та параметру адіабатичності.

Умова перебування після переходу в тому ж стані, що й початковий, визначається формулою

$$\cos \theta = \frac{(2b_{1i}^2 - 1) \sqrt{\mathcal{P}}}{2b_{1i} \sqrt{1 - b_{1i}^2} \sqrt{1 - \mathcal{P}}}. \quad (4.28)$$

Умова існування $\cos \theta$ у адіабатичному базисі є

$$\delta > \delta_{\text{st}}^{\text{ad}} = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{4b_{\text{li}}^2(1 - b_{\text{li}}^2)} \right]. \quad (4.29)$$

Таким чином ми описали можливість використовувати фазовий контроль у адіабатичному базисі. Вклад інтерференції не відрізняється у діа-батичному і адіабатичному базисі.

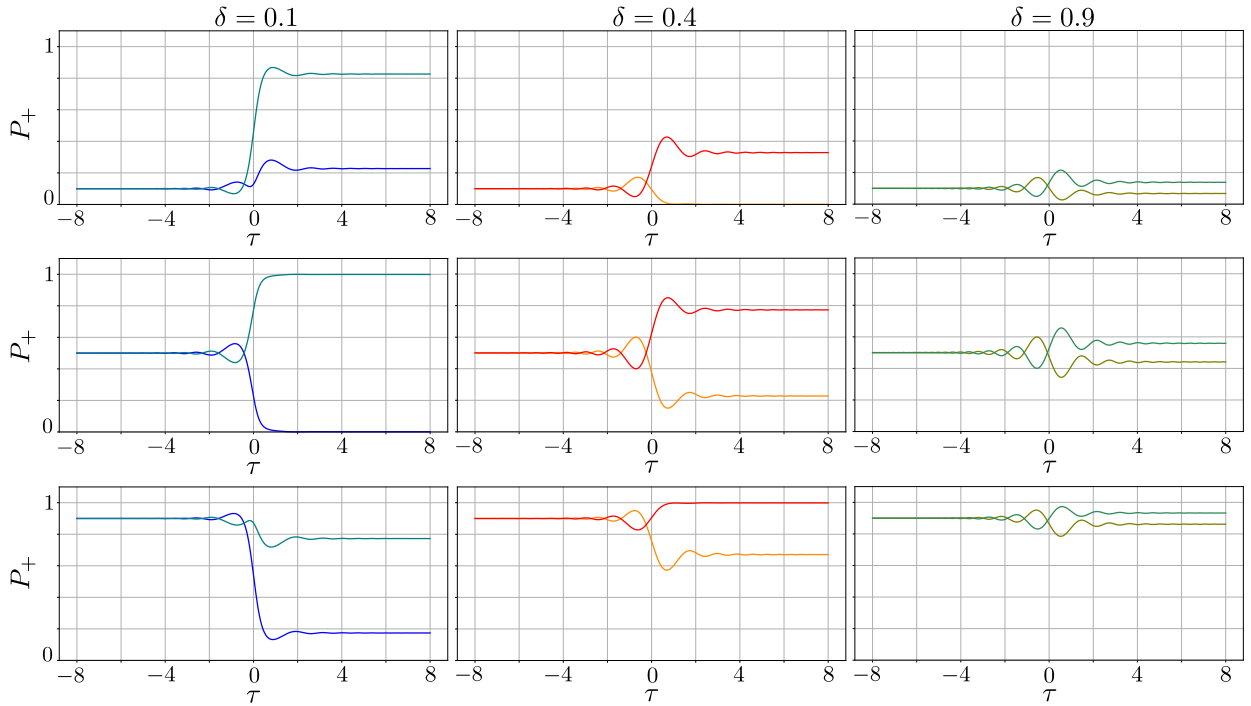


Рис. 4.4: Залежність конструктивної/деструктивної інтерференції від параметра адіабатичності δ для різної початкової ймовірності заселення в адіабатичному базисі. Три стовпці відповідають трьом параметрам адіабатичності δ . Кожна панель показує динаміку ймовірності зайнятості в залежності від безрозмірного часу τ . Ці залежності показують, що чим більший параметр адіабатичності δ , тим інтервал між конструктивною і деструктивною інтерференцією менший. Максимальна ширина - це коли початкова ймовірність заселення дорівнює 0,5.

Аналогічно діабаатичному базису можна користуватись подвійним проходженням, як метод отримання бажаного стану. На Рис. 4.5 показані аналогічно Рис. 4.3 динаміки конструктивної і деструктивної інтерференції у випадках із початковими ймовірностями заселення $P_{+i} = 0,01$ і $P_{+i} = 0,5$

У адіабатичному базисі після проходження точки наближення рівнів рівні міняються місцями. Таким чином конструктивна інтерференція у діабаатичному базисі відповідає деструктивній і навпаки. У наступних під-

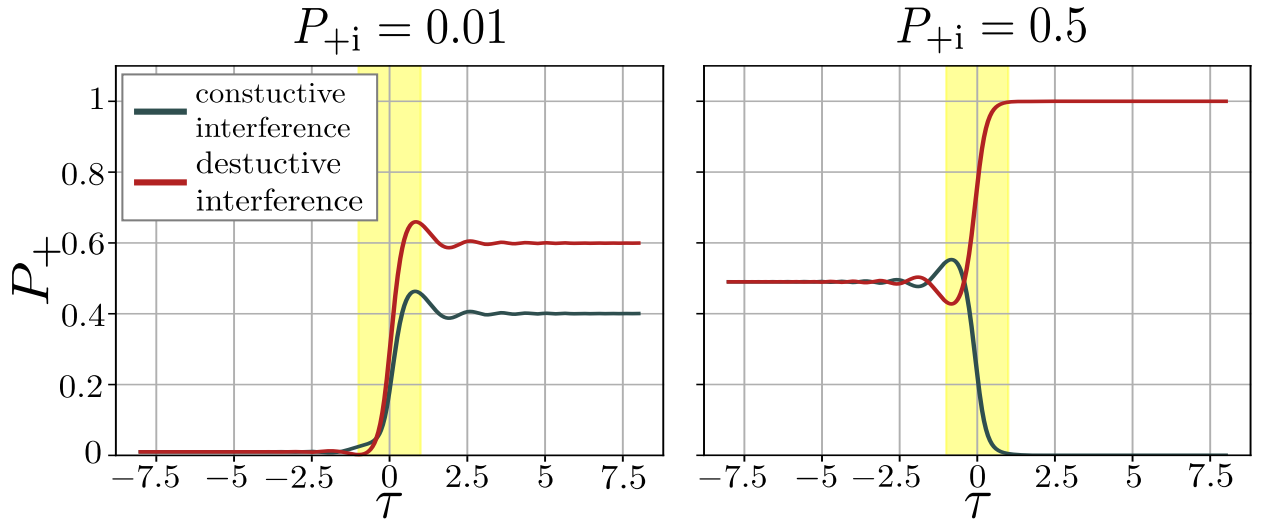


Рис. 4.5: Багатопрохідна динаміка у адіабатичному базисі із параметром адіабатичності $\delta = \ln \sqrt{2}/\pi$. Ліва вкладка показує динаміку першого переходу ЛЗШМ, починаючи з початкової ймовірності заповнення $P_{+i} = 0,01$. Кінцеві стани знаходяться між темно-червоною кривою (конструктивна інтерференція) і темно-єленою кривою (деструктивна інтерференція). Права вкладка показує друге проходження починаючи з одного з можливих завершальних етапів після одного переходу. Жовта область показує час, що за адіабатично-імпульсною моделлю асоціюється із часом стрибка. Видно, що у адіабатичному базисі осциляції є меншими ніж у діабатычному.

розділах ми розглянемо більш загальні випадки розглядання даної задачі.

4.7 Різні початковий і кінцевий час

До цього розглядався випадок симетричного за часом проходження. Значення початкового і кінцевого часу в загальному випадку не є однаковими. У цьому підрозділі ми покажемо узагальнення матриці переходу (4.4). Різні початковий і кінцевий час відповідають значенню фази, яка накопичується внаслідок адіабатичної еволюції. Ми використовуємо наступні позначення для значень початкового та кінцевого часу відповідно $\tau_i, \tau_f > 0$. Відповідно до [19] матриця адіабатичної еволюції в цій задачі знаходиться перед переходом,

$$\tau < 0 : \quad U_{\text{ad}}(0, -\tau_i) = \begin{pmatrix} \exp(-i\zeta(-\tau_i)) & 0 \\ 0 & \exp(i\zeta(-\tau_i)) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

і після нього,

$$\tau > 0 : \quad U_{\text{ad}}(\tau_f, 0) = \begin{pmatrix} \exp(i\zeta(\tau_f)) & 0 \\ 0 & \exp(-i\zeta(\tau_f)) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

У нашій задачі сигнал є лінійним у часі $\varepsilon(t) = vt$, і ми можемо обчислити асимптотичні вирази для ζ за великі часи, тобто при $t = \pm\tau_a\sqrt{2\hbar/v}$, з $\tau_a \gg 1$:

$$\zeta(\pm\tau_a) = \frac{1}{2\hbar} \int_0^{\pm\tau_a} \sqrt{\Delta^2 + 2\hbar v \tau^2} d\tau \approx \quad (4.32)$$

$$\approx \pm \left[\frac{\tau_a^2}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \ln \delta + \delta \ln \sqrt{2}\tau_a \right]. \quad (4.33)$$

Загалом (4.4) стає

$$\tilde{N}_{11} = \exp(i\zeta(\tau_f) - i\zeta(-\tau_i)) \sqrt{\mathcal{P}} \quad (4.34)$$

$$\tilde{N}_{12} = \exp(i\zeta(\tau_f) + i\zeta(-\tau_i) + i2\varphi_S) \sqrt{1 - \mathcal{P}} \quad (4.35)$$

$$\tilde{N}_{21} = -\exp(-i\zeta(\tau_f) - i\zeta(-\tau_i) - i2\varphi_S) \sqrt{1 - \mathcal{P}} \quad (4.36)$$

$$\tilde{N}_{22} = \exp(-i\zeta(\tau_f) + i\zeta(-\tau_i)) \sqrt{\mathcal{P}} \quad (4.37)$$

Тоді кінцеві компоненти хвильової функції дорівнюють

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \exp[i\zeta(\tau_f) - i\zeta(-\tau_i)] \sqrt{\mathcal{P}} \alpha_i \\ &+ \exp[i\zeta(\tau_f) + i\zeta(-\tau_i) + i2\varphi_S + i\phi_i] \sqrt{1 - \mathcal{P}} \sqrt{1 - \alpha_i^2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \beta_f &= -\exp[-i\zeta(\tau_f) - i\zeta(-\tau_i) - i2\varphi_S] \sqrt{1 - \mathcal{P}} \alpha_i \\ &+ \exp[-i\zeta(\tau_f) + i\zeta(-\tau_i) + i\phi_i] \sqrt{\mathcal{P}} \sqrt{1 - \alpha_i^2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Це дає кінцевий стан залежно від початкової різниці фаз між спіновими компонентами. Це важливо, коли ми хочемо описати динаміку у випадку багаторазового проходження. Якщо нас цікавить ймовірність зайнятості, кінцевий час не має значення, якщо він достатньо великий для застосування Адіатично-імпульсної моделі. Зрозуміло, що після переходу (коли

енергетичні рівні віддалені один від одного) остаточної час впливає лише на фазу хвильової функції.

4.8 Аналіз інтервалу можливих значень в альтернативних координатах

У деяких задачах пов'язаних із ЛЗШМ переходами зручно розглядати залежність поведінки системи не від параметра адіабатичності, а від імовірності ЛЗШМ $\mathcal{P} = \exp(-2\pi\delta)$. Розглянемо залежність конструктивної і деструктивної інтерференції від $\mathcal{P}$. Із (4.6) отримуємо

$$P_{|0\rangle} = \alpha_i^2 \mathcal{P} + (1 - \alpha_i^2)(1 - \mathcal{P}) + 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} \sqrt{\mathcal{P}} \sqrt{1 - \mathcal{P}} \cos \theta, \quad (4.40)$$

Імовірність заселення у випадку конструктивної інтерференції буде

$$P_{|0\rangle, \text{constr}} = \alpha_i^2 \mathcal{P} + (1 - \alpha_i^2)(1 - \mathcal{P}) + 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} \sqrt{\mathcal{P}} \sqrt{1 - \mathcal{P}}, \quad (4.41)$$

і деструктивна

$$P_{|0\rangle, \text{destr}} = \alpha_i^2 \mathcal{P} + (1 - \alpha_i^2)(1 - \mathcal{P}) - 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} \sqrt{\mathcal{P}} \sqrt{1 - \mathcal{P}}. \quad (4.42)$$

Ці залежності зображені на Рис. 4.6. Не важко перевірити, що у таких координатах конструктивна і деструктивна інтерференція утворюють еліпс вписаний у квадрат із сторонами еквівалентними імовірностям від 0 до 1. Цей факт підтверджує, що для будь якого значення початкової заселеності рівня існують значення параметрів системи, за яких досягається когерентне руйнування тунелювання і когерентне конструювання тунелювання. У наведених координатах максимальна відстань між конструктивною і деструктивною інтерференцією досягається за умови, що $\mathcal{P} = 0.5$.

4.9 Загальний випадок сигналу

Якщо розглядати нелінійне збурення, яке можна було б описати адіабатично-імпульсною моделлю, то всі наведені вище формули можна узагальнити.

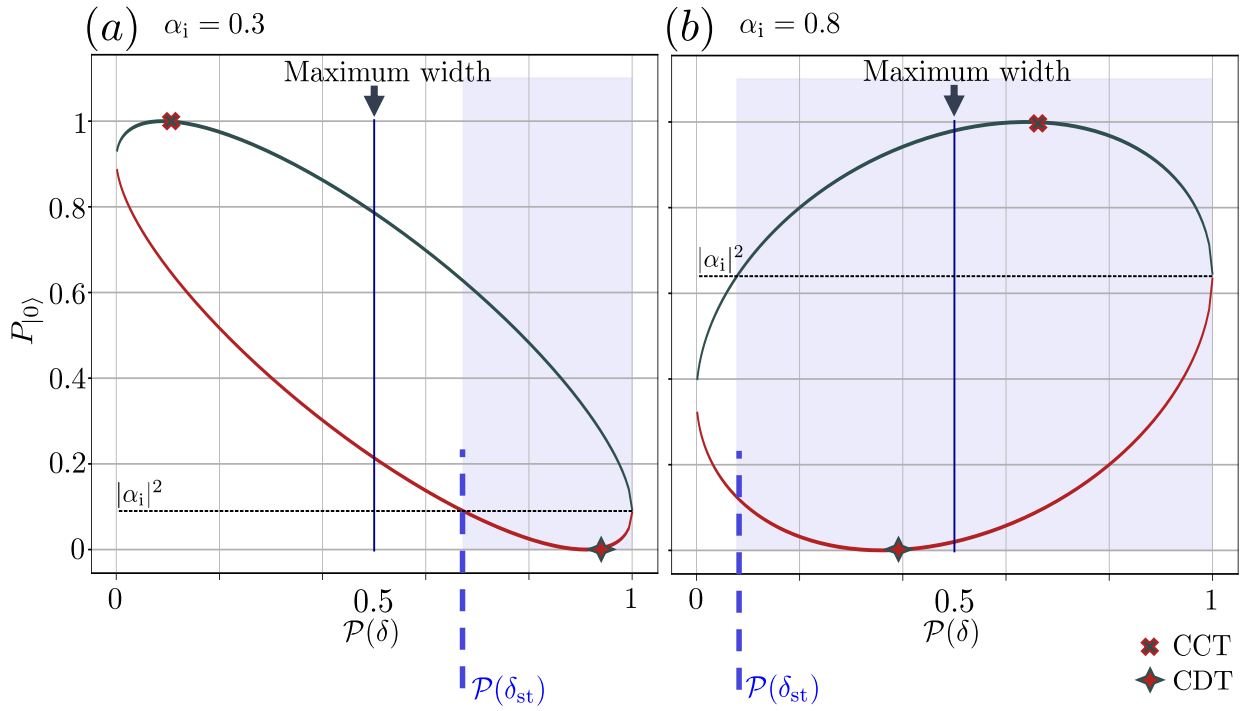


Рис. 4.6: Залежності імовірності заселення від імовірності ЛЗШМ $\mathcal{P}$ у випадках із початковою умовою $\alpha_i = 0.3$ і $\alpha_i = 0.8$. Темна зелена лінія показує конструктивну інтерференцію, темно червона – деструктивну. Також зображена область, де є досяжним отримати після проходження стан, як початковий (блакитна область). Зіркою та хрестиком позначені значення $\mathcal{P}$ за яких досягається когерентне руйнування тунелювання і когерентне конструювання тунелювання відповідно.

Відповідно до АІМ, динаміка буде розділена на три етапи: адіабатичний

$$U_{\text{ad}} = \begin{pmatrix} \exp(-i\zeta_1) & 0 \\ 0 & \exp(i\zeta_1) \end{pmatrix}; \quad (4.43)$$

імпульсний перехід для загального типу сигналу

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}; \quad (4.44)$$

і знову адіабатичний

$$U_{\text{ad}} = \begin{pmatrix} \exp(i\zeta_2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\zeta_2) \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

де ζ визначено в (3.5). Початковий стан такий самий, як. (4.2). Тоді компоненти хвильової функції є

$$\alpha_f = N_{11}\alpha_i \exp[i(\zeta_2 - \zeta_1)] + N_{12}\beta_i \exp[i(\zeta_1 + \zeta_2)], \quad (4.46)$$

$$\beta_f = N_{21}\alpha_i \exp[-i(\zeta_1 + \zeta_2)] + N_{22}\beta_i \exp[i(\zeta_1 - \zeta_2)]. \quad (4.47)$$

Тоді ймовірність зайняття $|0\rangle$ є

$$\begin{aligned} |\alpha_f|^2 &= |N_{11}|^2 \alpha_i^2 + |N_{12}|^2 (1 - \alpha_i^2) \\ &+ 2\alpha_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} |N_{11}| |N_{12}| \cos(2\zeta_1 + \phi_i + \varphi_{11} - \varphi_{12}), \end{aligned} \quad (4.48)$$

де компоненти матриці переходу записані у виді $N_{11} = |N_{11}|e^{i\varphi_{11}}$ і $N_{12} = |N_{12}|e^{i\varphi_{12}}$. В результаті ми бачимо, що вся залежність від фази знаходиться в косинусі в одному доданку, який пов'язаний з інтерференцією. Це показує, що всі результати застосовні не лише для лінійного збурення, але й для загального типу збурення, яке можна апроксимувати AIM [19].

ВИСНОВКИ

Ми проаналізували літературу, що описує або пов'язана із задачею про квантові дворівневі системи і їх динаміку. Аналіз дає розуміння, що дана тема є актуальною і необхідною для дослідження у теперішній час. Ми приділили увагу до робіт, що розглядають важливі ефекти у квантових системах та аналогічні їм, такі як переходи Ландау – Зенера – Штюкельберга – Майорани, без-перехідна динаміка, когерентне руйнування тунелювання. Зокрема було розглянуто у деталях роботи Зенера [2], Беррі [40] і Каянуми [37]. У роботі Зенера була розглянута аналітична залежність динаміки хвильової функції ЛЗШМ переходів (1.7). У роботі Беррі розглянута можливість без-перехідної динаміки системи, зокрема у випадку переходів ЛЗШМ (1.17). У роботі Каянуми отримані аналітичні залежності для компонентів спінорів для гармонічного типу сигналу (1.22, 1.23) звідки визначені співвідношення параметрів сигналу, за яких відбувається когерентне руйнування тунелювання.

Ми розширили підхід Майорани до проблеми переходу через область, де енергетичні рівні квазі-перетинаються. Наші результати можна підсумувати наступним чином.

Ми показали, що розширення підходу Майорани дозволяє явно отримати фазу хвильової функції після проходження точки наближення енергетичних рівнів. У підході Зенера, фаза може бути отримана шляхом знайдення асимптотичних значень, тоді як це неможливо зробити в напівкласичних розрахунках Ландау та Штюкельберга [18]. Таким чином, метод Майорани дає усі параметри, що повністю описують хвильову функцію.

Ми описали динаміку, тобто часову еволюцію керованого кубіта у випадку ЛЗШМ переходу, розширюючи підхід Майорани. Залежність описується формулами (2.12) і (2.13). Залежності ймовірності заселення зображені на Рис. 2.2. Проаналізована область де асимптотичне рішення є чинним для опису динаміки кубіта. Ця область відповідає значенню часу стрибка, зазначеному у рівнянні (2.18) і позначена на рисунках жовтим кольором.

У роботі розширено підхід запропонований Майораною для опису динаміки дворівневої системи під дією лінійного збурення. Розширений метод надає результати для опису суперпозиційного початкового стану на відміну від оригінального метода, що міг надати результат тільки для основного

початкового стану. На Рис. 2.3 було продемонстроване порівняння динаміки отриманої у цій роботі із динамікою отриманою за методом Зенера, тобто порівняння із повною .

Ми розширили формулювання проблеми ЛЗШМ, починаючи з суперпозиційного стану, який забезпечує якісно іншу динаміку, описану. (2.22), ніж якщо б починати з основного стану. Порівнюючи наші чисельні та аналітичні рішення, ми з'ясували чинність залежних від часу аналітичних рішень. Чинність цих результатів візуалізовано на Рис. 2.4 в залежності від часу і параметру адіабатичності. Було визначено, що асимптотичні залежності є чинними на кінцевих значеннях часу за модулем, а саме ззовні від часу стрибку.

Ми представили оригінальне обґрунтування адіабатично-імпульсного наближення (3.12-3.18), яке сьогодні є одним із аналітичних інструментів для опису динаміки квантових систем. Було визначено матриці еволюції для адіабатичної динаміки у випадках двох типів сигналів: константний (3.10, 3.11) та лінійний (3.13, 3.14). Із результатів за підходом Майорани було отримано матрицю переходу для імпульсного типу переходу (3.18). Ці результати дають можливість описати багатопрохідну динаміку.

Ми проаналізували динаміку однопрохідного кубіта з лінійним збудженням. Початкова фаза хвильової функції розглядалася як параметр. Було визначено і явно отримано залежності кінцевої ймовірності заселення енергетичного рівня від початкової фази. Ми визначили мінімальне значення кінцевої ймовірності заселення, що є випадком деструктивної інтерференції. Деструктивна інтерференція відбувається за умови значення початкової фази, визначеного у (4.9). Аналогічно до цього знайдено максимальне значення ймовірності заселення, що відповідає конструктивній інтерференції, що відповідає фазі визначеній у (4.10). Конструктивна і деструктивна інтерференція показана на Рис. 4.1. Залежність ширини між максимальним і мінімальним значенням ймовірності заняття енергетичних рівнів було досліджено в залежності від таких параметрів системи, як початковий модуль компонента спінора α_i і параметр адіабатичності δ . Залежності ширини між конструктивною і деструктивною інтерференцією від параметра адіабатичності δ було показано на Рис. 4.2.

Ми відповіли на питання, що було розглянуто у роботі Беррі. Було ви-

значено умови за яких може бути отримано той самий стан після проходження точки наближення енергетичних рівнів у випадку лінійного сигналу за часом. Для будь якої початкової умови існують параметри адіабатичності при яких при вірному обранні початкової фази кінцевий стан буде таким самим, що і початковий. У діабатичному базисі параметр адіабатичності відповідатиме умові (4.18).

Були отримані умови на параметри системи, при яких кінцевим станом є основний (когерентне руйнування тунелювання) або збуджений (когерентне конструювання тунелювання). Ми визначили, що когерентне руйнування тунелювання відбувається за умови, що параметр адіабатичності δ дорівнює (4.20) і фаза обрана, відповідно до випадку деструктивної інтерференції. Когерентне конструювання тунелювання буде відбуватися за умови на δ (4.21) і фаза обрана для конструктивної інтерференції відповідно. Випадки CDT і SST позначені на Рис. 4.2 зіркою та хрестом.

Ми визначили алгоритм за яким можливо отримати будь-яку ймовірність зайнятості за допомогою фазового контролю. Багаторазове проходження розглядалося як варіант отримання особливого стану кубіта за допомогою кінцевих чисел параметра адіабатичності. Приклад застосування подвійного проходження наведено на Рис. 4.3.

Було узагальнено результати, що були отримані. Ми знайшли матрицю переходи імпульсного типу переходу у адіабатичному базисі (4.23). Ми описали можливість використання фазового контролю у адіабатичному базисі і було знайдено параметр системи, що відповідає випадку можливості повернутись у початковий стан кубіта у даному базисі (4.29). Динаміки ймовірності заселення для різних параметрів системи у адіабатичному базисі наведено на Рис. 4.4.

Ми розглянули більш загальний випадок динаміки, коли початковий і кінцевий час не є рівними за модулем і визначили, що модуль кінцевого часу не впливає на ймовірність заселення, а впливає лише на фазу хвильової функції, що накопичується під час адіабатичного процесу після точки наближення рівнів.

Було представлено залежності ширини між максимальним і мінімальним значенням від альтернативної змінної – $\mathcal{P}$, ймовірності Ландау – Зенера – Штюкельберга – Майорани (Рис. 4.6). Ми зазначили, що у таких коор-

динатах конструктивна і деструктивна інтерференція складають еліпс, що вписаний у квадрат зі стороною 1. Це підтверджує, що для будь якого початкового стану існує конструктивне руйнування тунелювання і конструктивне конструювання тунелювання.

Ми розглянули можливість застосовувати фазовий контроль у випадку довільного сигналу. Було показано, що якщо сигнал є довільним, але може застосовуватись адіабатично-імпульсна модель, тоді фазовий контроль може використовуватись для отримання бажаних станів кубіта.

Отже, в роботі ми розглянули динаміку дворівневої систему під впливом лінійного сигналу. Було докладно розглянуто залежність кінцевого стану кубіта від початкової фази хвильової функції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Majorana E. Atomi orientati in campo magnetico variabile. Springer Nature Il Nuovo Cimento 9 (2), 43, 1932.
2. Zener C. Non-adiabatic crossing of energy levels. Proc. R. Soc. A 137 (833), 696, 1932.
3. Landau, L.D. Zur theorie der Energieübertragung. Phys. Z. Sowjetunion 1, 88, 1932.
4. Landau, L. Zur theorie der Energieübertragung II. Phys. Z. Sowjetunion 2, 46–51, 1932.
5. Stückelberg, E. C. G. Theory of inelastic collisions between atoms. Helv. Phys. Acta 5, 369, 1932.
6. Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory Chap. 53 Transition under the action of adiabatic perturbation, 2nd ed. (Pergamon Press, Oxford) pp. 185–187, 1977.
7. Nakamura H. Introduction to Nonadiabatic Dynamics. World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 2019.
8. Nakamura H. Nonadiabatic Transition. World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 2011.
9. Shevchenko S. N. Mesoscopic Physics meets Quantum Engineering. World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 2019.
10. Ivakhnenko O. V., Shevchenko S. N. & Nori F. Nonadiabatic Landau–Zener–Stückelberg–Majorana transitions, dynamics, and interference. Phys. Rep. 995, 1–89, 2023.
11. Shevchenko S. N., Ashhab S., Nori F. Landau–Zener–Stückelberg interferometry. Phys. Rep. 492 (1), 1, 2010.
12. Child M. S. On the Stueckelberg formula for non-adiabatic transitions. Mol. Phys. 28, 495–501, 1974
13. Child M. S. Molecular Collision Theory. Dover Books on Chemistry Series, Dover Publications, 1996.
14. Tully J. C. Molecular dynamics with electronic transitions. J. Chem. Phys. 93, 1061–1071, 1990.
15. Faraj A., Jin S. The Landau-Zener transition and the surface hopping method for the 2D Dirac equation for graphene. Commun. Comput. Phys. 21, 313–357, 2017.

16. Suchan J., Janoš J., Slaviček P. Pragmatic approach to photodynamics: mixed Landau–Zener surface hopping with intersystem crossing. *J. Chem. Theory Comput.* 16, 5809–5820, 2020.
17. Smith L. D., Chowdhury F. T., Peasgood I., Dawkins N., Kattnig D. R. Driven radical motion enhances cryptochrome agnetoreception: Toward live quantum sensing. *J. Phys. Chem. Lett.* 13, 10500–10506, 2022.
18. Wilczek F. Majorana and condensed matter physics, 279–302, Cambridge University Press, 2014.
19. Kofman P.O., Ivakhnenko O.V., Shevchenko S.N. et al. Majorana’s approach to nonadiabatic transitions validates the adiabatic-impulse approximation. *Sci Rep* 13, 5053, 2023.
20. Giacomo F. D., Nikitin E. E. The Majorana formula and the Landau–Zener–Stückelberg treatment of the avoided crossing problem. *Phys. Usp.* 48, 515–517, 2005.
21. Vitanov N. V., Garraway B. M. Landau-Zener model: Effects of finite coupling duration. *Phys. Rev. A* 53, 4288–4304, 1996.
22. Rodionov Y. I., Kugel K. I., Nori F. Floquet spectrum and driven conductance in Dirac materials: Effects of Landau-Zener–Stückelberg–Majorana interferometry. *Phys. Rev. B* 94, 195108, 2016.
23. Dogra S., Vepsäläinen A., Paraoanu G. S. Majorana representation of adiabatic and superadiabatic processes in three-level systems. *Phys. Rev. Res.* 2, 043079, 2020
24. Emmanouilidou A., Zhao X. G., Ao P., and Niu Q., “Steering an eigenstate to a destination,” *Phys. Rev. Lett.* 85, 1626, 2000.
25. Childress L., McIntyre J. “Multifrequency spin resonance in diamond,” *Phys. Rev. A* 82, 033839, 2010.
26. Bason M. G., Viteau M., Malossi N, Huillery P., Arimondo E., Ciampini D., Fazio R., Giovannetti V., Mannella R., Morsch O. “High-fidelity quantum driving,” *Nat. Phys.* 8, 147, 2012.
27. Gagnon D., Fillion-Gourdeau F., Dumont J., Lefebvre C. and S. MacLean, “Suppression of Multiphoton Resonances in Driven Quantum Systems via Pulse Shape Optimization,” *Phys. Rev. Lett.* 119, 053203, 2017.
28. Z.-Y. Wang and M. B. Plenio, “Necessary and sufficient condition for quantum adiabatic evolution by unitary control fields,” *Phys. Rev. A* 93, 052107,

2016.

29. A. M. Zagoskin, Quantum Engineering, Cambridge University Press, 2011.
30. Y. Atia, Y. Oren, and N. Katz, “Robust diabatic Grover search by Landau-Zener-Stückelberg oscillations,” *Entropy* 21, 937, 2019.
31. F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hänggi, “Coherent destruction of tunneling,” *Phys. Rev. Lett.* 67, 516, 1991.
32. M. Grifoni and P. Hänggi, “Driven quantum tunneling,” *Phys. Rep.* 304, 229, 1998.
33. M. Wubs, “Instantaneous coherent destruction of tunneling and fast quantum state preparation for strongly pulsed spin qubits in diamond,” *Chem. Phys.* 375, 163, 2010.
34. Q. Miao and Y. Zheng, “Coherent destruction of tunneling in two-level system driven across avoided crossing via photon statistics,” *Sci. Rep.* 6, 28959, 2016.
35. J. M. G. Llorente and J. Plata, “Tunneling control in a two-level system,” *Phys. Rev. A* 45, R6958, 1992.
36. Y. Kayanuma, “Role of phase coherence in the transition dynamics of a periodically driven two-level system,” *Phys. Rev. A* 50, 843, 1994.
37. Y. Kayanuma and K. Saito, “Coherent destruction of tunneling, dynamic localization, and the Landau-Zener formula,” *Phys. Rev. A* 77, 010101, 2008.
38. S. Ashhab, J. R. Johansson, A. M. Zagoskin, and F. Nori, “Two-level systems driven by large-amplitude fields,” *Phys. Rev. A* 75, 063414, 2007.
39. X. Hu, S. Sun, and Y. Zheng, “Witnessing localization of a quantum state via quantum speed limits in a driven avoided-level crossing system,” *The Journal of Chemical Physics* 156, 134113, 2022.
40. M. V. Berry, “Transitionless quantum driving,” *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 365303, 2009.
41. M. Wubs, K. Saito, S. Kohler, Y. Kayanuma, and P. Hänggi, “Landau-Zener transitions in qubits controlled by electromagnetic fields,” *New J. Phys.* 7, 218, 2005.
42. Vitanov N. V., Transition times in the Landau-Zener model. *Phys. Rev. A* 59, 988–994, 1999.
43. Moskalets M. V., Scattering matrix approach to non-stationary quantum transport. World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 2011.

- 44. Oliver W. D., et al. Mach-Zehnder interferometry in a strongly driven superconducting qubit. *Science* 310, 1653–1657, 2005.
- 45. Sillanpää M., Lehtinen T., Paila A., Makhlin Y. and Hakonen P. Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box. *Phys. Rev. Lett.* 96, 187002, 2006.
- 46. Burkard G., Splitting spin states on a chip. *Science* 327, 650–651, 2010.
- 47. Ma J., Wang X., Sun C. P., and Nori, F. Quantum spin squeezing. *Phys. Rep.* 509, 89–165, 2011.